

EXERCICE 1

On donne $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on pose $t = 4\sqrt{2}(-1 + i)$

- 1) Ecrire t sous forme trigonométrique
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 = t$ où z est l'inconnue. On note z_0, z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) d'argument respectifs θ_0, θ_1 et θ_2 tels que θ_0, θ_1 et θ_2 soient des éléments de $]0; 2\pi[$ et que $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2$
 - a) Représenter dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 (unité graphique 2cm)
 - b) Explique simplement pourquoi le triangle ABC est équilatéral
- 3) Préciser la forme algébrique de z_0 en remarquant que : $\left(\frac{z_1}{z_0}\right)^3 = 1$ et en utilisant les racines cubiques de l'unité donner valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $]-\infty; 0[$ par $g(x) = \frac{1+\ln(-x)}{x^2} - 1$

- 1) Calculer les limites de g en $-\infty$ et en 0. Interpréter graphiquement ces résultats
- 2) a) Justifier que $\forall x \in]-\infty; 0[$ $g'(x) = \frac{-1-2\ln(-x)}{x^2}$
 - b) En déduire les variations de g et dresser son tableau de variation
- 3) a) Calculer $g(-1)$ et donner-en une interprétation
 - b) Justifier que l'équation : $x \in]-1; 0[$ $g(x) = 0$ admet une unique solution α
 - c) Justifier que $-0,5 < \alpha < -0,4$ puis donner un encadrement de α à 10^{-2} près
- 4) En déduire de tout ce qui précède que le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x est tel que $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]\alpha; 0[$ $g(x) < 0$ et $\forall x \in]-1; \alpha[$ $g(x) > 0$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; 0[$ par $f(x) = \ln^2(-x) + 2\ln(-x) - x^2$

- 1) Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ donnez-en une interprétation graphique
- 3) Justifier que $f(\alpha) = \alpha^4 - \alpha^2 - 1$, puis donner un encadrement de $f(\alpha)$ à l'ordre 2
- 4) a) Justifier que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = 2xg(x)$
 - b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de f



- 5) On considère la fonction $\varphi : x \rightarrow -x^2$. Déterminer les positions relatives de la courbe (C_φ) de φ par rapport à (C_f) de f
- 6) Construire les courbes (C_φ) de φ et (C_f) de f dans un repère orthonormé (O, I, J)
Unité graphique : 2 cm

PARTIE C

1. Justifier que la restriction h de f à $] -\infty; -1[$ est une bijection sur un intervalle K que l'on déterminera. On note h^{-1} la bijection réciproque de h
2. a) Calculer $h(-e)$ et justifier que h^{-1} est dérivable en $3 - e^2$
b) Dresser le tableau de variation de h^{-1}
c) Calculer $(h^{-1})'(3 - e^2)$ puis déterminer une équation de la tangente (T) à ($C_{h^{-1}}$) en $3 - e^2$
d) Construire la courbe ($C_{h^{-1}}$) de h^{-1} dans le même repère que (C_f)

On considère la fonction Γ définie sur $] -\infty; 0[$ $\Gamma(x) = x \ln^2(-x)$

3. a) Justifie que la fonction Γ est une primitive de la fonction $\Gamma'(x) = \ln^2(-x) + 2\ln(-x)$ sur $] -\infty; 0[$
b) En déduire la primitive F de f sur $] -\infty; 0[$ qui prend la valeur $\frac{e^3}{3}$ en $-e$

