

Exercice 1

Le plan complexe du repère orthonormé direct (O, I, J) . (Unité : 4 cm)
K est le point d'affixe -2.

A tout point M d'affixe z du plan distinct de K, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z-1}{z+2}$

1) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z' = z$

2) Soit A, B et C les point d'affixe respectives : $z_A = 1$; $z_B = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
et $z_C = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Détermine le module et l'argument principal des nombres complexes z_A , z_B et z_C .

b) Utilise les données de la question a) pour placer les points A, B et C dans le plan complexe.

c) Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

3) On pose $z = x + iy$ avec x et y des nombres réels ($z \neq -2$)

a) Démontre que $z' = \frac{x^2+x+y^2-2}{(x+2)^2+y^2} + i \frac{3y}{(x+2)^2+y^2}$

b) Détermine l'ensemble (E) des points M du plan tels que z' soit réel.

c) Soit (F) l'ensemble M des points tels que z' soit un imaginaire pur.

Justifie que (F) est le cercle de centre $H(-\frac{1}{2}; 0)$ et de rayon $\frac{3}{2}$, privé du point K.

4) a) Démontre que $|z' - 1| \times |z' + 2| = 3$

b) Dédus-en que lorsque M appartient au cercle C de centre K et de rayon 1, M'appartient à un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.

c) Construis C , C' et (F) dans le repère (O, I, J) .

Exercice 2

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible .

Une entreprise fabrique des appareils électroniques.

La probabilité pour qu'un appareil ainsi fabriqué fonctionne parfaitement est $\frac{9}{10}$.

On note F l'évènement « l'appareil fonctionne parfaitement » et $\bar{F}$ l'évènement contraire de F.

On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison. On constate que :

- Quand un appareil fonctionne parfaitement, il est toujours accepté à l'issue de test ;
- Quand un appareil ne fonctionne pas parfaitement, il peut être néanmoins accepté, avec une probabilité de $\frac{1}{11}$.

On note T l'évènement « l'appareil est accepté à l'issue du test ».

1-a) Détermine la probabilité de l'évènement « l'appareil fonctionne parfaitement et est accepté à l'issue du test »

b) Démontre que : $P(T \cap \bar{F}) = \frac{1}{110}$.

2) Démontre que la probabilité de l'évènement T est égale à $\frac{10}{11}$.

Problème**Partie A**

On considère la fonction f , dérivable sur $]0 ; +\infty[$, et définie par :

$$f(x) = -1 + x \ln x.$$

1) Calcule les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2) a) calcule $f'(x)$

b) Etudie le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

3) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1.7; 1.8[$

4) Démontre que $\forall x \in]0; \alpha[, f(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, f(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1+x}{1+\ln x} \text{ si } x \in]0; \frac{1}{e} [\cup] \frac{1}{e}; +\infty [\text{ et } g(0) = 0.$$

On note (C) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . Unités : $OI = 4$ cm et $IJ = 1$ cm.

1-a) Calcule la limite de g à gauche et à droite en $\frac{1}{e}$

Donne une interprétation graphique des résultats.

b) Calcule la limite de $g(x)$ en $+\infty$.

2-a) Démontre que g est continue en 0.

b) Etudie les variations de g en 0. Donne une interprétation graphique du résultat de cette limite.

3-a) Justifie que : $\forall x \in]0; \frac{1}{e} [\cup] \frac{1}{e}; +\infty [, g(x) = \frac{f(x)}{x(1+\ln x)^2}$

b) Etudie le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation

c) Démontre que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI) .

4) Démontre que $g(\alpha) = \alpha$.

5) Construis la courbe (C) dans le repère (O, I, J) . On prendra $\alpha = 1.8$

Partie C

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(-\frac{1}{2} + \ln x \right) - x$$

1- Démontre que h est une primitive de f sur $]0; +\infty[$

2- Détermine la primitive F de f qui prend la valeur 2 en 1.