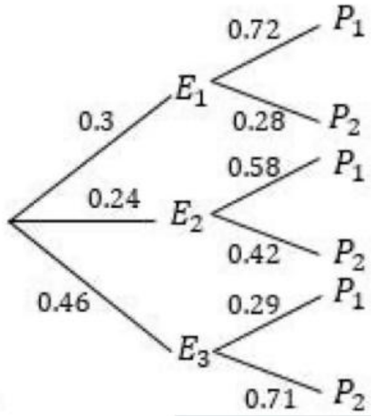
COLLEGE NOTRE DAME D'AFRIQUE
DEVOIR DE CLASSE
ANNEE SCOLAIRE : 2018-2019
NIVEAU : TERMINALE D
DUREE : 3H

Exercice 1

1) Traduisons la situation par un arbre de probabilité



2) Déterminons la probabilité que le client choisisse l'entrée n°3 et le plat n°1 (on donnera la valeur exacte de cette probabilité)

$P = 0.29 \times 0.46$
$\boldsymbol{P = 0.1334}$

3) Démontrons que la probabilité de l'évènement p_1 est égale à 0,4886

$p1 = 0.46 \times 0.29 + 0.24 \times 0.58 + 0.3 \times 0.72$
$\boldsymbol{p1 = 0.4886}$

4) Déterminons la probabilité qu'un client ait choisi l'entrée n°1 sachant qu'il a pris le plat n°1

$P_{P_1}(E_1) = \frac{P(E_1 \cap P_1)}{P(P_1)} = \frac{0.3 \times 0.72}{0.4886}$

$\rightarrow \boldsymbol{P_{P_1} = 0.4421}$

5) a) Déterminons la probabilité qu'exactement deux de ces clients aient pris le plat n°1

$P = C_3^2 (0.4886)^2 \times (0.5114)$

$\boldsymbol{P = 0.366}$

6.a) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$ et interprètons graphiquement le résultat.

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x^2} = 0$
Donc la droite (Δ) : $y = 2x$ est asymptote oblique à (Cf) en $+\infty$.

6.b) Etudions les positions relatives de (C) et (Δ)

$f(x) - 2x = \frac{lnx}{x^2}$
$\forall x \in]0; 1[, f(x) - 2x < 0$, donc (Cf) est en-dessous de (Δ)
$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) - 2x > 0$, donc (Cf) est au-dessus de (Δ)

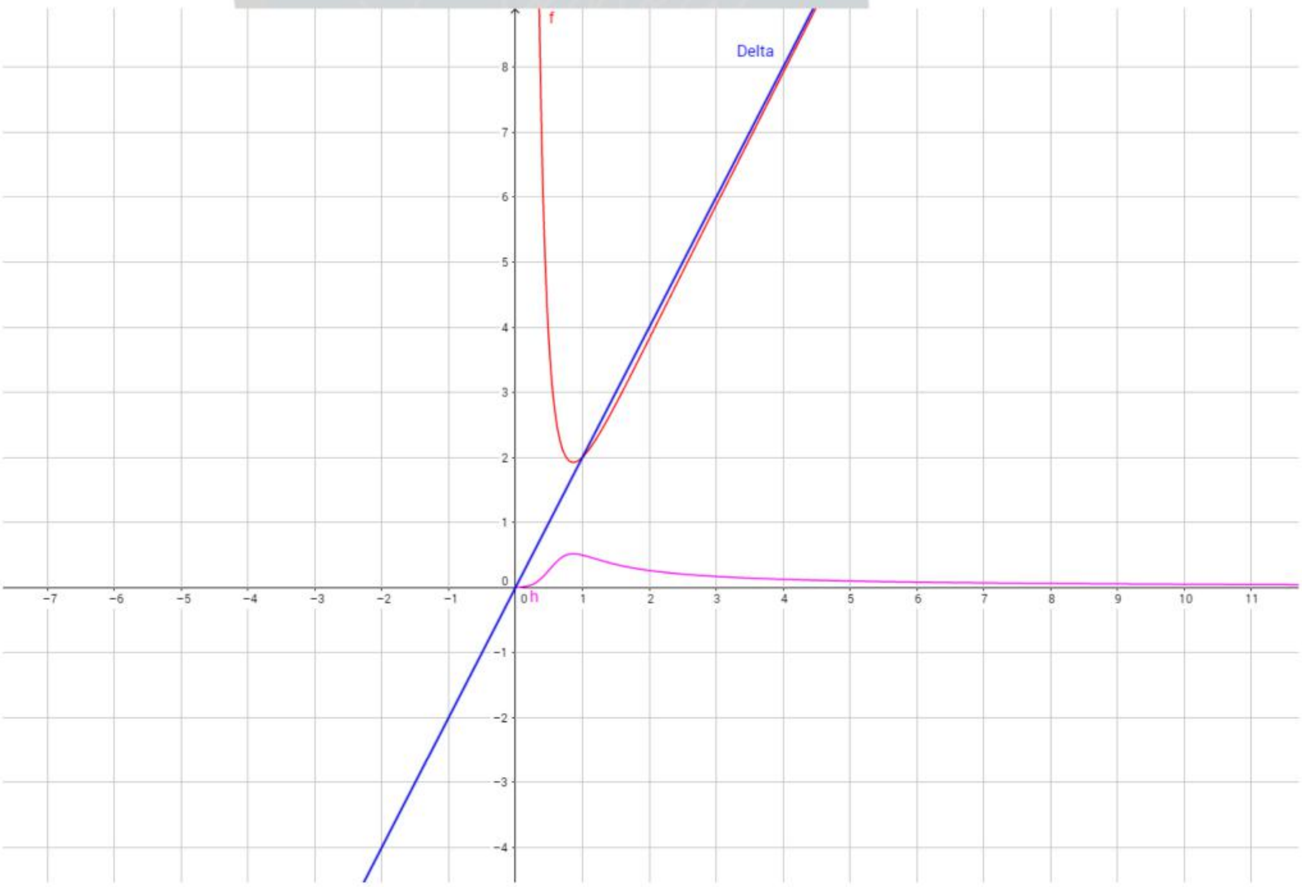
7.a) Vérifions que le point A (1 ; 2) appartient à la courbe (Cf)

On a $f(1) = 2 \times 1 - \frac{ln1}{1^2} = 2$ alors $A\binom{1}{2} \in (Cf)$

7.b) Démontrons que le nombre dérivé de f^{-1} en 2 existe puis calculons le .

On a : $f(1) = 2$ or $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f(1)}$; $f'(1) = 1 \neq 0$ alors $(f^{-1})'(2) = 1$

8.) Construisons (Δ), (Cf)



b) Déterminons la probabilité qu'au moins un client ait pris le plat n°1

$P_0 = C_3^0(0.4886)^0 \times (0.5114)^3$

$P_0 = 0.1337$

$P = 1 - P_0 = 1 - 0.1337$

$\boldsymbol{P = 0.5663}$

Problème

Partie A

1) Calculons la limite de la fonction g en 0 et en $+\infty$

$* \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (2x^3 - 1 + 2lnx) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} lnx = -\infty$

$* \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3 - 1 + 2lnx) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty \end{cases}$

2.a) Etudions les variations de la fonction g sur l'intervalle sur $]0; +\infty[$

$D_g =]0; +\infty[$ et g est dérivable sur $]0; +\infty[$

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = (2x^3 - 1 + 2lnx)' = 6x^2 + \dfrac{2}{x}$

$g'(x) = \frac{6x^2+2}{x} > 0$ alors g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

2.b) Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

3. a) Justifions qu'il existe un unique réel $\boldsymbol{\alpha}$ tel que g(x)=0

g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $g(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ donc $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$.

3.b) On a : $g(0.8) = -0.42$ *et* $g(0.9) = 0.24$, On a $g(0.8) \times g(0.9) < 0$

Donc $0.8 < \alpha < 0.9$

4) Justifions que $\boldsymbol{\forall x \in]0; \alpha[\ g(x) < 0}$ *et* $\boldsymbol{\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0}$

$\forall x \in]0; \alpha[, x < \alpha \rightarrow g(x) < g(\alpha)$ car g est croissante or $g(\alpha) = 0$ $d'où$ $g(x) < 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, x > \alpha \rightarrow g(x) > g(\alpha)$ car g est croissante or $g(\alpha) = 0$ $d'où$ $g(x) > 0$

Partie B

1.a) Justifions que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x - \frac{lnx}{x^2}\right) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^2} = 0 \end{cases}$$

1.b) Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{f(x)}{x}$ puis interprètons graphiquement ces résultats

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(2x - \frac{lnx}{x^2}\right) = +\infty \;\; car \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} 2x = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} -\frac{1}{x^2} lnx = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{2x^3 - lnx}{x^3} = \lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(2 - \frac{lnx}{x^3}\right) = +\infty \; car \lim_{\substack{x\to0\\>}} - lnx\frac{1}{x^2} = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (Cf)
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable en 0 et (Cf) admet une demi-tangente verticale en 0.

2) Justifions que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

$$\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = \left(2x - \frac{lnx}{x^2}\right)' = 2 - \left(\frac{x - 2xlnx}{x^4}\right) = 2 - \left(\frac{1-2lnx}{x^3}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 1 + 2lnx}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

3) Etudions les variations de f

$\forall x \in]0;+\infty[, x^3 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$

$D'après$ A-3, On a :

$\forall x \in]0;\alpha[, f'(x) < 0 \; et \; \forall x \in]\alpha;+\infty[, f'(x) > 0$

Donc f est strictement décroissante sur $]0;\alpha[$, et Strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$,

4) Tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

5) Justifions que $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$

$f(\alpha) = 2\alpha - \frac{ln\alpha}{\alpha^2}$ or $g(\alpha) = 2\alpha^3 - 1 + 2ln\alpha = 0 \rightarrow ln\alpha = \frac{-2\alpha^3+1}{2}$

D'où $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{-2\alpha^3+1}{2\alpha^2} = 2\alpha + \alpha - \frac{1}{2\alpha^2} = 3\alpha - \frac{1}{2\alpha^2}$