

Exercice 2

1) $\gamma(t) = \frac{1}{2}t^2 - t ; \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2$

a) Domaine de définition.

$$D_x = D_y = \mathbb{R}$$

$$D_\gamma = \mathbb{R}.$$

b) Périodicité. Périodes

* La fonction n'est pas périodique

* $\forall t \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R},$

$$x(-t) = \frac{1}{2}t^2 + t$$

$$y(-t) = -\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2$$

$x(t)$ et $y(t)$ ne sont ni pairs ni impairs.

c) Branches infinies

* $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = -\infty$$

La courbe (c) admet une

branche parabolique
direction (oy) en $-\infty$

* $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$$

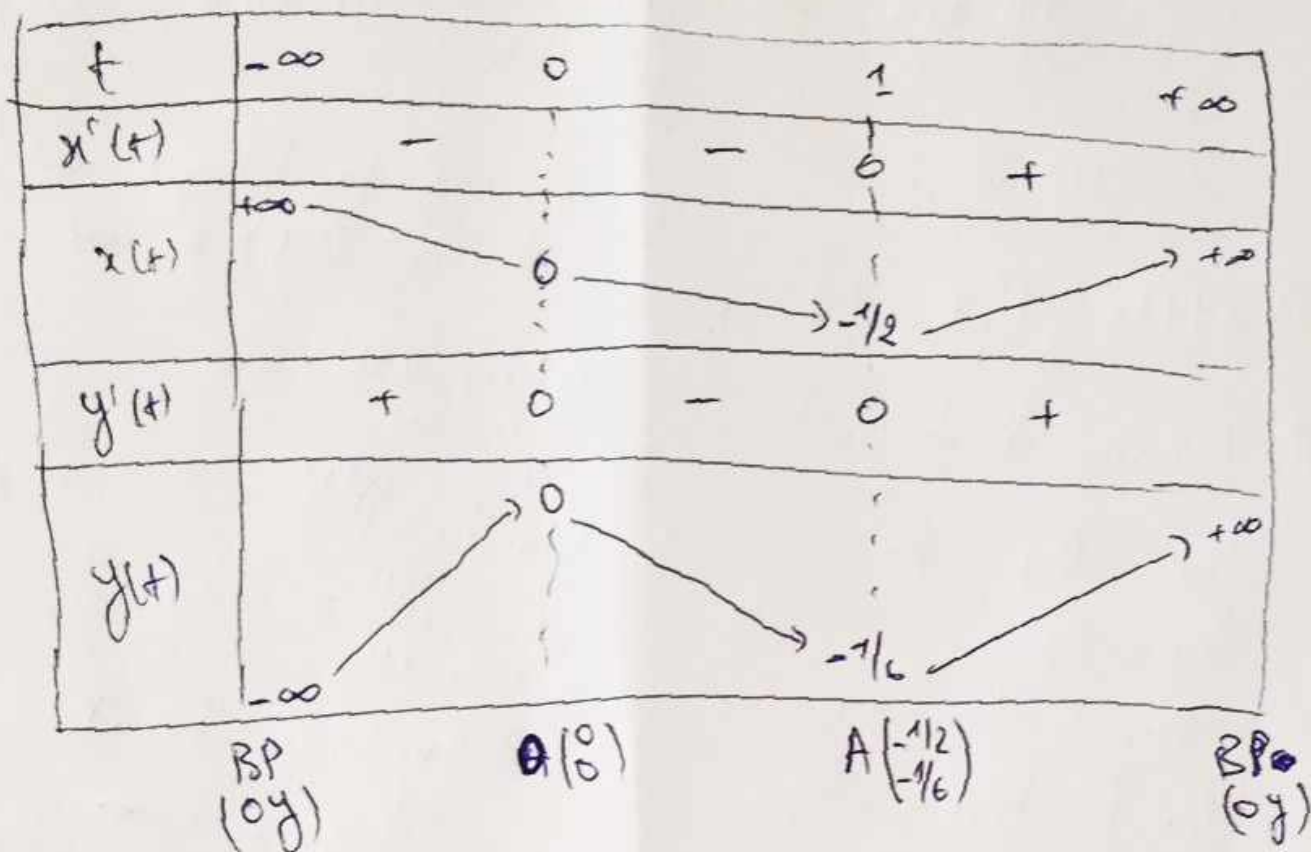
(c) admet une branche parabolique en $+\infty$

d) Tableau de variation

$x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = t-1 \\ y'(t) = t^2 - t = t(t-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \Rightarrow t = 1 \\ y'(t) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 1. \end{cases}$$



e) Points Particuliers

① $t=0$: $y'(0)=0$ donc
 $y=y(0)=0$ est une
 tangente ~~verticale~~ à C en
 $O(0)$
 Horizontale

② $t=1$: $\gamma(1)=(x(1), y(1))=(0,0)$
 et $\gamma(0)=(x(0), y(0))=(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$
 donc le point $A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$ est un
 point singulier ou stationnaire

$$\gamma''(t) = \begin{cases} x''(t) = 1 \\ y''(t) = 2t - 1 \end{cases}$$

$$\gamma''(1) = \begin{cases} x''(1) = 1 \\ y''(1) = 1 \end{cases} \text{ donc } p=2.$$

$$\gamma^{(3)}(t) = \begin{cases} x^{(3)}(t) = 0 \\ y^{(3)}(t) = 2 \end{cases} \Rightarrow \gamma^{(3)}(1) = \begin{cases} x^{(3)}(1) = 0 \\ y^{(3)}(1) = 2 \end{cases}$$

$$\det(\gamma''(1), \gamma^{(3)}(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

donc $q=3$.

D'où $A(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$ est un point de
 rebroussement de 1^{er} espèce

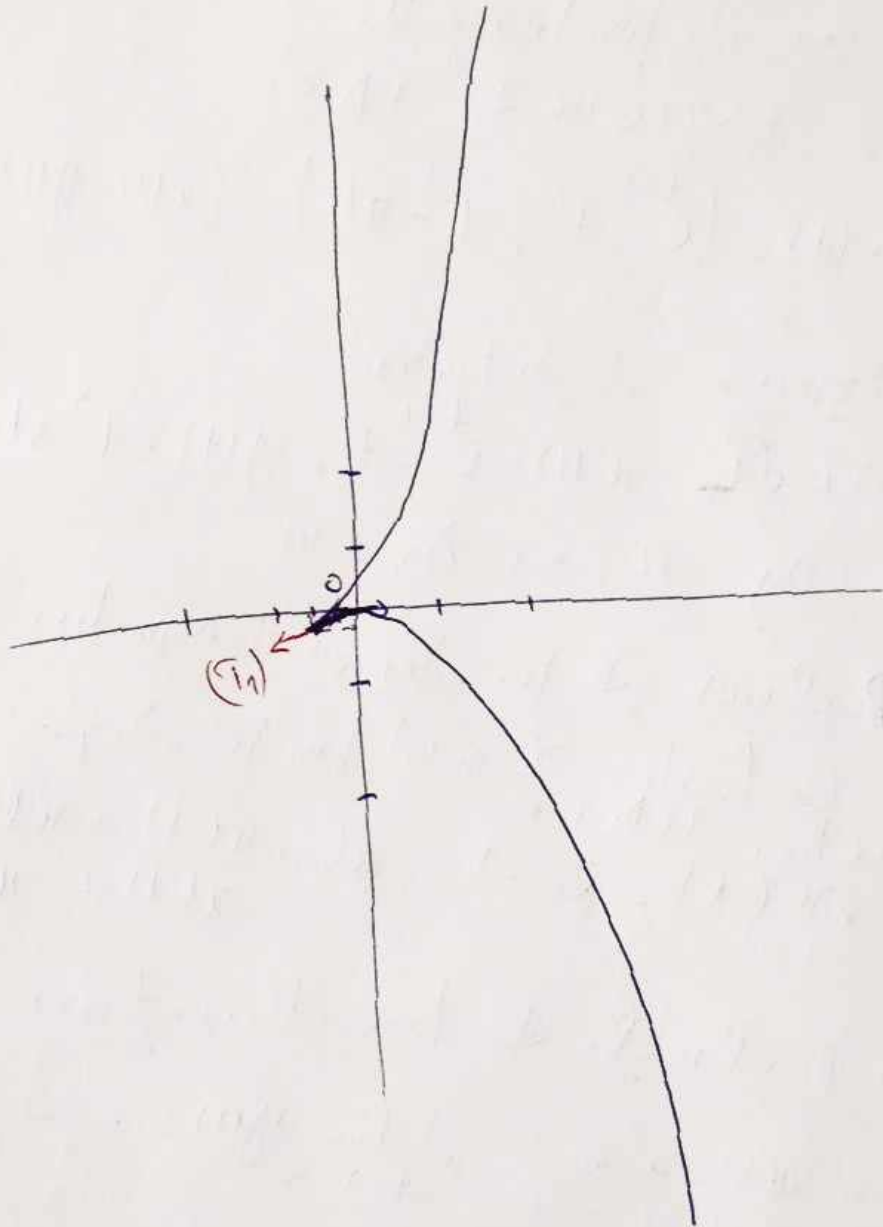
A

(2)

La tangente en $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$

$$(T_1): \begin{cases} x(t) = x(1) + x'(1)(t-1) \\ y(t) = y(1) + y'(1)(t-1) \end{cases} = (T_1): \begin{cases} x(t) = x(1) \\ y(t) = y(1) \end{cases}$$

$$(T_1): \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2} \\ y(t) = -\frac{1}{6} \end{cases}$$



3

Exercice 2 TD3

3) $\gamma(t) = (e^{\frac{t-1}{2}} - t ; t^3 - 3t) = (x(t), y(t))$

a) domaine de définition

$\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = e^{\frac{t-1}{2}} - t, y(t) = t^3 - 3t.$

$D_x = D_y = \mathbb{R} \Rightarrow D_\gamma = \mathbb{R}.$

b) Recherche de périodes et de symétries

⊗ la fonction γ n'est pas périodique

$\forall t \in D_\gamma, -t \in D_\gamma$
 ⊗ $x(-t) = 2 + t$ alors $x(-t) \neq x(t)$
 $x(-t) \neq -x(t).$

c) Recherche de branches infinies

⊗ $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty$

$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^3 - 3t}{e^{\frac{t-1}{2}} - t} = -\infty$

(C) admet une branche parabolique de direction
 (Oy)

⑤

$$\textcircled{x} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 - 3t}{t^2 - 1} = 0$$

(C) admet une branche parabolique de direction (Ox).

d) Tableau de variation

$x(t)$ et $y(t)$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Il en découle donc pour $\gamma(t)$.

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = e^{t-1} - 1 \\ y'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 - 1) = 3(t-1)(t+1) \end{cases}$$

$$x'(t) = 0 \Rightarrow e^{t-1} = 1 \Rightarrow t-1 = \ln(1) = 0 \Rightarrow t = 1.$$

$$y'(t) = 0 \Rightarrow 3(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ ou } t = -1.$$

t	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x'(t)$	-	-	0	+
$x(t)$	$+\infty$	$e+1$	0	$+\infty$
$y'(t)$	+	0	-	+
$y(t)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

BP de direction (Oy)

$B \begin{pmatrix} e^2 + 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $e+1 \approx 1,7$

$A \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

BP de direction (Ox)

(6)

e) Points particuliers

① $t = 1$: $\gamma'(1) = (x'(1), y'(1)) = (0, 0)$

Donc le point $A \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un point singulier ou stationnaire.

- on a : $\begin{cases} x''(t) = 2 \\ y''(t) = 6t \end{cases} \quad t=1 \Rightarrow \begin{cases} x''(1) = 2 \\ y''(1) = 6 \end{cases}$ donc $\gamma''(1) \neq (0, 0)$

D'où $p = 2$.

- on a $\begin{cases} x^{(3)}(t) = 2 \\ y^{(3)}(t) = 6 \end{cases} \quad t=1 \Rightarrow \begin{cases} x^{(3)}(1) = 2 \\ y^{(3)}(1) = 6 \end{cases}$

$\det(\gamma''(1), \gamma^{(3)}(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

- on a $\begin{cases} x^{(4)}(t) = 2 \\ y^{(4)}(t) = 0 \end{cases} \quad t=1 \Rightarrow \begin{cases} x^{(4)}(1) = 2 \\ y^{(4)}(1) = 0 \end{cases}$

$\det(\gamma''(1), \gamma^{(4)}(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$

Donc $q = 4$.

Puis que $p = 2$ et $q = 4$ alors $A \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un point de rebroussement de 2^{ème} espèce.

La tangente a pour vecteur directeur $\vec{v} = \gamma^{(4)}(1) = \vec{x}$

② Pour $t=2$, $y'(2) = 0$ donc la droite $(\Delta): y=2$ est une tangente horizontale à γ et $A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(7)

$$\text{on a } \vec{V}_1 = \frac{1}{2!} \gamma''(1) = \frac{1}{2} (\vec{i} + 6\vec{j})$$

$$\vec{V}_2 = \frac{1}{4!} \gamma^{(4)}(1) = \frac{1}{24} \vec{i}$$

$$\text{On a } \gamma(t+h) = \gamma(t) + h^p \vec{V}_1 + h^q \vec{V}_2 + o(h^q)$$

$$\underline{t=1} : \gamma(h) = \gamma(1) + h^p \vec{V}_1 + h^q \vec{V}_2 + o(h^q); p=2, q=4$$

$$\text{avec } \vec{V}_1 = \frac{1}{p!} \gamma^{(p)}(1), \quad \vec{V}_2 = \frac{1}{q!} \gamma^{(q)}(1)$$

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{2!} \gamma''(1) = \frac{1}{2} (\vec{i} + 6\vec{j})$$

$$\vec{V}_2 = \frac{1}{4!} \gamma^{(4)}(1) = \frac{1}{24} \vec{i}$$

$$\text{et } \gamma(h) = \gamma(1) + h^2 \vec{V}_1 + h^4 \vec{V}_2 + o(h^4)$$

⊗ Pour $t = -1$, $y'(-1) = 0$ donc la droite $(D_1): y(t) = y(-1)$ est une tangente en B à (C) .

$$(D_1): y(t) = 2.$$

* ~~Déterminons $y(t) = 0 \Rightarrow t(t^3 - 3) = 0$~~

~~$t(t^3 - 3) = t(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3}) = 0$~~

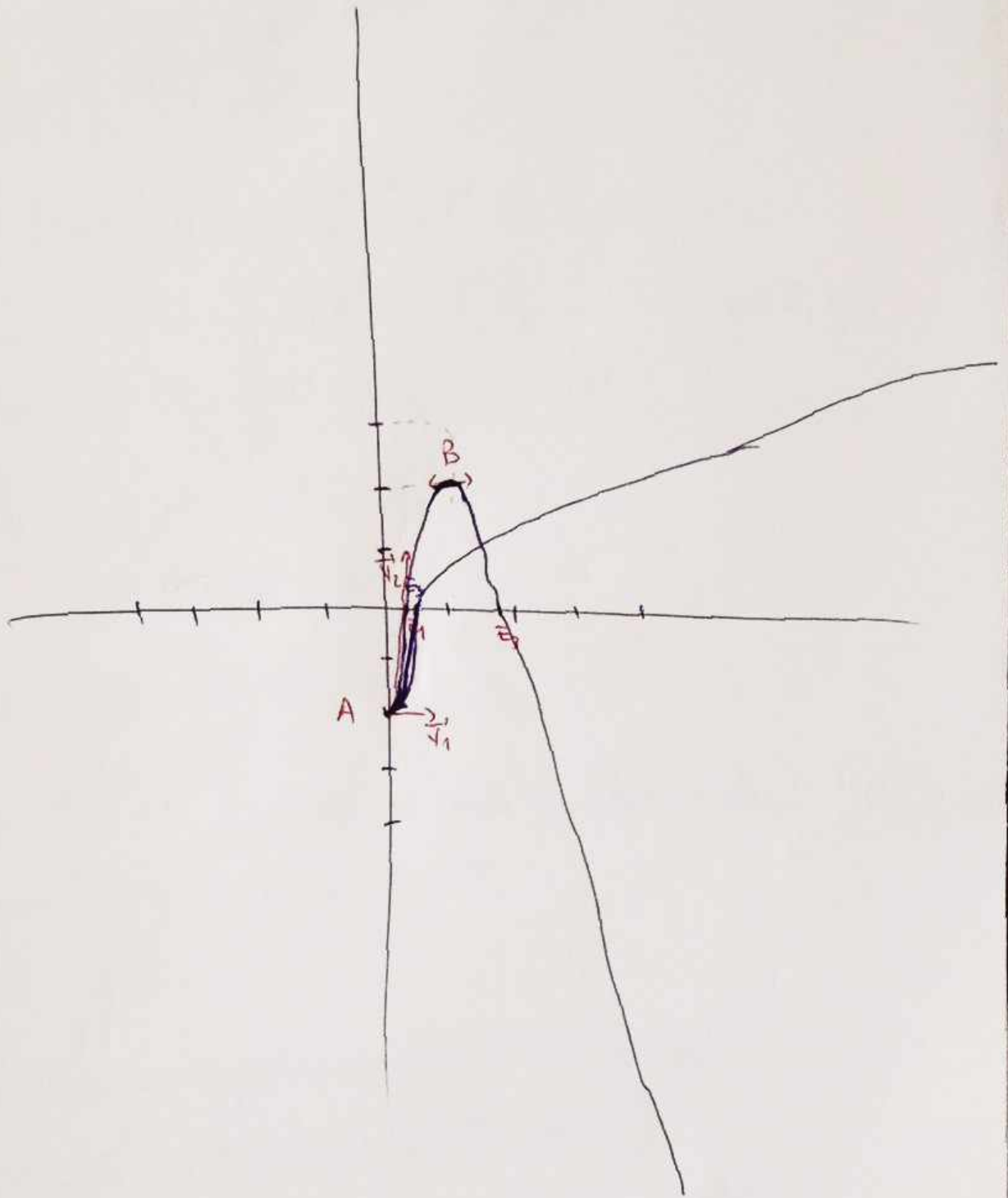
⊗ $y(t) = 0 \Rightarrow t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = t(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3}) = 0$

$t = 0$ ou $t = \sqrt{3}$ ou $t = -\sqrt{3}$.

$\vec{E}_1 \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}; \quad \vec{E}_2 \begin{pmatrix} x(\sqrt{3}) \\ y(-\sqrt{3}) \end{pmatrix}; \quad \vec{E}_3 \begin{pmatrix} x(\sqrt{3}) \\ y(\sqrt{3}) \end{pmatrix}$

$\vec{E}_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{E}_2 \begin{pmatrix} 1,8 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{E}_3 \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(8)



9

1) $r = \sin(3\theta)$

a) Domaine de définition : $D_r = \mathbb{R}$

b) Périodicité - Parité

⊗ $r(\theta + \frac{2\pi}{3}) = \sin(3\theta + 2\pi) = \sin(3\theta) = r(\theta)$
 $r(\theta + \frac{2\pi}{3}) = r(\theta)$, r est périodique de
 période $\frac{2\pi}{3}$.

Le domaine d'étude est réduit à $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$

Pour obtenir toute la courbe (C) sur $\mathbb{R}$, on affiguera

$\bar{a}(C_1)$ la courbe sur $[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$, la rotation
 d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de centre O, composée deux fois
 successives.

$\Gamma_1 : 0 \rightarrow \frac{2\pi}{3}$: rotation 1

$\Gamma_2 : \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{4\pi}{3}$: rotation 2

$\Gamma_3 : \frac{4\pi}{3} \rightarrow 2\pi$: rotation 3

(on fait donc le tour du cercle.)

⊗ $\forall \theta \in \mathbb{R}, -\theta \in \mathbb{R}, r(-\theta) = \sin(-3\theta) = -\sin(3\theta) = -r(\theta)$

Le domaine d'étude est réduit de nouveau à $[0; \frac{\pi}{3}]$.

Soit C_2 la courbe sur $[0; \frac{\pi}{3}]$.

$C_1 = C_2 \cup \text{Sym}(C_2)$

~~$C_1 = C_2 \cup R(\frac{2\pi}{3})$~~ rotation

①

c) ~~Etude de~~ Etude de $r(\theta) = 0$

$$r(\theta) = 0 \Rightarrow \sin 3\theta = 0 \Rightarrow 3\theta = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Sur $[0; \frac{\pi}{3}]$, on a: $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$. i.e $k=0$ et $k=1$.

d) Tableau de variation

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, r'(\theta) = 3 \cos(3\theta)$$

$$r'(\theta) = 0 \Rightarrow \cos 3\theta = 0 \Rightarrow 3\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}.$$

Pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{3}]$, $r'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ i.e $k=0$.

$$\textcircled{*} \text{ Pour } \theta = \frac{\pi}{6}, r(\frac{\pi}{6}) = \cos(3\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$r'(\theta)$	+	0	-
$r(\theta)$	0	1	0

$$\textcircled{*} r(0) = \sin(0) = 0$$

$$r(\frac{\pi}{3}) = r(3\frac{\pi}{3}) = \sin(\pi) = 0$$

(2)

e) Tangente $\vec{a}(c)$

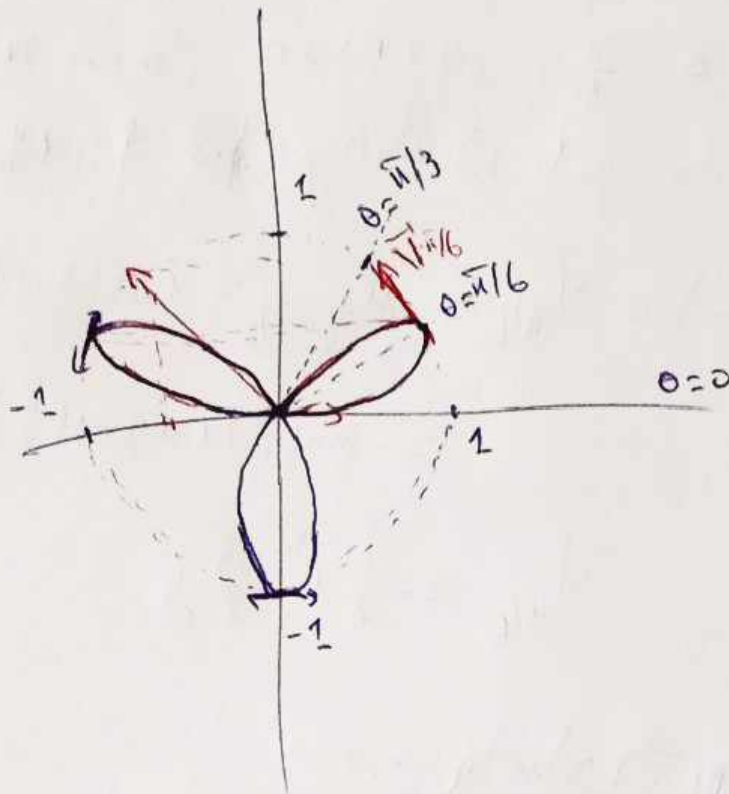
• Pour $\theta = 0$, $r(\theta) = 0$ donc la tangente est dirigée par $\vec{M}_0 = \vec{M}_0$

* Pour $\theta = \frac{\pi}{6}$; $r(\theta) \neq 0$, mais $r'(\theta) = 0$
la tangente est dirigée par $r'(\frac{\pi}{6})\vec{M}_{\pi/6} + r(\frac{\pi}{6})\vec{V}_{\pi/6}$

$$\text{Donc par } \vec{V}_{\pi/6} = \vec{M}_{\pi/6 + \pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} \\ = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{V}_{\pi/6} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$$

✓ Force Couple.



4