LYCEE DE GARÇONS DE BINGERVILLE
DEVOIR DE CLASSE
ANNEE SCOLAIRE : 2017-2018
NIVEAU : TERMINALE D
DUREE : 2H

EXERCICE 1

On donne $J = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on pose $t = 4\sqrt{2}(-1+i)$

1) Ecrivons t sous forme trigonométrique

$$|t| = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + (-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 8$$

Soit θ un argument de t

On a $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-4\sqrt{2}}{8} \\ \sin\theta = \frac{4\sqrt{2}}{8} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$

Donc $t = 8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

2.a) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = t$

$$z' = z^n = \sqrt{\rho}\left[\left(\cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$|z^3| = \sqrt[3]{|t|} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$k = 0\,;\, z_0 = 2\left[\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}}{3} + 0\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{3} + 0\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right] = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_0 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$$

$$k = 1\,;\, z_1 = 2\left[\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_1 = 2\left[\left(\cos\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]$$

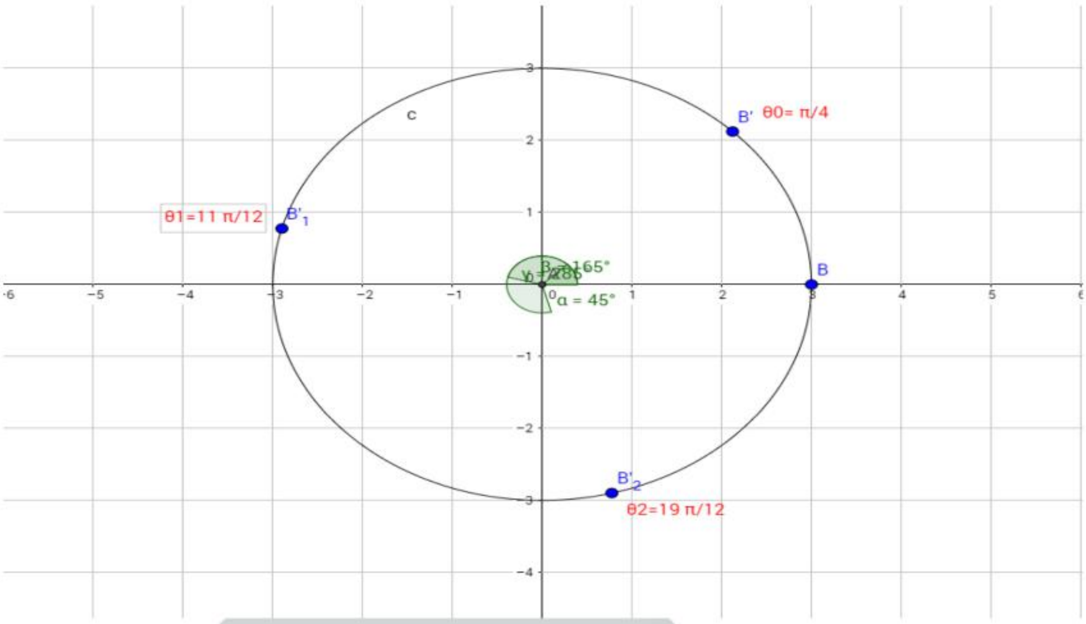
$$z_1 = 2\left[\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right]$$

$$k = 2\,;\, z_2 = 2\left[\left(\cos\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_2 = 2\left[\left(\cos\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right]$$

$$z_2 = 2\left[\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right]$$

2.b) Représentation $\theta_0 = \frac{\pi}{4}\,;\, \theta_1 = \frac{11\pi}{12}\,;\, \theta_2 = \frac{19\pi}{12}$



2.c) Le triangle ABC est équilatéral car que $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$

3) Précisons la forme algébrique de z_0

$$z_0 = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$$

PROBLEME

Partie A

1.

On a $g(x) = \frac{1+\ln(-x)}{x^2} - 1$

Calculons les limites de g en $-\infty$ et en 0.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+\ln(-x)}{x^2} - 1$ Posons $-x = X \rightarrow x = -X; x \rightarrow -\infty; X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{X\to+\infty} g(X) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1+\ln(X)}{X^2} - 1$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X^2} + \frac{\ln(X)}{X^2} - 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1 \; car \begin{cases} \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X^2} = 0 \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X^2} = 0 \\ \lim\limits_{X\to+\infty} -1 = -1 \end{cases}$$

- (Cg) admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$

$$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} \frac{1+\ln(-x)}{x^2} - 1 = \lim_{x\to0} \left[\frac{1}{x^2}(1+\ln(-x)) - 1\right] = -\infty$$

$$Car \begin{cases} \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to0} (1+\ln(-x)) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0} -1 = -1 \end{cases}$$

- (Cg) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ en $-\infty$

2.a) Justifions que $\forall x \in]-\infty;0[, g'(x) = \frac{-1-2\ln(-x)}{x^3}$

On a : $g'(x) = \frac{1+(\ln(-x))'x^2-(x^2)'(1+\ln(-x))}{x^4} = \frac{x-2x-2x\ln(-x)}{x^4} = \frac{x(-1-2\ln(-x))}{x^4}$

Donc $\quad g'(x) = \frac{-1-2\ln(-x)}{x^3}$

b) Déduisons les variations de g et dressons son tableau de variation

$$g'(x) = \frac{-1-2\ln(-x)}{x^3} = \frac{1+2\ln(-x)}{-x^3}$$

$\forall x \in]-\infty;0[, -x^3 > 0; 1+2\ln(-x) = 0 \rightarrow \ln(-x) = -\frac{1}{2} \rightarrow x = -e^{-\frac{1}{2}}$

$\forall x \in]-\infty;-e^{-\frac{1}{2}}[, g'(x) > 0$ *et* $\forall x \in]-e^{-\frac{1}{2}};0[, g'(x) < 0$

Alors

- g est strictement croissante sur $]-\infty;-e^{-\frac{1}{2}}[$
- g est strictement décroissante sur $]-e^{-\frac{1}{2}};0[$

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		$-e^{-\frac{1}{2}}$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$g(-e^{-\frac{1}{2}})$	$\searrow$	(0)	$\searrow$	$-\infty$

3.a) Calculons $g(-1)$

On a : $g(-1) = \frac{1+\ln(-(-1))}{(-1)^2} - 1 = 0$ donc -1 est la racine de la fonction $g(x)$ c'est-à-dire $g(-1) = 0$

b) Justifions que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur]-1 ;0[

$\forall x \in]-1;0[, g(x)$ est continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]-1;0[$ vers $g(]-1;0[)$ or $0 \in g(]-1;0[)$ et $g(-1) \times \lim_{x\to 0} g(x) < 0$ donc $\forall x \in]-1;0[, g(x) = 0$ admet une unique solution α.

c) Justifions que $-0.5 < \alpha < -0.4$

On a $g(-0.5) = 0.227$ et $g(-0.4) = -0.0049$ donc $g(-0.5) \times g(-0.4) < 0$ d'où $-0.5 < \alpha < -0.4$

Encadrons α à 10^{-2} près

$g\left(\frac{-0.5-0.4}{2}\right) = -0.0049$ d'où $-0.50 < \alpha < -0.45$

$g(-0.5-0.45) = g(-0.475) = 0.133$ d'où $-0.47 < \alpha < -0.45$

Donc $-0.47 < \alpha < -0.45$

4) Déduisons de tout ce qui précède que le signe de $g(x)$ $\forall x \in]-\infty;0[$

x	$-\infty$		$-e^{-\frac{1}{2}}$		-1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$			$-$		
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$g(-e^{-\frac{1}{2}})$	$\searrow$	0	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
signe de $g(x)$		$-$		$-$		$+$		$-$	

D'après le tableau de variation, $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]\alpha; 0[, g(x) < 0$ et
$\forall x \in]-1; \alpha[\ g(x) > 0$

Partie B

$f(x) = ln^2(-x) + 2\ln(-x) - x^2$

1) Calculons la limite de f en 0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(ln^2(-x) + 2\ln(-x) - x^2) = \lim_{x\to 0}[\ln(-x)[\ln(-x) + 2] - x^2]$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \ car \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \ln(-x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0} -x^2 = 0 \end{cases}$$

- La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale

2) Calcuons $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \ et \ \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (ln^2(-x) + 2\ln(-x) - x^2)$

Posons $x = -X; x \to -\infty; X \to +\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{X\to +\infty} f(X) = \lim_{X\to +\infty} (ln^2(X) + 2\ln(X) - X^2)$$
$$= \lim_{X\to +\infty} X^2 \left(\frac{ln^2(X)}{X^2} + \frac{2\ln(X)}{X^2} - 1\right)$$

Donc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to +\infty} f(X) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{X\to +\infty} \frac{ln^2(X)}{X^2} = 0 \\ \lim\limits_{X\to +\infty} \frac{2\ln(X)}{X^2} = 0 \\ \lim\limits_{X\to +\infty} -1 = -1 \end{cases}$ $et \lim\limits_{X\to +\infty} X^2 = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{ln^2(-x)}{x} + \frac{2\ln(-x)}{x} - x$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \begin{cases} \lim\limits_{X\to -\infty} \frac{ln^2(-x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{X\to -\infty} \frac{2\ln(-x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{X\to -\infty} -x = +\infty \end{cases}$$

Interprétation : (Cf) admet une branche parabolique de direction (OJ).

3) Justifions que $f(\alpha) = \alpha^4 - \alpha^2 - 1$

$f(\alpha) = ln^2(-\alpha) + 2\ln(-\alpha) - \alpha^2$ or $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{1+\ln(-\alpha)}{\alpha^2} - 1 = 0$
$\Rightarrow \ln(-\alpha) = \alpha^2 - 1$

Alors

$$f(\alpha) = (\alpha^2-1)^2 + 2(\alpha^2-1) - \alpha^2$$
$$= \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 2\alpha^2 - 2 - \alpha^2$$
Donc $f(\alpha) = \alpha^4 - \alpha^2 - 1$

- Un encadrement de $f(\alpha)$ à l'ordre 2

$$f(-0.47) < f(\alpha) < f(-0.45)$$
$$-1.17 < f(\alpha) < -1.16$$

4.a) Justifions que $\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) = 2xg(x)$

$$f'(x) = (ln^2(-x) + 2\ln(-x) - x^2)'$$
$$= \frac{2}{x}\ln(-x) + \frac{2}{x} - 2x$$
$$f'(x) = 2x\left(\frac{\ln(-x)}{x^2} + \frac{1}{x^2} - 1\right) = 2x\left(\frac{1+\ln(-x)}{x^2} - 1\right) = 2xg(x)$$

Déduisons le sens de variation et le tableau de variation

$\forall x \in]-\infty; 0[, 2x < 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-g(x)$
$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]\alpha; 0[, f'(x) > 0$ et $\forall x \in]-1; \alpha[,\ f'(x) < 0$
Alors

- f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[\cup]\alpha; 0[$
- f est strictement décroissante. sur $]-1; \alpha[$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		α		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

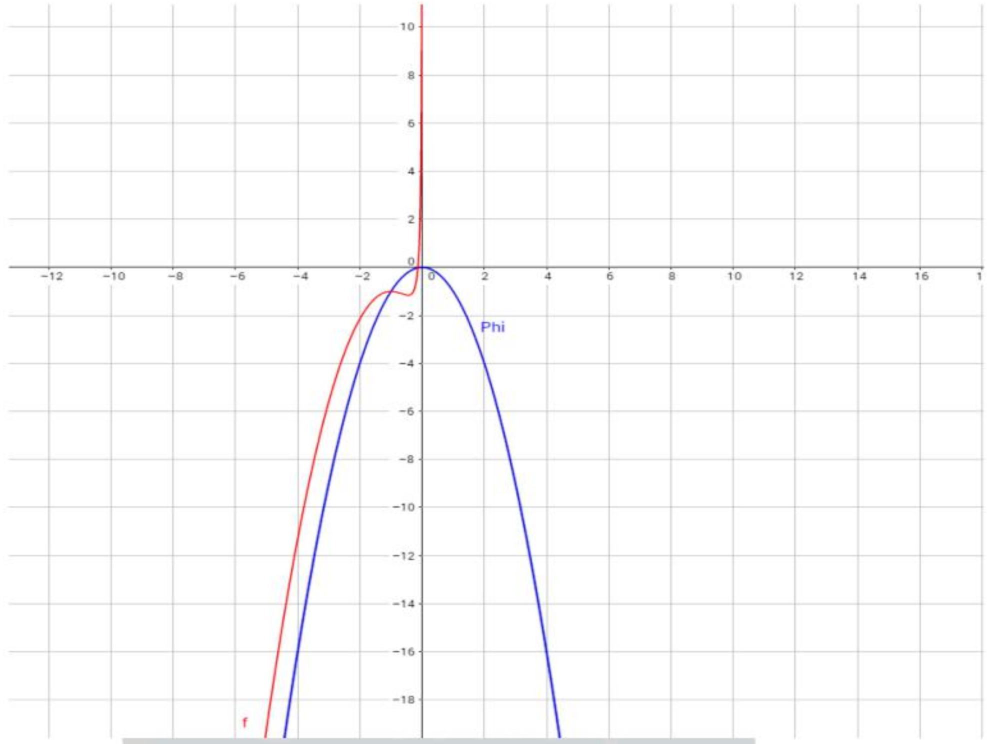
5.) Etude du signe de $f(x) - \varphi(x)$

$$f(x) - \varphi(x) = ln^2(-x) + 2\ln(-x) - x^2 + x^2$$
$$= ln^2(-x) + 2\ln(-x)$$

$$ln^2(-x) + 2\ln(-x) = 0 \Rightarrow \ln(-x)(\ln(-x)+2) = 0$$
$$\Rightarrow \ln(-x) = 0 \text{ ou } \ln(-x) + 2 = 0$$
$$\Rightarrow \ln(-x) = ln1 \text{ ou } \ln(-x) = -2$$
$$\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = -e^{-2}$$

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-e^{-2}; 0[, f(x) - \varphi(x) > 0$ donc (Cf) est au-dessus de $(C\varphi)$
$\forall x \in]-1; \alpha[, f(x) - \varphi(x) < 0$ donc (Cf) est en - dessous de $(C\varphi)$

6.) Construisons (Cf) et $(C\varphi)$



Partie C

1)

$\forall x \in]-\infty;-1[$ h est continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $]-\infty;-1[$ vers $]-\infty;-1[$

2.a) On a : $h(-e) = 3 - e^2$

Justifions que h^{-1} est dérivable en $3 - e^2$

h^{-1} est dérivable en $3 - e^2$ parce qu'elle est la fonction réciproque de h. Or $h(e) = 3 - e^2$ et h est dérivable en $-e$.

2.b) Dressons le tableau de variation de h^{-1}

x	$-\infty$ -1
$(h^{-1})'(x)$	$+$
$(h^{-1})(x)$	$-\infty$ ↗ -1

2.c) Calculons $(h^{-1})'(3 - e^2)$

$h(-e^2) = 3 - e^2 \rightarrow (h^{-1})(3 - e^2) = -e^2$; $(h^{-1})'(3 - e^2) = \frac{1}{h'(-e^2)} = \frac{1}{5}$

Déterminons une équation de la tangente (T) à (Ch^{-1}) en $(3 - e^2)$

(T) : $y = (h^{-1})'(x - 3 + e^2) + h^{-1}(3 - e^2)$

$$y = \frac{1}{5}(x - 3 + e^2) - e^2 = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5} + \frac{e^2}{5} - e^2$$

$$y = \frac{1}{5}x - \frac{3 - 4e^2}{5}$$

Construisons (Ch^{-1})

3.a) On a $(\gamma)'(x) = \left(xln^2(-x)\right)' = ln^2(-x) + [2\left(\frac{-1}{-x}\right)(\ln(-x)]x$

$$= ln^2(-x) + \frac{2xln(-x)}{x}$$

$$= ln^2(-x) + 2\ln(-x) = \varphi(x)$$

Donc $\gamma(x) = xln^2(-x)$ est une primitive de $\varphi(x)$ sur $]-\infty; 0[$.

3.b) Déduisons la primitive F de f sur $]-\infty; 0[$.

$f(x) = \varphi(x) - x^2$ donc $F(x) = \varphi(x) - \frac{1}{3}x^3 + c$

$$F(x) = xln^2(-x) - \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$F(-e) = \frac{e^3}{3} \rightarrow -elne - \frac{1}{3}(-e)^3 + c = \frac{e^3}{3} \rightarrow c = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{3} + e \rightarrow c = e$$

Donc $F(x) = xln^2(-x) - \frac{1}{3}x^3 + e$