–

# Travaux dirigés n° 3 d'Analyse 2

*Équations différentielles*

## Consignes

Les exercices doivent être préparés et résolus par les étudiants.

**EXERCICE 1** Résoudre les équations différentielles :

1. $y' \ln^2(y) = 3yx^2$
2. $y' + y = 2\sqrt[3]{y}$
3. $y' = \left(\dfrac{x}{y}\right)^4$
4. $y' = \dfrac{y}{x} \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$

**EXERCICE 2** Préciser les intervalles sur lesquels on peut résoudre l'équation différentielle

$$x(x^2+1)y' - 2y = x^3(x-1)\mathrm{e}^{-x},$$

puis la résoudre sur chacun de ces intervalles.

**EXERCICE 3** Soit l'équation différentielle suivante :

$$y' + \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}y = 2\sin(x). \tag{E}$$

Trouver la solution $f$ de l'éqation différentielle $(E)$ vérifiant $f(0) = 2$.

**EXERCICE 4** Soit $f$ la solution de l'équation différentielle

$$2(x-1)y' + y = \sin(2x) + x^2$$

vérifiant $f(0) = 0$. Calculer $f^{(4)}(0)$.

**EXERCICE 5** Résoudre les équations différentielles :

1. $y' + \dfrac{1}{x}y = y^2 x\mathrm{e}^x$.
2. $-yy' = (x-1)(1-y^2)$
3. $xy' + y - xy^2 \ln x = 0$

**EXERCICE 6** Résoudre les équations différentielles :

1. $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$.
2. $(1-x^3)y' + x^2y + y^2 - 2x = 0$

**EXERCICE 7** Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = x$
2. $y'' + 5y' + 4y = x\mathrm{e}^{-x}$.
3. $y'' - 6y' + 9y = (x+1)\mathrm{e}^{-3x}$
4. $y'' - 4y' + 5y = \mathrm{e}^{2x}\sin(x)$.

**EXERCICE 8** Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y' - 6y = x^2 + 2\mathrm{e}^{2x} \tag{E}$$

Trouver la solution $f$ de l'équation $(E)$ vérifiant $f(0) = f'(0) = 0$

**EXERCICE 9** Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y' = \sin(x) + \cos(x) \tag{E}$$

Trouver la solution $f$ de l'équation $(E)$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

**EXERCICE 10** Soit l'équation différentielle suivante :

$$x(1+x^2)y' - (x^2-1)y = -2x. \tag{E}$$

1. Résoudre l'équation l'équation $(E)$ sur chacun des intervalles $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.
2. Déterminer l'unique solution de l'équation $(E)$ définie sur $\mathbb{R}$.

**EXERCICE 11** On considère l'équation différentielle

$$x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1 \tag{1}$$

1. Quelle équation différentielle en $u$ obtient-on en faisant le changement de variable $u = x^2y$ dans l'équation (1).
2. Résoudre l'équation différentielle en $u$ obtenue.
3. En déduire la solution générale de l'équation (1) sur un intervalle $I$ ne contenant pas 0.
4. Existe-t-il une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (1).

**EXERCICE 12** Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + x\mathrm{e}^x \\ y_2' = -y_1 + x \end{cases}$$

c'est-à-dire déterminer toutes les fonctions $y_1$ et $y_2$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux égalités.