

LYCEE LE ROI DES ROIS KOUMASSI
DEVOIR DE CLASSE
Année Scolaire : 2020-2021
Durée : 2H
Classe : Tle D

CORRECTION DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

N°	REPONSES	EXPLICATIONS
1	FAUX	La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est égale à la limite à l'infini du quotient des monômes de plus haut degré des polynômes de numérateur et du dénominateur.
2	VRAI	(Voir le cours)
3	VRAI	Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors pour tout élément b de $f(I)$, l'équation $f(x) = b$ admet une solution unique dans I .
4	FAUX	Soit f une fonction non définie en a ($a \notin Df$), f est prolongeable par continuité en a lorsque f admet en a une limite finie .

EXERCICE 2

N°	REPONSES	EXPLICATIONS
1	B	(Voir le cours)
2	C	$f(x) = 0$ admet une solution dans un intervalle I si sur cet intervalle, f en plus d'être monotone, les bornes $f(I)$ sont de signe contraire.
3	A	(Voir le cours)
4	B	Soit $f(x) = \cos x$; $\frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi} = \frac{2}{3} \times \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2}{3} \times \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$ $= \frac{2}{3} \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3} \times f'(\frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3} \times (-\sin \frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (Voir propriété du taux d'accroissement de f entre x et a).

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie pour $x \neq -2$ par $f(x) = x + 2 + \frac{x-1}{(x+2)^2}$ et (C) sa courbe représentative.

1) Limite de f en -2

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} -2 + 2 + \frac{-2-1}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-3}{(x+2)^2} = -\infty = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ car } (x+2)^2 \geq 0.$$

Interprétation graphique : (C) admet donc une asymptote verticale d'équation $x = -2$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Montrons que $(\Delta): y = x + 2$ est une asymptote oblique à (C) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 + \frac{x - 1}{(x + 2)^2} - (x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{(x + 2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 2) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 2) \Rightarrow (\Delta)$ est asymptote oblique à (C) en $\pm \infty$.

3) Position relative de (C) et (Δ)

Étudier la position de (C) par rapport à (Δ) revient à étudier le signe de $f(x) - (x + 2)$.

$$f(x) - (x + 2) = \frac{x - 1}{(x + 2)^2}; (x + 2)^2 > 0 \text{ pour tout } x \neq -2, \text{ le signe dépend donc de celui de } x - 1.$$

$$x - 1 \leq 0 \text{ pour } x \in]-\infty; 1], \text{ d'où } f(x) - (x + 2) \leq 0 \text{ sur }]-\infty; 1] \\ \Rightarrow (C) \text{ est en dessous de } (\Delta) \text{ sur }]-\infty; 1].$$

$$x - 1 \geq 0 \text{ pour } x \in [1; +\infty[, \text{ d'où } f(x) - (x + 2) \geq 0 \text{ sur } [1; +\infty[\\ \Rightarrow (C) \text{ est au dessus de } (\Delta) \text{ sur } [1; +\infty[.$$

EXERCICE 4

1) Calculons les limites suivantes :

$$a - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-3x + \sqrt{4x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + \sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{1}{4x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x + 2|x| = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \\ = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2} = 0 \text{ et } |x| = x \text{ (} x \rightarrow +\infty \text{)}$$

$$b - \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1})(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1})}{(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1})} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 1) - (x - 1)}{(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1})} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1})} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

2)

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie par } \begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2[, f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} \\ \forall x \in]2; +\infty[, f(x) = 6x - 5 \end{cases}$$

a. Continuité de f en 2

f n'est pas continue en 2 car elle n'est pas définie en 2. En effet, d'après l'expression de f , $Df =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

b. Prolongement par continuité de f :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}. \text{ Soit } h(x) = 3x^2 - 5x - 2; h(2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 2} = h'(2).$$

$$\text{On a } h'(x) = 6x - 5 \Rightarrow h'(2) = 6 \times 2 - 5 = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 6x - 5 = 6 \times 2 - 5 = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 7 = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

$2 \notin Df, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$; la fonction g définie par $g(x) =$

$\begin{cases} f(x) \text{ si } x \in]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[\\ 7 \text{ si } x = 2 \end{cases}$ est le prolongement par continuité en 2 de f .

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1) Limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 3x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

2) a- Déterminons la dérivée f' et les variations de f

$$f'(x) = (2x^3 - 3x^2 - 1)' = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

Tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$6x$	-	0	+			+
$(x - 1)$	-		-			+
$f'(x)$	+	0	-			+

D'après le tableau de signe, $f'(x) \leq 0$ pour $x \in [0; 1] \Rightarrow f$ est décroissante sur $[0; 1]$;

$f'(x) \geq 0$ pour $x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[\Rightarrow f$ est croissante sur $]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$.

b- Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$

3) a – Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]1; +\infty[$:

f est monotone sur $]1; +\infty[$; aussi, $f(1) = -2$ et $f \rightarrow +\infty$ en $+\infty \Rightarrow f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

b- Justifions que $1,6 < \alpha < 1,7$

$f(1,6) = 2 \times (1,6)^3 - 3 \times (1,6)^2 - 1 = -0,488$ et $f(1,7) = 2 \times (1,7)^3 - 3 \times (1,7)^2 - 1 = 0,156$.
 $f(1,6) \times f(1,7) < 0 \Rightarrow 1,6 < \alpha < 1,7$.

c- Encadrement d'amplitude 0,01 de α :

Par balayage : $f(1,61) = 2 \times (1,61)^3 - 3 \times (1,61)^2 - 1 = -0,42$; $f(1,62) < 0$; $f(1,63) < 0$; ...
 $f(1,67) < 0$ et $f(1,68) > 0 \Rightarrow 1,67 < \alpha < 1,68$. $1,68 - 1,67 = 0,01$ (amplitude 0,01).

4) Justifions que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; a[, f(x) < 0 \\ \forall x \in]a; +\infty[, f(x) > 0 \end{cases}$

D'après le tableau de variation, $f(]-\infty; 0]) =]-\infty; -1]$; $f([0; 1]) = [-2; -1]$; $f([1; \alpha]) = [-2; 0[$ et

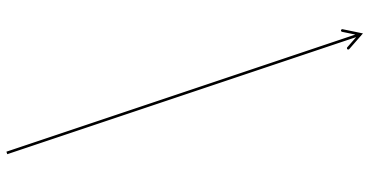
$f(]a; +\infty[) =]0; +\infty[$; on a $]-\infty; 0] \cup [0; 1] \cup [1; \alpha[=]-\infty; a[$
 $\Rightarrow \forall x \in]-\infty; a[, f(x) < 0$ et $\forall x \in]a; +\infty[, f(x) > 0$.

5) a-

h est la restriction de f sur $]1; +\infty[$. Montrons que h est une bijection de $]1; +\infty[$ vers K :

h est continue et strictement monotone sur $]1; +\infty[$. h détermine donc une bijection de $]1; +\infty[$ vers $K = h(]1; +\infty[) =]-2; +\infty[$.

b- Tableau de variation de h^{-1}

x	-2		$+\infty$
$h^{(-1) '}$		+	
h^{-1}	1		

EXERCICE 6

1) Déterminons t pour que la température $f(t) < 15$

Déterminons d'abord la valeur de t pour $f(t) = 15$. Résolvons l'équation $f(t) = 15$; $\Leftrightarrow \frac{200}{t} + 10 = 15$

$$\Leftrightarrow \frac{200}{t} = 5 \Leftrightarrow 5t = 200 \Leftrightarrow t = 40.$$

$$f'(t) = -\frac{200}{t^2} < 0 \forall t \in Df \Rightarrow f \text{ est strictement décroissante sur } Df \Rightarrow \text{si } f(t) < 15 \Leftrightarrow f(t) < f(40) \\ \Rightarrow t < 40.$$

Il faudra donc que qu'on dépasse les 40 minutes pour que la température passe en dessous des 15°C.

2) Calcul de la limite de f en $+\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{200}{t} + 10 = 10.$$

Interprétation graphique : La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale : la droite d'équation $y = 10$. Cela signifie aussi que quel que soit le temps, la température ne baissera pas en dessous de 10°C.

