Les déterminants

Table des matières

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.
Selon le programme, “en pratique, $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$”.

1 Déterminants

1.1 Applications multilinéaires

Définition. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, \dots, E_p)$ une famille de p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une application de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F.
f est une ***application p-linéaire*** si et seulement si, pour tout $j \in \mathbb{N}_p$
et pour tout $(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_p) \in E_1 \times \cdots \times E_{j-1} \times E_{j+1} \times \dots \times E_p$,
l'application $\begin{array}{ccc} E_j & \longrightarrow & F \\ x_j & \longmapsto & f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_p) \end{array}$ est linéaire.

Définition. Une ***application bilinéaire*** est une application 2-linéaire.

Notation.
- $L_p(E_1, \dots, E_p; F)$ désigne l'ensemble des applications p-linéaires de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E_1 \times \cdots \times E_p, F)$.
- On note $L_p(E, F) = L_p(\underbrace{E, \dots, E}_{p \text{ fois}}; F)$.
- Enfin, on note $L_p(E) = L_p(E, \mathbb{K})$.
  Les éléments de $L_p(E)$ sont appelés des ***formes p-linéaires*** sur E.

Exemple. L'application $\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, x'), (y, y'), (z, z')) & \longmapsto & xy'z' - 2x'yz' + 3x'yz \end{array}$
est une forme trilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.

Notation. Pour la suite de ce paragraphe, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$
et deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.

Propriété. Soit $u_1, \dots, u_p$ p applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$.
Alors l'application $\begin{array}{cccc} u: & E^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \displaystyle\prod_{i=1}^{p} u_i(x_i) \end{array}$ est une forme p-linéaire.

Démonstration.
Soient $j \in \mathbb{N}_p$ et $(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_p) \in E^{p-1}$.
Notons $\begin{array}{cccc} v: & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & u(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_p) \end{array}$.
Pour tout $x \in E$, $v(x) = \left(\displaystyle\prod_{\substack{1 \le i \le p \\ i \ne j}} u_i(a_i) \right) u_j(x)$, or u_j est linéaire, donc v est linéaire.
Ainsi, u est une forme p-linéaire. □

Propriété. On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et on note
$e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, dont la base duale sera notée $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$.

Une application f de E^p dans F est p-linéaire si et seulement s'il existe une famille $(\alpha_u)_{u\in\mathbb{N}_n^p}$ de vecteurs de F telle que, pour tout $(x_1,\dots,x_p)\in E^p$,
$f(x_1,\dots,x_p)=\displaystyle\sum_{u=(i_1,\dots,i_p)\in\mathbb{N}_n^p} e_{i_1}^*(x_1)\times\cdots\times e_{i_p}^*(x_p).\alpha_u$.

Démonstration.

- Supposons que $f\in L_p(E,F)$. Soit $(x_1,\dots,x_p)=(\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i)_{1\le j\le p}\in E^p$.

$f(x_1,\dots,x_p)=f(\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i,x_2,\dots,x_p)$,
donc en utilisant la linéarité selon la première variable,
$f(x_1,\dots,x_p)=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{i,1}f(e_i,x_2,\dots,x_p)$, puis
$f(x_1,\dots x_p)=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{i,1}\sum_{j=1}^n a_{j,2}f(e_i,e_j,x_3,\dots,x_p)$.
Le développement de x_1 a nécessité l'utilisation d'une variable notée i, puis le développement de x_2 a nécessité l'utilisation d'une seconde variable notée j. Pour développer x_1, x_2, …, x_p, nous avons besoin de p variables. Nous allons les noter i_1, i_2, …, i_p, ce qui impose de renommer i et j en i_1 et i_2. Ainsi,
$f(x_1,\dots x_p)=\displaystyle\sum_{i_1=1}^n\sum_{i_2=1}^n a_{i_1,1}a_{i_2,2}f(e_{i_1},e_{i_2},x_3,\dots,x_p)$. En poursuivant ce calcul, on obtient $f(x_1,\dots,x_p)=\displaystyle\sum_{u=(i_1,\dots,i_p)\in\mathbb{N}_n^p} a_{i_1,1}\dots a_{i_p,p}f(e_{i_1},\dots,e_{i_p})$.

- Réciproquement, $L_p(E,F)$ étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , il suffit de montrer que pour tout $u=(i_1,\dots,i_p)\in\mathbb{N}_n^p$, l'application $\begin{array}{ccc} E^p & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (\sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i)_{1\le j\le p} & \longmapsto & a_{i_1,1}\dots a_{i_p,p}\end{array}$ est p-linéaire, mais il s'agit de l'application $\begin{array}{ccc} E^p & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (x_1,\dots,x_p) & \longmapsto & \prod_{j=1}^p e_{i_j}^*(x_j)\end{array}$, or les applications coordonnées e_j^* sont des formes linéaires, donc d'après une propriété précédente, cette application est bien une forme p-linéaire. □

Définition. Soient $\sigma\in\mathcal{S}_p$ et $f\in L_p(E,F)$.
On note $\begin{array}{cccc}\sigma(f): & E^p & \longrightarrow & F\\ & (x_1,\dots,x_p) & \longmapsto & f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)})\end{array}$.
On vérifie que $\sigma(f)$ est une application p-linéaire de E dans F.

Propriété. L'application $\begin{array}{ccc}\mathcal{S}_p\times L_p(E,F) & \longrightarrow & L_p(E,F)\\ (\sigma,f) & \longmapsto & \sigma(f)\end{array}$, est une opération du groupe $(\mathcal{S}_p,\circ)$ sur l'ensemble $L_p(E,F)$.

Démonstration.
Soient $(\sigma,\sigma')\in\mathcal{S}_p^2$, $f\in L_p(E,F)$ et $(x_1,\dots,x_p)\in E^p$.

$\sigma'(\sigma(f))(x_1,\ldots,x_p)=\sigma(f)(x_{\sigma'(1)},\ldots,x_{\sigma'(p)})$.
Notons $(y_1,\ldots,y_p)=(x_{\sigma'(1)},\ldots,x_{\sigma'(p)})$. Ainsi, pour tout $i\in\mathbb{N}_p$, $y_i=x_{\sigma'(i)}$, donc $\sigma'(\sigma(f))(x_1,\ldots,x_p)=f(y_{\sigma(1)},\ldots,y_{\sigma(p)})=f(x_{\sigma'(\sigma(1))},\ldots,x_{\sigma'(\sigma(p))})$, ce qui prouve que

$$\forall(\sigma,\sigma')\in\mathcal{S}_p^2\ \ \forall f\in L_p(E,F)\ \ \sigma'(\sigma(f))=(\sigma'\sigma)(f).$$

De plus, $Id_{\mathbb{N}_p}(f)=f$, donc $(\sigma,f)\longmapsto\sigma(f)$ est bien une opération de groupe. □

Définition. Soit $f\in L_p(E,F)$. f est une ***application p-linéaire symétrique*** si et seulement si pour tout $\sigma\in\mathcal{S}_p$, $\sigma(f)=f$, c'est-à-dire si et seulement si la quantité $f(x_1,\ldots,x_n)$ ne dépend pas de l'ordre de $x_1,\ldots,x_n$.
f est une ***application p-linéaire antisymétrique*** si et seulement si pour tout $\sigma\in\mathcal{S}_p$, $\sigma(f)=\varepsilon(\sigma)f$, où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.

Propriété. Soit $f\in L_p(E,F)$.
f est symétrique si et seulement si pour toute transposition τ de $\mathcal{S}_p$, $\tau(f)=f$.
f est antisymétrique si et seulement si pour toute transposition τ de $\mathcal{S}_p$, $\tau(f)=-f$.

Démonstration.
Supposons que pour toute transposition τ de $\mathcal{S}_p$, $\tau(f)=-f$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante :
pour toute famille de n transpositions $(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, $(\tau_1\circ\cdots\circ\tau_n)(f)=(-1)^nf$.
Par récurrence sur n, il est simple de montrer que $R(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
Soit $\sigma\in\mathcal{S}_p$. L'ensemble des transpositions engendre $\mathcal{S}_p$, donc il existe un nombre fini de transpositions, notées τ_1, ...,τ_n, telles que $\sigma=\tau_1\circ\cdots\circ\tau_n$.
D'après $R(n)$, $\sigma(f)=(-1)^nf=\varepsilon(\sigma)f$.
Ainsi, f est une application p-linéaire antisymétrique.
La réciproque est simple à prouver.
Pour démontrer que f est symétrique si et seulement si pour toute transposition τ de $\mathcal{S}_p$, $\tau(f)=f$, il suffit d'adapter la démonstration précédente. □

Exemples.

- L'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ (x_1,\ldots,x_p) & \longmapsto & x_1\times\cdots\times x_p\end{array}$ est p-linéaire symétrique.
- L'application $\begin{array}{ccc}(\mathbb{K}^2)^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ \left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right) & \longmapsto & ad-bc=\det\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right)\end{array}$ est une forme bilinéaire antisymétrique.

Définition. Soit $f\in L_p(E,F)$. f est ***une application p-linéaire alternée*** si et seulement si elle annule tout p-uplet de vecteurs de E contenant au moins deux vecteurs égaux.

Propriété. Soit $f\in L_p(E,F)$.
Si f est alternée, alors elle est antisymétrique.
Lorsque $car(\mathbb{K})\neq 2$, alternée $\Longleftrightarrow$ antisymétrique.

Démonstration.
Pour simplifier, on se limite au cas où $p = 2$, mais le principe de la démonstration est valable dans le cas général : il suffit d'adapter au prix de notations plus lourdes.
$\diamond$ Supposons que f est alternée. Soit $x, y \in E$.
$0 = f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(y,y) + f(x,y) + f(y,x) = f(x,y) + f(y,x)$,
donc $f(x,y) = -f(y,x)$.
$\diamond$ On suppose que f est antisymétrique et que $car(\mathbb{K}) \neq 2$. Soit $x \in E$.
$f(x,x) = -f(x,x)$, donc $(2.1_{\mathbb{K}})f(x,x) = 0$, or $2.1_{\mathbb{K}} \neq 0$, donc $f(x,x) = 0$. $\square$

Remarque. Lorsque $\mathbb{K}$ est de caractéristique 2, l'équivalence n'est plus vraie. Par exemple l'application $f : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie par $f(x,y) = xy$ est dans $L_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, mais elle n'est pas alternée car $f(1,1) = 1 \neq 0$. Pourtant elle est symétrique, donc antisymétrique, car dans $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $1_{\mathbb{K}} = -1_{\mathbb{K}}$.

Propriété. $f \in L_p(E,F)$ est alternée si et seulement si pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, $f(x_1, \ldots, x_p)$ ne varie pas lorsque l'on ajoute à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.
Plus formellement, f est alternée si et seulement si

$$\begin{array}{c}\forall (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \quad \forall i \in \mathbb{N}_p \quad \forall (\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}_p \setminus \{i\}} \in \mathbb{K}^{p-1} \\ f(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j x_j, x_{i+1}, \ldots, x_p)\end{array} .$$

Propriété. $f \in L_p(E,F)$ est alternée si et seulement si l'image par f de toute famille liée de vecteurs est nulle.

Démonstration.
$\diamond$ Supposons que f est alternée.
Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est lié, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0$, avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \neq 0$. Il existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $\alpha_j \neq 0$. Ainsi, $x_j = \frac{-1}{\alpha_j} \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ j \neq i}} \alpha_i x_i$, donc
$f(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_p) = 0$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que l'image par f de toute famille liée de vecteurs est nulle. Tout p-uplet de vecteurs de E contenant au moins deux vecteurs égaux est lié, donc son image par f est nulle. Ceci prouve que f est alternée. $\square$

Corollaire. Si E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et si $p > n$, toute forme p-linéaire alternée sur E est nulle.

1.2 Les trois notions de déterminants

Au sein de ce paragraphe, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n, avec $n > 0$.

1.2.1 Volume

Supposons temporairement que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Enoncé du problème :
Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on note H_x l'hyperparallélépipède
$H_x = \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ / \ t_1, \ldots, t_n \in [0,1]\}$: c'est l'unique hyperparallélépipède de E dont les côtés issus de l'origine sont $x_1, \ldots, x_n$.
On souhaite définir une fonction $\mathrm{vol} \ : \ E^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout
$x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $|\mathrm{vol}(x)|$ soit égal au volume de H_x, en s'appuyant sur l'idée intuitive que l'on a de la notion de volume d'une partie de E (vu comme un espace affine). On souhaite de plus que le signe de $\mathrm{vol}(x)$ corresponde à l'orientation du n-uplet x, en s'appuyant également sur une idée intuitive de la notion d'orientation. On dira que $\mathrm{vol}(x)$ est le volume algébrique de H_x et par opposition, que $|\mathrm{vol}(x)|$ est son volume absolu.

Cas d'un hyperparallélépipède plat :
Si x est lié, H_x est “plat”, donc on impose $\mathrm{vol}(x) = 0$ dès que x est une famille liée de n vecteurs.

Homogénéité de la fonction vol :
Supposons maintenant que x est libre. Ainsi, x est une base de E.
Si l'on remplace l'un des x_i par λx_i, où $\lambda \in \mathbb{R}$, le volume de H_x doit être multiplié par $\pm\lambda$, car le volume absolu de H_x est intuitivement proportionnel à la longueur de chacun de ses côtés. Plutôt que de parler d'intuition, on peut dire que cette propriété est un axiome que doit vérifier toute notion de volume. De même, nous conviendrons que l'orientation d'un n-uplet de vecteurs de E est positive ou négative (il n'y a que deux valeurs possibles pour l'orientation) et que le fait de remplacer l'un des vecteurs x_i par λx_i avec $\lambda < 0$ change l'orientation du n-uplet. Alors la fonction vol doit vérifier la propriété suivante : pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{vol}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \boxed{\lambda x_i}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \lambda \mathrm{vol}(x_1, \ldots, x_{i-1}, \boxed{x_i}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.
Lorsque x est lié, cette propriété est vraie car elle se réduit à $0 = 0$.

n-linéarité de vol :
Fixons $i, j \in \mathbb{N}_n$ ainsi que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_n \setminus \{i,j\}}$ une famille de $n-2$ vecteurs (si $n = 1$, E est de dimension 1 et vol est clairement linéaire d'après le point précédent, donc on peut supposer que $n \geq 2$). Pour tout $x_i, x_j \in E^2$, posons $f(x_i, x_j) = \mathrm{vol}(x_k)_{k \in \mathbb{N}_n}$.

1°) Soit $a, b \in E^2$. Commençons par établir que $f(a+b, b) = f(a, b)$.
Notons également $a = x_i$ et $b = x_j$.
Posons $G = \{\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \notin \{i,j\}}} t_k x_k \ / \ \forall k, \ \ t_k \in [0,1]\}$.

Alors $H_x = \{ta + t'b \ / \ (t, t') \in [0, 1]^2\} + G$. Il s'agit de montrer que H_x a le même volume absolu que $K = \{t(a + b) + t'b \ / \ (t, t') \in [0, 1]^2\} + G$ et que x a la même orientation que le n-uplet x' obtenu à partir de x en remplaçant x_i par $x_i + x_j$.

Figure

Conformément à la figure, posons $A = \{ta + t'b \ / \ t, t' \in [0, 1] \ \wedge \ t' \leq t\} + G$,
$B = \{ta + t'b \ / \ t, t' \in [0, 1] \ \wedge \ t' \geq t\} + G$ et notons C l'image de A par la translation de vecteur b, c'est-à-dire $C = b + A$.
Selon la figure, $H_x = A \cup B$ et $\mathrm{vol}(A \cap B) = 0$, $K = B \cup C$ et $\mathrm{vol}(B \cap C) = 0$.
On peut le démontrer formellement :
1.1] $A \cap B = \{t(a + b) \ / \ t \in [0, 1]\} + G$: c'est l'hyperparallélépipède associé à x' déduit de x en remplaçant x_i et x_j par $\dfrac{x_i + x_j}{2}$. x' est lié, donc $\mathrm{vol}(A \cap B) = 0$.
1.2] $C = \{ta + (1 + t')b \ / \ t, t' \in [0, 1] \ \wedge \ t' \leq t\} + G$,
donc $B \cap C = \{ta + b \ / \ t \in [0, 1]\} = b + \{ta \ / \ t \in [0, 1]\} + G$.
Il est raisonnable d'imposer à la notion de volume d'être invariante par translation. Alors $|\mathrm{vol}(B \cap C)| = |\mathrm{vol}(H_{x''})|$ où x'' se déduit de x en remplaçant x_i et x_j par $\frac{x_i}{2}$.
Ainsi, on a bien $\mathrm{vol}(B \cap C) = 0$.
1.3] Si $t, t' \in [0, 1]$, on a bien sûr, $t \leq t'$ ou bien $t' \leq t$, donc $H_x = A \cup B$.

$$\begin{array}{rcl} K = & & \{ta + (t + t')b \ / \ (t, t') \in [0, 1]^2 \ \wedge \ t + t' \leq 1\} + G \\ & \bigcup & \{ta + (t + t')b \ / \ (t, t') \in [0, 1]^2 \ \wedge \ t + t' \geq 1\} + G \\ = & & \{ta + t''b \ / \ t, t'' \in [0, 1] \ \wedge \ t \leq t''\} + G \\ & \bigcup & [b + \{ta + (t - t'')b \ / \ t, t'' \in [0, 1] \ \wedge \ t - t'' \geq 0\} + G] \\ = & & B \cup (b + A) = B \cup C. \end{array}$$

Ainsi, on a montré qu'on peut passer de l'hyperparallélépipède H_x à l'hyperparallélépipède K en découpant H_x en deux morceaux disjoints (au sens que l'intersection de ces deux morceaux est de volume nul), en translatant l'un des deux morceaux puis en effectuant à nouveau la réunion disjointe des deux morceaux. Il est raisonnable d'imposer aux notions de volume absolu et d'orientation d'être invariantes par cette opération. Alors H_x et K ont le même volume algébrique, ce qui montre que
$f(a + b, b) = f(a, b)$, pour tout $a, b \in E^2$.

2°) Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors $f(a + \lambda b, b) = \frac{1}{\lambda} f(a + \lambda b, \lambda b) = \frac{1}{\lambda} f(a, \lambda b) = f(a, b)$.
Ainsi $\mathrm{vol}(x)$ n'est pas modifié si l'on ajoute à l'un des x_i le vecteur λx_j, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i\}$. Donc, pour tout $x \in E^n$, $\mathrm{vol}(x)$ n'est pas modifié si l'on ajoute à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.

3°) On reprend les notations du 1°).
a) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(a + \lambda a, b) = (1 + \lambda) f(a, b) = f(a, b) + f(\lambda a, b)$, donc lorsque c est colinéaire à a, $f(a + c, b) = f(a, b) + f(c, b)$ (c'est évident lorsque a est nul).
b) Si maintenant c est quelconque dans E, lorsque x est une base de E, on peut écrire $c = \lambda a + d$, où d est une combinaison linéaire des autres vecteurs x_j.
Alors d'après 2°), $f(a + c, b) = f(a + \lambda a, b) = f(a, b) + f(\lambda a, b) = f(a, b) + f(c, b)$.
c) Lorsque $\{b\} \cup \{x_k \ / \ k \in \mathbb{N}_n \setminus \{i, j\}\}$ est liée, alors $f(a + c, b) = 0 = f(a, b) + f(c, b)$.

d) Il reste à étudier le cas où x n'est pas une base mais où les $n-1$ vecteurs $\{b\} \cup \{x_k \ / \ k \in \mathbb{N}_n \setminus \{i,j\}\}$ sont libres. Alors $a = x_i$ est une combinaison linéaire des autres x_j, donc $f(a+c,b) = f(c,b) = f(a,b) + f(c,b)$.

4°) Ainsi, pour tout $a,b,c \in E$, $f(a+c,b) = f(a,b) + f(c,b)$, puis d'après la propriété d'homogénéité de vol, pour tout $a,b,c \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(a+\lambda c,b) = f(a,b) + \lambda f(c,b)$. Ceci prouve que vol est bien n-linéaire. De plus elle est alternée, car elle s'annule sur tout n-uplet lié de vecteurs de E.

Conclusion :
Si vol est une application de E^n dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in E^n$, $|\mathrm{vol}(x)|$ représente le volume de H_x et le signe de $\mathrm{vol}(x)$ représente l'orientation du n-uplet x, alors en imposant des contraintes raisonnables aux notions de volume absolu et d'orientation, l'application vol est nécessairement une forme n-linéaire alternée.
En particulier, il suffit d'appeler ***orientation*** toute application $\mathcal{O}$ définie sur l'ensemble $\mathcal{B}$ des bases de E à valeurs dans $\{1,-1\}$ telle que, pour tout $x \in E^n$:

— si l'on change l'un des vecteurs de x par son opposé, alors $\mathcal{O}(x)$ est remplacé par son opposé.

— On ne change pas $\mathcal{O}(x)$ si l'on multiplie l'un des vecteurs de x par un réel strictement positif, ou bien si l'on ajoute à l'un des vecteurs de x un autre vecteur de x.

1.2.2 Déterminant d'un système de n vecteurs

Notation. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Notons $A_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées.

On choisit une base e de E. Soit $f \ : \ E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée. Alors, d'après un calcul présenté page 3,

pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) = (\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i)_{1 \leq j \leq n} \in E^n$,

$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{u=(i_1,\dots,i_n) \in \mathbb{N}_n^n} p_{i_1,1} \dots p_{i_n,n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$, ou, avec d'autres notations,

$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{u \in \mathcal{F}\left(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n\right)} p_{u(1),1} \dots p_{u(n),n} f(e_{u(1)}, \dots, e_{u(n)})$.

Si u est une injection de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_n$, alors on sait que u est une bijection, donc lorsque $u \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_n) \setminus \mathcal{S}_n$, u n'est pas injective : il existe $(i,j) \in {\mathbb{N}_n}^2$ avec $i \neq j$ tel que $u(i) = u(j)$. Alors, $e_{u(i)} = e_{u(j)}$, or f est alternée, donc $f(e_{u(1)}, \dots, e_{u(n)}) = 0$.
Ainsi, $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{u \in \mathcal{S}_n} p_{u(1),1} \dots p_{u(n),n} f(e_{u(1)}, \dots, e_{u(n)})$. De plus, f étant alternée, elle est antisymétrique, donc $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{u \in \mathcal{S}_n} p_{u(1),1} \dots p_{u(n),n} \varepsilon(u) f(e_1, \dots, e_n)$.

Posons,
$$\begin{array}{rccc} \det_e : & E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1,\dots,x_n)=(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}e_i)_{1\le j\le n} & \longmapsto & \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} p_{\sigma(1),1}\dots p_{\sigma(n),n}\varepsilon(\sigma) \end{array}.$$

On a montré que, pour tout $f \in A_n(E)$, (1) : $f = f(e_1,\dots,e_n)\det_e$.

Définition. Soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $x=(x_1,\dots,x_n)$ un système de n vecteurs de E. On pose $P=\mathrm{mat}_e(x)$, de sorte que $P_{i,j}$ désigne la i-ème coordonnée dans la base e de x_j. On appelle ***déterminant du système de vecteurs*** x dans la base e la quantité suivante :

$$\boxed{\det_e(x_1,\dots,x_n) \triangleq \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}P_{\sigma(j),j}.}$$

Exemple. Prenons $E=\mathbb{K}^2$ et $x=(\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix},\begin{pmatrix} c\\ d\end{pmatrix})$. Alors $\det_c(x)=ad-bc$. Ainsi, cette définition est cohérente avec nos précédentes définitions de déterminants.

Théorème. Soit e une base de E.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est une forme } n\text{-linéaire alternée sur } E, \text{ alors } f=f(e)\det_e.}$$

Démonstration.
Il s'agit de la formule (1). □

Propriété. Avec les notations précédentes, on a aussi
$\det_e(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}P_{j,\sigma(j)}=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}e_j^*(x_{\sigma(j)})$.

Démonstration.
Posons $x=(x_1,\dots,x_n)$.
$\det_e(x)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}P_{\sigma(j),\sigma^{-1}(\sigma(j))}$, donc en posant $k=\sigma(j)$ dans le produit,
$\det_e(x)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{k=1}^{n}P_{k,\sigma^{-1}(k)}$. De plus, l'application $\sigma\longmapsto\sigma^{-1}$ étant une bijection de $\mathcal{S}_n$ dans lui-même, on peut poser $s=\sigma^{-1}$. Ainsi, $\det_e(x)=\sum_{s\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(s^{-1})\prod_{j=1}^{n}P_{j,s(j)}$.
Mais ε est un morphisme de groupes à valeurs dans $\{1,-1\}$, donc pour tout $s\in\mathcal{S}_n$, $\varepsilon(s^{-1})=\varepsilon(s)^{-1}=\varepsilon(s)$. Ainsi, $\det_e(x)=\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}P_{j,\sigma(j)}$. □

Formule de Sarrus : En notant c la base canonique de $\mathbb{K}^3$,

$$\begin{aligned}\det_c(\begin{pmatrix} p_{1,1}\\ p_{2,1}\\ p_{3,1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} p_{1,2}\\ p_{2,2}\\ p_{3,2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} p_{1,3}\\ p_{2,3}\\ p_{3,3}\end{pmatrix}) = \;& p_{1,1}p_{2,2}p_{3,3}+p_{2,1}p_{3,2}p_{1,3}+p_{3,1}p_{1,2}p_{2,3}\\ & -p_{1,3}p_{2,2}p_{3,1}-p_{2,3}p_{3,2}p_{1,1}-p_{3,3}p_{1,2}p_{2,1}.\end{aligned}$$

Démonstration.
$\mathcal{S}_3 = \{Id_{\mathbb{N}_3}, (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2)\}$. □

Propriété. $\det_e$ est une forme n-linéaire alternée.

Démonstration.
⋄ Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Posons f_σ l'application de E^n dans $\mathbb{K}$ définie par $f_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} e_j^*(x_{\sigma(j)}) = \prod_{j=1}^{n} e_{\sigma^{-1}(j)}^*(x_j)$. D'après une propriété du paragraphe précédent, f_σ est une forme n-linéaire, donc $\det_e = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) f_\sigma$ est aussi une forme n-linéaire.
⋄ Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On suppose qu'il existe $h, k \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $h < k$ et $x_h = x_k$. Il s'agit de montrer que $\det_e(x) = 0$.
Notons τ la transposition $(h\ k)$ et $\mathcal{A}_n$ le groupe alterné de degré n, c'est-à-dire le sous-groupe des permutations paires de $\mathcal{S}_n$. On sait que $\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_n \sqcup \tau\mathcal{A}_n$.
Ainsi, $\det_e(x) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e_j^*(x_{\sigma(j)}) = \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} \prod_{j=1}^{n} e_j^*(x_{\sigma(j)}) - \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} \prod_{j=1}^{n} e_j^*(x_{\tau\sigma(j)})$,
ou encore $\det_e(x) = \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} \prod_{j=1}^{n} e_{\sigma^{-1}(j)}^*(x_j) - \sum_{\sigma\in\mathcal{A}_n} \prod_{j=1}^{n} e_{\sigma^{-1}(j)}^*(x_{\tau(j)})$.
Or, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $x_j = x_{\tau(j)}$, donc $\det_e(x) = 0$. □

Propriété. $\det_e(e) = 1$.

Démonstration.
$\det_e(e) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \delta_{j,\sigma(j)} = \varepsilon(Id_{\mathbb{N}_n}) = 1$. □

Propriété. $\boxed{A_n(E) \text{ est une droite vectorielle dirigée par } \det_e.}$

Démonstration.
D'après le théorème précédent, tout élément f de $A_n(E)$ est colinéaire à $\det_e$, donc $A_n(E) \subset \mathrm{Vect}(\det_e)$.
De plus, $\det_e \in A_n(E)$, donc $\mathrm{Vect}(\det_e) \subset A_n(E)$. Ainsi, $A_n(E) = \mathrm{Vect}(\det_e)$.
Or $\det_e \neq 0$, car $\det_e(e) = 1 \neq 0$, donc $(\det_e)$ est un système libre qui engendre $A_n(E)$. □

Remarque. Ainsi, à un coefficient multiplicatif non nul prés, il n'y a qu'une forme n-linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, la seule façon raisonnable de définir le volume algébrique de l'hyperparallélépipède H_x associé à un n-uplet x de n vecteurs est donc de choisir une base e et de convenir que ce volume est égal à $\det_e(x)$. L'unité de volume est alors le volume de H_e. Changer le choix de la base e se limite à multiplier cette notion de volume par un réel non nul, ce qui change l'orientation si et seulement si ce réel est négatif.
En résumé, $\det_e$ est la seule définition raisonnable du volume algébrique de H_x.

1.2.3 Déterminant d'une matrice

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de M, noté $\det(M)$ est le déterminant des vecteurs colonnes de M dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Représentation tabulaire.
Si $M = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} .$$

Propriété. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} m_{j,\sigma(j)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} m_{\sigma(j),j} = \det({}^tM).}$$

Ainsi $\det(M)$ est aussi le déterminant des vecteurs lignes de M dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Formule de Sarrus :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{vmatrix} = \; & p_{1,1}p_{2,2}p_{3,3} + p_{2,1}p_{3,2}p_{1,3} + p_{3,1}p_{1,2}p_{2,3} \\ & -p_{1,3}p_{2,2}p_{3,1} - p_{2,3}p_{3,2}p_{1,1} - p_{3,3}p_{1,2}p_{2,1}. \end{aligned}$$

1.2.4 Déterminant d'un endomorphisme

Définition. Soit $u \in L(E)$. Le ***déterminant de l'endomorphisme*** u est l'unique scalaire, noté $\det(u)$, vérifiant $\boxed{\forall f \in A_n(E) \quad \forall x \in E^n \quad f(u(x)) = (\det(u))f(x)}$.

Démonstration.
Si $f \in A_n(E)$, notons f_u l'application de E^n dans $\mathbb{K}$ définie par $f_u(x_1, \ldots, x_n) = f(u(x_1), \ldots, u(x_n))$. On vérifie que f_u est n-linéaire et alternée. Ainsi $\varphi_u \;:\; f \longmapsto f_u$ est une application de $A_n(E)$ dans lui-même. On vérifie que φ_u est linéaire. Mais $A_n(E)$ est une droite vectorielle, donc $\dim(L(A_n(E)) = 1$ et $L(A_n(E)) = \mathrm{Vect}\{Id_{A_n(E)}\}$: il existe un unique scalaire, noté $\det(u)$ tel que $\varphi_u = \det(u).Id_{A_n(E)}$, c'est-à-dire tel que, pour tout $f \in A_n(E)$, $f_u = \det(u).f$. □

Propriété. Soient e une base de E et $u \in L(E)$.
Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $\det_e(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u)\det_e(x_1, \ldots, x_n)$.
En particulier, $\boxed{\det(u) = \det_e(u(e_1), \ldots, u(e_n))}$.
Cependant, $\det(u)$ ne dépend pas du choix de la base e.

Propriété. Pour toute base e de E et pour tout $u \in L(E)$, $det(u) = det(Mat(u, e))$.

Démonstration.
$det(u) = det_e(u(e_1), \dots, u(e_n))$, mais si l'on note $Mat(u, e) = M = (m_{i,j})$, par définition de det_e, $det(u) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} m_{\sigma(j),j}$, donc $det(u) = det(M)$. □

Exemple. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

Démonstration.
Notons $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Si $s \in \mathcal{S}_n$, notons u_s l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice P_s : Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $u_s(e_j) = e_{s(j)}$.
Alors $\det(P_\sigma) = \det_e(u_\sigma(e_1), \dots, u_\sigma(e_n)) = \varepsilon(\sigma)\det_e(e) = \varepsilon(\sigma)$. □

1.3 Propriétés du déterminant

Notation.
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e une base de E.

Propriété. det_e est n-linéaire alternée, donc antisymétrique. $\det_e(e) = 1$.
$\det_e(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas modifié si l'on ajoute à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.

Propriété. Le déterminant d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est modifié en :
- $\det(M)$ pour une opération élémentaire du type $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$;
- $\alpha\det(M)$ pour une opération élémentaire du type $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ ou $C_i \longleftarrow \alpha C_i$;
- $-\det M$ pour un échange entre deux lignes ou deux colonnes.

ATTENTION : En général, $\det(\alpha M + N) \neq \alpha\det(M) + \det(N)$.

Méthode : Pour calculer le déterminant d'une matrice, on tente de modifier la matrice par des manipulations élémentaires, afin de se ramener à une matrice dont on connait le rang ou le déterminant.

Propriété. $\det(Id_E) = 1$, $\det(I_n) = 1$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in L(E)$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Théorème. Si $f, g \in L(E)$, alors $\boxed{\det(fg) = \det(f) \times \det(g)}$.
Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} det(f \circ g) &= det_e(f \circ g(e_1), \dots, f \circ g(e_n)) \\ &= det(f)det_e(g(e_1), \dots, g(e_n)) \quad \square \\ &= det(f)det(g). \end{aligned}$$

Formule de changement de base : Soient e et e' deux bases de E, et soit x une famille de n vecteurs de E. Alors, $\boxed{\det_{e'}(x) = \det_{e'}(e)\det_e(x)}$.

Démonstration.
C'est la formule (1) appliquée avec $f = \det_{e'}$. □

Théorème. $\boxed{x \text{ est une base si et seulement si } \det_e(x) \neq 0.}$

Démonstration.
Supposons que x est une base, alors $1 = \det_x(x) = \det_x(e) \times \det_e(x)$, donc $\det_e(x) \neq 0$.
Réciproquement, si x n'est pas une base, alors x est une famille liée de n vecteurs, or $\det_e$ est alternée, donc $\det_e(x) = 0$. □

Corollaire. Soit $u \in L(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$u \in GL(E)$ si et seulement si $\det(u) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.
$A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration.
$u \in GL(E)$ si et seulement si $u(e)$ est une base de E, donc si et seulement si $\det(u) = \det_e(u(e)) \neq 0$.
Lorsque u est inversible, $\det(u) \times \det(u^{-1}) = \det(u \circ u^{-1}) = \det(Id_E) = 1$. □

Remarque. det est donc un morphisme du groupe $GL(E)$ vers $(\mathbb{K}^*, \times)$. Son noyau est un sous-groupe (distingué) de $GL(E)$, noté $SL(E)$. C'est le groupe spécial linéaire de E : $SL(E) = \{u \in L(E) \ / \ \det(u) = 1\}$.
On dispose en particulier de $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ \det(M) = 1\}$: c'est le groupe spécial linéaire de degré n.

Propriété. Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.
Ainsi le déterminant, comme la trace et le rang, est un invariant de similitude.

1.4 Calcul des déterminants

Notation. $c = (c_1, \dots, c_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Lemme. On suppose que $n \geq 2$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la dernière colonne est c_n. Alors $\det(A)$ est égal au déterminant de la matrice extraite de A en ôtant la dernière colonne et la dernière ligne.

Démonstration.
$\det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} A_{\sigma(j),j}$, or $A_{\sigma(n),n} = \delta_{\sigma(n),n}$, donc $\det(A) = \displaystyle\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n-1} A_{\sigma(j),j}$.
Or l'application $\varphi \ : \ \{\sigma \in \mathcal{S}_n \ / \ \sigma(n) = n\} \longrightarrow \mathcal{S}_{n-1}$ définie par $\varphi(\sigma) = \sigma|_{\mathbb{N}_{n-1}}^{\mathbb{N}_{n-1}}$ est une bijection et pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\sigma(n) = n$, $\varepsilon(\varphi(\sigma)) = \varepsilon(\sigma)$: en effet, la décomposition de $\varphi(\sigma)$ en produit de transpositions de $\mathcal{S}_{n-1}$ donne immédiatement une décompostion de σ en produit de transpositions de $\mathcal{S}_n$. Ainsi, en posant $s = \varphi(\sigma)$, on obtient $\det(A) = \displaystyle\sum_{s \in \mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon(s) \prod_{j=1}^{n-1} A_{s(j),j}$. Il s'agit bien du déterminant de la matrice extraite de A en ôtant la dernière colonne et la dernière ligne. □

Remarque. Le lemme est encore vrai lorsque $n = 1$ si l'on convient que le déterminant de la matrice vide est égal à 1.

Définition. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, notons ${}_{i,j}M$ la matrice extraite de M en ôtant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. La quantité $\det({}_{i,j}M)$ s'appelle le $(i, j)^{\text{ème}}$ ***mineur*** de M
La quantité $\boxed{C_{i,j} = (-1)^{i+j}\det({}_{i,j}M) \text{ s'appelle le } (i, j)^{\text{ème}} \textbf{\textit{ cofacteur }} \text{de } M}$.

Exemple. Pour $A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix}$, les cofacteurs de la première colonne sont
$C_{1,1} = 22 \times 33 - 32 \times 23 = -10$, $C_{2,1} = -(12 \times 33 - 32 \times 13) = 20$
et $C_{3,1} = 12 \times 23 - 22 \times 13 = -10$.

Théorème. Avec ces notations,

— Pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $\boxed{\det(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}C_{i,j}}$: c'est **le développement de det**(M) **selon sa** $j^{\text{ème}}$ **colonne.**

— Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\boxed{\det(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}C_{i,j}}$: c'est le **développement de det**(M) **selon sa** $i^{\text{ème}}$ **ligne**.

Démonstration.
La seconde partie du théorème s'obtient en appliquant la première partie à ${}^tM$.
Notons $M_1, \dots, M_n$ les colonnes de M et fixons $j \in \mathbb{N}_n$. $M_j = \sum_{i=1}^{n} M_{i,j}c_i$, donc

$\det(M) = \det_c(M_1, \dots, M_n) = \det_c(M_1, \dots, M_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} M_{i,j}c_i, M_{j+1}, \dots, M_n)$, puis

$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,j}\det_c(M_1, \dots, M_{j-1}, c_i, M_{j+1}, \dots, M_n)$. Il reste donc à montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\det_c(M_1, \dots, M_{j-1}, c_i, M_{j+1}, \dots, M_n) = C_{i,j}$.
Soit $i \in \mathbb{N}_n$. En effectuant $n - j$ échanges de colonnes, on obtient
$\det_c(M_1, \dots, M_{j-1}, c_i, M_{j+1}, \dots, M_n) = (-1)^{n-j}\det_c(M_1, \dots, M_{j-1}, M_{j+1}, \dots, M_n, c_i)$,
puis en effectuant $n - i$ échanges de lignes, on obtient

$\det_c(M_1, \dots, M_{j-1}, c_i, M_{j+1}, \dots, M_n) = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} & 0 \\ {}_{i,j}M & \vdots \\ & 0 \\ * \cdots * & 1 \end{vmatrix}$ et le lemme permet de conclure. □

Définition. On appelle ***comatrice*** de M la matrice $(C_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ des cofacteurs de M.
On la notera $Com(M)$ ou bien $Cof(M)$.
La transposée de la comatrice s'appelle la ***matrice complémentaire*** de M.

Théorème. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\boxed{M^t Cof(M) = {}^t Cof(M) M = \det(M) I_n}$.

Démonstration.

Soit $i \in \mathbb{N}_n$. $[M^t Cof(M)]_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} C_{i,j} = \det(M)$ d'après la formule de développement de $\det(M)$ selon sa i-ème ligne.

De même $[{}^t Cof(M) M]_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} C_{j,i} M_{j,i} = \det(M)$ d'après la formule de développement de $\det(M)$ selon sa i-ème colonne.

Soit $i, j \in \mathbb{N}_n$ avec $i \neq j$: $[M^t Cof(M)]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} C_{j,k}$.

Notons $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de M et notons A la matrice dont les lignes sont $L_1, \ldots, L_{j-1}, L_i, L_{j+1}, \ldots, L_n$. Alors $[M^t Cof(M)]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} C_{j,k}$ est le développement de $\det(A)$ selon sa j-ème ligne, car $C_{j,k}$ est bien le cofacteur de A de position (j, k).

Ainsi, $[M^t Cof(M)]_{i,j} = \det(A) = 0$, car A possède deux lignes égales.

En raisonnant sur les colonnes, on montre de même que $[{}^t Cof(M) M]_{i,j} = 0$. □

Corollaire. Lorsque M est inversible, $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t Cof(M)$.

Exemple. Avec $n = 2$, on retrouve que, lorsque $ad - bc \neq 0$,
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Théorème. Soit $M = (M_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq a \\ 1 \leq j \leq a}}$ une matrice décomposée en blocs, où, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_a$, $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, n_j}(\mathbb{K})$.

Si M est triangulaire supérieure (ou inférieure) par blocs, alors, $\det(M) = \prod_{i=1}^{a} \det(M_{i,i})$

Démonstration.

Au prix d'une récurrence, il suffit de montrer que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, p)$, $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, q)$ et $C \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(q, q)$, $\begin{vmatrix} A & B \\ 0_{q,p} & C \end{vmatrix} = \det(A)\det(C)$.

Si A n'est pas inversible, les colonnes de A sont liées, donc les colonnes de $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix}$ sont également liées. Ainsi, $\begin{vmatrix} A & B \\ 0_{q,p} & C \end{vmatrix} = 0 = \det(A)\det(C)$.

Si A est inversible, alors $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{q,p} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_p & A^{-1}B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, donc
$\begin{vmatrix} A & B \\ 0_{q,p} & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_p & A^{-1}B \\ 0 & C \end{vmatrix}$, ce qui permet de conclure, car en développant plusieurs fois selon la première colonne, on montre que $\begin{vmatrix} I_p & A^{-1}B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(C)$ et, en

développant plusieurs fois selon la dernière colonne, que $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{vmatrix} = \det(A)$. □

Exemple. $\begin{vmatrix} -3 & -7 & 54 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times (-9) = -18.$

Exemple. Posons $\Delta_n = \det((\min(i,j))_{1 \leq i,j \leq n})$. Ainsi, $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$

Si l'on effectue les opérations élémentaires $L_i \longleftarrow L_i - L_1$ pour tout $i \geq 2$, on obtient $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \quad \cdots \quad 1 \\ 0 & \\ \vdots & [\min(i,j)]_{1 \leq i,j \leq n-1} \\ 0 & \end{vmatrix}$, donc $\Delta_n = \Delta_{n-1} = D_1 = 1$.

Corollaire. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Remarque. On retrouve ainsi qu'une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Exemple. Supposons que $E = F \oplus G$. Notons s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors $\det(s) = (-1)^{\dim(G)}$.

Démonstration.
Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de F et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de G. Notons $e = (e_1, \ldots, e_n)$. C'est une base de e et $\mathrm{mat}(u, e)$ est diagonale, les r premiers coefficients diagonaux étant égaux à 1 et les suivants à -1. On conclut facilement. □

Conclusion : Pour calculer un déterminant, le plus souvent, on ajoute à une ligne (ou à une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou des autres colonnes), ou bien on effectue un développement selon une ligne (ou selon une colonne), dans le but de se ramener à un déterminant que l'on sait calculer, ou dont la valeur est connue : déterminants d'ordre 2 ou 3, déterminants triangulaires, ou bien des déterminants classiques étudiés plus loin.

1.5 Formules de Cramer

Propriété. Considérons un système linéaire de Cramer $(S)\ :\ MX = B$, où $M \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^n$, dont l'unique solution est notée $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Alors, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\boxed{x_j = \dfrac{\det({}_jM)}{\det(M)}}$, où ${}_jM$ est la matrice dont les colonnes sont celles de M, sauf la $j^{\text{ème}}$ qui est égale à B.

Démonstration.
Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. Notons M_j la j-ème colonne de M.

$$\begin{aligned}\det({}_jM) &= \det_c(M_1, \ldots, M_{j-1}, B, M_{j+1}, \ldots, M_n)\\ &= \det_c(M_1, \ldots, M_{j-1}, \sum_{i=1}^n x_i M_i, M_{j+1}, \ldots, M_n)\\ &= \sum_{i=1}^n x_i \det_c(M_1, \ldots, M_{j-1}, M_i, M_{j+1}, \ldots, M_n)\\ &= x_j \det(M),\end{aligned}$$

car $\det_c$ est une application n-linéaire alternée. □

Remarque. Ces formules de Cramer sont utiles sur le plan théorique. Pour résoudre un système de Cramer, ces formules sont idéales lorsque $n = 2$, mais elles sont inadaptées lorsque $n \geq 3$. En effet, l'utilisation de ces formules nécessite n divisions et le calcul de $n+1$ déterminants d'ordre n.
Mais, pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma(j)}$, donc le calcul d'un déterminant d'ordre n, en procédant de manière naïve demande $n! - 1$ additions ou soustractions et $n!(n-1)$ multiplications.
Ainsi, résoudre (S) par application directe des formules de Cramer demande à peu près $(n+2)!$ multiplications, $(n+1)!$ additions et n divisions.
Supposons que nous utilisons un ordinateur d'une puissance de 1GHz ($= 10^9$ cycles par seconde). Le nombre de multiplications qu'il peut effectuer pendant une durée égale à l'age de l'univers est de l'ordre de $10 \times 10^9 \times 365 \times 24 \times 60^2 \times 10^9 \approx 10^{27}$. La résolution d'un système d'ordre 30 nécessite environ 10^{35} multiplications. Ainsi, en supposant que notre ordinateur travaille à cette tâche depuis la création de l'univers, il n'aura à notre époque réalisé que 10 milliardièmes des calculs nécessaires !
Il faut donc se tourner vers des algorithmes plus efficaces : on peut montrer que l'algorithme du pivot de Gauss nécessite de l'ordre de $\dfrac{n^3}{3}$ multiplications et additions et de l'ordre de $\dfrac{n^2}{2}$ divisions. La résolution d'un système d'ordre 30 ne demandera plus qu'environ 18000 opérations, ce qui sera effectué en 2×10^{-5} secondes…

1.6 Exemples de déterminants.

1.6.1 Déterminant de Vandermonde

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
La ***matrice de Vandermonde*** est $\mathcal{V}(a_0, \ldots, a_n) = (a_{i-1}^{j-1}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$,

et le ***déterminant de Vandermonde*** est $V(a_0,\dots,a_n)=\det(\mathcal{V}(a_0,\dots,a_n))$. Ainsi,

$$\boxed{V(a_0,\dots,a_n)=\begin{vmatrix}1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n\\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n\end{vmatrix}}.$$

Propriété. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$.
$V(a_0,\dots,a_n)=V(a_0,\dots,a_{n-1})\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(a_n-a_i)$.

Démonstration.
Afin d'illustrer les différentes techniques relatives au calcul des déterminants, nous allons présenter 4 démonstrations de ce résultat.

Première démonstration. par combinaison linéaire de colonnes.
Effectuons sur le déterminant de Vandermonde de $(a_0,\dots,a_n)$ les opérations élémentaires suivantes : $C_j\longleftarrow C_j-a_nC_{j-1}$ dans l'ordre suivant : j varie de $n+1$ à 2 (en effet, au rang j, on a besoin de C_{j-1}, donc, au rang j, la colonne d'indice $j-1$ ne doit pas avoir été modifiée).
On obtient

$$V(a_0,\dots,a_n)=\begin{vmatrix}1 & a_0-a_n & \cdots & a_0^{n-2}(a_0-a_n) & a_0^{n-1}(a_0-a_n)\\ 1 & a_1-a_n & \cdots & a_1^{n-2}(a_1-a_n) & a_1^{n-1}(a_1-a_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_{n-1}-a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_n) & a_{n-1}^{n-1}(a_{n-1}-a_n)\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Développons selon sa dernière ligne ce déterminant de taille $n+1$. On obtient
$V(a_0,\dots,a_n)=(-1)^{(n+1)+1}\left(\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(a_i-a_n)\right)V(a_0,\dots,a_{n-1})$.

Deuxième démonstration, utilisant des combinaisons linéaires de colonnes et des polynômes.

Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$, noté $P=X^n+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}b_jX^{j-1}$.

Effectuons sur le déterminant de Vandermonde de $(a_0,\dots,a_n)$ l'opération élémentaire suivante : $C_{n+1}\longleftarrow C_{n+1}+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}b_jC_j$.

Le $i^{\text{ème}}$ coefficient de la dernière colonne devient alors $a_i^n+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}b_ja_i^{j-1}=P(a_i)$.

En particulier, si l'on choisit $P = \prod_{i=0}^{n-1}(X - a_i)$ (qui est bien un polynôme unitaire de degré n), les coefficients de la dernière colonne sont tous nuls, sauf le dernier, qui vaut $\prod_{i=0}^{n-1}(a_n - a_i)$. Ainsi, en développant par rapport à la dernière colonne,

$$V(a_0, \dots, a_n) = V(a_0, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1}(a_n - a_i).$$

Pour les deux démonstrations suivantes, on supposera que $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts. Ce n'est pas restrictif car lorsque, parmi $a_0, \dots, a_n$, deux scalaires au moins sont égaux, le déterminant $V(a_0, \dots, a_n)$ contient au moins deux lignes égales, donc il est nul, ainsi que la quantité $V(a_0, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1}(a_i - a_n)$.

Troisième démonstration, utilisant des polynômes.

Soit $x \in \mathbb{K}$. $V(a_0, \dots, a_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix}$.

Si l'on développe ce déterminant selon sa dernière ligne, on obtient un polynôme en x de degré inférieur ou égal à n, dont le coefficient de degré n vaut $V(a_0, \dots, a_{n-1})$.
Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$. La matrice $\mathcal{V}(a_0, \dots, a_{n-1}, a_i)$ possède deux lignes identiques, donc $V(a_0, \dots, a_{n-1}, a_i)$ est nul. Ainsi, le polynôme $V(a_0, \dots, a_{n-1}, x)$ admet au moins n racines deux à deux distinctes, qui sont $a_0, \dots, a_{n-1}$. C'est donc un multiple de $\prod_{i=0}^{n-1}(x - a_i)$.

Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $V(a_0, \dots, a_{n-1}, x) = Q(x) \prod_{i=0}^{n-1}(x - a_i)$.

Nécessairement, $deg(Q) \leq 0$, donc Q est une constante, et, en égalant les coefficients de degré n, on obtient que cette constante vaut $V(a_0, \dots, a_{n-1})$.

Ainsi, $V(a_0, \dots, a_{n-1}, x) = V(a_0, \dots, a_{n-1}) \left(\prod_{i=0}^{n-1}(x - a_i) \right)$.

Quatrième démonstration, utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange.
Reprenons les notations de la page **??** et notons $c = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Soit $j \in \{0, \dots, n\}$.
Dans la base $L = (L_0, \dots, L_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$, les coordonnées du polynôme X^j sont $a_0^j, a_1^j, \dots, a_n^j$, donc la matrice $\mathcal{V}(a_0, \dots, a_n)$ est la matrice de passage de la base L vers la base c, notée P_L^c.
Remarquons, même si ce n'est pas exactement le but de la démonstration, que ce qui précède montre sans calcul que la matrice $\mathcal{V}(a_0, \dots, a_n)$ est inversible si et seulement

si $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.
De plus, ce qui précède permet d'inverser rapidement $\mathcal{V}(a_0, \dots, a_n)$. En effet, $\mathcal{V}^{-1}(a_0, \dots, a_n) = P_c^L$, donc le $(i,j)^{\text{ème}}$ coefficient de $\mathcal{V}^{-1}(a_0, \dots, a_n)$ est le coefficient de degré $i-1$ du polynôme L_{j-1}, que l'on pourrait exprimer en fonction de $a_0, \dots, a_n$ en utilisant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.
Cependant, pour le calcul du déterminant de Vandermonde, on peut se contenter de calculer le coefficient de position $(n+1, n+1)$ de $\mathcal{V}^{-1}(a_0, \dots, a_n)$. Il s'agit du coefficient dominant de $L_{n+1} = \prod_{i=0}^{n-1} \dfrac{X - a_i}{a_n - a_i}$, donc il est égal à $\prod_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{a_n - a_i}$.
D'autre part, $\mathcal{V}^{-1}(a_0, \dots, a_n) = \dfrac{1}{V(a_0, \dots, a_n)} {}^t Cof(\mathcal{V}(a_0, \dots, a_n))$, donc le coefficient de position de $(n+1, n+1)$ de $\mathcal{V}^{-1}(a_0, \dots, a_n)$ est aussi égal à $\dfrac{C_{n+1,n+1}}{V(a_0, \dots, a_n)}$, où $C_{n+1,n+1}$ désigne le cofacteur de $\mathcal{V}(a_0, \dots, a_n)$ de position de $(n+1, n+1)$.
On en déduit que $\prod_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{a_n - a_i} = \dfrac{V(a_0, \dots, a_{n-1})}{V(a_0, \dots, a_n)}$. □

Propriété. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$: $\boxed{V(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)}$.
Ainsi $\boxed{\mathcal{V}(a_0, \dots, a_n) \text{ est inversible si et seulement si } a_0, \dots, a_n \text{ sont deux à deux distincts.}}$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante :
$\forall (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \ \ V(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$.
Démontrons par récurrence sur n que $R(n)$ est vraie pour tout n.
Pour $n = 0$, soit $a_0 \in \mathbb{K}$. $V(a_0) = \det(1) = 1 = \prod_{0 \le i < j \le 0} (a_j - a_i)$, car l'ensemble des indices de ce produit est l'ensemble vide.
Pour $n \ge 1$, supposons $R(n-1)$.
Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. On a établi que
$V(a_0, \dots, a_n) = V(a_0, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1} (a_n - a_i)$, donc, d'après l'hypothése de récurrence,
$V(a_0, \dots, a_n) = \left(\prod_{0 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i) \right) \left(\prod_{i=0}^{n-1} (a_n - a_i) \right) = \prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$, ce qui démontre $R(n)$. □

1.6.2 Déterminants tridiagonaux

Définition. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
M est une ***matrice tridiagonale*** si et seulement si , pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$,

$|i-j| \geq 2 \Longrightarrow m_{i,j} = 0$. Un ***déterminant tridiagonal*** est le déterminant d'une matrice tridiagonale.

Notation. Fixons un entier n supérieur ou égal à 3 et $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice tridiagonale.
Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, notons $M_k = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}}$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, M_k est une matrice de taille k, extraite de M en ne retenant que ses k premières colonnes et ses k premières lignes. En particulier, $M = M_n$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, notons Δ_k le déterminant de M_k.

Propriété. Pour tout $k \geq 3$, $\Delta_k = m_{k,k}\Delta_{k-1} - m_{k-1,k}m_{k,k-1}\Delta_{k-2}$

Démonstration.
Soit $k \geq 3$.

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & \ddots & m_{2,3} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & m_{3,2} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & m_{k-1,k} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & m_{k,k-1} & m_{k,k} \end{vmatrix},$$

donc, en développant selon la dernière colonne, on obtient

$$\Delta_k = m_{k,k} \begin{vmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & \ddots & m_{2,3} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & m_{3,2} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & m_{k-2,k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & m_{k-1,k-2} & m_{k-1,k-1} \end{vmatrix}$$
$$- m_{k-1,k} \begin{vmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{2,1} & \ddots & m_{2,3} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & m_{3,2} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & m_{k-2,k-3} & m_{k-2,k-2} & m_{k-2,k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & m_{k,k-1} \end{vmatrix}.$$

Dans le membre de droite, le premier déterminant est Δ_{k-1} et, en développant le second déterminant selon la dernière ligne, on montre que ce dernier est égal à $m_{k,k-1}\Delta_{k-2}$. On obtient ainsi la relation annoncée. □

Remarque. (Δ_k) est ainsi une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
En particulier lorsque les suites $(m_{k,k})$ et $(m_{k-1,k}m_{k,k-1})$ sont constantes, on sait en déduire une expression de Δ_k en fonction de k.

Exemple. Pour $n \geq 2$, notons $M_n = (m_{i,j})$ la matrice de taille n dont les coefficients sont définis par les relations suivantes : pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $m_{i,i} = 2$, pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, $m_{i,i+1} = 1$ et $m_{i+1,i} = 3$, et, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$ tel que $|i-j| \geq 2$, $m_{i,j} = 0$.
D'après la propriété précédente, si l'on note Δ_n le déterminant de M_n, pour tout $n \geq 4$, $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - 3\Delta_{n-2}$.
Ainsi, $(\Delta_n)_{n\geq 2}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Le polynôme caractéristique associé à cette suite est $P(X) = X^2 - 2X + 3$, dont les racines sont $1 + i\sqrt{2}$ et $1 - i\sqrt{2}$, donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que,
pour tout $n \geq 2$, (1) : $\Delta_n = \lambda(1 + i\sqrt{2})^n + \mu(1 - i\sqrt{2})^n$.
Déterminons λ et μ. On pourrait dans ce but calculer Δ_2 et Δ_3 et substituer leurs valeurs dans la relation (1), mais il y a plus simple. Nous allons prolonger la suite $(\Delta_n)_{n\geq 2}$ en l'unique suite $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ qui vérifie la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
Or, en posant $\Delta_1 = 2$, $\Delta_3 = 2\Delta_2 - 3\Delta_1$, et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 3$, donc il suffit de poser $\Delta_0 = 1$.
Substituons successivement n par 0 et par 1 dans la relation (1). On obtient : $\lambda + \mu = 1$ et $\lambda + \mu + i\sqrt{2}(\lambda - \mu) = 2$. Ainsi, $\lambda - \mu = -i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\lambda = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ et $\mu = \overline{\lambda}$.
On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = 2\mathrm{Re}\left((\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{4})(1 + i\sqrt{2})^n \right)$.
En développant à l'aide de la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\Delta_n = \mathrm{Re}\left((1 - i\frac{\sqrt{2}}{2}) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k 2^{\frac{k}{2}} \right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k 2^k + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k 2^k.$$

1.6.3 Déterminants circulants

Notation. Fixons un entier n strictement positif.
Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, on note $\sigma(x) = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$.
Enfin, notons c le cycle de longueur n suivant : $c = (n, n-1, \ldots, 2, 1)$.

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont les lignes sont notées $L_1, \ldots, L_n$.
On dit que M est circulante si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $L_i = c^{i-1}(L_1)$.
Ainsi, on passe d'une ligne à la suivante selon la permutation circulaire c.

Remarque. On peut calculer le déterminant d'une matrice circulante quelconque au moyen de la théorie de la réduction des matrices. Cependant, dans des cas simples, il n'est pas utile de faire appel au calcul général. Il est souvent suffisant de commencer par remplacer la première ligne par la somme de toutes les lignes. En effet, la somme de toutes les lignes est un vecteur de $\mathbb{K}^n$ colinéaire à $(1, 1, \ldots, 1)$. Ainsi, après mise en facteur, la première ligne ne contient que des "1". On peut alors, pour j variant de n à 2, effectuer les opérations $C_j \longleftarrow C_j - C_{j-1}$.

Exemple. Soit $n \geq 2$. Calculez le déterminant Δ de la matrice d'ordre n dont le coefficient de position (i,j) vaut $j-i+1$ si $i \leq j$ et $n+j-i+1$ si $i \geq j$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \ddots & & & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 3 & & & & n & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & \cdots & \cdots & & n & 1 \end{vmatrix}.$$

On vérifie qu'il s'agit bien du déterminant d'une matrice circulante.

L'opération $L_1 \longleftarrow \sum_{i=1}^{n} L_i$ donne $\Delta = \dfrac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ n & 1 & 2 & 3 & & & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 3 \\ 3 & & & & n & \ddots & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & \cdots & & n & 1 \end{vmatrix}$.

Pour j variant de n à 2, effectuons les opérations $C_j \longleftarrow C_j - C_{j-1}$. Ainsi,

$$\Delta = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 1-n & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 3 & 1 & & & 1 & 1-n & 1 \\ 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

Développons selon la première ligne et, sur le déterminant de taille $n-1$ ainsi obtenu, effectuons l'opération $L_1 \longleftarrow \sum_{i=1}^{n-1} L_i$. On obtient :

$$\Delta = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & & & 1 & 1-n & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

Pour i variant de 2 à $n-1$, effectuons $L_i \longleftarrow L_i + L_1$. Ainsi,

$$\Delta = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & -n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -n \end{vmatrix} = -\frac{n(n+1)}{2}(-n)^{n-2}.$$

1.7 Le polynôme caractéristique

Notation. On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$.

1.7.1 Définition

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique la quantité $\chi_M = \det(XI_n - M)$. C'est le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont dans le corps $\mathbb{K}(X)$. χ_M est un élément de $\mathbb{K}[X]$.
De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M)$.

Démonstration.
En posant $M = (m_{i,j})$, $\chi_M = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (X\delta_{j,\sigma(j)} - m_{j,\sigma(j)})$.

On en déduit que, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_M(\lambda) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (\lambda\delta_{j,\sigma(j)} - m_{j,\sigma(j)}) = \det(\lambda I_n - M)$.
□

Remarque.
Vous rencontrerez parfois une définition légèrement différente du polynôme caractéristique. Il s'agit de $\det(M - XI_n)$. On passe de cette dernière convention à celle que nous avons adoptée en multipliant par $(-1)^n$. Dans un problème ou au sein d'un exercice, il est bon de se demander quelle est la convention (parfois implicitement) utilisée.

Représentation tabulaire. Si $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix}$,

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - m_{1,1} & -m_{1,2} & \cdots & -m_{1,n} \\ -m_{2,1} & \lambda - m_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -m_{n-1,n} \\ -m_{n,1} & \cdots & -m_{n,n-1} & \lambda - m_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Remarque. Souvent, le corps est de cardinal infini, ce qui permet d'identifier le polynôme χ_M avec l'application polynômiale $\lambda \longmapsto \chi_M(\lambda)$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.

Propriété. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{{}^tM} = \chi_M$.

Démonstration.
$\chi_{{}^tM} = \det(XI_n - {}^tM) = \det({}^t(XI_n - M)) = \det(XI_n - M) = \chi_M$. □

Propriété. Si M est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors $\chi_M(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$.

Propriété. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$.
$\chi_{PMP^{-1}} = \det(XI_n - PMP^{-1}) = \det(P(XI_n - M)P^{-1}) = \det(XI_n - M) = \chi_M$. □

Remarque. La réciproque est fausse.

Démonstration.
Posons $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\chi_M(X) = (X-1)^2 = \chi_{I_2}(X)$.
Supposons que M et I_2 sont semblables. Ainsi, il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $M = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$. C'est faux, donc M et I_2 ne sont pas semblables alors qu'elles ont le même polynôme caractéristique. □

Définition. On déduit de la propriété précédente que la quantité $\chi_{mat(u,e)}$ ne dépend pas du choix de la base e de E. Cette quantité s'appelle le polynôme caractéristique de u.

Propriété. $(\lambda \in Sp(u)) \Longleftrightarrow (\lambda \in \mathbb{K}$ et $\chi_u(\lambda) = 0)$.

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda \in Sp(u)$ si et seulement si $\lambda Id_E - u$ n'est pas injectif, donc si et seulement si $\det(\lambda Id_E - u) = 0$. □

Corollaire. Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Sp({}^tM) = Sp(M)$.

Corollaire. Le spectre d'une matrice triangulaire supérieure est égal l'ensemble de ses coefficients diagonaux.

Exemple. Choisissons $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$. On effectue $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$. On obtient

$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$. On effectue $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$. On obtient

$\chi_M(\lambda) = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$, donc

$\chi_M(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1)$. Ainsi $Sp(M) = \{1\}$.
Cependant, on peut aussi considérer M comme une matrice à coefficients complexes, auquel cas, $Sp(M) = \{1, i, -i\}$.

Remarque. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le spectre de M considérée comme matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ (noté $Sp_{\mathbb{R}}(M)$) n'est pas en général égal au spectre de M considérée comme matrice à coefficients complexes (noté $Sp_{\mathbb{C}}(M)$). On dispose seulement de la relation $Sp_{\mathbb{R}}(M) = Sp_{\mathbb{C}}(M) \cap \mathbb{R}$. Il est donc important de préciser de quel spectre de M on parle.

De même, si $u \in E$ (où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel), les valeurs propres de u sont dans $\mathbb{R}$, mais parfois, on appelle valeurs propres de u toutes les racines de χ_u, même celles appartenant à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ici aussi, il est important de préciser quelle définition d'une valeur propre on utilise.
Par exemple, au sein d'un problème ou d'un exercice, la question "toutes les valeurs propres de u sont-elles dans $\mathbb{R}$?" n'a d'intérêt que si l'on considère que les valeurs propres de u sont toutes les racines complexes de χ_u.

Définition. Soit $\lambda \in Sp(u)$.

On appelle ***multiplicité*** de λ sa multiplicité en tant que racine de χ_u.

Elle est notée $m(\lambda)$.
Si $m(\lambda) = 1$, on dit que λ est une ***valeur propre simple*** de u.
Si $m(\lambda) = 2$, on dit que λ est une ***valeur propre double*** de u.
Si $m(\lambda) = 3$, on dit que λ est une ***valeur propre triple*** de u.

Remarque. Lorsque $\lambda \notin Sp(u)$, on convient que $m(\lambda) = 0$.

1.7.2 Propriétés du polynôme caractéristique

Propriété. χ_u est un polynôme unitaire de degré n tel que

$$\boxed{\chi_u(X) = X^n - Tr(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u).}$$

Remarque. Dans la formule ci-dessus, les "$+ \cdots +$" indiquent qu'il y a des termes intermédiaires, mais il n'y a pas de formule simple donnant ces termes.

Démonstration.
Fixons une base e de E et notons $M = (m_{i,j}) = mat(u, e)$.

$\chi_u = \chi_M = \det(XI_n - M) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} (X\delta_{j,\sigma(j)} - m_{j,\sigma(j)})$.

- Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} (X\delta_{j,\sigma(j)} - m_{j,\sigma(j)})$ est un polynôme en X de degré inférieur à n.

De plus, son degré est égal à n si et seulement si , pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $\sigma(j) = j$, c'est-à-dire si et seulement si $\sigma = Id_{\mathbb{N}_n}$.
Ainsi χ_u est un polynôme de degré n dont le coefficient dominant vaut $\varepsilon(Id_{\mathbb{N}_n}) = 1$.
- Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{Id_{\mathbb{N}_n}\}$. Il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $\sigma(i) \neq i$. Posons $j = \sigma(i)$. Si $\sigma(j) = j$, σ étant injective, $j = i$, ce qui est faux. Ainsi $\{k \in \mathbb{N}_n / \sigma(k) \neq k\}$ est de cardinal supérieur ou égal à 2. Donc $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} (X\delta_{j,\sigma(j)} - m_{j,\sigma(j)})$ est un polynôme en X de degré inférieur à $n - 2$.

Ainsi $\chi_u(X) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(X - m_{j,j}) + Q(X)$ où Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$. On en déduit que $\chi_u(X) = X^n - \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{j,j}\right) X^{n-1} + R(X)$ où R est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$.
D'autre part, le terme constant de χ_u est $\chi_u(0) = \det(-u) = (-1)^n \det(u)$. □

Corollaire. $\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{C},\ u \text{ admet au moins un vecteur propre.}}$

Démonstration.
χ_u est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur à 1, or $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, donc χ_u admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. □

> **Exercice.** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u, v \in L(E)$ tels que $uv = vu$. Montrer que u et v possèdent au moins un vecteur propre commun.
>
> ***Résolution.*** u possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. E_λ^u est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non nul et stable par v, donc $v_{/E_\lambda^u}$ possède un vecteur propre $x \in E_\lambda^u$. Alors x est un vecteur propre commun à u et v.

Contrexemple en dimension quelconque.
Choisissons $E = \mathbb{C}[X]$ et $\begin{array}{rccc} u: & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & XP(X) \end{array}$.
Soit $P \in E \setminus \{0\}$. $deg(u(P)) = 1 + deg(P)$, donc il n'existe aucun $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(P) = \lambda P$.
Ainsi le spectre de u est égal à l'ensemble vide.

Corollaire. Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ (c'est toujours le cas lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$),

$$\boxed{Tr(u) = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} m(\lambda)\lambda, \quad \text{et } \det(u) = \prod_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} \lambda^{m(\lambda)}.}$$

Démonstration.
D'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme, $Tr(u)$ est égal à la somme des racines de χ_u, comptées avec multiplicité, or χ_u est scindé dans $\mathbb{K}$, donc l'ensemble des racines de χ_u est $Sp_{\mathbb{K}}(u)$.
Ainsi, $Tr(u) = \displaystyle\sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} m(\lambda)\lambda$.
Le raisonnement est similaire pour la seconde formule. □

Remarque. En pratique, pour déterminer les éléments propres d'une matrice M, on peut commencer par calculer χ_M. On détermine les racines de χ_M et, pour chacune d'entre elles, notée λ, on recherche une base du sous-espace propre en résolvant le système linéaire $(\lambda I_n - M)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$.

Parfois, on n'a pas besoin de déterminer précisément les sous-espaces propres, mais seulement de calculer leurs dimensions. Dans ce cas, il est commode d'utiliser la formule suivante :

$$\forall \lambda \in Sp(M) \quad \boxed{dim(E_\lambda) = n - rg(\lambda I_n - M).}$$

Démonstration.
D'après la formule du rang,
$dim(E_\lambda) = dim(Ker(\lambda I_n - M)) = n - dim(Im(\lambda I_n - M)) = n - rg(\lambda I_n - M)$. □

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u.

$$\boxed{\text{Si } u_{/F} \text{ est l'endomorphisme induit par } u \text{ sur } F, \text{ alors } \chi_{u_{/F}} | \chi_u.}$$

Démonstration.
Choisissons $e' = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F que l'on complète en une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Si l'on note $M = Mat(u, e)$ et $M' = Mat(u_{/F}, e')$, il existe deux matrices $A \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$ telles que $M = \begin{pmatrix} M' & A \\ 0_{n-p,p} & B \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\chi_u(X) = \det(XI_n - M) = \det \begin{pmatrix} XI_p - M' & -A \\ 0_{n-p,p} & XI_{n-p} - B \end{pmatrix} = \chi_{u_{/F}}(X)\chi_B(X)$.
□

Propriété. Soit $(E_1, \ldots, E_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. On suppose que u stabilise la famille $(E_1, \ldots, E_p)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, on note u_i l'endomorphisme induit par u sur E_i. Alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} \chi_{u_i}$.

Démonstration.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, on choisit une base de E_i notée e_i.
Notons e la “réunion” des e_i, pour i variant de 1 à p. e est une base de E.
On sait que $Mat(u, e)$ est diagonale par blocs, la “diagonale” étant constituée des p blocs suivants :
$M_1 = mat(u_1, e_1)$, ..., $M_p = mat(u_p, e_p)$.
Le déterminant d'une matrice diagonale par blocs étant égal au produit des déterminants des blocs diagonaux, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
$\chi_u(X) = \det(XI_n - M) = \prod_{i=1}^{p} \det(XI_{n_i} - M_i)$, où pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $n_i = dim(E_i)$.

Ainsi, $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p} \chi_{u_i}(X)$. □

Notation. Pour tout $\lambda \in E_\lambda$, on note $q(\lambda) = dim(E_\lambda)$.

Propriété. $\forall \lambda \in Sp(u)$ $\boxed{1 \leq q(\lambda) \leq m(\lambda).}$

Démonstration.

- Soit $\lambda \in Sp(u)$. $E_\lambda \neq \{0\}$, donc $1 \leq q(\lambda)$.
- u commute avec lui-même, donc E_λ est stable par u. Notons u' l'endomorphisme induit par u sur E_λ.

Pour tout $x \in E_\lambda$, $u(x) = \lambda x$, donc $u' = \lambda Id_{E_\lambda}$.
Soit $\mu \in \mathbb{K}$. $\chi_{u'}(\mu) = \det(\mu Id_{E_\lambda} - u') = \det(\mu I_{q(\lambda)} - \lambda I_{q(\lambda)}) = (\mu - \lambda)^{q(\lambda)}$.
Ainsi, $\chi_{u'}(X) = (X - \lambda)^{q(\lambda)}$. Or $\chi_{u'} | \chi_u$, donc $m(\lambda) \geq q(\lambda)$. □

Cas particulier. $\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre simple de } u,\ 1 = q(\lambda) = m(\lambda).}$

1.7.3 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Théorème. u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et, pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $m(\lambda) = q(\lambda)$.

Démonstration.

- Supposons que u est diagonalisable. Ainsi, il existe une base e de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de cette matrice.

◇ $\chi_u = \chi_{Mat(u,e)} = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, donc χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

◇ Soit $\lambda \in Sp(u)$. L'égalité précédente montre que $m(\lambda) = Card(\{i \in \mathbb{N}_n / \lambda_i = \lambda\})$.
Or, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $e_i \in E_{\lambda_i}$, donc $Vect(\{e_i / \lambda_i = \lambda\}) \subset E_\lambda$.
Ainsi, $m(\lambda) = dim(Vect(\{e_i / \lambda_i = \lambda\})) \leq dim(E_\lambda) = q(\lambda)$.
L'inégalité contraire étant vraie pour tout endomorphisme, on a montré que, pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $m(\lambda) = q(\lambda)$.

- Réciproquement, supposons que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et que, pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $m(\lambda) = q(\lambda)$.

Alors, $\sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} q(\lambda) = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} m(\lambda) = deg(\chi_u) = n$, car χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, ce qui prouve que u est diagonalisable. □

Cas particulier.
Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si toutes ses racines sont simples, alors u est diagonalisable.

Démonstration.
Lorsqu'une valeur propre λ est simple, on a déjà établi que $m(\lambda) = q(\lambda)$. □