SUITE NUMERIQUE

Exercice 1

Les suites ci-dessous sont-elles croissantes, décroissantes ? justifier.

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = n^2 - 2n + 5$

2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad , U_n = n^3 - n^2 + n$

3) $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad , U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 + 1}{U_n} \end{cases}$

Exercice 2

La suite Un definie par : $U_n = \frac{n}{n+1}$ est-elle majorée, minrée, bornée ? justifier

Exercice 3

Soit (v_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme v_0.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous.

N°	Affirmations	Réponses
1	Si $v_0 > 0$, alors (v_n) diverge vers $+\infty$.	
2	Si $r < 0$, alors (v_n) diverge vers $-\infty$.	
3	Si $r = 0$, alors (v_n) converge vers v_0.	

Exercice 4

Soit la suite(u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par : $u_n = \sqrt{\ln n}$.
Etudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite numérique définie par : $u_n = \frac{n+3n^2}{1+n^2}$.
Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est minorée par 2.

Exercice 6

Etudie la convergence de la suite numérique de terme général $(-1)^n$.

Exercice 7

On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \sqrt{4 - \frac{2}{1+n^2}}$

Démontre que la suite v est minorée par$\sqrt{2}$ et majorée par 2.

Exercice 8

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

a) Etudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Justifie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est majorée par 2.

(On pourra utiliser l'inégalité : $\forall\, k \geq 2; \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$).

c) Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est convergente.

Exercice 9

On considère la suite numérique U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) \end{cases}$

1. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) où les unités respectives sur (OI) et (OJ) sont 4 cm et 2 cm. La courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$ sont tracées sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

a. Représenter sur l'axe des abscisses (OI) les termes U_1, U_2 et U_3 de la suite U en utilisant la courbe (C) et la droite (D).

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite U ?

2. On admet que f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$.

a. Démontrer que $f([2;3]) \subset [2;3]$

b. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $2 \leq U_n \leq 3$

3. a. Démontrer que la suite U est décroissante.

b. En déduire que la suite U est convergente.

4. On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$

a. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $V_{n+1} = (V_n)^2$

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

c. Calculer V_1 puis exprimer V_n en fonction de n.

d. Exprimer U_n en fonction de n.

e. Démontrer que $\lim V = 0$. En déduire la limite de U.

Exercice 10

Soit la suite définie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1 \end{cases}$

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), représenter sur l'axe des abscisses les termes U_0 ; U_1 ; U_2 et U_3 de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (unité graphique 2 cm).

2. a. Démontrer par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.

b. Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ V_n = U_n - \frac{5}{2}$

a. Démontrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11

Soit $a \in \left]\frac{1}{2};1\right[$ et les suites (u_n) *et* (v_n) telles que $u_0 = 2$; $v_0 = 3$,$u_{n+1} = au_n + (1-a)v_n$ *et* $v_{n+1} = (1-a)u_n + av_n$.

1) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}, v_n - u_n > 0$.
2) a- Démontre que la suite (u_n) est croissante.
   b- Démontre que la suite (v_n) est décroissante.
   c- Démontre que les suites (u_n) *et* (v_n) sont convergentes.
3) Soit la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$.
   a- Démontre que la suite (w_n) est une suite géométrique à déterminer.
   b- En déduire que les suites (u_n) *et* (v_n) ont la même limite.
4) Soit la suite (t_n) définie par $t_n = u_n + v_n$.
   a- Démontre que la suite (t_n) est une suite constante.
   b- En déduire la limite commune des suites (u_n) *et* (v_n).

SUITE NUMERIQUE

Exercice ①

On considère la fonction numerique h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = 2\ln x + 1$

1) Demontrer que :
$\forall x \in [3;4]$, $h(x) \in [3,4]$

2) On considère la suite (U_n) par
$$\begin{cases} U_0 = 3{,}5 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$$

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [3,4]$

b) calculer l'arrondi d'ordre 3 de U_1.

c) Démontrer par récurrence que la suite (U_n) est croissante.

d) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

Exercice ②

Soit a un réel donné. On considère les suites (U) et (V) définies respectivement par

- $$\begin{cases} U_0 = 3 \quad \text{et} \quad U_1 = 5 \\ U_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 U_{n+1} + (a-2) U_n. \\ \text{Pour } n \geq 0 \end{cases}$$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_{n+1} - U_n$.

1) On pose : $a = 1$

a) Demontrer que la suite (V) est constante et donner sa valeur

b) En déduire que (U) est une suite arithmetique dont la raison est égale à 2.

c) On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.
Exprimer U_n puis S_n en fonction de n.

2) On pose : $a = -5$

a) Demontrer que (V_n) est une suite géométrique dont la raison est égale à 7.

b) Exprimer V_n en fonction de n.

c) Pour tout entier n superieur ou égale à 1, Exprimer en fonction de n la somme T_n où :
$T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$

d) Exprimer U_n en fonction de T_n.

e) En déduire que la suite (U) est divergente.

Exercice ③

On considère la suite numerique (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n}$.

1) soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x}$ et dont la représentation graphique (C) est donnée ci-dessous.

a) Représenter sur l'axe $(O.I.)$ les termes U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4 de la suite U à l'aide de la courbe (C) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$

b) Que peut-on prevoir quant à la convergence de la suite (U_n) ?

2 a) Démontrer que $f([1;5]) \subset [1,5]$.

b) En déduire au moyen d'un raisonnement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 5$.

3) Soit (V_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 1}$

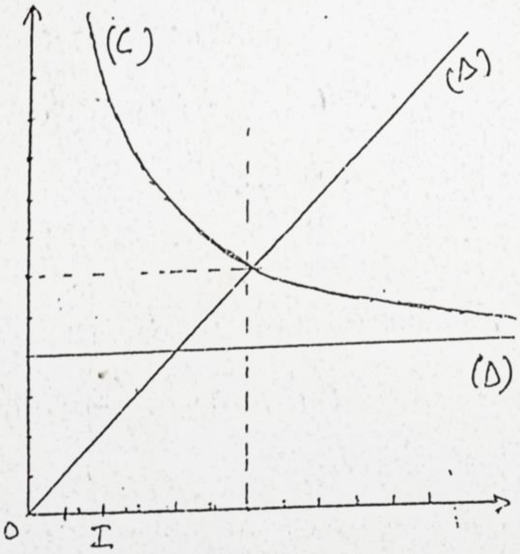
a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$V_n = (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)$$

4 a) Exprimer U_n en fonction de V_n puis en fonction de n.

b) En déduire la limite de la suite (U_n).



Exercice 4

Soit (U_n) la suite numerique définie par U_0 donné et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1{,}05\,U_{n-1} + 1000$

Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n + 20.000$, pour n éléments de $\mathbb{N}$.

1) Demontrer que (V_n) est une suite géometrique dont on précisera la raison.

2 a) Exprimer, pour tout entier naturel n, V_n en fonction de V_0 et n.

b) En déduire l'expression de U_n en fonction de U_0 et n.

3) En 2000, la population électorale d'une commune était de 20.000 électeurs. Chaque année cette population electorale augmente de 5% et de plus, 1000 électeurs supplementaires s'y établir définitivement.

a) Préciser la population électorale en octoble 2005 dans cette commune.

b) Etant donné que le taux d'obstention est de 20%. Déterminer le nombre de votant dans cette commune en octobre 2005.

Exercice ⑤

Une observation faite sur une societé spécialisée dans les NTIC sur ses abonnés a permis de constater que le taux de réabonnement est voisin de 80% et que le nombre de nouveaux abonnés est environ 5000. L'objet de cet exercice est l'étude du devenir du nombre annuel des abonnés en supposant que la situation décrite par l'observation reste la même au fil des années. On désigne par U_n le nombre d'abonnés après n années de cette société et on précise que $U_0 = 1.0.000$

1) Verifier que $U_1 = 13.000$

2) Démontrer par récurrence que $U_{n+1} = 0{,}8\,U_n + 5000$

3) Le plan est muni d'un repère, orthogonal tel que 2cm. représentent en abscisse une année et 2 cm representent en ordonnées 5000 abonnés.

a) Tracer les droites (T) et (D) d'équation respectives $y = x$ et $y = 0{,}8x + 5000$.

b) Construire, Uniquement à l'aide des deux droites (T) et (D), les termes U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4 sur l'axe des ordonnées.

c) Que peut-on conjecturer sur la convergence de la suite (U_n) ?

4) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = 25000 - U_n$ pour tout entier naturel n.

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n et en déduire que la suite (V_n) est une suite géometrique dont on precisera son premier terme et sa raison.

b) Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que $U_n = 25000 - 15000 \times 0{,}8^n$

c) Determiner la limite de la suite (U_n).

5) Après combien d'années le nombre d'abonnés dépassera-t-il 22000 ?

Exercice ⑥

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ et

$2U_{n+1} = 3U_n - U_{n-1}$

1) Calculer U_2 et U_3

2a) Démontrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ est une suite géométrique dont on precisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer V_n en fonction de n.

c) Determiner $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}$

3a) Démontrer que

$U_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}$

b) En déduire U_n en fonction de n.

4a) Etudier le sens de variation de la suite (U_n).

b) Montrer que U_n est majorée par 2. En déduire que la suite (U_n) est convergente.

c) Calculer $\lim |U_n - 2|$.

En déduire $\lim U_n$.

Exercice ⑦

On définit la suite (V_n) par $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = \dfrac{V_n + 8}{2V_n + 1}$

1) calculer V_1 ; V_2 ; et V_3.

2) soit la fonction g définie sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x+8}{2x+1}$ et sa courbe représentative (Υ), un repère (O, I, J) et $(\Delta) : y = x$.

a) Tracer (Υ) et (Δ).

b) construire à l'aide de (Υ) et (Δ) les points de l'axe (OI) d'abscisses V_0, V_1, V_2 et V_3.

c) Que peut-on prevoir quant à la convergence de la suite (V_n) ?

3) soit (W_n) la suite définie pour tout n par $W_n = \dfrac{V_n - 2}{V_n + 2}$

a) calculer W_0, V_1 et W_2

b) Montrer que (W_n) est une suite géometrique que l'on caracterisera.

c) Exprimer W_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (W_n).

4) Exprimer V_n en fonction de n. et determiner la limite de la suite (V_n).

Exercice ⑧

On considère la suite (U_n) definie par $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = 7U_n + 8U_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

1a) Montrer que la suite (V_n) definie par $V_n = U_{n+1} + U_n$ est une suite géometrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n en fonction de n.

2) On pose $W_n = (-1)^n \cdot U_n$ et on considère la suite (T_n) definie par $T_n = W_{n+1} - W_n$.

a) Exprimer T_n en fonction de V_n. puis en fonction de n.

b) Sachant que (T_n) est géometrique de raison -8, calculer la somme $S_n = T_0 + T_1 + \cdots + T_{n-1}$

3) a- Exprimer W_n puis U_n en fonction de

b) Determiner $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{U_n}{8^n}$

Exercice ⑨

On considère les suites numeriques (U_n) et (V_n) definies sur $\mathbb{N}^*$ par

- $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}(V_n + 3U_n) \end{cases}$
- $\begin{cases} V_1 = 12 \\ V_{n+1} = \frac{1}{3}(V_n + 2U_n) \end{cases}$