COLLEGE PRIVE « MON AVENIR » D'AGBOVILLE
DEVOIR DE NIVEAU
Année Scolaire : 2021-2022
Durée : 4H
Classe : Tle D

MATHEMATIQUES

LECONS :

- DERIVABILITE ET ÉTUDE DE FONCTIONS ;
- PROBABILITE CONDITIONNELLE ET VARIABLES ALEATOIRES

EXERCICE 1

Ecris sur ta copie, le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivies de **VRAI** (V) si l'affirmation est vraie et de **FAUX** (F) si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS
1	Si la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.
2	Sur un arbre pondéré la somme de toutes les probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.
3	Si $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -\infty \ et\ si\ \lim\limits_{x\to 5} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 5} \frac{f(x)}{(g(x))^2} = -\infty$
4	Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle K alors la fonction G définie par : $G(x) = F(x) + x\sqrt{2}$ est aussi une primitive de f sur K.
5	Si la variable aléatoire X suit la loi binominale de paramètres n et p telle que $n = 10$ et $E(X) = 3\ alors\ p = 0{,}3$

EXERCICE 2

Dans cet exercice aucune justification n'est demandée. Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées. Une seule de ces réponses est juste. Ecris sur ta copie le numéro de la ligne suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

<table>
<tr><th>N°</th><th>Enoncé incomplet</th><th colspan="2">Réponses</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">Si E et F sont deux évènements indépendants alors</td><td>A</td><td>$p(E \cup F) = p(E) + p(F)$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$p(E \cap F) = p(E) \times p(F)$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$p_E(F) = p(E)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">Si K (3 ;1) est un point d'inflexion de (Cf) la courbe représentative de la fonction f alors en 3</td><td>A</td><td>f s'annule en changeant de signe</td></tr>
<tr><td>B</td><td>f' s'annule en changeant de signe</td></tr>
<tr><td>C</td><td>f'' s'annule en changeant de signe</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">Pour la loi de probabilité donnée ci-dessous
<table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>$p(X = x)$</td><td>0,4</td><td>0,3</td><td>0,2</td><td>0,1</td></tr></table></td><td>A</td><td>L'espérance de X est E(X) = 0,4</td></tr>
<tr><td>B</td><td>L'espérance de X est E(X) = 0,5</td></tr>
<tr><td>C</td><td>L'espérance de X est E(X) = 0,6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td rowspan="3">La primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f telle que $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ est la fonction F telle que :</td><td>A</td><td>$F(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$F(x) = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$</td></tr>
<tr><td>C</td><td>$F(x) = 3\sqrt{x^2 - 2x + 2}$</td></tr>
</table>

5	Deux évènements E et F sont tels que $P(E) = \frac{1}{2}, p(F) = \frac{1}{3}$ et $p(E \cup F) = \frac{2}{3}$ alors	A	$p_F(E) = \frac{1}{2}$
		B	$p_F(E) = \frac{1}{3}$
		C	$p_F(E) = \frac{1}{6}$

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = \frac{x^2-6x+1}{x^2+1}$

1. Dresse le tableau de variation complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.
   a) Démontre que g est une bijection de $]1; +\infty[$ sur l'intervalle à préciser.
   b) Calcule g (3). La fonction g^{-1} est-elle dérivable en $\frac{-4}{5}$? Si oui, détermine $(g^{-1})'$ $(\frac{-4}{5})$
3. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4

Akissi la patronne du restaurant « LE BON FOUTOU » d'Agboville se ravitaille en bananes plantains dans trois villages de la région : 60% de son stock provient de Offom'po, 25% de Grand-yapo et le reste de Rubino.

Les bananes plantains les plus recherchées sont nommées Agnirin.

La livraison de Offom'po ne comporte que 30% de Agnirin alors que celle de Grand-yapo comporte 50% de Agnirin et celle de Rubino 80% de Agnirin.

On envisage les évènements suivants :

- O : « la banane choisie provient de Offom'po »,
- G : « la banane choisie provient de Grand-yapo »,
- R : « la banane choisie provient de Rubino »,
- A : « la banane choisie est du type Agnirin ».

1. Akissi choisit une banane au hasard dans son stock.
   a) Construis un arbre pondéré traduisant la situation.
   b) Calcule la probabilité que la banane choisie soit du type Agnirin et provenant de Offom'po.
   c) Justifie que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,425.
   d) La banane choisie est du type Agnirin. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de Rubino ?
   (On arrondira à 10^{-3} près).
2. Akissi choisit au hasard un échantillon de 10 bananes dans le stock.
   On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à n tirage avec remise de 10 bananes dans le stock.
   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de Agnirin de l'échantillon choisi.
   a) Justifie que X suit une loi binominale dont on précisera les paramètres.
   b) Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte au moins 9 Agnirin ?
   (On arrondira à10^{-3} près).

EXERCICE 5

Soit la fonction h telle que $h(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$, définie et dérivable pour chaque élément de l'ensemble

$]-\infty; 0] \cup]1; +\infty[$.

On note (C) la courbe représentative de h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est 2 cm.

1. Calcule $h(0)$ et vérifie que $h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
2.
   a. Calcule les limites de la fonction $h\ en - \infty\ et\ en + \infty$.
   b. Calcule la limite de la fonction h à droite de I.
   c. Interprète graphiquement ce résultat.
3. a) Vérifie que pour tout x élément de $]- \ ; 0] \cup]1\ ; +\infty[, h'(x) = \frac{x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{[x(x-1)]^3}}$

   b)Dresse le tableau de variation de la fonction h sur $]-\infty\ ; 0] \cup]1\ ; +\infty[$
4. On admet que pour tout x élément de $]1\ ; +\infty[, h(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x}}} - \frac{1}{2}$.

   Démontre que la droite (D) : $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
5. La fonction h admet en $-\infty$ une autre asymptote (D') :$y = -x - \frac{1}{2}$.
   Trace soigneusement les droites (D) et (D') puis la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

Exercice 6

n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 1.

Lors d'une activité organisée par l'UP Mathématique d'Agboville, le collège privé « MON AVENIR » met en place le jeu suivant : « Une boîte opaque contient deux boules de couleurs blanches et $2n$ boules de couleurs noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. Pour participer à ce jeu, le joueur choisi au hasard et de façon simultanée trois boules de la boîte. Le joueur perd à ce jeu si dans son tirage le nombre de boules blanches est inférieur au nombre de boules noires. »

Au vu des règlements de ce jeu, le meilleur élève de la promotion de l'UP Mathématique d'Agboville affirme que la probabilité de gagner à ce jeu est égale à $\frac{3}{2n^2+3n+1}$

Surpris, u décides de vérifier l'exactitude de cette affirmation, à l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques au programme.