Fiche de TD Algèbre 2 ECUE 1.

Exercice n°1
Calculer les produits AB et BA, quand ils existent, dans les cas suivants:

1. $A = (1\ 2\ 3\ 4) \qquad B = {}^t(-1\ 0\ 2\ 1)$
2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Les matrices A et B ci-dessous sont des **matrices diagonales par bloc**.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice n°2
On donne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$a)$ Calculer $A^2; A^3; A^4$.
$b)$ Montrer que

$$A^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{bmatrix}, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Exercice n°3
Soit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculer $2A - A^2$; puis en déduire A^{-1}.

Exercice n°4

On donne Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Calculer $A - A^2$; puis en déduire A^{-1}.

Exercice n°5

Calculer l'inverse de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer $\det(A)$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}.$$

Exercice n°6

Déterminer le rang de la matrice suivant les valeurs de m.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & m & 2m+1 & 0 \\ m+1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m+1 & m+1 \\ 2m & 1 & 1 & m+1 \end{bmatrix}.$$

Exercice n°7

Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & a+b & ab \\ 1 & b+c & bc \\ 1 & c+a & ca \end{vmatrix}.$$

Exercice n°8

Calcul de

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}.$$

Exercice n°9

Calculer $\det(M)$ avec

$$M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2a & -a & 2a-3b & -a+3b \\ 0 & 0 & 3a-3b & 3b \\ a-b & -2a-b & 4a-b & a+2b \\ b & b-3a & 3a-2b & 3a+b \end{bmatrix}$$

Exercice n°10

Equilibrer les réactions chimiques suivantes.

1. $NaCl + BeF_2 \longrightarrow NaF + BeCl_2$
2. $KMnO_4 + HCl \longrightarrow KCl + MnCl_2 + H_2O + Cl_2$
3. $K_4Fe(CN)_6 + KMnO_4 + H_2SO_4 \longrightarrow KHSO_4 + Fe(SO_4)_3 + MnSO_4 + NHO_3 + CO_2 + H_2O$

Exercice n°11

Montrer que le polynôme

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & X & X^2 & X^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}[X]$$

est divisible par $(X-1)^3$.

En déduire $P(X)$.

Fiche de TD Algèbre 2 ECUE 2.

Exercice n°1

1. Est-ce que le sous-ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x\} \subset \mathbb{R}^2$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel?

2. Est-ce que le sous-ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ y^2 = 2x,\ z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice n°2

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\right\}$.
2) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\right\}$.
3) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\right\}$.
4) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\right\}$.

Exercice n°3

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X un ensemble non vide.

On pose $F = \mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des applications de X dans E.

1. Rappeler les lois du $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.

2. Dans ce qui suit on prend $E = \mathbb{K} = X = \mathbb{R}$ et $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Examiner si H est un sous-espace vectoriel de F, lorsque H désigne successivement les sous-ensembles de F constitués des fonctions:

$i)$ continues sauf en un nombre fini de points; $ii)$ bornées; $iii)$ positives; $iv)$ monotones; $v)$ possédant un développement limité d'ordre supérieur ou égal à 2 au point 0. $vi)$ solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = c$, c est un réel donné.

Exercice n°4

Etudier la somme $F + G$ dans les cas suivants.

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0\}$.
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}$.

Exercice n°5

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $E = \mathbb{K}[X]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n = \mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] : \deg P \leq n\}$.

Soit $P \in E$ de degré $m \geq 1$. On pose $F = P\mathbb{K}[X] = \{PQ : Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et que F et E_{m-1} sont supplémentaires dans E.

Exercice n°6

On considère dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, une famille de 4 vecteurs (e_1, e_2, e_3, e_4) linéairement indépendants.

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. (e_1, e_3).
2. $(e_1, 2e_2, e_3)$.
3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.
4. $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.
5. $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$.

Exercice n°7

Soit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(]-1, 1[, \mathbb{R})$.

On considère le sous-espace vectoriel E engendré par (f_1, f_2, f_3, f_4) où les f_i sont les fonctions de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ définies par:

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Déterminez une base de E. Déduisez-en la dimension de E.

Exercice n°8

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs: $v_1(1,4,-1); v_2(2,3,1); v_3(4,-1,2); v_4(3,5,-3)$.
Montrez que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
Déterminez les coordonnées de v_4 dans cette base.

Exercice n°9

E est un $\mathbb{K}$-ev tel que $\dim_{\mathbb{K}} E = 6$. F et G deux sous-espaces vectoriels de E distincts de dimension 4 sur $\mathbb{K}$. Donner les valeurs possibles de $\dim_{\mathbb{K}} (F \cap G)$.

Exercice n°10

Dans un espace vectoriel E de dimension 6, on considère deux sous-espaces F et G avec $\dim F = 3$ et $\dim G = 4$. Que peut-on dire de $F \cap G$? de $F + G$? Peut-on avoir $F \oplus G = E$?

Exercice n°11

Soient P_1 et P_2 deux plans vectoriels distincts d'une $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 3. Montrons que $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle.

Exercice n°12

Dans $\mathbb{R}^4$, quelles sont les dimensions possibles de l'intersection de deux plans (sous-espaces de dimension 2)?

Exercice n°13

Dans $\mathbb{R}^5$ rapporté à sa base canonique, on donne $v_1 = (2,3,-3,4,2)$, $v_2 = (3,6,-2,5,9)$, $v_3 = (7,18,-2,7,7)$, $v_4 = (2,4,-2,3,1)$.

Déterminer le rang de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) et donner une relation de dépendance linéaire dans le cas où cette famille est liée.

Exercice n°14

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\left(P, P', ..., P^{(n)}\right)$ est libre. En déduire que $\left(P, P', ..., P^{(n)}\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice n°15

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.
La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre?

Exercice n°16

Les familles suivantes sont-elles libres?
1. $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,2,2)$ et $v_3 = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $v_1 = (1,2,1,2,1)$, $v_2 = (2,1,2,1,2)$, $v_3 = (1,0,1,1,0)$ et $v_4 = (0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $v_1 = (2,4,3,-1,-2,1)$, $v_2 = (1,1,2,1,3,1)$ et $v_3 = (0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $v_1 = (2,1,3,-1,-4,-1)$, $v_2 = (-1,1,-2,2,-3,3)$ et $v_3 = (1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Exercice n°17

Soient $v_1 = (2,3,-1)$, $v_2 = (1,-1,-2)$, $v_3 = (3,7,0)$ et $v_4 = (5,0,-7)$ dans $\mathbb{R}^3$. Soient $E = < v_1, v_2 >$ et $F = < v_3, v_4 >$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E = F$.

Exercice n°18

Soient $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2,-2,-1)$, $u_3 = (1,1,-1)$ et les ensembles $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$ et $F = < u_1, u_2 >$.
1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis en déterminer une base.
2. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre?
3. A-t-on $u_3 \in F$, $u_3 \in E$?
4. Le vecteur $v = (-1,7,5)$ est-il dans E, dans F?
5. Donner une base de $E \cap F$.

Exercice n°19

Discuter suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le rang de la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ où $v_1 = (a,1,1)$, $v_2 = (1,a,1)$, $v_3 = (1,1,a)$.

Exercice n°20

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère $x = (1,2,3,4)\,, y = (2,2,2,6)\,, z = (0,2,4,4)\,, u = (1,0,-1,2)\,, v = (2,3,0,-1)\,.$ $F =< x, y, z >$ et $G =< u, v >$.

$a)$ Déterminer une base de F sur $\mathbb{R}$ et une base de G sur $\mathbb{R}$.
$b)$ Déterminer une base de $F+G$ et une base $F \cap G$.
$c)$ Vérifier que $\dim_{\mathbb{K}}(F+G) + \dim_{\mathbb{K}}(F\cap G) = \dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} G$.

Exercice n°21

Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) une famille de $\mathbb{R}^4$ avec $x_1 = (1,1,1,1)\,, x_2 = (0,1,2,-1)\,,$
$x_3 = (1,0,-2,3)\,, x_4 = (2,1,0,-1)\,.$
Déterminer $rg\,(x_1, x_2, x_3, x_4)\,.$

Exercice n°22

Dans le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ déterminer le rang de la famille (f, g, h) dans les cas suivants.
$i)$ $f(t) = \exp(t)$, $g(t) = \sin t$, $h(t) = t^2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
$ii)$ $f(t) = \sin(t)$, $g(t) = \cos t$, $h(t) = \cos(t + \frac{\pi}{3})$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
$iii)$ $f(t) = \exp(t)$, $g(t) = \exp(2t)$, $h(t) = t$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice n°23

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivant $u = (1, a, a^2)$, $v = (1, b, b^2)$ et $w = (1, c, c^2)$. A quelle condition la famille (u, v, w) forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice n°24

Soient $E = \mathbb{R}_3[X]\,, \mathcal{B} = (e_i = X^i; 0 \leq i \leq 3)$ sa base canonique et

$$u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \longrightarrow & XP'' + P' \end{array}.$$

1. Vérifier que $u \in \mathcal{L}(E)$.
2. Calculer $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$.

Exercice n°25

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont munis des bases canoniques respectives $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$.

1. Justifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que

$f(1,0,0) = (0,1), f(1,1,0) = (1,0), f(1,1,1) = (1,1).$

2. Exprimer $f(x, y, z)$ et déterminer son noyau et son image.

Exercice n°26

On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ donnée par $e'_1 = 2e_1 + e_3$, $e'_2 = e_1 - 5e_2 + 6e_3$, $e'_2 = 8e_1 - 10e_2 + e_3$.

On considère l'application linéaire f l'application linéaire définie par

$f(e_1) = e'_1 - 2e'_2 + e'_3$, $f(e_2) = 5e'_1 - 6e'_3$, $f(e_3) = e'_1 + 3e'_3$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est une base et donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'}$.

2. Donner la matrice $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Exercice n°27

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $u_1 = (2, -1, -2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (-2, 1, 3)$ forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices de passage d'une base à l'autre.

3. Calculer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3 vers \mathrm{R}\ ^3$ définie par:

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:f$(x, y, z) = (2x + y - z, 4x + 2y - 4z, 4x + y - 3z)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2) Donner la matrice $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B})$ de f par rapport à la base canonique $\mathcal{B}(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

3) Soient $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2(1, 0, 1)$ et $v_3 = (0, 1, 1)$.

Calculer: $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3.

4) En déduire que $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5) Donner la matrice $D = \mathcal{M}(f, \mathcal{C})$ de f par rapport à la base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

6) Déterminer une matrice carrée inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}^3)$ telle que:

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

7) Calculer l'inverse A^{-1} de A en fonction de P et D.
8) Calculer l'inverse P^{-1} de P.
9) En déduire:
a) l'inverse A^{-1} de A.
b) la réciproque f^{-1} de f.

Exercice n°28

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ $f(x, y, z, t) = (3x + 6y + 5z + 21t, 2x + 4y + 3z + 13t, x + 2y + z + 5t)$.
1) Donner la matrice A de f par rapport à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
2) Trouver une base de $\operatorname{Im} f$ et le rang de f.
3) En déduire $\dim \ker f$.
4) Trouver $\ker f$.
5) Montrer que: $vect(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \oplus \ker f = \mathbb{R}^4$.
6) Soit (u, v) une base quelconque de $\ker f$.
Montrer que $\mathcal{C}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_3, u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
7) Soit $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $w \notin \operatorname{Im} f$.
Montrer que $\mathcal{B}' = (f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_3), w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8) Déterminer la matrice A' de f par rapport à $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.

Exercice n°29

1. Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 4, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E sur $\mathbb{R}$. On donne $v_1 = 5e_1 + 2e_2 + 4e_3 + 7e_4; v_2 = 3e_1 + 2e_2 + e_4; v_3 = e_1 + 2e_3 + 3e_4$.

Déterminer un système d'équations cartésiennes de $F =< v_1, v_2, v_3 >$ dans la base $\mathcal{B}$.

2. E est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E sur $\mathbb{R}$. On donne $v_1 = e_1 - e_2 - 5e_3; v_2 = 2e_1 + 3e_2 + 9e_3;$
$v_3 = 3e_1 + 2e_2 + 4e_3$.

Déterminer un système d'équations cartésiennes de $F =< v_1, v_2, v_3 >$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice n°30

Dans $\mathbb{R}^4$, on donne $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3, 4), v_3 = (3, 1, 4, 2)$,
$v_4 = (10, 4, 13, 7)$, et $v_5 = (1, 7, 8, 14)$.

A quelle(s) condition(s) le vecteur (x_1, x_2, x_3, x_4) appartient-il à $F =< v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 >$?

Exercice n°31
Etudions

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} & x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \quad (1) \\ & x & + & 2y & & & + & 2t & = & 2 \quad (2) \\ - & x & & & + & 2z & + & t & = & 3 \quad (3) \end{array}\right. .$$

Exercice n°32
Etudions

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 2 \quad (1) \\ x & + & y & + & 2z & = & 3 \quad (2) \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 3 \quad (3) \end{array}\right. .$$

Exercice n°33
Résoudre le système linéaire

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & -3 \\ & & 5y & - & 3z & = & 7 \\ 3x & + & 2y & & & = & -2 \end{array}\right. .$$

Exercice n°34
Etudions le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcc} mx & + & y & = & m \\ mx & - & y & = & m+1 \\ x & + & my & = & m-1 \end{array}\right. .$$

Exercice n°35
Etudions le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & mz & = & m \\ x & + & my & - & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice n°36
Etudions le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & & & = & a \\ x & & & + & 2z & = & 0 \end{array}\right. .$$

Exercice n°37
On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique. Soit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x-z, -3x+y+3z) \end{array} .$$

1. Déterminer une base de $\ker\varphi$ et en déduire la dimension de $\operatorname{Im}\varphi$.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique et
(a) vérifier que les vecteurs colonnes de A sont liés et en déduire une base de $\operatorname{Im}\varphi$.
(b) vérifier que $\ker\varphi$ est orthogonal (pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$) aux vecteurs lignes de A.
3. L'équation $\varphi(x,y,z) = (1,-2,-1)$ a-t-elle des solutions? Faire deux preuves différentes.
4. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(x,y,z) = (1,2,-3)$?
Plus généralement, décrire l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(x,y,z) = Y$, lorsque $Y \in \operatorname{Im}\varphi$.