



PRIX D'EXCELLENCE
EPREUVE DE
MATHÉMATIQUES
SUJET n°1

EDITION 2022-2023
NIVEAU : Tle B & D
DUREE : 3 heures
M. DJAHA 0709521305
0506448812
djaha.anicet@gmail.com

EXERCICE 1 :

Soit P le polynôme à coefficients réels défini tel que :

$$P(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx \text{ et que } P(x+1) - P(x) = x^2.$$

- 1- Sans déterminer a et b , calcule $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ et $P(-1)$.
- 2- Calcule les valeurs de a et de b .
- 3- Montre par récurrence que pour tout entier naturel n , $P(n)$ est un nombre entier.
- 4- On pose : Pour tout entier naturel, la somme S_n des carrés des entiers naturels telle que :
$$S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2.$$
 - a) Donne la valeur exacte de S_1 , S_2 , S_3 et S_4 .
 - b) Démontre par récurrence que $S_n = P(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

EXERCICE 2 :

- 1- Résous dans \mathbb{C} les équations suivantes :
(A) : $z^2 - z + 1 = 0$ et (B) : $z^2 - 4z + 1 = 0$.
- 2- A l'aide des résultats de la question 1, on se propose de résoudre l'équation (E) telle que :
(E) : $z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$.
 - a) Vérifie que 0 n'est pas solution de (E).
 - b) Soit l'équation (H) : $z^2 + \frac{1}{z^2} - 5\left(z + \frac{1}{z}\right) + 6 = 0$.
Montre que (E) et (H) ont les mêmes solutions dans \mathbb{C} .
 - c) On pose $u = z + \frac{1}{z}$. Exprime $z^2 + \frac{1}{z^2}$ en fonction de u .
 - d) Montre que u est solution de l'équation (D) : $u^2 - 5u + 4 = 0$.
 - e) Déduis-en les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E).

EXERCICE 3:

Soit a et b deux nombres réels. Le but de cet exercice est de donner un encadrement de $\ln 2$. On donne le nombre I exprimé en fonction de a et b et noté $I(a; b)$ tel que $I(a; b) = \int_a^b \frac{x}{1+x^2} dx$.

- 1) Calcule I en fonction de a et b .
- 2) On considère (u) la suite géométrique de raison $q = -x^2$ ou x est un nombre réel strictement positif et que $u_0 = x$.
 - a) Calcule la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
 - b) Démontre que pour tout $x \geq 0$, on a :
$$x - x^3 + x^5 - x^7 \leq \frac{x}{1+x^2} \leq x - x^3 + x^5.$$
 - c) Calcule pour $a = 0$ et $b = 1$, $I(0; 1)$ et déduis en encadrement de $\ln 2$.

EXERCICE 4 :

Soit l'équation d'inconnue x et de paramètre entier naturel non nul n ($n \geq 4$) telle que :

$$(L) : 2^x + 3^x = n^x.$$

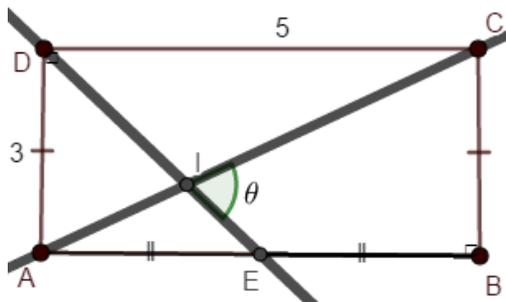
- 1- Justifie que l'ensemble de validité de cette équation est \mathbb{R} .
- 2- Propose une réécriture de (L) contenant logarithme et exponentielle népériennes.
- 3- On restreint la résolution à $[0; +\infty[$.

Montre que résoudre (L) revient à résoudre (K) : $\left(\frac{2}{n}\right)^x + \left(\frac{3}{n}\right)^x = 1$.

- 4- On note f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \left(\frac{2}{n}\right)^x + \left(\frac{3}{n}\right)^x$.
 - a) Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.
 - b) Dédus en que l'équation (L) admet une solution unique dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

EXERCICE 5:

Elève en classe de série scientifique, tu assistes ton oncle qui est géomètre sur un chantier de construction d'une route. Le projet se déroule dans une zone aménagée de forme rectangulaire ABCD de longueur AB = 5 km et de largeur AD = 3 km. Une usine est installée en un point E, milieu du segment [AB] et au point D se trouve un collège de proximité.



Le gouvernement veut faire construire deux voies selon les axes (DE) et (AC) qui auront pour intersection le point I, pour la construction d'un rond-point et complexe hospitalier.

Le chef du projet souhaiterait que la valeur absolue de l'angle θ formé par les deux voies soit comprise entre 80° et 85° pour que le projet soit validé pour exécution.

De retour à la maison, ton oncle te présente le plan et te demande de vérifier si le projet pourra être réalisé.

- 1) Calcule les longueurs AC et DE.
- 2) En utilisant la relation de Chasles :
 - a) Exprime le vecteur \overrightarrow{AC} à l'aide du vecteur \overrightarrow{AB} et le vecteur \overrightarrow{DE} à l'aide du vecteur \overrightarrow{DA} .
 - b) Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE}$.
- 3) Détermine une valeur approchée de l'angle θ à 0,01 près puis dis si le projet sera validé ou pas.

« BONNE CHANCE »

A NUL SACRIFICE, NUL VICTOIRE & A VAINCRE SANS PERIL LE TRIOMPE EST SANS GLOIRE

Seglass ni tonday