EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique 1 cm.

On désigne par A, B et C les points d'affixesrespectives $z_A = 2 - 3i$; $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$

On réalisera une figure que l'on completeza au fure et à mésure des questions.

PARTIE A

1) Calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

2) En déduire la nature du triangle ABC.

PARTIE B

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe $z \neq i$, associe le point M' d'affixe z'telle que : $z' = \dfrac{i(z - 2 + 3i)}{z - i}$

1) Soit D le point d'affixe $z_D = 1 - i$. Déterminer l'affixe du point D'image du point D par f.

2a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe 2i

2b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).

3) Démontrer que pour tout point M distinct du point E, $OM' = \dfrac{AM}{BM}$.

4) Démontrer que pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité: $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

5) Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M'appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6) Démontrer que si le point M'appartient à l'axe des imaginaires purs privé du point B alors le point M appartient à la droite (AB)

EXERCICE 2

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On note $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE A

Soit g la fonction numérique dérivable et définie sur $]-1;+\infty[$ par: $g(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.

1) a) calculer la limite de g en $+\infty$.

b) Justifier que pour tout $x > -1$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x}\left[x - (1+x)\ln(1+x)\right]$.

c) En déduire la limite de g à droite en -1

2) a) Démontrer que pour tout $x > -1$, la fonction dérivée g'de g est $g'(x) = \dfrac{-x}{(1+x)^2}$.

b) En déduire les variations de g sur $]-1;+\infty[$.

c) Justifier que la fonction g est négative ou nulle sur $]-1;+\infty[$.

PARTIE B

1) Démontrer que l'ensemble de définition de f est $]-1;+\infty[$.

2) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) interpréter graphiquement les limites

3) a) Démontrer que le développement limité à l'ordre deux au voisinage de zéro de la fonction f est :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$$

b) En déduire alors que la fonction f est continue en 0.

c) f est – elle dérivable en 0 ? Justifier.

4) Pour la suite, on admet que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ de fonction dérivée f'.

a) Démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $]-1;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation de f .

d) Quel est le signe de f sur $]-1;+\infty[$?

5) Construire $(\mathscr{C})$.