UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA

UFR des Sciences Fondamentales et Appliquées

Licence 1 : MI et PC

Travaux dirigés n° 1 d'Analyse 2

Thème : Propriétés générales

Durée : Deux séances maximales

EXERCICE 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour les questions qui suivent, lorsque la réponse est négative, on donnera une condition nécessaire et suffisante qu'elle soit exacte.

1. Si f est impaire, ses primitives sont-elles paires ?
2. Si f est paire, ses primitives sont-elles impaires ?
3. S'il existe un réel T tel que f soit T-périodique, ses primitives sont-elle T-périodique ?

EXERCICE 2

Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_0^{50} \mathrm{E}(x)\mathrm{d}x, \quad J = \int_0^{50} \mathrm{E}(\sqrt{x})\mathrm{d}x \quad K = \int_0^{2\pi} \mathrm{E}(2\sin x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad L_n = \int_0^1 \mathrm{E}(x)\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

EXERCICE 3

On considère deux fonctions f et g continues sur un segment $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose de plus que la fonction g est positive sur $[a, b]$. Démontrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

EXERCICE 4

Soit f une fonction à valeur réelle et continue sur $[-a, a]$ où $a > 0$.

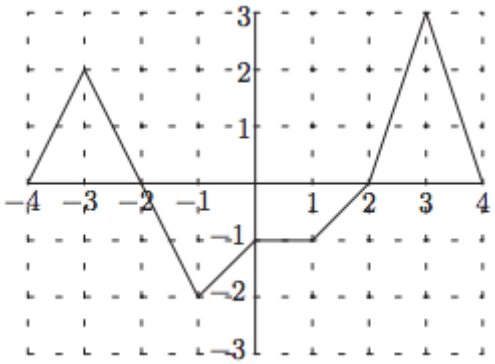
1. Montrer que si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.
2. Montrer que si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

EXERCICE 5

Soit f une fonction à valeur réelle et continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n, m \in \mathbb{Z}$. Montrer que

1. $\displaystyle\int_{nT}^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_a^{a+nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_{mT}^{nT} f(x)\mathrm{d}x = (m-n)\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$
5. $\displaystyle\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

EXERCICE 6

Sur la figure ci-dessous est représentée graphiquement une fonction f sur l'intervalle $[-4, 4]$. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-4}^{4} |f(x)|\mathrm{d}x$:

1. à l'aide des aires de figures géométriques.
2. en déteminant explicitement $f(x)$ pour tout $x \in [-4, 4]$.