Sommes directes et changements de bases

Table des matières

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.
Selon le programme, “en pratique, $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$”.

1 Somme de sous-espaces vectoriels

Notation. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.1 Sommes et sommes directes

Définition. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{1\le i\le k}$ une famille de k sous-espaces vectoriels de E.
On note $E_1 + \cdots + E_k = \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)$.

Propriété. Avec les notations précédentes,

$$E_1 + \cdots + E_k = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i \ / \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \quad x_i \in E_i \right\}.$$

Démonstration.
Notons $F = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i \ / \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \quad x_i \in E_i \right\}$.

• Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $0 \in E_i$, donc $0 = \sum_{i=1}^{k} 0 \in F$. Ainsi, $F \neq \emptyset$.
Soit $(\alpha, \beta, x, y) \in \mathbb{K}^2 \times F^2$. Il existe $(x_i)_{1\le i\le k} \in E_1 \times \cdots \times E_k$ et
$(y_i)_{1\le i\le k} \in E_1 \times \cdots \times E_k$ tels que $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{k} y_i$.
$\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{k} (\alpha x_i + \beta y_i) \in F$, donc F est stable par combinaison linéaire.
Ainsi, F est un sous-espace vectoriel.

• Soit $x \in \bigcup_{i=1}^{k} E_i$. Il existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $x \in E_j$.
Pour $i = j$, posons $x_i = x$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{j\}$, posons $x_i = 0$.
$(x_i)_{1\le i\le k} \in E_1 \times \cdots \times E_k$ et $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$, donc $x \in F$.
Ainsi F contient $\bigcup_{i=1}^{k} E_i$.

• Soit G un sous-espace vectoriel qui contient $\bigcup_{i=1}^{k} E_i$.

Si $(x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$, $\sum_{i=1}^{k} x_i \in G$, donc $F \subset G$.

Ainsi F est bien le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\bigcup_{i=1}^{k} E_i$. $\square$

Exemples. Si F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $F + \{0\} = F = F + F$.

Notation. On note également, $E_1 + \cdots + E_k = \sum_{i=1}^{k} E_i$.

Définition. On dit que la somme précédente est ***directe*** si et seulement si

$$\forall (x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k \quad \left(\sum_{i=1}^{k} x_i = 0 \Longrightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, k\} \;\; x_i = 0) \right).$$

Dans ce cas, la somme est notée $E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$ ou encore $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} E_i$.

Remarque. k sous-espaces vectoriels non nuls de E notés $E_1, \ldots, E_k$ sont en somme directe si et seulement si pour tout $(x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$, avec pour tout i, $x_i \neq 0$, la famille $(x_1, \ldots, x_k)$ est libre.
Les notions de famille libre et de somme directe sont donc très proches.

Propriété.

Reprenons les notations ci-dessus. $\sum_{i=1}^{k} E_i$ est une somme directe si et seulement si

$\forall x \in \sum_{i=1}^{k} E_i$, $\exists! (x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k \quad x = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

Démonstration.

Notons $\varphi \;:\; E_1 \times \cdots \times E_k \longrightarrow \sum_{i=1}^{k} E_i$ l'application définie par : $\varphi(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

On vérifie que φ est linéaire. Elle est surjective par définition de $\sum_{i=1}^{k} E_i$.

De plus, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k \;/\; \sum_{i=1}^{k} x_i = 0 \right\}$.
Ainsi, la somme est directe si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$, donc si et seulement si φ est injective, c'est-à-dire bijective, ce qui est équivalent à l'existence, pour tout $x \in \sum_{i=1}^{k} E_i$, d'un unique $(x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$ tel que $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$. $\square$

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, notons $E_i = \mathrm{Vect}(c_i)$. Alors $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.

1.2 Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

Propriété. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ forment une somme directe si et seulement si } F \cap G = \{0\}.}$$

Démonstration.

- Supposons que F et G forment une somme directe.

Soit $x \in F \cap G$. $0 = x + (-x)$ avec $x \in F$ et $-x \in G$, donc $x = 0$. Ainsi $F \cap G \subset \{0\}$.

- Réciproquement, supposons que $F \cap G = \{0\}$.

Soit $(x, y) \in F \times G$ tel que $x + y = 0$. Alors $x = -y \in F \cap G$, donc $x = y = 0$. □

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

$$\boxed{\text{Si } x \in E \setminus F,\ F \text{ et } \mathbb{K}x \text{ sont en somme directe.}}$$

Démonstration.

Soit $y \in F \cap \mathbb{K}x$. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$.

Si $\lambda \neq 0$, $x = \frac{1}{\lambda} y \in F$, ce qui est faux, donc $\lambda = 0$, ce qui prouve que $y = 0$.

Ainsi, $F \cap \mathbb{K}x = \{0\}$, donc la somme de F et de $\mathbb{K}x$ est directe. □

Corollaire. Deux droites vectorielles distinctes sont en somme directe.

Démonstration.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et D et D' deux droites vectorielles distinctes de E.

Il existe $(x, x') \in (E \setminus \{0\})^2$ tel que $D = \mathrm{Vect}(x)$ et $D' = \mathrm{Vect}(x')$.

Si $x' \in D$, on montre que $D' = D$, ce qui est faux, donc $x' \in D' \setminus D$. Ainsi D et $D' = \mathbb{K}x'$ sont en somme directe. □

Définition. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont ***supplémentaires*** (dans E) si et seulement si ils vérifient l'une des conditions équivalentes suivantes :

$i)$ $E = F \oplus G$.

$ii)$ $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.

$iii)$ $\forall x \in E \quad \exists! (x_1, x_2) \in F \times G \quad x = x_1 + x_2$.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. F admet au moins un supplémentaire, et pour tout supplémentaire G de F, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Démonstration.
F étant de dimension finie, F possède au moins une base, notée $(e_1, \ldots, e_p)$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Posons $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$.
Soit $x \in E$, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ où $x_i \in \mathbb{K}$.
Alors $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i + \sum_{i=p+1}^{n} x_i e_i \in F + G$, donc $E = F + G$.
Soit $x \in F \cap G$. On peut écrire $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i = \sum_{i=p+1}^{n} x_i e_i$, où les x_i sont des scalaires.
Alors $\sum_{i=1}^{p} x_i e_i - \sum_{i=p+1}^{n} x_i e_i = 0$, or e est une base, donc pour tout i, $x_i = 0$. Ainsi, $x = 0$, puis $F \cap G = \{0\}$. On a ainsi construit un supplémentaire de F. $\square$

Remarque. Tout sous-espace vectoriel de E possède au moins un supplémentaire, si l'on accepte l'axiome du choix, ce qui formellement place ce résultat hors programme.

Exemple. Deux droites vectorielles D et D' dans $\mathbb{K}^2$ sont supplémentaires si et seulement si elles sont distinctes. Il est important de noter que $D \cap D' = \{0\} \neq \emptyset$ et que $D \cup D' \neq \mathbb{K}^2$, ainsi D' n'a aucun rapport avec le *complémentaire de* D. En particulier, le raisonnement "$x \notin D$, donc $x \in D'$" est complètement faux.

Remarque. Plus généralement, les notions d'union d'ensembles et de somme de sous-espaces vectoriels sont très voisines, mais il ne faut pas les confondre.
Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, $A \cup B$ est le plus petit *ensemble* contenant A et B. Si ce sont des sous-espaces vectoriels, $A + B$ est le plus petit *espace vectoriel* contenant A et B.
Ainsi, la somme de sous-espaces vectoriels est à l'algèbre linéaire ce qu'est l'union de parties à la théorie des ensembles.
Cependant, et nous insistons, la somme de deux sous-espaces vectoriels *n'est pas* l'union de ces deux sous-espaces vectoriels.
En particulier, la situation suivante est possible. $E = F \oplus G$, $x \in E$, $x \notin F$ et $x \notin G$.

Propriété. On suppose que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la décomposition de M selon cette somme directe est $M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
De plus $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration.
$\diamond$ Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. De plus, si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, alors $M = {}^tM = -M$, donc $M = 0$. Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

$\diamond$ Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. On sait alors que pour tout i, $M_{i,i} = 0$,
donc (1) : $M = \sum_{1 \leq i,j \leq n} M_{i,j} E_{i,j} = \sum_{1 \leq i<j \leq n} M_{i,j}(E_{i,j} - E_{j,i})$, or pour tout i, j,
$E_{i,j} - E_{j,i} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, donc $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i<j \leq n}$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
De plus si $\sum_{1 \leq i<j \leq n} M_{i,j}(E_{i,j} - E_{j,i}) = 0$, pour une famille de scalaires $(M_{i,j})_{1 \leq i<j \leq n}$, en posant pour $i > j$, $M_{i,j} = -M_{j,i}$ et pour $i = j$, $M_{i,i} = 0$, la relation (1) affirme que $(M_{i,j}) = 0$, donc $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n}$ est libre. C'est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, dont la dimension vaut donc $|\{(i,j) \in \mathbb{N}/1 \leq i < j \leq n\}| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. $\square$

Remarque. Lorsque $\text{car}(\mathbb{K}) = 2$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$.
Montrer que l'idéal $P\mathbb{K}[X]$ est un supplémentaire de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

Solution : D'après le principe de la division euclidienne, pour tout $S \in \mathbb{K}[X]$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $S = PQ + R$ et $deg(R) \leq n$, c'est-à-dire qu'il existe un unique couple $(T, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $S = T + R$, $T \in P\mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_n[X]$.
Ainsi, $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_n[X] \oplus P\mathbb{K}[X]$.

1.3 Propriétés des sommes directes

1.3.1 Un moyen de définir une application linéaire

Théorème. Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille de k sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} E_i$. Soit F un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel et, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, soit u_i une application linéaire de E_i dans F.
Il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que,
pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, la restriction de u à E_i est égale à u_i.
Ainsi, pour définir une application linéaire u de E dans F, on peut se contenter de préciser ses restrictions aux sous-espaces vectoriels E_i.

Démonstration.
$\diamond$ *Unicité.* Supposons qu'il existe une application linéaire u de E dans F telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, la restriction de u à E_i est égale à u_i.

Soit $x \in E$. Il existe un unique $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ tel que, pour tout i, $x_i \in E_i$ et $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

Alors $u(x) = \sum_{i=1}^{k} u(x_i) = \sum_{i=1}^{k} u_i(x_i)$, ce qui prouve l'unicité : u est nécessairement l'application qui à $x \in E$ associe $\sum_{i=1}^{k} u_i(x_i)$ où $\sum_{i=1}^{k} x_i$ est l'unique décomposition de x

dans $\bigoplus_{1\leq i\leq k} E_i$.

$\diamond$ *Existence.* Notons u l'application ainsi définie. Il est clair que pour tout i, $u|_{E_i} = u_i$. Il reste à montrer que u est linéaire.

Soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Ecrivons $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{k} y_i$, avec pour tout i, $x_i, y_i \in E_i$.

Alors $\alpha x + y = \sum_{i=1}^{k}(\alpha x_i + y_i)$, donc par définition de u,

$u(\alpha x + y) = \sum_{i=1}^{k} u_i(\alpha x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{k}[\alpha u_i(x_i) + u(y_i)]$,

donc $u(\alpha x + y) = \alpha \sum_{i=1}^{k} u_i(x_i) + \sum_{i=1}^{k} u_i(y_i) = \alpha u(x) + u(y)$. $\square$

Remarque. La propriété précédente signifie que $\begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & \prod_{i=1}^{k} L(E_i, F) \\ u & \longmapsto & (u_{/E_i})_{1\leq i\leq k} \end{array}$ est un isomorphisme, la linéarité étant simple à démontrer.

1.3.2 Formules dimensionnelles

Propriété. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $E_1, \ldots, E_k$ k sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, $\dim\Big(\sum_{i=1}^{k} E_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i)$,

$\boxed{\text{avec égalité si et seulement si la somme est directe}}$.

Démonstration.

L'application $\begin{array}{cccc} \varphi : & \prod_{i=1}^{k} E_i & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{k} E_i \\ & (x_1, \ldots, x_k) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{k} x_i \end{array}$ est linéaire et surjective,

donc $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_i) = \dim\Big(\prod_{i=1}^{k} E_i\Big) \geq \dim\Big(\sum_{i=1}^{k} E_i\Big)$.

De plus, il y a égalité des dimensions si et seulement si φ est injective, donc si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$, ce qui signifie que $\sum_{i=1}^{k} E_i$ est une somme directe. $\square$

Remarque. Ainsi, lorsque E est de dimension finie, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, ils sont supplémentaires dans E si et seulement si $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Exercice. A et B sont deux sous-espaces vectoriels de E.
On suppose que A' est un supplémentaire de $A \cap B$ dans A et que B' est un supplémentaire de $A \cap B$ dans B.
Montrer que $A + B = (A \cap B) \oplus A' \oplus B'$.

Solution :
• Montrons que $A + B = (A \cap B) + A' + B'$.
⋄ Les trois sous-espaces vectoriels A', B' et $A \cap B$ sont inclus dans $A + B$, donc $(A \cap B) + A' + B' = \text{Vect}((A \cap B) \cup A' \cup B')$ est un sous-espace vectoriel de $A + B$.
⋄ Soit $x \in A + B$. Il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$.
$A = (A \cap B) \oplus A'$, donc il existe $(\alpha, a') \in (A \cap B) \times A'$ tel que $a = \alpha + a'$. De même, il existe $(\beta, b') \in (A \cap B) \times B'$ tel que $b = \beta + b'$.
Ainsi $x = (\alpha + \beta) + a' + b' \in (A \cap B) + A' + B'$, donc $A + B \subset (A \cap B) + A' + B'$.
• Soit $(\alpha, a', b') \in (A \cap B) \times A' \times B'$ tel que $\alpha + a' + b' = 0$.
$a' = -\alpha - b' \in B$ et $a' \in A'$, donc $a' \in A' \cap (A \cap B)$, or $A' \cap (A \cap B) = \{0\}$ car A' et $A \cap B$ sont supplémentaires dans A. Ainsi, $a' = 0$. De même, on montre que $b' = 0$. On en déduit que $\alpha = 0$, donc la somme est bien directe.

Formule de Grassmann : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies. Alors $F + G$ est de dimension finie et $\boxed{\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)}$.

Démonstration.
Reprenons l'exercice précédent et supposons que A et B sont de dimensions finies. Alors $A + B = (A \cap B) \oplus A' \oplus B'$ est de dimension finie et
$\dim(A + B) = \dim(A \cap B) + \dim(A') + \dim(B')$, or par définition de A' et de B', $\dim(A') = \dim(A) - \dim(A \cap B)$ et $\dim(B') = \dim(B) - \dim(A \cap B)$.
Ainsi, $\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$. □

Remarque. Cette formule est analogue à la formule donnant le cardinal d'une réunion de deux ensembles finis A et B : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Cette dernière formule se généralise à une union de p ensembles finis : c'est la formule du crible. On peut noter que la formule du crible ne s'adapte pas au cadre des dimensions de sous-espaces vectoriels : on peut trouver 3 sous-espaces vectoriels F, G et H d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel tels que

$$\begin{aligned}\dim(F + G + H) \neq\ & \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) \\ & - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) \\ & + \dim(F \cap G \cap H).\end{aligned}$$

Il suffit en effet de prendre 3 droites deux à deux distinctes d'un plan vectoriel.

1.3.3 Associativité des sommes directes

Propriété. ***Associativité d'une somme directe.***
Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_k$ k sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Soit $(I_i)_{1 \leq i \leq p}$ une partition de $\{1, \ldots, k\}$.

$E_1, \dots, E_k$ forment une somme directe si et seulement si

$$\begin{array}{rll} i) & \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (E_j)_{j \in I_i} & \text{forment une somme directe,} \\ \text{et } ii) & \Big(\bigoplus_{j \in I_i} E_j\Big)_{i \in \{1, \dots, p\}} & \text{forment une somme directe.} \end{array}$$

Exemple. On peut écrire $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4$ si et seulement si on peut écrire $E_1 \oplus E_2$, $E_3 \oplus E_4$ et $(E_1 \oplus E_2) \oplus (E_3 \oplus E_4)$, ou bien si et seulement si on peut écrire $E_1 \oplus E_2$, $(E_1 \oplus E_2) \oplus E_3$ et $((E_1 \oplus E_2) \oplus E_3) \oplus E_4$.

Démonstration.

- Supposons que $E_1, \dots, E_k$ forment une somme directe.

◇ Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Soit $(x_j)_{j \in I_i}$ une famille de vecteurs telle que $\forall j \in I_i \ \ x_j \in E_j$ et $\displaystyle\sum_{j \in I_i} x_j = 0$.

Complétons à l'aide de vecteurs nuls cette famille en une famille $(x_j)_{1 \leq j \leq k}$. Ainsi $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j = 0$, mais $E_1, \dots, E_k$ forment une somme directe, donc la famille $(x_j)_{1 \leq j \leq k}$ est nulle. Ainsi $\forall j \in I_i \ \ x_j = 0$, ce qui prouve i).

◇ Soit $(y_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de vecteurs telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $y_i \in \displaystyle\bigoplus_{j \in I_i} E_j$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i = 0$.

Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Il existe une famille $(x_j)_{j \in I_i}$ telle que $\forall j \in I_i \ \ x_j \in E_j$ et $y_i = \displaystyle\sum_{j \in I_i} x_j$.

Ainsi $0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j \in I_i} x_j = \sum_{j=1}^{k} x_j$, or $E_1, \dots, E_k$ forment une somme directe, donc la famille $(x_j)_{1 \leq j \leq k}$ est nulle. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $y_i = 0$, ce qui prouve ii).

- Réciproquement, supposons que i) et ii) sont vraies.

Soit $(x_1, \dots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$ tel que $\displaystyle\sum_{h=1}^{k} x_h = 0$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, posons $y_i = \displaystyle\sum_{j \in I_i} x_j$. Ainsi, $y_i \in \displaystyle\bigoplus_{j \in I_i} E_j$.

$0 = \displaystyle\sum_{h=1}^{k} x_h = \sum_{i=1}^{p} y_i$ et d'après ii), $\Big(\displaystyle\bigoplus_{j \in I_i} E_j\Big)_{1 \leq i \leq p}$ forment une somme directe, donc, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $y_i = 0$.

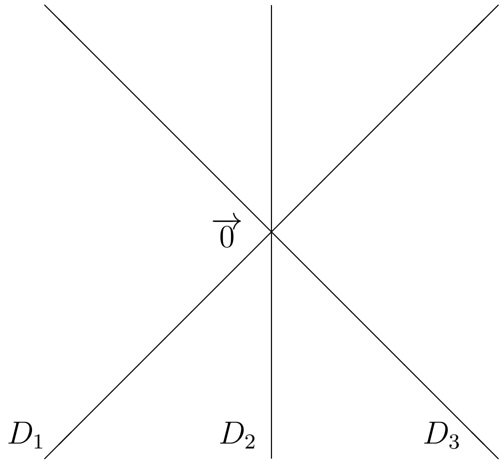
Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. $0 = y_i = \displaystyle\sum_{j \in I_i} x_j$ et $(E_j)_{j \in I_i}$ forment une somme directe, donc pour tout $j \in I_i$, $x_j = 0$.

Ainsi, pour tout $h \in \{1, \dots, k\}$, $x_h = 0$, ce qui prouve que $E_1, \dots, E_k$ forment une somme directe. □

Théorème. Soient k un entier supérieur ou égal à 2, et $(E_i)_{1\le i\le k}$ une famille de k sous-espaces vectoriels de E. $E_1, \dots, E_k$ sont en somme directe si et seulement si $\forall i \in \{2, \dots, k\}$ $E_i \bigcap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0\}$.

Démonstration.
Effectuons une démonstration par récurrence.
Soit $k \ge 2$. Notons $R(k)$ l'assertion suivante : pour tout k-uplet $(E_1, \dots, E_k)$ de sous-espaces vectoriels de E, $E_1, \dots, E_k$ forment une somme directe si et seulement si $\forall i \in \{2, \dots, k\} \quad E_i \bigcap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0\}$.
Pour $k = 2$, on a déjà montré $R(2)$ page 4, au début du paragraphe 1.2.
Pour $k \ge 2$, supposons $R(k)$.
Soit $(E_1, \dots, E_{k+1})$ un $(k+1)$-uplet de sous-espaces vectoriels de E.
D'après l'associativité de la somme directe, $(E_1, \dots, E_{k+1})$ forment une somme directe si et seulement si $(E_1, \dots, E_k)$ forment une somme directe et si E_{k+1} et $\sum_{j=1}^{k} E_j$ forment une somme directe, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $i \in \{2, \dots, k\}$, $E_i \bigcap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0\}$ (d'après $R(k)$) et si $E_{k+1} \bigcap \sum_{j=1}^{k} E_j = \{0\}$ (d'après $R(2)$).
Ceci prouve $R(k+1)$. □

Figure.



Remarque. Une erreur fréquente est de croire que $(E_i)_{1\le i\le k}$ constitue une somme directe si et seulement si, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, k\}$, avec $i \ne j$, $E_i \cap E_j = \{0\}$.
C'est faux. En effet, la figure représente trois droites vectorielles d'un plan vectoriel P, notées D_1, D_2 et D_3. On sait qu'elles sont deux à deux en somme directe, donc $D_1 \cap D_2 = D_1 \cap D_3 = D_2 \cap D_3 = \{0\}$. Cependant, D_1, D_2 et D_3 ne sont pas en somme directe, car il est facile de dessiner sur la figure ci-dessus 3 vecteurs non nuls sur D_1, D_2 et D_3 dont la somme est nulle.

1.3.4 Base adaptée à une décomposition en somme directe

Théorème. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $(e_i)_{i\in I}$. Soit $(I_k)_{1\leq k\leq n}$ une partition de I. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose $E_k = \text{Vect}(e_i)_{i\in I_k}$. Alors $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$.

Démonstration.

• Soit $x \in E$. il existe $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$.

$x = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i\in I_k} \alpha_i e_i \right) \in \sum_{k=1}^{n} E_k$, ainsi $E = \sum_{k=1}^{n} E_k$.

• Soit $(x_k)_{1\leq k\leq n} \in E_1 \times \cdots \times E_n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$.

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe $(\alpha_i)_{i\in I_k} \in \mathbb{K}^{(I_k)}$ telle que $x_k = \sum_{i\in I_k} \alpha_i e_i$.

Ainsi $0 = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$, or (e_i) est une famille libre, donc, pour tout $i \in I$, $\alpha_i = 0$. Ainsi, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k = 0$, ce qui prouve que la somme est directe. □

Théorème réciproque. Soit $(E_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on suppose que E_k admet une base b_k. Alors la concaténation des bases $(b_k)_{1\leq k\leq n}$, notée b, est une base de E. On dit que b est une ***base adaptée à la décomposition en somme directe*** $E = \bigoplus_{k=1}^{n} E_k$.

Démonstration.

• Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Notons $b_k = (e_i)_{i\in I_k}$. On peut supposer que les I_k sont deux à deux disjoints. Notons $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$. Ainsi $b = (e_i)_{i\in I}$. C'est en ce sens que b est la concaténation des bases $(b_k)_{1\leq k\leq n}$.

• Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $\sum_{i\in I} \alpha_i e_i = 0$.

$0 = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i\in I_k} \alpha_i e_i \right)$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i\in I_k} \alpha_i e_i \in E_k$. Or $E_1, \dots, E_n$ forment une somme directe, donc, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i\in I_k} \alpha_i e_i = 0$. De plus, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $b_k = (e_i)_{i\in I_k}$ est libre, donc, pour tout $i \in I$, $\alpha_i = 0$, ce qui prouve que b est une famille libre.

• Soit $x \in E$. Il existe $(x_k)_{1\leq k\leq n} \in E_1 \times \cdots \times E_n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $(\alpha_i)_{i \in I_k} \in \mathbb{K}^{(I_k)}$ telle que $x_k = \sum_{i \in I_k} \alpha_i e_i$.

Ainsi $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$, ce qui prouve que b est une famille génératrice. $\square$

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.
On appelle ***base adaptée*** à F toute base obtenue par "réunion" d'une base de F avec une base d'un supplémentaire de F, c'est-à-dire toute base de E obtenue en complétant une base de F.

1.4 Les projecteurs

Définition. $p \in L(E)$ est un ***projecteur*** si et seulement si $p^2 = p$.

Propriété. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Pour $x \in E$, on note $(p(x), q(x))$ l'unique couple de $F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$.
p et q sont des projecteurs.
p est appelé le projecteur sur F parallèlement à G, et q le ***projecteur associé*** à p.
On vérifie que $p + q = Id_E$ et $pq = qp = 0$.

Figure.

Démonstration.
◇ Soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Alors $x = p(x) + q(x)$ et $y = p(y) + q(y)$, donc $\alpha x + y = (\alpha p(x) + p(y)) + (\alpha q(x) + q(y))$ et $((\alpha p(x) + p(y)), (\alpha q(x) + q(y))) \in F \times G$. D'autre part, $\alpha x + y = p(\alpha x + y) + q(\alpha x + y)$ avec $(p(\alpha x + y), q(\alpha x + y)) \in F \times G$, donc d'après l'unicité de la décomposition d'un vecteur selon $F \oplus G$, $p(\alpha x + y) = \alpha p(x) + p(y)$ et $q(\alpha x + y) = \alpha q(x) + q(y)$.
On a montré que $p, q \in L(E)$.
◇ Soit $x \in E$. $p(x) \in F$, donc $p(p(x)) = p(x)$. De même, $q(q(x)) = q(x)$. Ainsi, p et q sont des projecteurs.
◇ Par définition, pour tout $x \in E$, $x = p(x) + q(x)$, donc $p + q = Id_E$.
◇ Soit $x \in E$. $p(x) \in F$, donc $q(p(x)) = 0$. Ainsi, $q \circ p = 0$. De même, $p \circ q = 0$. $\square$

Exemples.
- Id_E est le projecteur sur E parallèlement à $\{0\}$.
- $0_{L(E)}$ est le projecteur sur $\{0\}$ parallèlement à E.
- L'application $p_1 : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$ définie par $p_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ est la projection sur la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ parallèlement à celle engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. L'application qui à $P \in \mathbb{K}[X]$ associe son reste pour la division euclidienne de P par Q est la projection sur $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ parallèlement à l'idéal engendré par Q.

Propriété réciproque. Soit p un projecteur de E. Alors
p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Pour tout $x \in E$, la décomposition de x selon la somme directe $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ est $x = p(x) + (x - p(x))$, avec $p(x) \in F = \mathrm{Im}(p)$ et $x - p(x) \in G = \mathrm{Ker}(p)$.
Pour tout $x \in E$, $\boxed{x = p(x) \Longleftrightarrow x \in F}$: $F = \mathrm{Ker}(Id_E - p)$.

Démonstration.
Posons $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$.
$\diamond$ Soit $x \in E$ tel que $p(x) = x$. Alors $x \in \mathrm{Im}(p) = F$.
Réciproquement, si $x \in F = \mathrm{Im}(p)$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$, donc $p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$ car p est un projecteur.
Ainsi $x \in F \Longleftrightarrow p(x) = x$ et $\mathrm{Im}(p) = F = \mathrm{Ker}(Id_E - p)$.
$\diamond$ Soit $x \in E$. $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0$, car p est un projecteur, donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. De plus $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, donc $x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in G}$.
Ceci démontre que $E = F + G$.
$\diamond$ Soit $x \in F \cap G$. Alors $p(x) = x$ et $p(x) = 0$, donc $x = 0$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$.
On a montré que $E = F \oplus G$.
$\diamond$ On peut donc considérer le projecteur u sur F parallèlement à G.
Soit $x \in E$. On a vu que $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$, donc $u(x) = p(x)$. Ainsi, $p = u$. $\square$

Exercice. On note $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $p(x, y) = \Big(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\Big)$. Montrer que p est un projecteur et déterminer son noyau et son image.

Solution :
Première méthode : On vérifie que p est un endomorphisme et que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $p^2(x, y) = p\Big(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\Big) = \Big(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\Big)$, donc p est bien un projecteur.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $p(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x+y}{2} = 0 \Longleftrightarrow (x, y) \in \mathrm{Vect}(1, -1)$, donc $\mathrm{Ker}(p)$ est la droite vectorielle engendrée par $(1, -1)$.
$p(x, y) = (x, y) \Longleftrightarrow \frac{x-y}{2} = 0$, donc $\mathrm{Im}(p)$ est la droite vectorielle engendrée par $(1, 1)$.
Ainsi, p est la projection sur la première diagonale parallèlement à la seconde diagonale.
Seconde méthode : Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
(1) : $(x, y) = \Big(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\Big) + \Big(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}\Big)$,
or $\Big(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\Big) \in D = \mathrm{Vect}(1, 1)$ et $\Big(\frac{x-y}{2}, -\frac{x-y}{2}\Big) \in D' = \mathrm{Vect}(1, -1)$, donc (1) correspond à la décomposition de (x, y) selon la somme directe $\mathbb{R}^2 = D \oplus D'$ (les deux droites D et D' sont distinctes, donc en somme directe, et $\dim(D \oplus D') = 2$, donc $\mathbb{R}^2 = D \oplus D'$). Ainsi p est la projection sur D parallèlement à D'.

ATTENTION : Pour un endomorphisme quelconque $u \in L(E)$, $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ peuvent ne pas être supplémentaires. D'ailleurs on rencontre assez souvent des endomorphismes u tels que $u^2 = 0$, auquel cas $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Définition. $s \in L(E)$ est une ***symétrie*** si et seulement si $s^2 = Id_E$.

Propriété. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
L'unique application s de E dans E telle que, pour tout $f, g \in F \times G$, $s(f+g) = f - g$ est une symétrie, appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Si l'on note p le projecteur sur F parallèlement à G, et q le projecteur associé à p, alors $s = p - q = 2p - Id_E$.

Figure.

Démonstration.
On sait que $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $pq = qp = 0$, donc $s^2 = p^2 + q^2 - pq - qp = p + q = Id_E$.
□

Exemple. L'application $s : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$ définie par $s\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ est la symétrie par rapport à la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ parallèlement à celle engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ pouvant être identifiés par : $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$, l'application précédente devient $z \longmapsto \overline{z}$: c'est la symétrie par rapport à la droite des réels parallèlement à la droite des imaginaires purs, en regardant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple. Lorsque $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'application $s \in L(E)$ définie par $s(f)(x) = f(-x)$ est une symétrie car $s^2 = Id_E$.
Si l'on note $\mathcal{P}$ (resp : $\mathcal{I}$) l'ensemble des fonctions paires (resp : impaires) de E dans E, pour tout $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \in \mathcal{P} + \mathcal{I}$. On en déduit que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ et que la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$ est définie par $p(f)(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$. Son projecteur associé est défini par $q(f)(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$, donc $s = p - q$ est la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$.

Propriété réciproque. On suppose que $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.
Pour toute symétrie s de E, il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G tels que s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Il s'agit de $F = \mathrm{Ker}(Id_E - s)$ et de $G = \mathrm{Ker}(Id_E + s)$.

Démonstration.
Posons $p = \frac{1}{2}(s + Id_E)$. On sait que $s^2 = Id_E$, donc
$p^2 = \frac{1}{4}(s^2 + Id_E + 2s) = \frac{1}{2}(Id_E + s) = p$. Ainsi p est un projecteur.
Posons $F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(Id_E - p) = \mathrm{Ker}(Id_E - s)$ et $G = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(Id_E + s)$.
On sait que $E = F \oplus G$ et que p est le projecteur sur F parallèlement à G, donc $s = p - q$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. □

Remarque. Cette réciproque est fausse lorsque car$(\mathbb{K}) = 2$. En effet dans ce cas, si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G (où $E = F \oplus G$), alors pour tout $(f, g) \in F \times G$, $s(f + g) = f - g = f + g$, car $1_{\mathbb{K}} = -1_{\mathbb{K}}$, donc $s = Id_E$.
Supposons que E de dimension finie $n \geq 2$ et fixons $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe un unique $s \in L(E)$ tel que $s(e_1) = e_2$, $s(e_2) = e_1$ et pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, $s(e_i) = e_i$. Alors $s^2 = s$, donc s est une symétrie, différente de l'identité.

1.5 Sous-espaces propres

Notation. On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $u \in L(E)$.

1.5.1 Définitions

Introduction. Lorsque E est de dimension finie, la réduction de u consiste en la recherche d'une base e de E dans laquelle la matrice de u est aussi simple que possible. On considère que la matrice est d'autant plus simple qu'elle est voisine d'une matrice diagonale. Ainsi, il est intéressant de disposer d'un nombre important d'indices j tels que la $j^{\text{ème}}$ colonne de $Mat(u, e)$ a tous ses coefficients nuls, sauf éventuellement le $j^{\text{ème}}$, c'est-à-dire, en notant $e = (e_1, \ldots, e_n)$, tels que $u(e_j)$ est colinéaire à e_j.
Ceci explique la présence des définitions suivantes.

Définition. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une ***valeur propre*** de u si et seulement s'il existe un vecteur x *non nul* de E tel que $u(x) = \lambda x$.
Dans ce cas, tout vecteur y *non nul* tel que $u(y) = \lambda y$ est appelé un ***vecteur propre*** de u associé à la valeur propre λ.
De plus, toujours lorsque λ est une valeur propre de u, $Ker(\lambda Id_E - u)$ est appelé le ***sous-espace propre*** de u associé à la valeur propre λ. Il est noté E_λ, ou E_λ^u en cas d'ambiguïté.

Remarque. Dans la définition ci-dessus d'une valeur propre, la condition "x *non nul*" est essentielle. En effet, si on l'omettait, tout scalaire deviendrait une valeur propre, car, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $u(0) = \lambda \times 0$.

Remarque. Si λ est une valeur propre de u, l'ensemble des vecteurs propres de u pour la valeur propre λ est $E_\lambda \setminus \{0\}$.

Remarque. Même lorsque λ n'est pas une valeur propre de u, on note parfois
$E_\lambda = Ker(\lambda Id_E - u)$, mais dans ce cas, $E_\lambda = \{0\}$.

Méthode : Pour rechercher les éléments propres de u, une méthode est d'étudier la condition $u(x) = \lambda x$. Si l'on regarde cette condition comme une équation en l'inconnue x, en considérant λ comme un paramètre, la résolution de cette équation donne les valeurs propres et les sous-espaces propres.

Exemple. Choisissons pour E l'ensemble des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et pour u, $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$. $u(f) = \lambda f \iff f' = \lambda f \iff [\exists C \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R} \ f(x) = Ce^{\lambda x}]$, donc tout réel est une valeur propre de u et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ est la droite vectorielle engendrée par l'application $\begin{array}{cccc} f_\lambda : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{\lambda x} \end{array}$.

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: Les ***éléments propres*** de M (c'est-à-dire les valeurs propres, les vecteurs propres et les sous-espaces propres) sont les éléments propres de l'endomorphisme canoniquement associé à M.
En particulier, pour tout $\lambda \in Sp(M)$, $E_\lambda^M = Ker(\lambda I_n - M) = \{X \in \mathbb{K}^n / MX = \lambda X\}$.

Propriété.
$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u si et seulement si $\lambda Id_E - u$ n'est pas injective.
En particulier, u est injectif si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de u.

Démonstration.
λ est une valeur propre de u si et seulement s'il existe un vecteur x non nul de E tel que $(\lambda Id_E - u)(x) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $Ker(\lambda Id_E - u) \neq \{0\}$. $\square$

Définition. On appelle ***spectre*** de u l'ensemble des valeurs propres de u.
Il est souvent noté $Sp(u)$.

Théorème.
La somme d'un nombre fini de sous-espaces propres de u est toujours directe.

Démonstration.
Effectuons une récurrence portant sur le nombre de sous-espaces propres.
Soit $h \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(h)$ l'assertion suivante :
pour toute famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ de h valeurs propres deux à deux distinctes de u, la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{h} E_{\lambda_j}$ est directe.

• Supposons que $h = 1$. Toute famille $(E_i)_{1 \leq i \leq 1}$ constituée d'un seul sous-espace vectoriel de E forme une somme directe, car, pour tout $x_1 = (x_i)_{1 \leq i \leq 1} \in E_1$, si $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} x_i = 0$, alors $x_1 = 0$.
Ainsi, la propriété $R(1)$ est vraie.

• Lorsque $h \geq 1$, supposons $R(h)$.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{h+1})$ une famille de $h+1$ valeurs propres deux à deux distinctes de u.

Soit $(x_1, \ldots, x_{h+1}) \in E_{\lambda_1} \times \cdots \times E_{\lambda_{h+1}}$ tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{h+1} x_j = 0$.

Ainsi, (1) : $\displaystyle -x_{h+1} = \sum_{j=1}^{h} x_j$.

Prenons l'image de (1) par u. Ainsi, $\displaystyle -\lambda_{h+1} x_{h+1} = \sum_{j=1}^{h} \lambda_j x_j$.

Multiplions (1) par λ_{h+1}. Ainsi, $-\lambda_{h+1}x_{h+1} = \lambda_{h+1}\sum_{j=1}^{h} x_j$.

Effectuons la différence des deux égalités précédentes. $0 = \sum_{j=1}^{h}(\lambda_j - \lambda_{h+1})x_j$.
Or, pour tout $j \in \mathbb{N}_h$, $(\lambda_j - \lambda_{h+1})x_j \in E_{\lambda_j}$, et, d'après $R(h)$, la famille $(E_{\lambda_j})_{1\leq j\leq h}$ constitue une somme directe. Ainsi, si $j \in \mathbb{N}_h$, $(\lambda_j - \lambda_{h+1})x_j = 0$, or $\lambda_j - \lambda_{h+1} \neq 0$, donc $x_j = 0$.
L'égalité (1) prouve alors que $x_{h+1} = 0$, ce qui montre $R(h+1)$. $\square$

Corollaire. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors cette famille est libre.

Démonstration.
Pour tout $i \in I$, il existe $\lambda_i \in Sp(u)$ tel que $u(x_i) = \lambda_i x_i$.
De plus, par hypothèse, pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$.
Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille presque nulle de scalaires telle que $\sum_{i\in I}\alpha_i x_i = 0$.
Supposons que (α_i) est une famille non nulle. Posons $J = \{i \in I/\alpha_i \neq 0\}$. J étant fini mais non vide, les sous-espaces propres E_{λ_i}, pour $i \in J$, constituent une somme directe, or $\sum_{i\in J}\alpha_i x_i = 0$ et, pour tout $i \in J$, $\alpha_i x_i \in E_{\lambda_i}$, donc, pour tout $i \in J$, $\alpha_i x_i = 0$.
Les x_i étant des vecteurs propres, ils sont non nuls, donc, pour tout $i \in J$, $\alpha_i = 0$, ce qui est faux. Ainsi la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est nulle, ce qui prouve que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre. $\square$

Exemple. Reprenons pour E l'ensemble des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et pour u, $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$. En posant $f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\lambda x} \end{array}$, l'étude précédente de u montre que $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de E.

1.5.2 Exemples

Lemme : Si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus E = E$, alors $F = \{0\}$.

Démonstration.
$\{0\} = F \cap E = F$. $\square$

Propriété. Supposons que $E \neq \{0\}$.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires non nuls dans E.
• Si u est une homothétie de rapport λ, où $\lambda \in \mathbb{K}$, $Sp(u) = \{\lambda\}$ et $E_\lambda = E$.
• Si u est le projecteur sur F parallèlement à G, $Sp(u) = \{0,1\}$, $E_1 = F$ et $E_0 = G$.
• Si u est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, $Sp(u) = \{1,-1\}$, $E_1 = F$ et $E_{-1} = G$.

Démonstration.
• Supposons que $u = \lambda Id_E$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.
Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $u(x) = \lambda x$, donc x est un vecteur propre associé à λ.
Ainsi $Sp(u) = \{\lambda\}$ et $E_\lambda = E$.
• Supposons que u est le projecteur sur F parallèlement à G.
$x \in F \Longleftrightarrow u(x) = x$, or $F \neq \{0\}$, donc $1 \in Sp(u)$ et $F = E_1$.
$x \in G \Longleftrightarrow u(x) = 0$, or $G \neq \{0\}$, donc $0 \in Sp(u)$ et $G = E_0$.
Supposons qu'il existe une troisième valeur propre $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$.
Alors $E_\lambda \oplus (E_0 \oplus E_1) = E$, donc d'après le lemme, $E_\lambda = \{0\}$, ce qui est impossible.
Ainsi, u admet 0 et 1 pour seules valeurs propres.
On a montré que $Sp(u) = \{0, 1\}$, avec $E_0 = G$ et $E_1 = F$.
• Supposons que u est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
$x \in F \Longleftrightarrow u(x) = x$, or $F \neq \{0\}$, donc $1 \in Sp(u)$ et $F = E_1$.
$x \in G \Longleftrightarrow u(x) = -x$, or $G \neq \{0\}$, donc $-1 \in Sp(u)$ et $G = E_{-1}$.
Comme dans le cas du projecteur, on montre que 1 et -1 sont les seules valeurs propres de u. □

1.5.3 Propriétés

Propriété.
Si $v \in L(E)$ commute avec u, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Démonstration.
Supposons que v et u commutent. Soit $\lambda \in Sp(u)$.
Soit $x \in E^u_\lambda$. $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, donc $v(x) \in E^u_\lambda$.
Ainsi, $v(E^u_\lambda) \subset E^u_\lambda$. □

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
On note $u_{/F}$ l'endomorphisme induit par u sur F.
Alors $Sp(u_{/F}) \subset Sp(u)$ et pour tout $\lambda \in Sp(u_{/F})$, $E^{u_{/F}}_\lambda = E^u_\lambda \cap F$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in Sp(u_{/F})$. Il existe $x \in F \setminus \{0\}$ tel que $u_{/F}(x) = \lambda x$,
or $u_{/F}(x) = u(x)$, donc $\lambda \in Sp(u)$.
De plus, si $x \in F$, $x \in E^{u_{/F}}_\lambda \Longleftrightarrow u_{/F}(x) = \lambda x \Longleftrightarrow u(x) = \lambda x \Longleftrightarrow x \in E^u_\lambda$,
donc $E^{u_{/F}}_\lambda = E^u_\lambda \cap F$. □

2 Changement de base

2.1 Matrice de passage

Notation. On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriété. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f = (f_j)_{1 \le j \le n} \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. Pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, on pose $p_{i,j} = e_i^*(f_j)$: c'est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans la base e du $j^{\text{ème}}$ vecteur de la famille f. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$.

f est une base si et seulement si la matrice $P = (p_{i,j})$ est inversible. Dans ce cas, P est noté P_e^f (ou bien $P_{e \to f}$) et on dit que $P_e^f = (p_{i,j})$ est la ***matrice de passage*** de la base e vers la base f.

Démonstration.
$P = \mathrm{mat}(u, e)$ où u est l'unique endomorphisme tel que $u(e) = f$. P est inversible si et seulement si u est inversible, ce qui est vrai si et seulement si f est une base de E. □

Interprétation tabulaire : Avec les notations précédentes,

$$P_e^f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1 & \cdots & f_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} .$$

Remarque. La notation P_e^f reflète cette interprétation tabulaire.
Par analogie, on notera parfois $\mathrm{mat}(u, e, f)$ sous la forme $\mathrm{mat}(u)_f^e$.

Remarque. On pourrait également définir la matrice d'une famille de p vecteurs $f = (f_j)_{1 \le j \le p}$ de E selon la base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E :

$$\mathrm{mat}_e^f = (e_i^*(f_j))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Alors les colonnes de mat_e^f sont les $\Psi_e^{-1}(f_j)$, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(\mathrm{mat}_e^f) &= \dim(\mathrm{Vect}(\Psi_e^{-1}(f_j)_{1 \le j \le p})) \\ &= \dim(\Psi_e^{-1}(\mathrm{Vect}(f_j)_{1 \le j \le p})) \\ &= \dim(\mathrm{Vect}(f_j)_{1 \le j \le p})), \end{aligned}$$

car Ψ_e^{-1} est injective. Ainsi, $\mathrm{rg}(\mathrm{mat}_e^f) = \mathrm{rg}(f)$.
On retrouve ainsi que f est une base si et seulement si mat_e^f est inversible.

Exemple. Notons $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$, $f = (x \longmapsto e^{ix})$ et $g = (x \longmapsto e^{-ix})$. Alors $\mathrm{mat}_{(\cos,\sin)}^{(f,g)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$. Le déterminant de cette matrice est non nul, donc elle est inversible. Ainsi (f, g) est une base de E et $P_{(\cos,\sin)}^{(f,g)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

Propriété. Soit e une base de E : Pour toute matrice P inversible d'ordre n, il existe une unique base f de E telle que $P = P_e^f$.

Démonstration.
Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Si f est une base telle que $P = P_e^f$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $f_j = \sum_{i=1}^{n} P_{i,j} e_i$, ce qui prouve l'unicité de f.
Posons $f = u(e)$, où u est l'unique automorphisme de E tel que $P = \text{mat}(u, e)$. Alors $f = u(e)$ est une base et $P = P_e^f$. Ceci prouve l'existence. □

Propriété. Soit e et e' deux bases de E. Alors $P_e^{e'} = \text{mat}(Id_E, e', e) = \text{mat}(Id_E)_e^{e'}$.

Remarque. ci-dessous, nous réutilisons la notation $\hat{x}$ définie dans le cours sur les matrices, page 24.

Formule de changement de base pour les vecteurs :
Soit e et e' deux bases de E. Soit $x \in E$.
On pose $X = \Psi_e^{-1}(x)$ (resp : $X' = \Psi_{e'}^{-1}(x)$) le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base e (resp : dans la base e').
On notera indifféremment $X = \Psi_e^{-1}(x) = \text{mat}(\hat{x}, 1, e) = \text{mat}(\hat{x})_e^1 = \text{mat}(x)_e$.
De même on pose $X' = \Psi_{e'}^{-1}(x) = \text{mat}(x)_{e'}$.
Alors, $\boxed{X = P_e^{e'} X'}$, ou encore $\text{mat}(x)_e = P_e^{e'} \text{mat}(x)_{e'}$.
Démonstration.
$X = \text{mat}(\hat{x}, 1, e) = \text{mat}(Id_E \circ \hat{x}, 1, e) = \text{mat}(Id_E, e', e) \times \text{mat}(\hat{x}, 1, e')$. □

Remarque. Cette formule n'est pas naturelle. En effet, P étant appelée la matrice de passage de la base (ancienne) e vers la (nouvelle) base e', on est plutôt en droit d'attendre qu'elle permette d'exprimer simplement les nouvelles coordonnées X' en fonction des anciennes coordonnées X, or c'est l'inverse qui se produit.

Exemple. Soit E un $\mathbb{R}$-plan vectoriel muni d'une base (i, j). Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $u_\theta = (\cos\theta)i + (\sin\theta)j$ et $v_\theta = -(\sin\theta)i + (\cos\theta)j$. Posons $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$: $\det(P) = 1 \neq 0$, donc P est inversible. Ainsi (u_θ, v_θ) est une base de E et $P = P_{(i,j)}^{(u_\theta, v_\theta)}$.
Soit M un point de E. Notons (x_0, y_0) les coordonnées de M dans (i, j) et (x_θ, y_θ) ses coordonnées dans (u_θ, v_θ). Alors $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{pmatrix}$, donc en inversant cette relation, $\begin{pmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Formule. Si e, e' et e'' sont trois bases de E, $\boxed{P_e^{e''} = P_e^{e'} P_{e'}^{e''} \text{ et } (P_e^{e'})^{-1} = P_{e'}^e.}$
Démonstration.
$Id_E = Id_E \circ Id_E$ et $P_e^{e'} \times P_{e'}^e = P_e^e = I_n$. □

Formule de changement de bases pour les applications linéaires :
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
On suppose que e et e' sont deux bases de E et que f et f' sont deux bases de F.

Soit $u \in L(E,F)$. Notons $M = \text{mat}(u)^e_f$, $M' = \text{mat}(u)^{e'}_{f'}$, $P = P^{e'}_e$ et $Q = Q^{f'}_f$. Alors,

$$\boxed{M' = Q^{-1}MP} \text{ c'est-à-dire } \boxed{\text{mat}(u)^{e'}_{f'} = P^f_{f'} \times \text{mat}(u)^e_f \times P^{e'}_e}.$$

Démonstration.
$u = Id_F \circ u \circ Id_E$. □

Formule de changement de bases pour les endomorphismes :
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$. On suppose que e et e' sont deux bases de E. Notons $M = \text{mat}(u,e)$, $M' = \text{mat}(u,e')$ et $P = P^{e'}_e$. Alors,

$$\boxed{M' = P^{-1}MP}.$$

2.2 Diagonalisation et trigonalisation

Exemple. Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Commençons par en rechercher les éléments propres : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$MX = \lambda X \iff \begin{cases} -y + 2z & = \lambda x \\ y & = \lambda y \\ x + y - z & = \lambda z \end{cases}$.

Si $\lambda = 1$, $MX = X \iff x + y - 2z = 0$, donc $1 \in Sp(M)$ et
$E^M_1 = \text{Ker}(M - I_3) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$: il s'agit d'un plan vectoriel. Si $\lambda \neq 1$,
$MX = \lambda X \iff (y = 0, 2z = \lambda x, x = (\lambda+1)z) \iff (y = 0, 2z = \lambda x, 2x = (\lambda+1)\lambda x)$, or $2 = (\lambda+1)\lambda \iff (\lambda-1)(\lambda+2) = 0$. Si $\lambda = -2$, $MX = -2X \iff (y = 0, z = -x)$, donc $-2 \in Sp(M)$ et $E^M_{-2} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $Sp(M) = \{1, -2\}$ et si l'on pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e = (e_1, e_2, e_3)$ constitue une base de vecteurs propres de M : en effet, (e_1, e_2) est une base de E^M_1 donc e est une base de $E^M_1 \oplus E^M_{-2} = \mathbb{R}^3$.
Ainsi, M est diagonalisable. En effet, $M = \text{mat}(\tilde{M}, c)$, où c désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\text{mat}(\tilde{M}, e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, que l'on notera D.

D'après la formule de changement de bases pour les endomorphismes, $M = PDP^{-1}$, où $P = P_c^e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) Il existe une base e de E telle que $\text{mat}(u, e)$ est diagonale.

ii) Il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.

iii) $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} E_\lambda^u$.

iv) $n = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} \dim(E_\lambda^u)$.

Lorsqu'elles sont vraies, on dit que u est ***diagonalisable***.

Démonstration.

• i)$\Longrightarrow$ii). Supposons qu'il existe une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle $\text{mat}(u, e)$ est diagonale. Soit $j \in \mathbb{N}_n$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de $\text{mat}(u, e)$ a tous ses coefficients nuls, sauf éventuellement le $j^{\text{ème}}$, donc $u(e_j)$ est colinéaire à e_j. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, e_j est un vecteur propre de u.

• ii)$\Longrightarrow$iii). Supposons qu'il existe une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u.
Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Il existe $\mu \in Sp(u)$ telle que $e_j \in E_\mu^u$, donc $e_j \in \bigoplus_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} E_\lambda^u$.
Ainsi, $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset \bigoplus_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} E_\lambda^u$, donc $E = Vect(\{e_1, \ldots, e_n\}) \subset \bigoplus_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} E_\lambda^u$.

• iii)$\Longrightarrow$iv). Supposons que $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} E_\lambda^u$.

Alors, $n = \dim(E) = \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} E_\lambda^u\right) = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} \dim(E_\lambda^u)$.

• iv)$\Longrightarrow$i). Supposons que $n = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} \dim(E_\lambda^u)$.

Pour tout $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)$, choisissons une base de E_λ^u, notée e_λ. D'après le théorème de la base adaptée à une décomposition en somme directe, la "réunion" des e_λ pour $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)$ est une famille libre de E. De plus elle est de cardinal
$\sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} \dim(E_\lambda^u) = n = \dim(E)$, donc c'est une base de E, constituée de vecteurs propres de u. Ainsi, la matrice de u dans cette base est diagonale. □

Propriété. les homothéties, les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Démonstration.

On a déjà vu que, pour chacun de ces endomorphismes, la somme des sous-espaces propres est égale à l'espace E en entier. □

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est diagonalisable si et seulement si son endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

Propriété. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale.

Démonstration.
Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à M et c la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
• Supposons que M est diagonalisable. Alors u est diagonalisable, donc il existe une base e de $\mathbb{K}^n$ telle que $\text{mat}(u, e)$ est diagonale.
Or $\text{mat}(u, e) = P^{-1}MP$, où $P = P_c^e \in GL_n(\mathbb{K})$.
• Réciproquement, supposons qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.
Il existe une base e de $\mathbb{K}^n$ telle que P est la matrice de passage de c vers e. Alors, $\text{mat}(u, e) = P^{-1}\text{mat}(u, c)P = P^{-1}PDP^{-1}P = D$, donc $\text{mat}(u, e)$ est diagonale, ce qui prouve que u est diagonalisable. □

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.
"diagonaliser" M, c'est déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$.
En général, le calcul de P^{-1} n'est pas attendu.

Définition. Un endomorphisme u est ***trigonalisable*** si et seulement s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Définition. $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé à M est trigonalisable, c'est-à-dire si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP$ est triangulaire supérieure.

Démonstration.
Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à M et $c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
• Supposons que M est trigonalisable. Ainsi, il existe une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $T = \text{mat}(u, e)$ est triangulaire supérieure. Donc, en notant $P = P_c^e$, $P^{-1}MP = T$ est triangulaire supérieure.
• Réciproquement, supposons qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M = PTP^{-1}$, où T est triangulaire supérieure. Il existe une base e de $\mathbb{K}^n$ telle que $P = P_c^e$. Comme $M = PTP^{-1}$, $T = \text{mat}(u, e)$, donc M est trigonalisable. □

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. "***Trigonaliser***" M, c'est déterminer si M est trigonalisable, et dans ce cas, c'est calculer $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et T triangulaire supérieure telles que $M = PTP^{-1}$.

2.3 Trace d'un endomorphisme

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$.
La quantité $\text{Tr}(\text{mat}(u, e))$ ne dépend pas du choix de la base e de E.
On la note $\text{Tr}(u)$. C'est la trace de l'endomorphisme u.

Démonstration.
Soient e et f deux bases de E.
$\mathrm{mat}(u, e)$ et $\mathrm{mat}(u, f)$ sont deux matrices semblables, donc elles ont la même trace. □

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Pour tout $u, v \in L(E)$, $\mathrm{Tr}(uv) = \mathrm{Tr}(vu)$.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Si p est un projecteur de E, alors $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Démonstration.
Il existe F et G avec $E = F \oplus G$ tels que p est le projecteur sur F parallèlement à G. Notons $\mathrm{rg}(p) = r = \dim(F)$ et $n = \dim(E)$. Considérons une base $(e_1, \ldots, e_r)$ de F et une base $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de G. La famille de vecteurs $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, adaptée à la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.
La matrice de p dans e est égale à la matrice blocs suivante : $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$, dont la trace vaut r. Ainsi $\mathrm{Tr}(p) = r = \mathrm{rg}(p)$. □

2.4 Matrices équivalentes et matrices semblables

2.4.1 Matrices équivalentes

Définition. Deux matrices M et M' de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ sont ***équivalentes*** si et seulement s'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M' = QMP^{-1}$.
On définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$.

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p > 0$ et $n > 0$, munis des bases e et f, et soit $u \in L(E, F)$. On note $M = \mathrm{mat}(u, e, f)$.
Soit $M' \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$: M' est équivalente à M si et seulement s'il existe des bases e' et f' telles que $M' = \mathrm{mat}(u, e', f')$. En résumé, deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire dans des bases différentes, autant pour la base de départ que pour la base d'arrivée.

Démonstration.
Supposons qu'il existe des bases e' et f' de E et F telles que $M' = \mathrm{mat}(u, e', f')$.
En notant $P = P_e^{e'}$ et $Q = P_f^{f'}$, $M' = Q^{-1}MP$, donc M' est équivalente à M.
Réciproquement, supposons que M' est équivalente à M. Il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M' = Q^{-1}MP$. Il existe une base e' de E et une base f' de F telles que $P = P_e^{e'}$ et $Q = P_f^{f'}$. Ainsi $M' = Q^{-1}MP = \mathrm{mat}(u, e', f')$. □

Propriété. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si il est possible de transformer l'une en l'autre par une succession d'opérations élémentaires portant sur les lignes ou sur les colonnes.

Démonstration.
Notons M et M' ces deux matrices.

$\diamond$ $\Longleftarrow$: par hypothèse, il existe deux matrices inversibles P (qui provient des opérations élémentaires portant sur les colonnes) et Q (qui provient des opérations élémentaires portant sur les lignes) telles que $M' = QMP$, donc M et M' sont équivalentes.
$\diamond$ $\Longrightarrow$: par hypothèse, il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $M' = QMP$. D'après l'algorithme de Gauss-Jordan d'inversion d'une matrice, la matrice inversible Q peut être transformée en la matrice identité par une succession d'opérations élémentaires portant sur les lignes. Ces opérations élémentaires correspondent globalement au fait de multiplier Q à sa gauche par une matrice Q', donc ces mêmes opérations transforment M' en $Q'M' = (Q'Q)MP = MP$. On raisonne de même à droite pour la matrice P en utilisant des opérations élémentaires portant sur les colonnes. $\square$

Théorème. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p > 0$ et $n > 0$, et soit $u \in L(E, F)$. Notons r le rang de u.
Il existe une base e de E et une base f de F telles que $\text{mat}(u, e, f)$ admet la décomposition en blocs suivante :

$$\text{mat}(u, e, f) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}.$$

Pour la suite, cette matrice sera notée $J_{n,p,r}$.

Démonstration.
D'après la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(u)) = p - r$: notons $(e_{r+1}, \ldots, e_p)$ une base de $\text{Ker}(u)$, que l'on complète en une base $e = (e_1, \ldots, e_p)$ de E.
Posons $H = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$: d'après le théorème de la base adaptée à une décomposition en somme directe, $E = H \oplus \text{Ker}(u)$. On sait alors que $u|_H^{\text{Im}(u)}$ est un isomorphisme, donc $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im}(u)$, que l'on complète en une base
$f = (u(e_1), \ldots, u(e_r), f_{r+1}, \ldots, f_n)$ de F. Alors $\text{mat}(u, e, f) = J_{n,p,r}$. $\square$

Propriété. Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$, M est équivalente à $J_{n,p,r}$, où r désigne le rang de M.

Démonstration.
Notons u l'application linéaire canoniquement associée à M.
u a pour rang r, donc il existe une base e de $\mathbb{K}^p$ et une base f de $\mathbb{K}^n$ telles que
$\text{mat}(u, e, f) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix} = J_{n,p,r}$. Or, dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$, la matrice de u est M, donc M et $J_{n,p,r}$ sont équivalentes. $\square$

Corollaire. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Démonstration.
Soient M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$. Si M et M' ont le même rang noté r, elles sont toutes deux équivalentes à $J_{n,p,r}$, donc M est équivalente à M'.
Réciproquement, supposons que M est équivalente à M' Il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et
$Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $M' = Q^{-1}MP$, donc, P étant inversible, $\text{rg}(M') = \text{rg}(Q^{-1}M)$, puis $\text{rg}(M') = \text{rg}(M)$. $\square$

2.4.2 Propriétés du rang d'une matrice

Propriété. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, $\text{rg}(M) = \text{rg}({}^tM)$.
On en déduit que le rang de M est aussi le rang de la famille de ses vecteurs lignes.

Démonstration.
Si l'on pose $r = \text{rg}(M)$, on a vu qu'il existe des matrices Q et P inversibles telles que $M = QJ_{n,p,r}P$, donc ${}^tM = {}^tPJ_{p,n,r}{}^tQ$. Mais ${}^tP$ et ${}^tQ$ sont inversibles,
donc $\text{rg}({}^tM) = \text{rg}(J_{p,n,r}) = r$. □

Propriété. Si l'on effectue une série de manipulations élémentaires sur une matrice, on ne modifie pas le rang de cette matrice.

Remarque. Pour déterminer le rang d'une matrice, une méthode consiste donc à transformer cette matrice en une matrice dont on connaît le rang par une succession d'opérations élémentaires portant sur les lignes ou sur les colonnes. On peut en particulier utiliser l'algorithme du pivot.
En particulier :

Propriété. Le rang d'une matrice est égal au nombre d'étapes dans la méthode du pivot total.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$. Par la méthode du pivot total, M est équivalente à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} T & A \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k,p-k} \end{pmatrix}$, où A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(k, p-k)$ et où T est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls (ce sont les pivots successifs) de taille k : k correspond bien au nombre d'étapes lorsqu'on applique l'algorithme du pivot total à M.
On sait que T est une matrice inversible, donc $\text{rg}(T) = k$. Ainsi, les k colonnes de T constituent une base de $\mathbb{K}^k$. Ceci implique que les colonnes de $(\, T \quad A\,)$ engendrent $\mathbb{K}^k$, donc $k = \text{rg}((\, T \quad A\,))$. Enfin, Le rang d'une matrice étant égal au rang de la famille de ses lignes, on a encore $k = \text{rg}(\begin{pmatrix} T & A \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k,p-k} \end{pmatrix}) = \text{rg}(M)$. □

Propriété. Soit $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$.
Si P est une matrice extraite de M, alors $\text{rg}(P) \leq \text{rg}(M)$.

Démonstration.
Il existe $I \subset \mathbb{N}_n$ et $J \subset \mathbb{N}_p$ tels que $P = (M_{i,j})_{\substack{i\in I \\ j \in J}}$. Posons $Q = (M_{i,j})_{\substack{i\in \mathbb{N}_n \\ j \in J}}$.
Alors, $\text{rg}(Q) = \dim(\text{Vect}(M_j)_{j\in J}) \leq \dim(\text{Vect}(M_j)_{j\in\mathbb{N}_p}) = \text{rg}(M)$.
De même, en raisonnant sur les lignes, on montre que $\text{rg}(P) \leq \text{rg}(Q)$. □

Exemple. Posons $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 15 \end{pmatrix}$. M n'est pas de rang 4 car sa dernière colonne est la somme des précédentes, mais M est de rang supérieur ou égal à 3, car la matrice extraite de M en ôtant la dernière ligne et la dernière colonne est inversible (car triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls). Ainsi $\mathrm{rg}(M) = 3$.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ une matrice non nulle.
$\mathrm{rg}(A)$ est égal à la taille maximale des matrices inversibles extraites de A.

Démonstration.
Posons $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers k tels qu'il existe une matrice inversible extraite de A de taille k.
$\diamond$ Soit $k \in \mathcal{A}$. Il existe une matrice inversible B extraite de A de taille k. Alors d'après la propriété précédente, $k = \mathrm{rg}(B) \leq rg(A)$. Ainsi $\mathcal{A}$ est majorée par $\mathrm{rg}(A)$. De plus $1 \in \mathcal{A}$ car A est non nulle. Ainsi $\mathcal{A}$ est non vide et majoré, donc il possède un maximum noté s et $s \leq \mathrm{rg}(A)$.
$\diamond$ Posons $r = \mathrm{rg}(A)$. $\mathrm{Vect}(A_1, \ldots, A_p)$ est de dimension r, donc d'après le théorème de la base extraite, il existe $J \subset \mathbb{N}_p$ de cardinal r tel que $(A_j)_{j \in J}$ est une base de $\mathrm{Vect}(A_1, \ldots, A_p) = \mathrm{Im}(A)$. Posons $Q = (A_{i,j})_{\substack{i \in \mathbb{N}_n \\ j \in J}}$. Q est une matrice extraite de A et $\mathrm{rg}(Q) = \mathrm{rg}((A_j)_{j \in J}) = r$.
Ainsi r est la dimension de l'espace F engendré par les lignes de Q. On peut donc à nouveau extraire des lignes de Q une base de F : il existe $I \subset \mathbb{N}_n$ de cardinal r tel que $P = (A_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ est de rang r.
P est une matrice carrée de taille r et de rang r, donc elle est inversible, ce qui conclut.
$\square$

2.4.3 Matrices semblables

Définition. Deux matrices carrées M et M' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont ***semblables*** si et seulement s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $M' = PMP^{-1}$. On définit ainsi une seconde relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelée relation de similitude.

Remarque. Si deux matrices sont semblables, elles sont équivalentes, mais la réciproque est fausse. En particulier, l'interprétation de la relation de similitude en termes d'opérations élémentaires est délicate et non productive (jusqu'à preuve du contraire).

Remarque. Les classes d'équivalence de la relation d'équivalence sont entièrement déterminées par un entier, égal au rang des représentants de cette classe. Au contraire, les classes d'équivalence de la relation de similitude sont nettement plus complexes. Leur étude constitue la théorie de la réduction que vous étudierez en détail en seconde année.

Exemple. Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp : trigonalisable) si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale (resp : triangulaire supérieure).

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$, muni d'une base e, et soit $u \in L(E)$. On note $M = \mathrm{mat}(u, e)$. Soit $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
M' est semblable à M si et seulement s'il existe une base e' telle que $M' = \mathrm{mat}(u, e')$.

En résumé, deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans des bases différentes, en imposant de prendre une même base au départ et à l'arrivée.

Démonstration.
Il suffit d'adapter la démonstration de la propriété analogue portant sur la relation "être équivalente à". □

Propriété. Soient $(M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $M' = PMP^{-1}$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M'^n = PM^nP^{-1}$ et pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(M') = PQ(M)P^{-1}$.
Si M' et M sont inversibles, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $M'^n = PM^nP^{-1}$.

Démonstration.
• Pour $n = 0$, $PM^0P^{-1} = PP^{-1} = I_n = M'^0$.
Pour $n \geq 0$, supposons que $M'^n = PM^nP^{-1}$.
Alors $M'^{n+1} = M'^nM' = PM^nP^{-1}PMP^{-1} = PM^{n+1}P^{-1}$.
On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M'^n = PM^nP^{-1}$.
• Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Il existe $(a_n) \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ tel que $Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n$.

$$PQ(M)P^{-1} = P\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nM^n\Big)P^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_nPM^nP^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_nM'^n = Q(M').$$

• Supposons que M et M' sont inversibles.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $M'^{-n} = (M'^n)^{-1} = (PM^nP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}M^{-n}P^{-1} = PM^{-n}P^{-1}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $M'^n = PM^nP^{-1}$. □

3 Les hyperplans

Dans tout ce chapitre, on fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, où $\mathbb{K}$ est un corps.

3.1 En dimension quelconque

Définition. Soit H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un hyperplan si et seulement si il existe une droite vectorielle D telle que $H \oplus D = E$.
Ainsi, les hyperplans sont les supplémentaires des droites vectorielles.

Propriété. Soit H un hyperplan et D une droite non incluse dans H. Alors $H \oplus D = E$.

Démonstration.
Il existe $x_1 \in E \setminus H$ tel que $D = \mathbb{K}x_1$.
⋄ Si $x \in H \cap D$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda x_1$. Si $\lambda \neq 0$, alors $x_1 = \frac{1}{\lambda}x \in H$ ce qui est faux, donc $\lambda = 0$ puis $x = 0$, ce qui prouve que la somme $H + D$ est directe.
⋄ Soit $x \in E$. H étant un hyperplan, il existe une droite vectorielle D_0 telle que $E = H \oplus D_0$. Il existe $x_0 \in E \setminus H$ tel que $D_0 = \mathbb{K}x_0$.
Ainsi, il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = h + \lambda x_0$.

De plus $x_1 \in E = H \oplus \mathbb{K}x_0$, donc il existe également $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ et $h_1 \in H$ tels que $x_1 = h_1 + \lambda_1 x_0$. $\lambda_1 \neq 0$ car $x_1 \notin H$, donc $x_0 = \frac{1}{\lambda_1}(x_1 - h_1)$.
Alors $x = (h - \frac{\lambda}{\lambda_1}h_1) + \frac{\lambda}{\lambda_1}x_1 \in H \oplus \mathbb{K}x_1$, ce qui prouve que $E = H \oplus D$. $\square$

Propriété. Soit H une partie de E. H est un hyperplan de E si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
De plus, si $H = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$, alors φ et ψ sont colinéaires. Ainsi H est le noyau d'une forme linéaire non nulle, unique à un coefficient multiplicatif près.

Démonstration.
• Supposons que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$, où $\varphi \in L(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$.
Il existe $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. $x_0 \notin H$ donc $H \cap \mathbb{K}x_0 = \{0\}$ (raisonnement identique à celui de la démonstration précédente).
De plus, si $x \in E$, en posant $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$, on a $\varphi(x) = \varphi(\lambda x_0)$, donc $x = (x - \lambda x_0) + \lambda x_0$ et $x - \lambda x_0 \in \mathrm{Ker}(\varphi) = H$, ce qui prouve que $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$, donc que H est un hyperplan.
• Réciproquement, supposons que H est un hyperplan de E.
Il existe donc $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}x$.
Notons φ l'unique forme linéaire telle que $\varphi_{/H} = 0$ et $\varphi(x) = 1$. φ est non nulle.
De plus, si $y = h + \lambda x \in E$, où $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$y \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \varphi(h) + \lambda\varphi(x) = 0 \iff \lambda = 0 \iff y = h \iff y \in H$, donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = H$.
Soit $\psi \in L(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \mathrm{Ker}(\psi)$. Posons $\lambda = \psi(x)$.
Soit $y = h + \alpha x \in E$, où $h \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. $\psi(y) = \alpha\lambda = \lambda\varphi(y)$, donc $\psi = \lambda\varphi$. $\square$

Définition. Soient H un hyperplan de E et $\varphi \in L(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $x \in H \iff [(E)\ :\ \varphi(x) = 0]$. On dit que (E) est ***équation de*** H.

Exemples. $\left\{f \in C([0,1], \mathbb{R})\ /\ \displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = 0\right\}$ est un hyperplan de $C([0,1], \mathbb{R})$.
L'ensemble des matrices carrées de taille n et de trace nulle est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3.2 En dimension finie

Notation. On suppose que E est un espace de dimension finie notée n, avec $n > 0$.
Si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note e_i^* l'application qui associe à tout vecteur x de E sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans la base e.
ATTENTION : e_i^* dépend non seulement de e_i mais également des autres e_j : si l'on change la valeur de e_1 dans la base e, on change a priori la valeur de e_2^*.

Propriété. Avec les notations précédentes, la famille $e^* = (e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $L(E, \mathbb{K}) = E^*$, que l'on appelle la base duale de e.

Démonstration.
Soit $\Psi \in E^*$: Pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i$, donc $\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\Psi(e_i)$.
Ainsi, $\Psi = \sum_{i=1}^{n} \Psi(e_i) e_i^* \in \mathrm{Vect}(e_1^*, \ldots, e_n^*)$.
Ceci prouve que e^* est une famille génératrice de E^*. De plus
$\dim(L(E, \mathbb{K})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{K}) = n$, donc e^* est une base de E^*. □

Remarque.
Les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$.

Définition. Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et H un hyperplan de E.
Si $H = \mathrm{Ker}(\psi)$, où $\psi \in E^*$, en notant $\psi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*$, l'équation de l'hyperplan H devient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in H \iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \ : \ (E)$. On dit que (E) est une équation cartésienne de l'hyperplan H, c'est-à-dire une condition nécessaire et suffisante portant sur les coordonnées de x dans la base e pour que x appartienne à H.

Démonstration.
$x \in H \iff \psi(x) = 0$, or $\psi(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*\right]\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \alpha_i x_j e_i^*(e_j)$, or $e_i^*(e_j)$ représente la i-ème coordonnée de e_j, donc $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$, puis $\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, ce qu'il fallait démontrer. □

Exemple. Dans un plan vectoriel rapporté à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une droite vectorielle D a une équation cartésienne de la forme :
$\overrightarrow{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \in D \iff ax + by = 0$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Exemple. Dans un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, un plan vectoriel P a une équation cartésienne de la forme :
$\overrightarrow{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \in P \iff ax + by + cz = 0$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

3.3 Les hyperplans affines

Notation. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E. On fixe un point $O \in \mathcal{E}$.

Définition. On appelle hyperplan affine de $\mathcal{E}$ tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dont la direction est un hyperplan de E.

Propriété. Soit $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{E}$.
$\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe $\varphi \in L(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $a \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, $[M \in \mathcal{H} \iff \varphi(\overrightarrow{OM}) = a]$.

Dans ce cas, la condition $\varphi(\overrightarrow{OM}) = a$ est appelée une équation de $\mathcal{H}$.
De plus, la direction de $\mathcal{H}$ est l'hyperplan $\text{Ker}(\varphi)$, d'équation $\varphi(x) = 0$ en l'inconnue $x \in E$.

Démonstration.
◇ Supposons que $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de direction H.
On sait qu'il existe $\varphi \in L(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que $H = \text{Ker}(\varphi)$.
Il existe $A \in \mathcal{H}$. Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{E}$,
$M \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \in H \Longleftrightarrow \varphi(\overrightarrow{AM}) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(\overrightarrow{OM}) = \varphi(\overrightarrow{OA})$.
◇ Réciproquement, supposons qu'il existe $\varphi \in L(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $a \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, $[M \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \varphi(\overrightarrow{OM}) = a]$.
$\varphi \neq 0$, donc $\text{rg}(\varphi) \geq 1$, mais $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}$, donc $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$. Ceci prouve que φ est surjective. En particulier, il existe $\overrightarrow{x_0} \in E$ tel que $\varphi(\overrightarrow{x_0}) = a$. De plus il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{x_0} = \overrightarrow{OA}$.
Ainsi, $M \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \varphi(\overrightarrow{OM}) = \varphi(\overrightarrow{OA}) \Longleftrightarrow \varphi(\overrightarrow{AM}) = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \text{Ker}(\varphi)$, donc $\mathcal{H} = A + \text{Ker}(\varphi)$, ce qui prouve que $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de direction $\text{Ker}(\varphi)$. $\square$

Remarque. Dans le cas particulier où $\mathcal{E} = E$ et où $O = \overrightarrow{0}$, l'équation devient $\varphi(M) = a$, donc les hyperplans affines de E sont exactement les $\varphi^{-1}(\{a\})$, avec $\varphi \in L(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $a \in \mathbb{K}$.

Exemple. $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ Tr(M) = 2\}$ est un hyperplan affine de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété. Supposons que E est de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$ et que E est muni d'une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$, dont la base duale est notée $e^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$.
Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de $\mathcal{E}$, dont une équation est $\Psi(\overrightarrow{OM}) = a$.
Notons $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ les coordonnées de Ψ dans e^*. Si M a pour coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans le ***repère affine*** (O, e), alors $M \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = a$.
Cette dernière condition est donc la forme générale d'une équation cartésienne d'hyperplan affine en dimension n.
Pour $n = 2$, on obtient la forme générale d'une équation de droite, et pour $n = 3$, il s'agit de la forme générale d'une équation de plan.

3.4 Application aux systèmes linéaires

Notation. On fixe $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ et on considère un système linéaire de n équations à p inconnues de la forme :

$$\boxed{(S) : \begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1,p}x_p & = b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ \alpha_{i,1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{i,p}x_p & = b_i \\ \vdots & & & & \vdots & \\ \alpha_{n,1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{n,p}x_p & = b_n \end{cases} ,}$$

où, pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\}$, $\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $b_i \in \mathbb{K}$, les p inconnues étant $x_1,\ldots,x_p$, éléments de $\mathbb{K}$.

Propriété. Notons $M = (\alpha_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ la matrice de (S).
Ainsi $(S) \iff MX = B$, où $B = (b_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n$. Si (S) est compatible, l'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p-r$, où r désigne le rang de M et dont la direction est $\mathrm{Ker}(M)$.

Démonstration.
Supposons que (S) est compatible. Il existe $X_0 \in \mathbb{K}^p$ tel que $MX_0 = B$.
Ainsi, $(S) \iff MX = MX_0 \iff X - X_0 \in \mathrm{Ker}(M) \iff X \in (X_0 + \mathrm{Ker}(M))$. □

Notation. Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions p et n munis de bases $e = (e_1,\ldots,e_p)$ et $f = (f_1,\ldots,f_n)$. On note u l'unique application linéaire de $L(E,F)$ telle que $\mathrm{mat}(u,e,f) = M$, x le vecteur de E dont les coordonnées dans e sont X et b le vecteur de F dont les coordonnées dans f sont B. Alors $(S) \iff u(x) = b$.

Propriété. L'ensemble des solutions de (S) est soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{Ker}(u)$.

Quatrième interprétation d'un système linéaire : *A l'aide de formes linéaires.*
Notons $e^* = (e_1^*,\ldots,e_p^*)$ la base duale de e. Pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, posons
$l_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} e_j^*$. Ainsi, $(l_1,\ldots,l_n)$ est une famille de formes linéaires telles que

$(S) \iff [\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ \ l_i(x) = b_i]$ et l'ensemble des solutions de (S) est $\bigcap_{i=1}^{n} l_i^{-1}(\{b_i\})$.
C'est donc une intersection d'hyperplans affines, si pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $l_i \neq 0$.

Propriété. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, l'intersection de r hyperplans vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de dimension supérieure à $p-r$.
Réciproquement tout sous-espace vectoriel de E de dimension $p-r$ où $r \geq 1$ est une intersection de r hyperplans de E, donc est caractérisé par un système de r équations linéaires.

Démonstration.
◇ Considérons r (avec $r \geq 1$) hyperplans de E, notés $H_1,\ldots,H_r$.
Pour chaque $i \in \{1,\ldots,r\}$, il existe une forme linéaire non nulle ℓ_i telle que
$H_i = \mathrm{Ker}(\ell_i)$. Notons $F = \bigcap_{i=1}^{r} H_i$. Fixons une base $e = (e_1,\ldots,e_p)$ de E et notons à nouveau $e^* = (e_1^*,\ldots,e_p^*)$ la base duale de e.

Pour tout $i \in \{1,\ldots,r\}$, il existe $(\alpha_{i,j})_{1\leq j\leq p} \in \mathbb{K}^p$ telle que $\ell_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} e_j^*$.

Ainsi, pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \in F \iff \forall i \in \{1,\ldots,r\}\ \ l_i(x) = 0 \iff \forall i \in \{1,\ldots,r\}\ \ \sum_{j=1}^{p} \alpha_{i,j} x_j = 0.$$

Alors avec les notations précédentes, $F = \mathrm{Ker}(u)$ et $\dim(F) = p - \mathrm{rg}(u) \geq p - r$, car la matrice de u possède r lignes.
$\diamond$ Pour la réciproque, soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p - r$ avec $r \geq 1$. Notons $(f_{r+1}, \ldots, f_p)$ une base de F, que l'on complète en une base $f = (f_1, \ldots, f_p)$ de E. Notons $f^* = (f_1^*, \ldots, f_p^*)$ la base duale de f.

Si $x = \sum_{j=1}^{p} x_j f_j \in E$, $x \in F \Longleftrightarrow x_1 = \cdots = x_r = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, r\},\ f_i^*(x) = 0$.
Ainsi, F est caractérisé par un système de r équations linéaires.
De plus, en notant $H_i = \mathrm{Ker}(f_i^*)$, $[x \in F \Longleftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, r\},\ x \in H_i]$, donc F est l'intersection des r hyperplans $H_1, \ldots, H_r$. $\square$

Exemple. Dans un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, une droite vectorielle D est caractérisée par un système de 2 équations cartésiennes de la forme :

$\overrightarrow{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \in D \Longleftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz & = 0 \\ a'x + b'y + c'z & = 0 \end{cases}$, où $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre dans $\mathbb{K}^3$.

Propriété. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ dirigé par $F \neq E$. On sait que F est l'intersection de r hyperplans vectoriels (où $r = \dim(E) - \dim(F)$) $H_1, \ldots, H_r$, qui sont chacun le noyau d'une forme linéaire non nulle, notée $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$.
Il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{F} = A + F$, donc
$M \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \in F \Longleftrightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, r\}\ \ \varphi_i(\overrightarrow{OM}) = \varphi_i(\overrightarrow{OA}))$.
Cette dernière condition constitue un système d'équations de $\mathcal{F}$.
Ainsi, tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ peut être caractérisé par un système d'équations linéaires.

Corollaire. Tout sous-espace affine strictement inclus dans $\mathcal{E}$ est une intersection d'un nombre fini d'hyperplans affines.