

Samedi 27 février 2021

**TEST DE PRESELECTION POUR LE CONCOURS D'ENTREE
 DANS LA DIVISION DES ANALYSTES STATISTICIENS (AS)**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour l'épreuve écrite de mathématiques et entre pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé à l'exclusion des calculatrices graphiques.
 Tout calcul de limite doit être justifié.*

Exercice 1 (2 points)

On considère les nombres S et P suivants :

- $S = (1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2) + (5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2) + (9^2 - 10^2 - 11^2 + 12^2) + \dots + (2021^2 - 2022^2 - 2023^2 + 2024^2)$
- $P = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{4\,084\,441}\right).$

Calculer S et P sans utiliser la calculatrice.

Exercice 2 (4,5 points)

On dit qu'un nombre entier est digisible lorsqu'il vérifie les trois conditions suivantes :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 36 est digisible car il est divisible par 3 et par 6 ;
 - 264 est digisible car il est divisible par 2, par 6 et par 4.
1. Proposer deux autres nombres digisibles à deux chiffres.
 2. a) Donner tous les diviseurs à un chiffre du nombre 1 000.
 b) En déduire un nombre digisible à quatre chiffres.
 3. Soit n un nombre entier digisible dont l'écriture comporte 5.
 - a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
 - b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.

Exercice 3 (4,5 points)

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n -ième lecture ?
2. a) Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n -ième lecture ?
b) Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0,9 ?

Exercice 4 (4 points)

Une étude d'un hypermarché portant sur un produit vendu dans ses rayons a révélé que pour un prix de vente unitaire x , exprimé en milliers de francs :

- le nombre d'objets, exprimé en centaines, proposés sur le marché est modélisé par la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{e^x} - 1$;
 - le nombre d'objets, exprimé en centaines, que les consommateurs sont prêts à acheter est modélisé par la fonction g définie par : $g(x) = \frac{12}{\sqrt{e^x} + 1}$.
1. a) Résoudre l'équation : $f(x) = g(x)$. On note p la solution.
b) En déduire le prix d'équilibre (prix auquel la demande est égale à l'offre) de ce produit.
 2. Justifier que : $f(p) = \sqrt{13} - 1$. Que désigne ce nombre ?
 3. Calculer la rente R du producteur (en centaines, $R = p \times f(p) - \int_0^p f(x) dx$).

Exercice 5 (5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, le système suivant :
$$\begin{cases} u + v = -\frac{1}{2} \\ uv = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

2. On pose : $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

a) Démontrer que : $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$.

b) En déduire que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$.

3. On admet que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}$.

Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

$$e^2 - 8p + p$$

Test de présélection pour le concours d'entrée dans la division des Analystes Statisticiens (AS)
Samedi 23 février 2022

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour l'épreuve écrite de mathématiques et entre pour une part importante dans l'appréciation des copies. L'usage des calculatrices scientifiques est autorisé à l'exclusion des calculatrices graphiques. Tout calcul de limite doit être justifié.

Exercice 1

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Lorsqu'un satellite tourne autour de la Terre, sa vitesse sur son orbite circulaire est donnée par la formule : $V = R \times \sqrt{\frac{g}{R+h}}$ avec : $R = 6\,378$ km le rayon de la Terre, $g = 9,81$ m/s² l'accélération de la pesanteur, h l'altitude du satellite et V la vitesse du satellite.
 - a) Calculer la vitesse du satellite en m/s puis en km/h pour une altitude de 250 km.
 - b) Calculer l'altitude du satellite lorsque sa vitesse est 4 000 m/s.
2. Un groupe de touristes décide de partager un réservoir d'eau de la façon suivante : La première personne prend 100 litres et le treizième du reste. La seconde 200 litres et le treizième du nouveau reste. La troisième 300 litres et le treizième du nouveau reste et ainsi de suite jusqu'à la dernière personne. Toutes ont reçu la même quantité d'eau.
Combien y a-t-il de personnes dans ce groupe ?

Exercice 2

- 1) Un entier naturel n est dit **parfait** s'il est égal à la somme de ses diviseurs, hormis lui-même.
Justifier que 28 est parfait.
- 2) Un entier naturel n est dit **abondant** si la somme de ses diviseurs propres (autre que lui-même), lui est supérieure stricte.
Justifier que 20 est abondant.
- 3) Un entier naturel n est dit **déficient** si la somme de ses diviseurs propres (autre que lui-même), lui est inférieure stricte.
Justifier que 16 est déficient.
- 4) Deux nombres n et m sont dits **amicaux** si n est la somme des diviseurs de m , hormis m , et si m est la somme des diviseurs de n , hormis n .
 - a) Justifier que 220 et 284 sont amicaux.
 - b) Les nombres 17296 et 18416 sont-ils amicaux ?

Exercice 3

On considère un dé à quatre faces en forme de tétraèdre régulier. Ses quatre faces sont numérotées 2 ; 4 ; 6 ; 8. Le résultat d'un lancer est le nombre indiqué sur la face sur laquelle repose le dé. Le dé est supposé équilibré.

1. On a lancé le dé six fois et obtenu la série de résultats : 2 ; 4 ; 8 ; 2 ; 2 ; 4.
Au 7^{ème} lancer, la probabilité d'obtenir le nombre 2 et celle d'obtenir le nombre 6 sont-elles différentes ?
2. On lance le dé deux fois de suite.
 - a) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois le nombre 2 lors de ces deux lancers ?
 - b) Quelle est la probabilité que le nombre obtenu au deuxième lancer soit strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancer ?

Exercice 4

Une imprimerie a une capacité de production de 5000 ouvrages par jour.

Une étude a montré que le coût marginal, en millions de francs, peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x + 1)$ où x désigne la quantité d'ouvrages imprimés (en milliers).

On rappelle que le coût marginal correspond à la dérivée du coût total et on suppose que l'imprimerie n'a pas de frais fixes.

1. a) Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - x$.
b) En déduire la primitive F de f sur $[0; +\infty[$ qui s'annule en 0.
2. a) Calculer $\int_0^5 f(x)dx$.
b) En déduire le coût total de fabrication de 5000 ouvrages.
3. L'imprimeur compte réaliser en deux jours une commande de 8000 ouvrages. Il hésite entre deux possibilités :
(a) 5000 ouvrages le premier jour, puis 3000 le second ;
(b) 4000 ouvrages pendant deux jours.
Quelle est l'option la plus rentable ?

Exercice 5

On considère l'intégrale $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^2 (2-x)^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Calculer I_1 .
- 2) a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
b) En déduire I_2 .
- 3) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$.
- 4) On pose $u_n = \frac{2^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a) Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
 - b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.
 - c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u_3$.
- 5) Déterminer la limite de la suite (u_n) , puis celle de suite (I_n) .