Khôlles MPSI (Lycée Pasteur)

POULLOT Germain

Septembre 2019 - 25 juin 2021

Résumé

Attention ! Les exercices présentés ici n'ont bien évidement pas vocation à remplacer les excellents exercices vus en cours. Si vous avez du temps et cherchez des exercices en plus, alors vous pouvez lire ces sujets. Les corrections sont disponibles directement à la suite des sujets. Parfois, un exercice est entièrement corrigé, parfois partiellement, et parfois encore, vous serez juste redirigés vers le cours, une vidéo ou un site. Certains exercices sont longs, d'autres très courts ; certains faciles, d'autres particulièrement ardus : apprendre à détecter ce que vous savez faire et ce qui est difficile est aussi un bon exercice !

Si vous avez une question quelconque ou une remarque (par exemple la correction d'une des nombreuses erreurs de ce pdf), vous pouvez me contacter : germain.poullot@polytechnique.edu (n'oubliez pas de signer votre mail, s'il-vous-plaît).

Les khôlles des autres classes et des autres années sont disponibles sur ma page web : https://webusers.imj-prg.fr/germain.poullot/Kholles

Bonne chance !

Table des matières

1 Algèbre générale

1.1 Algèbre générale

Exercise 1.1. Montrez que le noyau d'un morphisme d'anneau est un idéal ($I \subset k$ est un idéal si et seulement si $(I, +)$ est un groupe et $\forall \alpha \in k, \forall x \in I, \alpha x \in I$).

Montrez que les seuls idéaux d'un corps sont l'idéal nul et le corps lui-même.

En déduire qu'un morphisme de corps (non nul) est injectif, puis que si $\sigma : k \to K$ est un tel morphisme, alors k est isomorphe à un sous-corps de K.

Exercise 1.2 (*Solution*)**.** Le noyau d'un morphisme de corps $\sigma : k \to K$ est un groupe car un morphisme de corps est en particulier un morphisme de groupes (additifs). En outre, soit $\alpha \in k$ et $x \in \mathrm{Ker}\ \sigma$, alors $\sigma(\alpha x) = \sigma(\alpha)\sigma(x) = 0_K$ car σ est multiplicative sur le corps k. Donc Ker σ est un idéal de k.

Soit $I \subset k$ un idéal. Si $1_k \in I$, alors $I = k$ car $\alpha \times 1_k \in I$ pour tout $\alpha \in k$. Mais si $x \neq 0_k \in I$, alors $x^{-1} \in k$ car k est un corps, donc $x^{-1} \times x = 1 \in I$, puis $I = k$ comme on vient de le montrer. Ainsi si $I \neq k$, alors $I \subset \{0_k\}$, donc $I = \{0_k\}$ car I est non vide.

Si σ est un morphisme de corps non-nul, alors Ker $\sigma \neq k$ est un idéal de k, c'est donc l'idéal nul par le raisonnement précédent. Dès lors, σ est (en particulier) un morphisme de groupe de noyau nul : σ est injectif. En outre, son image $\sigma(k) \subset K$ est un corps, donc un sous-corps de K. Ainsi, σ définit un isomorphisme de corps de k vers un sous-corps de K.

1.2 Algèbre générale

Exercise 1.3. Montrez que $\left\{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ est un corps commutatif.

Exercise 1.4 (*Solution*)**.** On note $K = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$.

- K est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ car K est stable par addition, contient $0 (= 0 + 0\sqrt{2})$ et contient les opposés : $-(a + b\sqrt{2}) = (-a) + (-b)\sqrt{2}$.
- K est stable par multiplication : $(a + b\sqrt{2}) \times (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}$.
- Si $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = 0$ et $b = 0$, sans quoi on pourrait écrire $\sqrt{2} = -{}^{a}\!/_{b} \in \mathbb{Q}$.
- K contient $1 = 1 + 0\sqrt{2}$.
- K contient ses inverses : pour $a, b \in \mathbb{Q}$, on pose $c = \frac{a}{a^2 - 2b^2}$ et $d = \frac{-b}{a^2 - 2b^2}$, puis on vérifie que $(a + b\sqrt{2}) \times (c + d\sqrt{2}) = 1$.

Il s'agit en réalité d'un fait bien plus général, fondement de la théorie des nombres : si P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de coefficient dominant 1 et irréductible dans $\mathbb{Q}$ (voir le cours de polynômes), et $\alpha \in \mathbb{C}$ un racine de P, alors $\mathbb{Q}(\alpha) = \{Q(\alpha); Q \in \mathbb{Q}(X)\}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

1.3 Algèbre générale

Exercise 1.5. Montrez que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Exercise 1.6 (*Solution*)**.** On sais que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels et on note $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. On a $\left(\alpha-\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 = 8+2\sqrt{15}$, puis $\left(\alpha^2-2\sqrt{2}\alpha-6\right)^2 = 60$ et enfin :

$$\alpha^4 - 4\alpha^2 - 24 = 4\sqrt{2}\alpha(\alpha^2-6)$$

Dès lors, si $\alpha \in \mathbb{Q}$, alors $\alpha = 0$ ou $\alpha = 6$, sans quoi on pourrait écrire $\sqrt{2}$ comme une fraction rationnelle de α, donc $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui n'est pas. Comme $\alpha^2 > 2+3+5 = 10 > 6 > 0$, on obtient donc que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

1.4 Algèbre générale

Exercise 1.7. Soit $\mathbb{K}$ un corps infini. Montrez qu'il existe un morphisme de corps injectif de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{K}$. Regardez la réciproque.

1.5 Algèbre générale, Espaces vectoriels

Exercise 1.8. Produit extérieur.

1.6 Algèbre générale, Séries

Exercise 1.9. Montrez que l'ensemble des séries formelles muni de l'addition (terme à terme) et du produit (de Cauchy) est un anneau.

Exercise 1.10 (*Solution*)**.** On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries est l'opération qui a une série de terme général a_n et une de terme général b_n associe la série de terme général $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$. L'addition est quand à elle définie terme à terme.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des séries à coefficients dans un anneau sous-jacent (pas forcément convergentes, juste formelles), alors $(\mathcal{S},+)$ est clairement un groupe, l'élément neutre en est la série de terme général nul, les opposés sont les séries de terme général opposé. Le produit de Cauchy est interne, d'élément neutre la série de terme général 1, associative (le produit de Cauchy de trois série pouvant s'écrire avec le terme général $\sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k$), et distributive sur l'addition car $\sum_{i+j=n}(a_i+b_i)c_j = \left(\sum_{i+j=n} a_i c_j\right) + \left(\sum_{i+j=n} b_i c_j\right)$.

Ainsi, on obtient bien un anneau. Il est intéressant de regarder les éléments inversibles de cet anneau, et la conservation de la convergence par ce produit. On notera que le produit de la série de terme général $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas convergent alors que sa série l'est.

2 Applications ensemblistes

2.1 Applications ensemblistes

Exercise 2.1. Soient X, E, F trois ensembles. Soit $f : E \to F$. Montrez que f est injective si et seulement si : $\forall g, h : X \to E,\ f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$. Énoncer une propriété équivalente pour la surjectivité.

Exercise 2.2 (*Solution*)**.** Supposons f injective et soient $g, h : X \to E$ tels que $f \circ g = f \circ h$, alors soit $x \in X$. On a $f(g(x)) = f(h(x))$, donc, par injectivité de f, $g(x) = h(x)$. Ainsi, $g = h$.

Réciproquement, supposons que f ne soit pas injective. Soit alors $a, b \in E$ tel que $f(a) = f(b)$. Soit $X = \{0\}$ et $g : X \to E$, $g(0) = a$ et $h : X \to E$, $h(0) = b$. On a $f \circ g = f \circ h$ mais $g \neq h$.

Pour la surjectivité, on peut énoncer la propriété suivante : f est surjective si et seulement si $\forall g, h : F \to X,\ g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$.

Démontrons cela. Tout d'abord si f est surjective, alors soient $g, h : F \to X$ tels que $g \circ f = h \circ f$. Soit $y \in F$ et soit, par surjectivité, $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a alors $g(y) = g(f(x)) = h(f(x)) = h(y)$, donc $g = h$.

Réciproquement, si f n'est pas surjective, soit $z \in F$ qui n'a pas d'antécédent dans E par f. Soit $X = \{0, 1\}$ et $g : F \to X$ défini par $g(z) = 1$ et $g(y) = 0$ pour $y \neq z$. Soit $h : F \to X$ défini par $h(y) = 0$ (tout le temps). On a $g \circ f = h \circ f$ mais $g \neq h$.

2.2 Applications ensemblistes

Exercise 2.3. Soit $f : E \to F$. Montrez que f est bijective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \overline{f(A)} = f(\overline{A})$.

Exercise 2.4 (*Solution*)**.** Supposons f bijective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Soit $y \in f(\overline{A})$, alors soit $x \in \overline{A}$ tel que $f(x) = y$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = y = f(x)$, donc par injectivité $x' = x$, ce qui n'est pas possible car $x' \in A$ et $x \notin A$. de fait, $y \notin f(A)$, d'où $y \in \overline{f(A)}$ puis $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Inversement, soit $y \in \overline{f(A)}$. Par surjectivité de f, soit $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Si $x \in A$, alors $y = f(x) \in f(A)$, ce qui n'est pas. Donc $x \notin A$, puis $y \in f(\overline{A})$. On a prouvé l'autre inclusion et ainsi : $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

Montrons maintenant la réciproque. Supposons que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on ait $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Supposons qu'on ait $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$, posons $A = \{x\}$, alors $y \in \overline{A}$, donc $f(y) \inf(\overline{A}) = \overline{f(A)} = F \backslash \{f(x)\}$, or $f(y) = f(x)$. Cette contradiction montre que f est injective.

Inversement, appliquons la propriété avec $A = \emptyset$: $f(\overline{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)}$. Le membre de gauche est $f(E)$, et comme $f(\emptyset) = \emptyset$, le membre de droite et F. Ainsi, $f(E) = F$: f est surjective.

2.3 Applications ensemblistes

Exercise 2.5. Soit f une fonction de $E(\neq \emptyset)$ dans lui-même tel que $f \circ f = f$. Montrez que f est injective si et seuelement si f est surjective.

Donnez un exemple de tel f qui ne soit ni injectif (ni surjectif).

Que se passe-t-il si on suppose à la place $f \circ f \circ ... \circ f = f$?

Exercise 2.6 (*Solution*)**.** Supposons f injective. Soit $x \in E$, alors écrivons $y = f(x)$, on a $f(y) = f(f(x)) = f(x)$ par définition de f. Or par injectivité, on obtient $y = x$, c'est-à-dire $f(x) = x$, donc $f = \mathrm{Id}_E$ et f est bien surjective.

Inversement, supposons f surjective, alors prenons $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Par surjectivité de f, on peut poser $a, b \in E$ tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. Dès lors :

$$x = f(a) = f(f(a)) = f(x) = f(y) = f(f(b)) = f(b) = y$$

On en déduit que f est injective (donc que $f = \mathrm{Id}_E$).

La fonction $f : x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ respecte bien $f \circ f = f$ mais n'est ni injective, ni surjective. Dans les espaces vectoriels, les projections fournissent aussi un tel exemple (sauf la projection triviale sur l'espace entier).

Notons $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$ si f apparaît n fois. On suppose donc que $f^n(x) = f(x)$ dans la suite, avec $n \geq 2$. Remarquons que $f^{n-1} \circ f = f^n = f \circ f^{n-1}$.

Si f est injective, alors comme $f^n(x) = f(x)$, les éléments x et $f^{n-1}(x)$ ont la même image par f : $f^{n-1}(x) = x$. Il s'ensuit que $f^{n-1} = \mathrm{Id}_E$. En particulier, comme f^{n-1} est surjective, f est surjective.

Si f est surjective, alors soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Dans ce cas, $\forall k \geq 1,\ f^k(x) = f^k(y)$. Par surjectivité, prenons $a, b \in E$ tels que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. Dès lors :

$$x = f(a) = f^n(a) = f^{n-1}(f(a)) = f^{n-1}(x) = f^{n-1}(y) = f^n(b) = f(b) = y$$

Ainsi, f est injective.

Cependant, il n'est pas obligatoire que $f = \mathrm{Id}_E$ quand f est bijective et $f^n = f$. Par exemple, pour $n = 3$, on peut penser à la fonction $f : x \mapsto -x$ sur $\mathbb{R}$, ou pour $n = 5$, à $f : z \mapsto iz$ sur $\mathbb{C}$. Plus généralement, pour tout n, si λ_n est une racine n-ième de 1, alors $f : z \mapsto \lambda_n z$ vérifie $f^{n+1} = f$ et est bijective sur $\mathbb{C}$.

2.4 Applications ensemblistes

Exercise 2.7. Soit E un ensemble doté d'un sous-ensemble A. Soit $\varphi_A : X \mapsto X \cap A$ et $\psi_A : X \mapsto X \cup A$. Montrez que :

- φ_A est injective ssi φ_A est surjective ssi $A = E$.
- ψ_A est injective ssi ψ_A est surjective ssi $A = \emptyset$.

Exercise 2.8 (*Solution*)**. Étude de φ_A**

Si $A = E$, alors $\forall X,\ \varphi_A(X) = X \cap E = X$, donc $\varphi_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$: φ_A est bijective (injective et surjective).

Réciproquement, si $A \neq E$, alors soit $x_0 \in E \backslash A$. On a :

$$\varphi_A(\emptyset) = A \cap \emptyset = \emptyset = A \cap \{x_0\} = \varphi_A(\{x_0\})$$

Ainsi, φ_A n'est pas injective. Par contraposée, si φ_A est injective, alors $A = E$.

Enfin, si $A \neq E$, alors pour tout $X \subseteq E$, $\varphi_A = X \cap A \subseteq A$, donc E n'a pas d'antécédant par φ_A car $E \not\subset A$. Par contraposée, si φ_A est surjective, alors $A = E$.

En résumé, soit $A = E$ et φ_A est à la fois injective et surjective ; soit $A \neq E$ et φ_A n'est ni injective, ni surjective.

Étude de ψ_A

Il y a deux possibilités. On peut adapter le raisonnement précédent, ou bien on peut utiliser l'application $f : X \mapsto \overline{X}$ (le complémentaire de X). Cette application est clairement une bijection des parties de E, même une involution (i.e. $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$). Or, par le théorème de De Morgan :

$$f(\psi_A(X)) = \overline{A \cup X} = \overline{A} \cap \overline{X} = \varphi_{\overline{A}}(f(X))$$

Dès lors, si $\overline{A} = E$ (ce qui revient à $A = \emptyset$), $\varphi_{\overline{A}}$ est bijective, donc par composition $\psi_A = f^{-1} \circ \varphi_{\overline{A}} \circ f$ est bijective aussi.

Inversement, si $\overline{A} \neq E$ (ce qui revient à $A \neq \emptyset$), alors $\varphi_{\overline{A}}$ n'est ni injective, ni surjective, et par composition, il en va de même pour ψ_A.

En résumé, ψ_A est bijective quand $A = \emptyset$ et ni injective, ni surjective sinon.

2.5 Applications ensemblistes

Exercise 2.9. Soit $f : E \to E$.

Montrez que f est injective si et seulement si $\hat{f} \circ f = Id_{\mathcal{P}(E)}$.

Montrez que f est surjective si et seulement si $f \circ \hat{f} = Id_{\mathcal{P}(E)}$.

Montrez que f est injective si et seulement si $\forall X, Y, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Exercise 2.10 (*Solution*)**.** C'est un exercice assez long, on ne s'attend pas à ce qu'il soit traité en entier !

$\underline{f \text{ injective} \Leftrightarrow \hat{f} \circ f = Id_{\mathcal{P}(E)} :}$

Tout d'abord, on peut montrer que, pour n'importe quelle fonction f, $\forall X \subset E, X \subset \hat{f}(f(X))$.

- $\Leftarrow$ Attention, même si on connaît le théorème "$g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective", cela permet seulement de déduire que $\hat{f} \circ f = \mathcal{P}(E)$ induit f injective **de** $\mathcal{P}(E)$ **dans** $\mathcal{P}(E)$ **!** La question est de prouver que f est injective de E dans E.

  Pour ce faire, on regarde $f(x) = f(y)$, on a alors $f(\{x\}) = f(\{y\})$, puis $x \subset \hat{f}(f(\{x\})) = \hat{f}(f(\{y\})) = Id_{\mathcal{P}(E)}(\{y\}) = \{y\}$, donc $x = y$. f est bien injective.

$\Rightarrow$ Soit $X \subset E$. Supposons (par l'absurde) qu'il existe $y \notin X$ tel que $y \in \hat{f}(f(X))$, alors $f(y) \in f(X)$, donc $\exists x \in X, f(y) = f(x)$. Or $y \neq x$ par hypothèse ($y \notin X$ et $x \in X$), ce qui contredit l'injectivité de f.

Finalement, grâce à la remarque du début : $\forall X \subset E, \hat{f}(f(X)) = X$.

f surjective $\Leftrightarrow f \circ \hat{f} = Id_E$:

Tout d'abord, on peut montrer que, pour n'importe quelle fonction f, $\forall X \subset E, X \supset f(\hat{f}(X))$.

$\Leftarrow$ Le théorème "$g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective" ne s'applique toujours pas car on obtient $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ surjective (et non $f : E \to E$ surjective).

Soit $y \in E$, on sait que $f \circ \hat{f}(\{y\}) = \{y\}$, puis $y \subset f(\hat{f}(\{y\}))$, c'est-à-dire que $\exists x \in \hat{f}(\{y\}) \subset E, f(x) = y$: f est bien surjective.

$\Rightarrow$ Soit $y \in X$. Comme f est surjective, soit x un antécédant de y par f. Par définition, $y \in X$ induit $x \in \hat{f}(X)$. Dès lors, $y = f(x) \in f(\hat{f}(X))$, donc $X \subset f(\hat{f}(X))$.

Avec la remarque de début de paragraphe, on obtient $\forall X \subset E, f(\hat{f}(X)) = X$.

f injective $\Leftrightarrow \forall X, Y, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$:

Tout d'abord, on peut montrer que, pour n'importe quelle fonction f, $\forall X, Y \subset E, f(X \cap Y) \subset (f(X) \cap f(Y))$.

$\Leftarrow$ Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y) =: z$. On pose $X = \{x\}$ et $Y = \{y\}$. On a $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) = \{z\} \neq \emptyset$, donc $X \cap Y \neq \emptyset$, et ainsi $x = y$. f est injective.

$\Rightarrow$ Soit $y \in f(X) \cap f(Y)$. Soient $x \in X$ et $x' \in Y$ tels que $f(x) = y = f(x')$. Comme f est injective, on a $x = x'$, puis $x \in X \cap Y$ et ainsi $y \in f(X \cap Y)$.

Avec la remarque de début de paragraphe, on a montré que $\forall X, Y \subset E, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

2.6 Applications ensemblistes

Exercise 2.11. On définit l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ par $f(x, y) = y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$. Montrez que f est bien définie et que c'est une bijection.

En déduire que $\mathbb{N}^k$ est dénombrable pour tout k, puis que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercise 2.12 (*Solution*)**.** On a $f(x-1, y+1) = f(x, y)+1$, $f(0, y) = \frac{1}{2}y(y+3)$ et $f(x, 0) = \frac{1}{2}x(x+1)$, donc $f(y+1, 0) = f(0, y) + 1$ donc f est surjective (par récurrence). Elle est aussi strictement croissante en suivant les diagonales de vecteur directeur $(-1, +1)$ dans $\mathbb{N}^2$ (on passe d'une diagonale à la suivante en passant de $(0, y)$ à $(y + 1, 0)$) : **faire un dessin !**

Calculer l'antécédant de $n \in \mathbb{N}$ demande de résoudre d'abord $\frac{a(a+1)}{2} = n$, on identifie ainsi sur quelle diagonale est n, puis on calcule le nombre de pas restants à l'aide de la fonction partie entière. La réciproque explicite est, avec $p = E(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2})$:

$$n \mapsto \left(\frac{p(p+3)}{2}; n - \frac{p(p+1)}{2}\right)$$

On a donc une bijection $\mathbb{N}^2 \simeq \mathbb{N}$, or on sait que la relation d'être en bijection est une relation d'équivalence (réflexivité : triviale ; symétrie : existence de la bijection réciproque ; transitivité : la composée de deux bijections est une bijection), donc par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{N}^k \simeq \mathbb{N}$. Pour $\mathbb{Q}$, il suffit d'utiliser la forme réduite des fractions pour avoir $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$. Ensuite, $\mathbb{Z}^* \simeq \mathbb{N}$ peut être montré en regardant l'application :

$$n \mapsto \begin{cases} 2n-2 & \text{si } \; n > 0 \\ -2n-1 & \text{si } \; n < 0 \end{cases}$$

2.7 Applications ensemblistes

Exercise 2.13. Soit $f : E \to E$. On note $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$ (n fois), avec $f^0 = Id_E$. Pour $A \subset E$, on pose $A_n = f^n(A)$ et $B = \bigcup_n A_n$.

Montrez que $f(B) \subset B$, puis que B est la plus petite partie de E (pour l'inclusion) stable par f et contenant A.

Exercise 2.14 (*Solution*)**.** On a : $f(B) \subset \bigcup_n f(A_n) \subset \bigcup_n A_{n+1} \subset B$.

On a évidemment $A \subset B$, et on a vu que $f(B) \subset B$. Reste à montrer que si $A \subset C$ et $f(C) \subset C$, alors $B \subset C$. Or si $A \subset C$ et $f(C) \subset C$, alors $A_1 = f(A) \subset C$, et par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset C$, donc $B \subset C$.

2.8 Applications ensemblistes

Exercise 2.15. Soient trois applications f, g et h telles que les compositions $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ et $h \circ f \circ g$ soient définies, que 2 d'entre elles soient injectives et la troisième surjective. Montrez que f, g et h sont bijectives.

Exercise 2.16 (*Solution*)**.** Quitte à permuter f, g et h, on peut supposer que $f \circ g \circ h$ et $g \circ h \circ f$ sont injectives et $h \circ f \circ g$ est surjective. Alors, comme on sait que si $a \circ b$ injective $\Rightarrow b$ injective et $a \circ b$ surjective $\Rightarrow a$ surjective, on en déduit tout d'abord que h est bijective, $h \circ f$ aussi. Donc $f = h^{-1} \circ (h \circ f)$ est bijective par composition. Enfin, $g = h^{-1} \circ (h \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est surjective par composition et $g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$ est injective par composition.

Ainsi, f, g et h sont bijectives.

2.9 Applications ensemblistes

Exercise 2.17 (Théorème de Cantor-Berstein)**.** . Soient E et F deux ensembles munies d'injections $f : E \to F$ et $g : F \to E$. On veut montrez qu'il existe une bijection entre E et F. Démontrez le théorème pour E **ou** F fini(s). On note $g^{-1}(x)$ l'antécédant de x par g (idem pour $f^{-1}(y)$). On regarde : x, $g^{-1}(x)$, $f^{-1}(g^{-1}(x))$, $g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x)))$,... On note A la partie de E contenant tous les

x pour lesquels cette suite est finie et a son dernier élément dans E. On pose $h : E \to F$, montrez que c'est une bijection :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \; si \; x \in A \\ g^{-1}(x) \; si \; x \notin A \end{cases}$$

Exercise 2.18 (*Solution*)**.** Si E ou F est fini, alors l'autre l'est aussi car si E s'injecte dans F fini, alors E a moins d'éléments que F (cela se montre grâce à la partition $E = \bigcup_{y \in F} \hat{f}(y)$ où $\hat{f}(y)$ contient au plus 1 élément car f est injective). Ensuite, si $E \hookrightarrow F$ et $F \hookrightarrow E$, on en déduit que E et F ont le même nombre d'éléments, disons n. Quitte à numéroter les éléments de $E = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et de $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$, on peut introduire la bijection $e_i \mapsto f_i$ de réciproque $f_i \mapsto e_i$.

Passons à la partie plus corsée... Il faut tout d'abord remarquer qu'avec les définitions de l'énoncé, f^{-1} et g^{-1} sont bien définies et vérifient $f(f^{-1}(y)) = y$, $f^{-1}(f(x)) = x$ (idem pour g). Par contre, la première égalité n'est définie que pour certains $y \in F$, pas pour tous : $f^{-1} : f(E) \to E$.

La notion de "la suite est finie" signifie qu'à un certain rang, il n'est pas possible de définir le rang suivant (i.e. f^{-1} ou g^{-1} du terme courant n'est pas défini).

<u>h injective :</u> Supposons que $h(x) = h(y)$.

- Si $x, y \in A$, alors $h(x) = f(x) = f(y) = h(y)$, donc $x = y$ par injectivité de f.
- Si $x, y \notin A$, alors $h(x) = g^{-1}(x) = g^{-1}(y) = h(y)$, donc $x = y$ par injectivité de g^{-1} (car si z avait 2 antécédants par g^{-1}, alors il aurait aurait 2 images par g, ce qui n'est pas possible).
- Si $x \in A$ et $y \notin A$, alors $h(x) = f(x) = g^{-1}(y) = h(y)$, donc $x = f^{-1}(g^{-1}(y))$, et on peut itérer avec g^{-1} et f^{-1} pour reconstruire la suite qui part de x et celle (décalée de deux rangs) qui par de y. Or la première est finie et la seconde non. Cette contradiction montre que le cas $x \in A$ et $y \notin A$ est en réalité impossible.

<u>h surjective :</u> Soit $y \in F$. On veut construire $z \in E$ tel que $h(z) = y$. Posons $x = g(y)$.

- Si $x \notin A$, alors $h(x) = g^{-1}(x) = g - 1(g(y)) = y$, et on a trouvé notre antécédant : $z = x$.
- Sinon, $x \in A$, et donc $z = f^{-1}(g^{-1}(x))$ aussi. De fait, $h(z) = f(f^{-1}(g^{-1}(x))) = g^{-1}(x) = y$, et là encore on a un antécédant.

Finalement, h est bien une bijection de E dans F.

On pourra essayer de voir qui est h lorsque $f = g = \begin{array}{c} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array}$, ou bien $f = \begin{array}{c} [0, \pi] \to [-1, 1] \\ x \longmapsto \cos x \end{array}$ et $g = \begin{array}{c} [-1, 1] \to [0, \pi] \\ x \longmapsto \frac{x+1}{2\pi} \end{array}$.

2.10 Applications ensemblistes

Exercise 2.19. Montrez que l'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ induit une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\{0,1\}^E$.

Exercise 2.20 (*Solution*)**.** Il s'agit ici de montrer que :

- Si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, alors $A = B$.
- Si $f \in \{0,1\}^E$, on peut construire une partie de E telle que $\mathbb{1}_A = f$.

Pour le premier point, il suffit de voir que si $x \in A$, alors $\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x) = 1$, donc $x \in B$. Ainsi, $A \subset B$, et par symétrie : $A = B$.

Pour la seconde assertion, on construit l'application $A \mapsto \{x \in E, f(x) = 1\}$. On peut facilement vérifier que cette dernière constitue la bijection réciproque de l'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$.

2.11 Applications ensemblistes

Exercise 2.21. Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné dans lequel toute partie admet une borne inférieure et une borne supérieure. Soit $f : E \to E$ croissante. On pose $X = \{x \in E, x \leq f(x)\}$. Montrez que $X \neq \emptyset$. Montrez que X est stable par f. Soit $a = \sup X$. Montrez que $a \in X$ et que a est un point fixe de f. Donnez un exemple de situation.

Exercise 2.22 (*Solution*)**.** On sait que E admet une borne inférieur. Une telle borne est un minimum (car elle appartient à E qui est l'ensemble considéré), nommons-la m. On a $f(m) \in E$, donc $f(m) \geq \inf E = m$, d'où $m \in X$ et $X \neq \emptyset$.

Si $x \in X$, alors $x \leq f(x)$. Comme f est croissante, on peut l'appliquer à cette inégalité et on obtient $f(x) \leq f(f(x))$, donc $f(x) \in X$.

Comme $X \neq \emptyset$ et que E est muni de bornes supérieures, a existe. Supposons $a \notin X$. Alors $f(a) < a$, et comme f est croissante, $f(f(a)) < f(a)$, donc $f(a) \notin X$, or $f(a) < a$, donc a n'est pas la borne supérieur de X. Ainsi, $a \in X$.

On sait que X est stable par f, donc en particulier $f(a) \in X$, d'où d'une part $a \leq f(a)$. Or d'autre part, a majore X, donc $f(a) \leq a$. Finalement, $f(a) = a$, et a est un point fixe.

On pourra prendre par exemple une application croissante dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeur dans celui-ci.

2.12 Applications ensemblistes

Exercise 2.23. Soit E un ensemble. Montrez qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. En regardant $\{x \in E; x \notin f(x)\}$, montrez qu'une telle injection ne saurait être une bijection. En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercise 2.24 (*Solution*)**.** Pour injecter $E \hookrightarrow \mathcal{P}(E)$ on peut par exemple définir $x \mapsto \{x\}$.

Supposons que f soit surjective. Alors il existe un élément y tel que $f(y) = \{x \in E; x \notin f(x)\}$.

- Est-ce que $y \in f(y)$? Dans ce cas, par définition de $f(y)$, $y \notin f(y)$, ce qui contredit notre supposition.
- Est-ce que $y \notin f(y)$? Dans ce cas, par définition de $f(y)$, $y \in f(y)$, ce qui contredit notre supposition.

Finalement, par l'absurde, $\{x \in E ; x \notin f(x)\}$ ne peut pas posséder d'antécédant par f : f n'est pas surjective.

Pour montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est indénombrable, il suffit d'appliquer le théorème qu'on vient de prouver avec $E = \mathbb{N}$.

2.13 Applications ensemblistes, Relations binaires

Exercise 2.25. Soit E un ensemble et "filtre" $\alpha \subseteq \mathcal{P}(E)$ tel que $\forall X, Y \in \alpha,\ \exists Z \in \alpha, Z \subseteq (X \cap Y)$. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $A \sim_\alpha B \Leftrightarrow \exists X \in \alpha,\ A \cap X = B \cap X$. Montrez que c'est une relation d'équivalence. Donnez les classes de $\emptyset$ et de E. Est-ce que $\alpha \mapsto \sim_\alpha$ est surjective ? Que se passe-t-il si α possède 2 éléments disjoints ? Montrez que $\alpha \mapsto \sim_\alpha$ n'est pas injective ?

Exercise 2.26 (*Solution*)**.** La relation est évidemment réflexive et symétrique. Montrons la transitivité. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \sim_\alpha B$ et $B \sim_\alpha C$. Soient alors $X \in \alpha$ tel que $A \cap X = B \cap X$ et $Y \in \alpha$ tel que $Y \cap B = Y \cap C$. Prenons $Z \in \alpha$ tel que $Z \subseteq (X \cap Y)$. Alors :

$$Z \cap A = Z \cap X \cap A = Z \cap X \cap B = Z \cap B = Z \cap Y \cap B = Z \cap Y \cap C = Z \cap C$$

On obtient que $A \sim_\alpha C$. Il s'ensuit que $\sim_\alpha$ est transitive : c'est un relation d'équivalence.

La classe d'équivalence de $\emptyset$ est composée des parties qui sont disjointes d'au moins un élément du filtre α :

$$A \sim_\alpha \emptyset \Longleftrightarrow \exists X \in \alpha,\ A \cap X = \emptyset \cap X = \emptyset$$

La classe d'équivalence de E est composée des parties qui contiennent au moins un élément du filtre α :

$$A \sim_\alpha E \Longleftrightarrow \exists X \in \alpha,\ A \cap X = E \cap X = X$$

Dès lors, $\alpha \mapsto \sim_\alpha$ n'est pas surjective car il n'est pas possible de trouver α tel que $E \sim_\alpha \emptyset$ et $\{x\} \not\sim_\alpha \emptyset$ pour $x \in E$ quelconque.

S'il existe deux éléments disjoints X et Y dans le filtre α, alors le filtre contient $\emptyset$ car il faut qu'il existe $Z \in \alpha,\ Z \subseteq (X \cap Y) = \emptyset$. Or si α contient $\emptyset$, alors n'importe quel $A \in \mathcal{P}(E)$ vérifie $A \sim_\alpha E$, donc $\sim_\alpha$ n'a qu'une seule classe d'équivalence. Ainsi, tous les α qui contiennent $\emptyset$ donnent la même relation : $\alpha \mapsto \sim_\alpha$ n'est pas injective.

3 Arithmétique

3.1 Arithmétique

Exercise 3.1. Utilisez l'arithmétique pour déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $a^b = b^a$.

Exercise 3.2 (*Solution*)**.** On remarque déjà que si $a = b$, alors on a bien $a^b = b^a$. Supposons dans la suite $a < b$. On utilise les valuations p-adiques. Soit p premier fixé. Si $a^b = b^a$, alors $b \times \nu_p(a) = a \times \nu_p(b)$. Comme on a supposé $a < b$, on obtient $\nu_p(a) < \nu_p(b)$. Cette propriété étant vérifiée pour tout p, on obtient que $a|b$. Soit k tel que $b = ka$. On peut remplacer dans l'équation initiale et on a : $(a^a)^k = k^a a^a$; d'où : $(a^a)^{k-1} = a^k$; puis $a^{a(k-1)} = a^k$; et enfin l'égalité des exposants (car $a \neq 1$) : $a(k-1) = k$. Cela mène à $(k-1)|k$, ce qui n'est possible que si $k = 2$ (sinon, $k \wedge (k-1) = 1$ par l'algorithme d'Euclide). Dans ce cas, on trouve $a = 2$ et finalement $b = ka = 4$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $a^b = b^a$ est (attention à l'asymétrie $a < b$ qu'on a supposée et qu'il faut lever maintenant) :

$$\{(x, x); x \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(2, 4); (4, 2)\}$$

3.2 Arithmétique

Exercise 3.3. Complétez pour avoir les chiffres de 1 à 9 : $42 \times \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$.

Exercise 3.4 (*Solution*)**.** On va montrer que la seule solution est $42 \times 138 = 5796$. On notera dans la suite l'équation $42 \times xyz = abcd$.

On commence par regarder l'égalité modulo 10 : $2x = d$ [10]. Donc on en déduit en explorant les possibilité que $z = 3, 8, 9$ correspondant réciproquement à $d = 6, 6, 8$? Ensuite, d'après le nombre de chiffre, on en déduit immédiatement que $x \leq 10/4$, donc $x = 1$. On teste alors le plus petit nombre possible pour xyz afin d'obtenir une borne sur a : $42 \times 138 = 5796$. On vient de trouver une solution, néanmoins, on va aller plus loin en prouvant que c'est la seule. D'après le calcul précédent, on sait que $a \geq 5$. Le plus efficace est de compter les possibilités pour yz : on a vu qu'il y a 3 possibilités pour z, et on peut voir rapidement que $y = 7$ est impossible (car alors $a = 7$). On a donc $2 + 3 + 3 + 2 + 2 = 12$ possibilités à tester :

- $42 \times 138 = 5796$
- $42 \times 139 = 5838$
- $42 \times 153 = 6426$ On savait qu'on aurait deux fois 6.
- $42 \times 158 = 6636$ On savait qu'on aurait deux fois 6.
- $42 \times 159 = 6678$ On savait qu'on aurait deux fois 6.
- $42 \times 163 = 6846$ On savait qu'on aurait deux fois 6.
- $42 \times 168 = 7056$ On savait qu'on aurait deux fois 6.
- $42 \times 169 = 7098$

- $42 \times 183 = 7686$
- $42 \times 189 = 7938$ On savait qu'on aurait deux fois 8.
- $42 \times 193 = 8106$
- $42 \times 198 = 8316$ On savait qu'on aurait deux fois 8.

On a donc bien une unique solution à l'équation.

3.3 Arithmétique

Exercise 3.5. Montrer que si α est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$ avec a, b et c impairs, alors α est irrationnel.

Que ce passe-t-il pour les racines rationnelles d'un polynôme de degré quelconque à coefficients rationnels ?

Exercise 3.6 (*Solution*)**.** Supposons que $\alpha = \frac{p}{q}$ écrit sous forme d'une fraction irréductible. Alors, en utilisant que α est racine du polynôme et en multipliant par q^2, on obtient : $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. De fait, $ap^2 = q(bp + cq)$, donc $q|ap^2$. Comme $q \wedge p = 1$, on a : $q|a$. De fait, q est impair. De la même manière, $p|c$, donc p est impair. Cependant, on remarque que $ap^2 = -bpq - cq^2$, on a à gauche un nombre impair et à droite la somme de deux nombres impair, c'est-à-dire un nombre pair. C'est un problème ! Finalement, il est impossible que α soit rationnel.

Dans un polynôme quelconque, une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ vérifie : q divise le coefficient dominant et p divise le coefficient constant. Cela donne énormément d'informations : la résolution des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients rationnels se ramène à un nombre fini de cas.

3.4 Arithmétique

Exercise 3.7. Montrez qu'il n'existe qu'un seul cube impair non nul qui est immédiatement suivi d'un carré (résoudre $x^2 - y^3 = 1$).

Exercise 3.8 (*Solution*)**.** Écrivons plutôt l'équation de la forme $x^2 - 1 = y^3$, c'est-à-dire $(x - 1)(x + 1) = y^3$. Dès lors, si $p|y$ avec p premier et $p \neq 2$, comme $(x+1) \wedge (x-1) = 2$, on a $p|(x-1)$ ou $p|(x+1)$ mais pas les deux. Mais comme $p^3|y^3 = (x + 1)(x - 1)$, si $p|(x - 1)$, alors $p^3|(x - 1)$ (et respectivement pour $x + 1$). Dès lors, il y a 3 possibilités :

- $x + 1$ et $x - 1$ sont des cubes impairs.
- $x + 1 = 2a^3$ et $x - 1 = 4b^3$ avec a et b impairs.
- $x + 1 = 4a^3$ et $x - 1 = 2b^3$ avec a et b impairs.

Comme y est impair, x est pair (sinon $x^2 - 1$ est pair), donc seul le premier cas est possible. Or dans le premier cas, on a deux cubes qui diffèrent de 2, ce qui n'est pas possible : il n'y a pas de cube impair qui suive immédiatement un carré.

On peut se poser la question en toute généralité, c'est un peu plus difficile mais on obtient que la seule possibilité est $3^2 = 2^3 + 1$.

3.5 Arithmétique

Exercise 3.9. Pour un chiffre X, on note $\overline{XX}$ le nombre $10X + X$.

Soient 3 chiffres X, Y et Z vérifiant $\overline{XX} + \overline{YY} + \overline{ZZ} = \overline{XYZ}$. Trouvez Z.

Exercise 3.10 (*Solution*)**.** On remarque que $\overline{XX} = 11 \times X$, donc $\overline{XYZ} = 11(X+Y+Z)$. Or on sait tester di un nombre est un multiple de 11, il faut que $X - Y + Z = 0$, ce qui revient à $Y = X + Z$, on est donc ramené à 2 paramètre avec les conditions :

$$\begin{cases} 0 \leq X \leq 9 \\ 0 \leq Z \leq 9 \\ 0 \leq X + Z \leq 9 \\ 11(10X + Z) = \overline{XYZ} = 11(X + Y + Z) = 22(X + Z) \end{cases}$$

Ainsi, $Z = 8X$ d'après la dernière ligne. Les conditions des deux première lignes donnent deux possibilités à tester : $X = 0$ et $X = 1$.

Finalement, on peut vérifier que cela donnes les deux exactes solutions du problème : $00 + 00 + 00 = 000$ et $11 + 99 + 88 = 198$.

3.6 Arithmétique

Exercise 3.11 (Problème de Joséphus)**.** n personnes numérotées sont disposées en cercles. La première tue son voisin de gauche (le numéro 2, qui sort du cercle), son nouveau voisin de gauche (le numéro 3) tue son propre voisin gauche (le numéro 4), etc. Quand on a fait un tour du cercle, on recommence, jusqu'à ce qu'il n'y ait qu'un seul survivant. Si je veux survivre, à quelle place dois-je me mettre au début.

Exercise 3.12 (*Solution*)**.** Cette vidéo explique tout !

3.7 Arithmétique

Exercise 3.13. Trouvez les entiers m et n tels que $\sum_{k=1}^{m} k! = n^2$. Idem pour $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k! = n^2$, $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}k! = n^2$, $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k! = -n^2$ et $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}k! = -n^2$

Exercise 3.14 (*Solution*)**.** On constate que :

$$\sum_{k=1}^{1} k! = 1^2$$

$$\sum_{k=1}^{2} k! = 1 + 2 = 3$$

$$\sum_{k=1}^{3} k! = 1 + 2 + 6 = 3^2$$

$$\sum_{k=1}^{4} k! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$$

Donc $(1,1)$ et $(3,3)$ sont des solutions.
Supposons que $m \geq 5$, alors :

$$\sum_{k=1}^{m} k! \equiv 33 \equiv 3 \quad [5]$$

Or on peut regarder les résidus des carrés modulo 5 :

n	n^2
0	0
1	1
2	4
3	4
4	1

Donc il est impossible que $\sum_{k=1}^{m} k!$ soit un carré pour $m \geq 5$.

On constate que :

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} k! = 1^2$$
$$\sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} k! = 1 - 2 = -1$$

Donc $(1,1)$ est solution.
Supposons que $m \geq 2$, alors :

$$\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} k! \equiv -1 \equiv 2 \quad [5]$$

Or on peut regarder les résidus des carrés modulo 3 :

n	n^2
0	0
1	1
2	1

Donc il est impossible que $\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} k!$ soit un carré pour $m \geq 3$.

On constate que :

$$\sum_{k=1}^{1}(-1)^k k! = -1$$
$$\sum_{k=1}^{2}(-1)^k k! = -1 + 2 = 1^2$$
$$\sum_{k=1}^{3}(-1)^k k! = 1 - 6 = -5$$
$$\sum_{k=1}^{4}(-1)^k k! = -5 + 24 = 19$$
$$\sum_{k=1}^{5}(-1)^k k! = 19 - 120 = -101$$
$$\sum_{k=1}^{6}(-1)^k k! = -101 + 720 = 619$$

Donc $(2, 1)$ est solution.
Supposons que $m \geq 7$, alors :

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^k k! \equiv 619 \equiv 3 \quad [5]$$

Or on peut regarder les résidus des carrés modulo 7 :

n	n^2
0	0
1	1
2	4
3	2
4	2
5	4
6	1

Donc il est impossible que $\sum_{k=1}^{m}(-1)^k k!$ soit un carré pour $m \geq 7$.

Enfin, on remarque $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} k! = -\sum_{k=1}^{m}(-1)^k k!$, ce qui conclut les cas restants.

3.8 Arithmétique

Exercise 3.15. Les boeufs d'Hélios (en version simplifiée) ?

3.9 Arithmétique

Exercise 3.16. Nombres de Sophie Germain ($A^4 + 4B^4 = (A^2 + 2AB + 2B^2)(A^2 - 2AB + 2B^2)$). Déterminez les nombres n tels que $n^4 + 4^n$ soit premier.

Exercise 3.17 (*Solution*)**.** Si n est pair, alors $2|n^4$ et $2|4^n$, donc $n^4 + 4^n$ n'est évidemment pas premier.

On suppose n impair et on note $n = 2k + 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} n^4 + 4^n &= n^4 + 4 \times 2^{k^4} \\ &= \left(n^2 + 2n2^k + 2 \times 2^{2k}\right)\left(n^2 - 2n2^k + 2 \times 2^{2k}\right) \\ &= \left(n^2 + n2^{k+1} + 2^n\right)\left(n^2 - n2^{k+1} + 2^n\right) \end{aligned}$$

Pour que $n^4 + 4^n$ soit un nombre premier, il faut donc que l'un des deux facteurs ci-dessus vaille 1. Le premier ne peut évidemment pas valoir 1 car il est strictement supérieur à n. On doit donc résoudre $n^2 + 2^n = n2^{n - 1/2} + 1$. Le membre de gauche croît bien plus lentement que celui de droite, et on "voit" qu'il n'y aura de solution que pour n très petit. Cependant, on peut raisonner plus efficacement avec des arguments un peu plus arithmétiques : l'équation revient à $2^k\left(2^{k+1} - 2k - 1\right) + n^2 = 1$. Or pour $k \geq 1$, on a bien (par récurrence) $2^{k+1} \geq 2k + 1$ donc le terme de gauche est strictement supérieur à 1. Reste $k = 0$ qui donne $n = 1$ et $n^4 + 4^n = 5$ qui est bien premier.

Finalement, le seul nombre premier de la forme $n^4 + 4^n$ est 5 (pour $n = 1$).

3.10 Arithmétique

Exercise 3.18 (Super-triangles de Héron)**.** On s'intéresse aux triangles dont les longueurs des côtés, le périmètre et l'aire sont des entiers. On impose en plus que l'aire et le périmètres soient égaux. Prouvez qu'il y a un nombre fini de tels triangles et énumérez-les.

On pourra utiliser (après l'avoir re-démontrée) la formule de Héron : si $s = \frac{1}{2} \times$ périmètre, alors aire$^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ où a, b et c sont les longueurs des côtés.

Exercise 3.19 (*Solution*)**.** L'identité de Héron se déduit d'une utilisation systématique du théorème de Pythagore sur les 3 hauteurs d'un triangle quelconque.

Soit un super-triangle de Héron de côtés a, b, c. Notons $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. L'égalité aire-périmètre donne :

$$(2s)^2 = (s-a)(s-b)(s-c)$$

Changeons de variables et posons $x = s - a$, $y = s - b$ et $z = s - c$. Alors $x + y + z = s$, donc l'équation précédent donne :

$$4(x + y + z)^2 = xyz$$

Supposons, sans perte de généralité que $0 \leq x \leq y \leq z$. Si $x = 1$, alors $4 + 4y + 4z = yz$, soit $4(y + 1) = (y - 4)z$, donc $y \geq 5$ (sinon le membre droit est négatif ou nul). En outre, il faut que $y-4|4(y+1)$. Or $(y-4)\wedge(y+1) = (y-4)\wedge 5$, donc $y-4$ doit diviser $4\times 5 = 20$ pour que $y-4|4(y+1)$. La liste exhaustive donne $y \in \{5,6,8,9,14,24\}$. Seuls $(y,z) \in \{(5,24),(6,14),(8,9)\}$ permettent d'assurer $y \leq z$ et $4+4y+4z = yz$. On obtient ainsi 3 super-triangles de Héron :

x	y	z	a	b	c	Périmètre	Aire
1	5	24	29	25	6	60	60
1	6	14	20	15	7	42	42
1	8	9	17	10	9	36	36

Ensuite, on poursuit avec $x=2$. Alors $4(y+2) = (2y-4)z$, donc $2y-4|4(y+2)$, or $(2y-4)\wedge(y+2) = (2y-4)\wedge 6$, puis $2y-4|24$, soit $y \in \{3,4,5,6,7,14\}$ puis $(y,z) \in \{(3,10),(4,6)\}$. Soit :

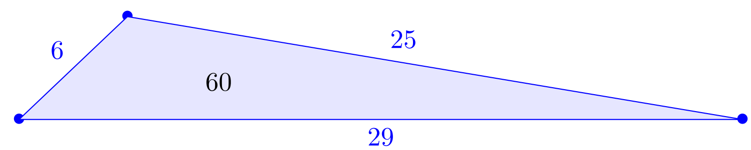
x	y	z	a	b	c	Périmètre	Aire
2	3	10	13	12	5	30	30
2	4	6	10	8	6	24	24

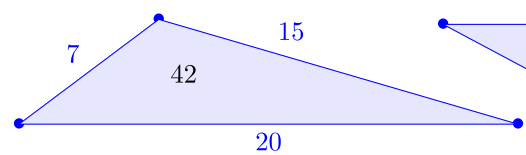
Après, pour $x=3$, on a $4(y+3) = (3y-4)z$. Or $(y+3)\wedge(3y-4) = (3y-4)\wedge 10$, donc $3y-4|40$, soit $3y \in \{5,6,8,9,14,24,44\}$ puis $(y,z) \in \{(2,10)\}$ mais $x \leq y$. Ce cas ne mène à aucune nouvelle solution.

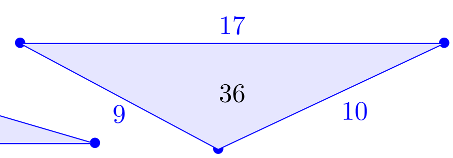
Enfin, si $x \geq 4$, alors $4(x+y+z) \leq 4(z+z+z) = 12z$, mais $xyz \geq 4\times 4\times z = 16z$, ce qui est impossible.

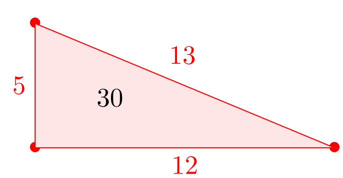
Finalement, il n'y a que 5 super-triangles de Héron.

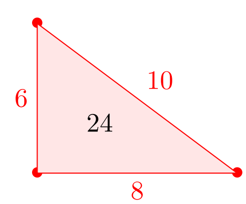
Remarquons que, en anglais, ils s'appellent *super-Hero triangles*. Pour plus d'informations culturelles passionnantes, regardez ici.











3.11 Arithmétique

Exercise 3.20 (Triplets pythagoriciens)**.** On cherche les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ dit "pythagoriciens" : $x^2 + y^2 = z^2$. Montrez qu'on peut se ramener à $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$ puis à x, y et z premier deux à deux. Montrez que parmi x, y et z, deux sont impairs et un pair puis que z est impair. Posez $y = 2Y$, $X = \frac{z+x}{2}$et $Z = \frac{z-x}{2}$. En déduire que $\text{pgcd}(X, Z) = 1$ et que X et Z sont des carrés parfait. Conclure (l'ensemble des triplets pythagoriciens est $\left\{(d(u^2 - v^2), 2duv, d(u^2 + v^2)\ ;\ d, u, v \in \mathbb{N}\right\}$).

Exercise 3.21 (*Solution*)**.** Soit $d = \text{pgcd}(x, y, z)$ et $d \times \xi = x$, $d \times \upsilon = y$, $d \times \zeta = z$. On a :

$$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow d^2\xi^2 + d^2\upsilon^2 = s^2\zeta^2 \Leftrightarrow \xi^2 + \upsilon^2 = \zeta^2$$

Donc en résolvant pour le cas $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$, on a immédiatement la réponse dans le cas général. Or si x et y ont un diviseur premier commun p, alors $p|z^2 = x^2 + y^2$, et par le lemme de Gauss, $p|z$, donc $p|\text{pgcd}(x, y, z)$. Il en va de même pour y et z et pour x et z : si x, y et z ne sont pas deux à deux premiers, alors il ne sont pas premier dans leur ensemble. Donc on peut se ramener au cas ou ils sont deux à deux premiers.

Puisque les trois sont deux à deux premiers, il y en a au plus 1 qui est pair. Or si x et y sont impairs, alors x^2 et y^2 sont congrus à 1 modulo 4, donc z^2 est congru à 2 modulo 4, donc z^2 est pair et z est pair. Mais si z est pair, alors z^2 est congru à 0 modulo 4 : on a une contradiction ! Ainsi, au moins l'un des deux parmi x et y est pair. On supposera que c'est y par la suite.

L'équation de départ se reformule alors avec X, Y et Z : $4Y^2 = (z-x)(z+x)$. Puis : $Y^2 = XZ$.

Un diviseur commun de X est Z divise aussi $z = X + Z$ et $x = X - Z$, donc vaut ± 1. Dès lors, si leur produit est un carré et qu'ils sont premiers entre eux, une analyse p-adique ou une analyse des diviseurs premiers montre que le lemme de Gauss induit que X et Z sont eux-mêmes des carrés.

Reste à conclure. Soit u et v tels que $X = u^2$ et $Z = v^2$. Soit $d = \text{pgcd}(x, y, z)$. On a :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{z/d + x/d}{2} & = u^2 \\ \frac{z/d - x/d}{2} & = v^2 \\ y^2 & = z^2 - x^2 \end{array}\right.$$

Dès lors, une simple résolution montre que :

$$(x, y, z) = \left(d(u^2 - v^2), 2duv, d(u^2 + v^2)\right)$$

La réciproque est claire : un triplet de cette forme est bien composé de nombres entiers et vérifie l'identité de Pythagore.

3.12 Arithmétique, Algèbre générale

Exercise 3.22. Soit p un nombre premier. Soit $\mathbb{Z}_p = \{\frac{a}{b} \ ; \ p$ ne divise pas $b\} \subseteq \mathbb{Q}$. Montrez que $\mathbb{Z}_p$ est un anneau. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}_p$?

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$, on note $\alpha \mid_p \beta$ s'il existe $\kappa \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\beta = \alpha\kappa$. On dit que $\rho \in \mathbb{Z}_p$ est *premier dans* $\mathbb{Z}_p$ quand il n'est pas inversible et quand pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$ si $\rho \mid_p \alpha\beta$, alors $\rho \mid_p \alpha$ ou $\rho \mid_p \beta$. Montrez que $\rho \in \mathbb{Z}_p$ est premier dans $\mathbb{Z}_p$ si et seulement si $\rho = p\upsilon$ avec $\upsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Exercise 3.23 (*Solution*)**.** Tout d'abord, $\mathbb{Z}_p$ est bien défini car $p \neq 0$. Ensuite, montrons que c'est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$. Premièrement $0 = \frac{0}{1} \in \mathbb{Z}_p$, $1 = \frac{1}{1} \in \mathbb{Z}_p$. Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Z}_p$, alors p ne divise ni b ni d, donc p ne divise pas bd par la contraposée du lemme d'Euler. Donc $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \in \mathbb{Z}_p$ et $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in \mathbb{Z}_p$. Ainsi, $\mathbb{Z}_p$ est bien un anneau.

Ensuite, si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_p$ est inversible dans $(\mathbb{Z}_p, \times)$, alors il existe $\frac{c}{d} \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = 1$, c'est-à-dire $ac = bd$. Mais si $p|a$, alors $p|bd$, ce qui n'est pas possible d'après le raisonnement précédent. Donc p ne divise pas a. Inversement, si p ne divise pas a, alors $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}_p$, donc $\frac{a}{b}$ est inversible dans $(\mathbb{Z}_p, \times)$. Ainsi : $\mathbb{Z}_p^\times = \{\frac{a}{b} \ ; \ p$ ne divise pas a ni $b\}$.

Soit $\rho = \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}_p$ premier dans $\mathbb{Z}_p$. Si p ne divise pas a, alors ρ est une unité, donc non premier par définition. Si $\nu_p(a) \geq 2$, alors $a = p^2 a'$, pour $a' \in \mathbb{Z}$. Donc $\rho \mid_p \frac{pa'}{b} \times \frac{p}{1}$, mais, comme ρ est premier dans $\mathbb{Z}_p$, on a soit $\rho \mid_p \frac{pa'}{b}$, soit $\rho \mid_p \frac{p}{1}$. Le premier est impossible car il revient à $a = pa'$ or $pa' = {}^{a}/_{p} < a$. Le deuxième est impossible car il revient à $a = pb$, mais les valuations p-adiques sont différentes (rappel : p ne divise pas b). Il s'ensuit que si ρ est premier dans $\mathbb{Z}_p$, alors $\rho = p\frac{a'}{b}$ avec p qui ne divise pas a', c'est-à-dire $\frac{a'}{b} \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Réciproquement, si $\rho = p\upsilon$ avec $\upsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$, alors si $\rho \mid_p \alpha\beta$, il existe $\kappa = \frac{k}{l} \in \mathbb{Z}_p$ tel que $p\kappa = \alpha\beta\upsilon^{-1} = \frac{a}{b}\frac{c}{d}\frac{v}{u}$, en notant $\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = \frac{c}{d}$ et $\upsilon = \frac{u}{v}$. Donc $p|acvl$ (dans $\mathbb{Z}$). Mais v et l sont des dénominateurs dans $\mathbb{Z}_p$: ils ne sont pas divisibles par p. Donc $p|ac$, et comme p est premier dans $\mathbb{Z}$, $p|a$ ou $p|c$, disons $a = xp$, $x \in \mathbb{Z}$. Donc $p \mid_p \alpha$ car $p \times \frac{x}{b} = \frac{a}{b} = \alpha$. Ensuite, comme υ est inversible : $p\upsilon \times \upsilon^{-1}\frac{x}{b} = \alpha$, donc $\rho \mid_p \alpha$. Ainsi, ρ est bien premier dans $\mathbb{Z}_p$.

3.13 Arithmétique, Algèbre générale

Exercise 3.24 (Fonction de Möbius)**.** Pour faciliter l'écriture, on notera $u(n)$ au lieu de u_n le n-ième terme d'une suite. On munit les suite $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ du produit de Dirichlet : $(u \star v)(n) = \sum_{d|n} u(d)v({}^{n}/_{d})$. Montrer que $(\mathbb{C}^\mathbb{N}, +, \star)$ est un anneau commutatif. Soit $\mathbf{1}$ la suite définie par $\forall n,\ \mathbf{1}(n) = 1$. Pour $u \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, calculez $\mathbf{1} \star u$. Soit μ la suite de Möbius définie par $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ si n est divisible par un carré, $\mu(p_1 p_2 ... p_k) = (-1)^k$ pour des nombres premiers $p_1, ..., p_k$ différents. Montrez que μ est l'inverse de $\mathbf{1}$ dans $(\mathbb{C}^\mathbb{N}, \star)$. Pour $u \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, comment calculer $u(n)$ si on connaît $\sum_{d|m} u_m$ pour tout m ?

Exercise 3.25 (*Solution*)**.** $(\mathbb{C}^\mathbb{N}, +)$ est classiquement un groupe. $\star$ est une loi de composition interne. $\star$ est distributif sur $+$ car $((u+v)\star w)(n) = \sum_{d|n}(u(d)+$

$v(d))w(^n/_d) = \sum_{d|n} u(d)w(^n/_d) + \sum_{d|n} v(d)w(^n/_d) = (u \star w)(n) + (v \star w)(n)$. Ensuite, $\star$ est bien associative, pour ce faire, préférons noter $\sum_{d_1 d_2 = n} u(d_1)v(d_2)$. Ensuite :

$$\begin{aligned}
(u \star (v \star w))(n) &= \sum_{d_1 d_2 = n} u(d_1)(v \star w)(d_2) \\
&= \sum_{d_1 d_2 = n} u(d_1) \sum_{d_3 d_4 = d_2} v(d_3)w(d_4) \\
&= \sum_{d_1 d_3 d_4 = n} u(d_1)v(d_3)w(d_4)
\end{aligned}$$

On obtient une expression symétrique en u, v et w, donc l'opération est bien associative. En outre, l'expression $\sum_{d_1 d_2 = n} u(d_1)v(d_2)$ est symétrique en u et v, donc l'opération est commutative. Donc $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \star)$ est anneau commutatif.

Dans cet anneau, la suite I définie par $I(1) = 1$ et $I(n) = 0$ sinon, est l'élément neutre pour $\star$. En effet, $(I \star u)(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} I(d_1)u(d_2) = I(1)u(n) = u(n)$.

On a $\mathbf{1} \star u = \sum_{d|n} u(d)$, il n'est pas possible de dire mieux pour une suite quelconque.

La suite de Möbius est bien définie grâce à la propriété de décomposition en produit de facteurs premiers (et à son unicité). Pour $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r}$, on veut calculer $(\mathbf{1} \star \mu)(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$, on a besoin d'établir quels sont les diviseurs de n qui ne sont pas divisibles par un carré. Un diviseur de n s'écrit $d = p_1^{b_1} p_2^{b_2} ... p_r^{b_r}$ avec $\forall i,\ b_i \leq a_i$. Un nombre k est divisible par un carré si et seulement si il existe p tel que $\nu_p(k) \geq 2$ (car alors $p^2 | k$). De fait, d divise n et n'est pas divisible par un carré si et seulement si $d = p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_2} ... p_r^{\varepsilon_r}$ avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. Ainsi, l'ensemble des diviseurs de n qui ne sont pas divisibles par un carré est en bijection avec l'ensemble des parties de $[\![1, r]\!]$: c'est l'ensemble $\left\{ \prod_{i \in I} p_i \ ;\ I \subseteq [\![1, r]\!] \right\}$. On peut donc réécrire notre somme, pour $n \neq 1$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1} \star \mu)(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \\
&= \sum_{I \subseteq [\![1,r]\!]} \mu\left(\prod_{i \in I} p_i \right) \\
&= \sum_{I \subseteq [\![1,r]\!]} (-1)^{\# I} \\
&= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^k \\
&= (1 - 1)^r = 0
\end{aligned}$$

Pour $n = 1$, on a $(\mathbf{1} \star \mu)(1) = \mathbf{1}(1)\mu(1) = 1$.

Finalement, $\mathbf{1} \star \mu = I$, donc μ est l'inverse de $\mathbf{1}$ dans $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \star)$. On peut se servir de cela pour obtenir inverser la relation $U(m) = \sum_{d|m} u(d)$. En effet, cette relation s'interprète comme $u \star \mathbf{1} = U$, donc, en composant à droite par μ, on trouve $u = U \star \mu$. Il en découle que $u(n) = \sum_{d|n} U(d)\mu(n/d)$: si on connaît les $\sum_{d|m} u(d)$, on a une formule explicite pour retrouver $u(n)$ pour tout n.

3.14 Arithmétique, Théorie des groupes

Exercise 3.26. Soient p et q deux nombres premiers distincts impairs vérifiant $p|2^q - 1$. Montrez que $2q|p-1$.

Exercise 3.27 (*Solution*)**.** Si $p|2^q - 1$, alors cela signifie que $2^q = 1\ [p]$. On note $\omega(2)$ l'ordre de l'élément 2 dans le groupe multiplicatif des nombres modulo p (la plus petite puissance non nulle telle que $2^k = 1\ [p]$). On écrit la division euclidienne de q par $\omega(2)$, soit r le reste et a le quotient. Alors $2^r = 2^{q - a\omega(2)} = 1$, par minimalité de $\omega(2)$, $r = 0 : \omega(2)|q$. Comme p est premier, on a donc $\omega(2) = q$ (on ne peut pas avoir $\omega(2) = 1$ car $2 \neq 1\ [p]$).

Comme on a un groupe fini, on sait que l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe (théorème de Lagrange sur les sous-groupes). De fait : $q = \omega(2)|p-1$ (cardinale du groupe multiplicatif des nombres modulo p).

Par ailleurs, $p - 1$ est pair car p est impair. Comme $2 \wedge q = 1$ car q est premier impair, donc d'après le lemme d'Euler, $2q|p-1$.

Reste le cas ou p ou q vaut 2.

- Si $p = 2$, alors $q = 1$ car sinon $2^q - 1$ est impair. Cela contredit le fait que q est premier.
- Si $q = 2$, alors $p|3$, donc $p = 3$ et $2q = 4$ ne divise pas $p - 1 = 2$ (mais $q|p-1$ reste vrai, et on le savait déjà).

4 Complexes

4.1 Complexes

Exercise 4.1 (Identité de la médiane)**.** Montrez que $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$. Interprétez géométriquement. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^2 = zz'$, montrez que $|z| + |z'| = \left|u + \frac{z+z'}{2}\right| + \left|u - \frac{z+z'}{2}\right|$

Exercise 4.2 (*Solution*)**.** On a :

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')}+(z-z')\overline{(z-z')} = 2z\overline{z}+z'\overline{z'} = 2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$$

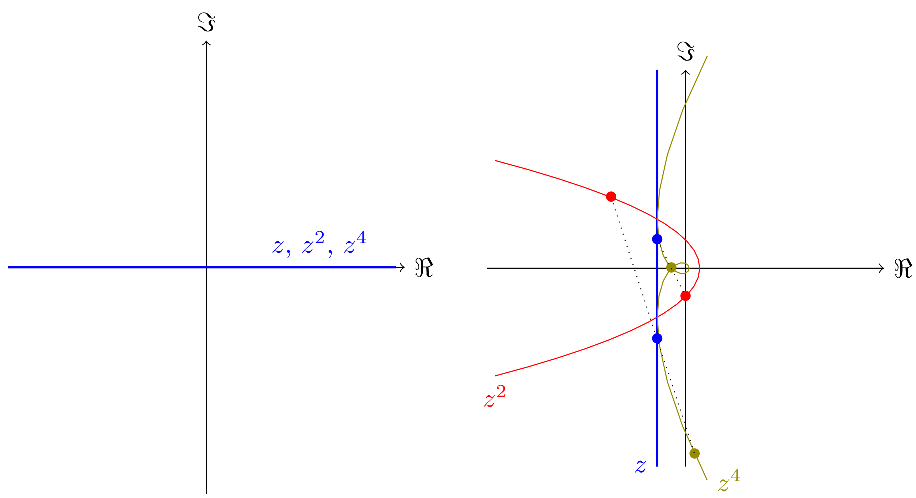
Ensuite, en utilisant le précédent résultat et $u^2 = zz'$:

$$\begin{aligned}
&\left(\left|u+\frac{z+z'}{2}\right| + \left|u-\frac{z+z'}{2}\right|\right)^2 \\
=&\left|u+\frac{z+z'}{2}\right|^2 + \left|u-\frac{z+z'}{2}\right|^2 + 2\left|u^2 - \frac{z^2+z'^2+2zz'}{4}\right| \\
=&2|u|^2 + \frac{|z+z'|^2}{2} + \frac{|z-z'|^2}{2} \\
=&2|zz'| + \frac{1}{2}(|z-z'|^2 + |z+z'|^2) \\
=&(|z|+|z'|)^2
\end{aligned}$$

4.2 Complexes

Exercise 4.3. Trouvez les nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^4 sont alignés.

Exercise 4.4 (*Solution*)**.** On regarde le nombre $\frac{z^4-z^2}{z^2-z} = z^2 + z$. Les points d'affixes z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement si ce nombre est réel. On cherche donc les solutions des équations $z^2 + z - \lambda = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En résolvant : $z = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4\lambda})$. Donc les points d'affixe z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement $z \in (\mathbb{R} \cup \{\tau; \Re(\tau) = -1/2\})$. **À dessiner dans le plan complexe !**



4.3 Complexes

Exercise 4.5. Soit (E) l'équation $(z-1)^n - (z+1)^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Montrez que les solutions de (E) sont des imaginaires purs. Montrez que si z est solution de (E) alors $-z$ aussi. Résoudre (E).

Exercise 4.6 (*Solution*)**.** $(z+1)^n = (z-1)^n \Rightarrow |z+1|^n = |z-1|^n \Rightarrow |z+1| = |z-1|$ Donc le point d'affixe z est équidistant de 1 et de -1 : il est sur la verticale $\Re(z) = 0$, c'est un imaginaire pur. Ensuite, si z est solution de (E), alors on a : $(-z-1)^n - (-z+1)^n = (-1)^n\left((z-1)^n + (z+1)^n\right) = 0$

Pour résoudre, on constate que $(E) \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$, donc $(E) \Leftrightarrow \exists k \in [0, n-1], \frac{z+1}{z-1} = e^{i\frac{k\pi}{n}}$ *et* $z \neq 1$. Ainsi, on trouve que l'ensemble de solution : $\mathcal{S} = \{i\ cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right); 1 \geq k \geq n-1\}$

4.4 Complexes

Exercise 4.7. Soit $\lambda \neq i$. Montrez que $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\left|\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$.

Exercise 4.8 (*Solution*)**.** Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors en passant simplement en forme trigonométrique (angle de moitié), on trouve bien que $\left|\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$

Réciproquement, si $|1+\lambda i| = |1-\lambda i|$, alors : $|\lambda i - (-1)| = |\lambda i - 1|$, donc $\lambda i \in i\mathbb{R}$ (λi est sur la médiatrice du segment $[-1, 1]$). Finalement $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.5 Complexes

Exercise 4.9. Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$. Déterminez les solutions de $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

Exercise 4.10 (*Solution*)**.** Le membre de droite vaut $e^{2i\alpha}$ (passer en forme trigonométrique). De fait, l'équation équivaut à l'existence de $k \in \{0, 1, 2\}$ tel que $\frac{1+iz}{1-iz} = \omega_k$ avec $\omega_k = e^{i\left(\frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$. L'ensemble des solution de l'équation est ainsi $\mathcal{S} = \left\{\frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k+1)}; k \in \{0, 1, 2\}\right\}$. On peux calculer explicitement que :

$$\frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k + 1)} = \tan\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}\right)$$

On constate d'ailleurs que les trois solutions sont réelles. On peut relier cela avec l'exercice 120 et se rendre compte que $\left|\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\right| = 1$.

4.6 Complexes

Exercise 4.11. On pose la relation binaire sur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\}$: $z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow \exists\theta \in \mathbb{R}, z' = \frac{z\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - z\sin\theta}$. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercise 4.12 (*Solution*)**.** On prendra bien évidemment le temps de vérifier que si z est dans $\mathbb{H}$, alors z' aussi ! Pour cela, on montrera que $\Im(z') = \frac{\Im(z)}{|\cos\theta - z\sin\theta|^2} \geq 0$.

La réflexivité est évidente.

La symétrie peut être obtenue en prenant $\theta' = -\theta$, on a alors $z = \frac{z'\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - z'\sin\theta}$.

La transitivité est bien plus casse-pieds... Si $z \to z'$ via θ et $z' \to z''$ via θ', on a aussi (à vérifier) $z \to z''$ via $\theta'' = \theta + \theta'$. La meilleure manière de le voir est de faire une représentation matricielle.

4.7 Complexes

Exercise 4.13. Montrez que (et que pensez-vous de la réciproque ?) :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}, (|z_1| = |z_2| = 1 \quad \text{et} \quad |2 + z_1 z_2| = 1) \Rightarrow z_1 z_2 = -1$$

Exercise 4.14 (*Solution*)**.** Supposons l'assertion de gauche vérifiée par z_1 et z_2 fixés. On utilise alors l'inégalité triangulaire pour avoir : $|2 + z_1 z_2| \geq |2| - |z_1||z_2| = 1$. On est donc dans le cas d'égalité : 2 et $z_1 z_2$ sont alignés, c'est-à-dire $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que $z_2 = \frac{\lambda}{z_2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On obtient immédiatement que $|2 - \lambda| = 1$ d'où $\lambda \in \{-3, -1\}$. La première possibilité est hors de propos car elle contredit $|z_1| = |z_2|$.

La réciproque est fausse, on pourra prendre par exemple $z_1 = 2$ et $z_2 = \frac{-1}{2}$. Par contre, elle est vrai en supposant $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$.

4.8 Complexes

Exercise 4.15. (ESSIM '93) On définit sinh, cosh et tanh sur $\mathbb{C}$ par les mêmes formules que sur $\mathbb{R}$. Donnez l'ensemble de définition de tanh. Résoudre $\tanh z = 0$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $|\Im(z)| < \frac{\pi}{2}$ et $|\tanh z| < 1$. En déduire que tanh réalise une bijection de $\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |\Im(z)| < \frac{\pi}{4}\}$ sur $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Exercise 4.16 (*Solution*)**.** On résout déjà $\cosh(z) = 0$, on trouve $z \in i\left(\pm\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Ensuite, $\tanh z = 0$ si et seulement si $\sinh z = 0$ (et $\cosh z \neq 0$), donc si et seulement si $z \in i\pi\mathbb{Z}$.

En écrivant $z = x + iy$ et en décomposant les exponentielles complexes, on obtient $|\tanh z| < 1 \Leftrightarrow \cos 2y > 0$. Par suite, $|\tanh z| < 1$ *et* $|\Im(z)| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z \in \Delta$.

Soit $z \in \Delta$. Par 1), $\tanh z$ existe, et par 3), $|\tanh z| < 1$, donc $\tanh : \Delta \to D$. Si $Z \in D$, alors $z = {}^1\!/_2 \ln\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right| + i \arg\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)\!/2$ vérifie $z \in \Delta$ et $\tanh z = Z$.

En outre, si $\tanh z = Z$ (avec $z = x + iy$ et $\frac{1+Z}{1-Z} = re^{ia}$), alors $e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z}$ et comme $Z \neq 1$, $2\Re\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) = \frac{2(1-|Z|^2)}{|1-Z|^2} > 0$. Donc $e^{2x} = r$ et $e^{2y} = e^{i\theta}$. D'après la définition de Δ, on se rend compte qu'il n'y a au plus qu'une seule solution.

Ainsi, $\tanh : \Delta \to D$ est une bijection. **Faire un dessin !**

4.9 Complexes

Exercise 4.17. Montrez que les solutions de $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} - nz^n = 0$ sont de module ≤ 1. Y a-t-il des solutions de module 1 ?

Exercise 4.18 (*Solution*)**.** Supposons $|z| > 1$, alors $|1 + .. + z^{n-1}| \leq |1| + ... + |z^{n-1}| \leq n|z^{n-1}|$, or $n|z^n| > n|z^{n-1}|$, donc z ne peut par être racine du polynôme.

Si $|z| = 1$, alors on a $|1 + .. + z^{n-1}| \leq n$ et $|nz^n| = n$, donc on doit être dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : tous les 1, z, z^2,..., z^{n-1} sont alignés. On en déduit que z est réel et donc que $z = \pm 1$. Il suffit maintenant de vérifier : 1 est bien racine du polynôme, mais -1 ne l'est pas.

4.10 Complexes

Exercise 4.19. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{C}$. Donnez une CNS pour que les solutions de $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = A$ soient toutes réelles.

Exercise 4.20 (*Solution*)**.** Si $z \in \mathbb{R}$, alors $\overline{1 + iz} = 1 - iz$, donc $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = 2\arg(1 + iz) = 2\arctan z$. Donc $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n = 1$. On en déduit que $|A| = 1$, puis qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $A = e^{ia}$.

Réciproquement, si $A = e^{ia}$, alors l'ensemble des solutions de l'équation est $z = -i\frac{e^{i\frac{a+2k\pi}{n}}-1}{e^{i\frac{a+2k\pi}{n}}+1} = \tan\frac{a+2k\pi}{2n}e$ avec $0 \leq k \leq n-1$. Ainsi, la CNS pour que l'équation n'admette que des solutions réelles est $A \in \mathbb{U}$.

Soit a tel que $a^n = A$, on a alors les racines n-ième de A : $\{a_k := ae^{i\frac{2k\pi}{n}}; 0 \leq k \leq n-1\}$. On résout maintenant : $1 + iz = a_k(1 - iz)$. On trouve $z = -i\frac{a_k-1}{a_k+1}$

4.11 Complexes

Exercise 4.21. Résoudre le système $x + y = 1 + i$ et $xy = 2 - i$.

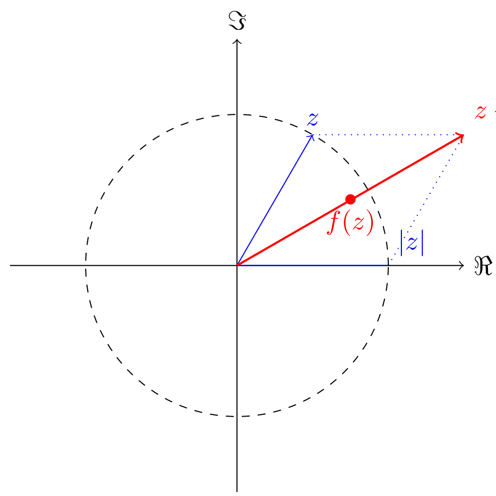
Exercise 4.22 (*Solution*)**.** On pose $S = 1 + i$ et $P = 2 - i$. x et y sont alors les deux racines du polynôme $T^2 - ST + P$. On calcule $\Delta = S^2 - 4P = 2i - 8 + 4i = -8 + 6i = 2(-4 + 3i) = 10e^{i\theta}$ avec $\cos\theta = \frac{-4}{5}$ et $\sin\theta = \frac{3}{5}$. On cherche une racine carré de Δ, par exemple : $\delta = \sqrt{10}e^{i\theta/2}$. Dès lors : $x = \frac{S+\delta}{2}$ et $y = \frac{S-\delta}{2}$.

4.12 Complexes

Exercise 4.23. Déterminez les valeurs de $f : z \mapsto \frac{z+|z|}{2}$.

Exercise 4.24 (*Solution*)**.** On a $f(0) = 0$, et $f(\rho e^{i\theta}) = \rho\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta/2}$. Donc si $Z = re^{ia}$, alors avec $\theta = 2a$ et $\rho = \frac{r}{\cos a}$, on a $f(z) = Z$. L'application f est donc surjective.

Est-ce que f est injective ? Si $f(\rho e^{i\theta}) = f(re^{ia})$, alors $\frac{\theta}{2} \equiv \frac{a}{2}$ $[2\pi]$, donc $e^{i\theta} = e^{ia}$, puis $\rho = r$. f est donc injective.



4.13 Complexes

Exercise 4.25. Calculez $\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$.

Exercise 4.26 (*Solution*)**.** On pose $S_0 = \sum \binom{3n}{3k}$, $S_1 = \sum \binom{3n}{3k+1}$ et $S_2 = \sum \binom{3n}{3k+2}$. On a (avec $j^3 = 1$) :

$$\begin{aligned} 1.S_0 + j.S_1 + j^2.S_2 &= \sum j^k \binom{3n}{k} \\ &= (1+j)^{3n} \\ &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

De plus, $\overline{j} = j^2$, donc $0 = \Im(1.S_0 + j.S_1 + j^2.S_2) = \Im(j)(S_1 - S_2)$, et on en déduit $S_1 = S_2$ (qui sont des réels). Puis $(-1)^n = \Re(1.S_0 + j.S_1 + j^2.S_2) = S_0 - \frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2 = S_0 - S_1$. Enfin, $S_0 + S_1 + S_2 = \sum \binom{3n}{k} = 2^{3n} (= S_0 + 2S_1)$.

Ainsi : $S_1 = S_2 = \frac{1}{3}\left(2^{3n} - (-1)^n\right)$ et $S_0 = \frac{1}{3}\left(2^{3n} + 2 \times (-1)^n\right)$. On pourra prendre le temps de vérifier que ces nombres sont bien entiers.

4.14 Complexes

Exercise 4.27. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases}$$

Exercise 4.28 (*Solution*)**.** Supposons que a, b et c vérifient le système. On pose $z_{a,b,c} = (\cos a + \cos b + \cos c) + i(\sin a + \sin b + \sin c) = e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$. Donc, en particulier $|e^{ia}+e^{ib}| = |-e^{ic}| = 1$, donc $\left|2\cos\frac{a-b}{2}\right| = 1$, puis $(a-b) \in \left(\pm\frac{2\pi}{3}+\pi\mathbb{Z}\right)$.

Par suite, $e^{ib} = je^{ia}$ ou $e^{ib} = j^2e^{ia}$. On en déduit la valeur de c en ré-injectant dans l'équation de départ $e^{ia}+e^{ib}+e^{ic} = 0$.

L'ensemble solution est alors :

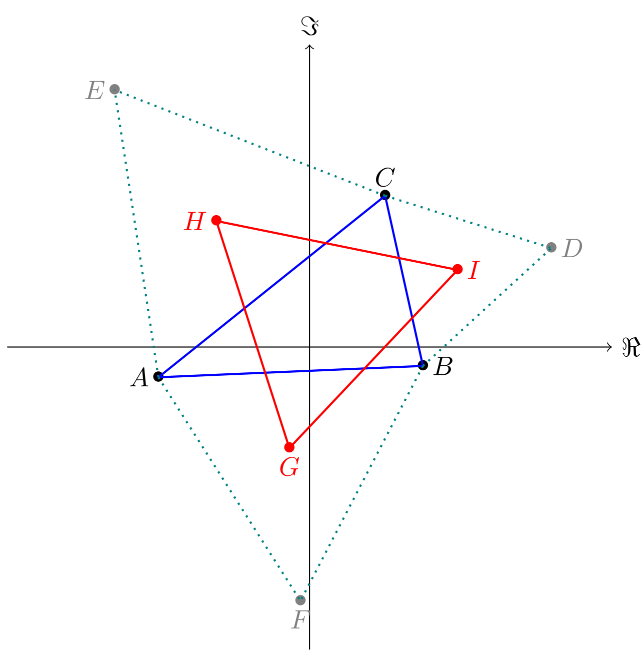
$$\mathbb{S} \subset \left\{\left(a, a+\varepsilon\frac{2\pi}{3}+2k\pi, a-\varepsilon\frac{2\pi}{3}+2k'\pi\right); a \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{\pm 1\}, (k,k') \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

L'inclusion inverse se vérifie rapidement.

4.15 Complexes

Exercise 4.29 (Théorème de Napoléon)**.** Soit un triangle ABC quelconque. Soient A', B' et C' trois points tels que CBA', ACB' et BAC' soient équilatéraux (extérieurs à ABC). Soient D, E et F les centres de CBA', ACB' et BAC'. Montrez que DEF est un triangle équilatéral. Montrez que le centre de DEF est aussi celui de ABC. Faire de même en construisant les triangles équilatéraux intérieurs (noté $AB\tilde{C}$, $BC\tilde{A}$ et $CA\tilde{B}$ de centres $\tilde{D}$, $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$), puis comparer les aires de DEF et de $\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}$.

Exercise 4.30 (*Solution*)**.** On notera avec des minuscules les affixes des points correspondant en majuscule.



Comme D est le centre du triangle équilatéral CBA', B est l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $+\frac{2\pi}{3}$., donc (avec $j^3 = 1$ usuel) : $(d-b) =$

$j(d-c)$. De même $(e-c)=j(e-a)$ et $(f-a)=j(f-b)$. Ainsi : $(1-j)d=b-jc$, $(1-j)e=c-ja$ et $(1-j)f=a-jb$.

On veut montrez que F est l'image de E par la rotation d'angle $+\frac{\pi}{3}$ de centre D. Or $+\frac{\pi}{3}$ est l'angle de $-j^2$, avec $1+j+j^2=0$ (en particulier $1+j=-j^2$) et $|-j^2|=1$:

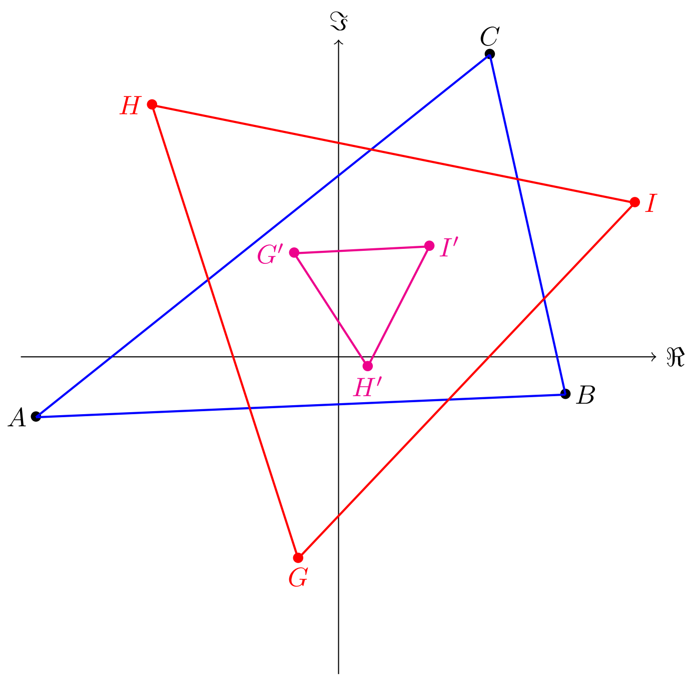
$$\begin{aligned}-j^2\times\frac{e-d}{f-d} &= -j^2\times\frac{c-ja-(b-jc)}{a-jb-(b-jc)}\\ &= -j^2\times\frac{-ja-b+(1+j)c}{a-(1+j)b+jc}\\ &= 1\end{aligned}$$

Ainsi, DEF est bien équilatéral. Quitte à échanger $a\leftrightarrow b$, $b\leftrightarrow c$ et $c\leftrightarrow a$ dans les expressions de d, e et f, on obtient immédiatement que $\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}$ est aussi équilatéral.

Le centre de DEF est le point d'affixe : $\omega=\frac{d+e+f}{3}$. On a :

$$(1-j)\omega=\frac{(b-jc)+(c-ja)+(a-jb)}{3}=(1-j)\frac{a+b+c}{3}$$

Ainsi, les centres de ABC, DEF et $\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}$ sont identiques.



Pour ce qui est du calcul des aires, on utilise la formule (bien connue) : $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}|b-a|^2$ (et idem pour les autres triangles équilatéraux). On peut retrouver cette formule en regardant les hauteurs. Dès lors :

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\mathcal{A}_{DEF}-\mathcal{A}_{\tilde{D}\tilde{E}\tilde{F}}\right) &= (e-d)\overline{(d-e)}-(\tilde{d}-\tilde{e})\overline{(\tilde{e}-\tilde{d})} \\
&= \frac{(b-jc-c+ja)(\overline{b}-j^2\overline{c}-\overline{c}+j^2\overline{a})}{(1-j)(1-j^2)}-\frac{(c-jb-a+jc)(\overline{c}-j^2\overline{b}-\overline{a}+j^2\overline{c})}{(1-j)(1-j^2)} \\
&= 3((b-c)+j(a-c))(\overline{(b-c)}+j^2\overline{(a-c)})-3((c-a)+j(c-b))(\overline{(c-a)}+j^2\overline{(c-b)}) \\
&= 3(-j+j^2)(b-c)\overline{(a-c)}+3(j-j^2)(a-c)\overline{(b-c)} \\
&= 2\times 3\sqrt{3}\Re((b-c)\overline{(a-c)}) \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}}\overline{\mathcal{A}}_{ABC}
\end{aligned}$$

Finalement, la différence des aires des deux triangles équilatéraux est exactement l'aire algébrique du triangle de départ.

4.16 Complexes

Exercise 4.31. Décomposez le polynôme $z^6-2z^3\cos\theta+1$ en produit de 3 polynômes de degré 2 à coefficients réels.

Exercise 4.32 (*Solution*)**.** On pose $Z=z^3$ et on résout $Z^2-2Z\cos\theta+1=0$. Les solutions sont $Z_0=e^{i\theta}$ et $\overline{Z_0}=e^{-i\theta}$. De fait, les 6 solutions de l'équation de départ sont les complexes qui vérifient $z^3=Z_0$ ou $z^3=\overline{Z_0}$, c'est-à-dire : $\{e^{i\theta/3}; e^{-i\theta/3}; je^{i\theta/3}; je^{-i\theta/3}; j^2e^{i\theta/3}; j^2e^{-i\theta/3}\}$, avec $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Ainsi, en réunissant les racines conjuguées que $z^6-2z^3\cos\theta+1$ se factorise en :

$$\left(z^2-2z\cos\frac{\theta}{3}+1\right)\left(z^2-2z\cos\frac{\theta+2\pi}{3}+1\right)\left(z^2-2z\cos\frac{\theta+4\pi}{3}+1\right)$$

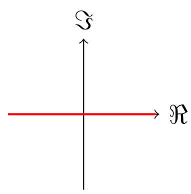
4.17 Complexes

Exercise 4.33. Pour $z\in\mathbb{C}$, on pose $w=\frac{1+z}{1-z}$. Quel est l'ensemble des points d'affixe z lorsque $|w|=1$? Lorsque $|w|=2$? $w\in\mathbb{R}$? $w\in i\mathbb{R}$?

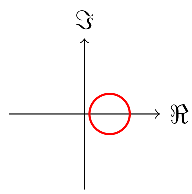
Exercise 4.34 (*Solution*)**.** En écrivant $z=x+iy$, on obtient (attention, on enlèvera le point $(1,0)$ de chacun des lieux car $z\neq 1$) :

- ($|w|=1$) Cette condition équivaut à $(1+x)^2+y^2=(1-x)^2+y^2$, ce qui revient à $x=0$. Le lieu recherché est l'axe des abscisses.
- ($|w|=2$) Cette condition équivaut à $(1+x)^2+y^2=4(1-x)^2+4y^2$, ce qui revient à $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$. Le lieu recherché est le cercle de centre $(5/3,0)$ et de rayon $4/3$.
- ($w\in\mathbb{R}$) Cette condition équivaut à $(1+z)(1-\overline{z})=(1-z)(1+\overline{z})$, puis $z=\overline{z}$, ce qui revient à $z\in\mathbb{R}$. Le lieu recherché est l'axe des abscisses.
- ($w\in i\mathbb{R}$) Cette condition équivaut à $(1+z)(1-\overline{z})=-(1-z)(1+\overline{z})$, puis $z\overline{z}=1$, ce qui revient à $z\in\mathbb{U}$. Le lieu recherché est le cercle unité.

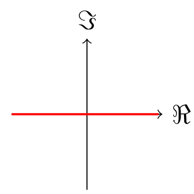
On pourra essayer de résoudre les premier, troisième et quatrième cas avec un point de vue purement géométrique.



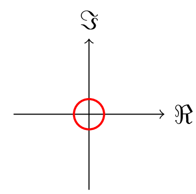
$|w| = 1$



$|w| = 2$



$w \in \mathbb{R}$



$w \in i\mathbb{R}$

4.18 Complexes

Exercise 4.35. On définit la suite $(z_n)_n$ par récurrence : $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ fixés et $z_{n+1} - z_n = \alpha(z_n - z_{n-1})$. Déterminez une CNS sur $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $(z_n)_n$ soit périodique.

Exercise 4.36 (*Solution*)**.** On oublie les cas triviaux : $z_0 = z_1$.

On a forcément $\alpha \neq 1$ car sinon la suite est arithmétique de raison $z_1 - z_0$, donc pas périodique.

On montre ensuite par récurrence que $z_n - z_0 = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}(z_1 - z_0)$. Ainsi, si la suite est périodique, alors il existe un rang $n_0 \geq 2$ tel que $z_{n_0} = z_0$, d'où $\alpha^{n_0} = 1$, c'est-à-dire $\alpha \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_n (\neq \mathbb{U})$.

Réciproquement, si $\alpha \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_n$, alors $(z_n)_n$ est bien périodique car $z_{n+n_0} - z_n = \frac{1-\alpha^{n_0}}{1-\alpha}(z_{n+1} - z_n) = 0$.

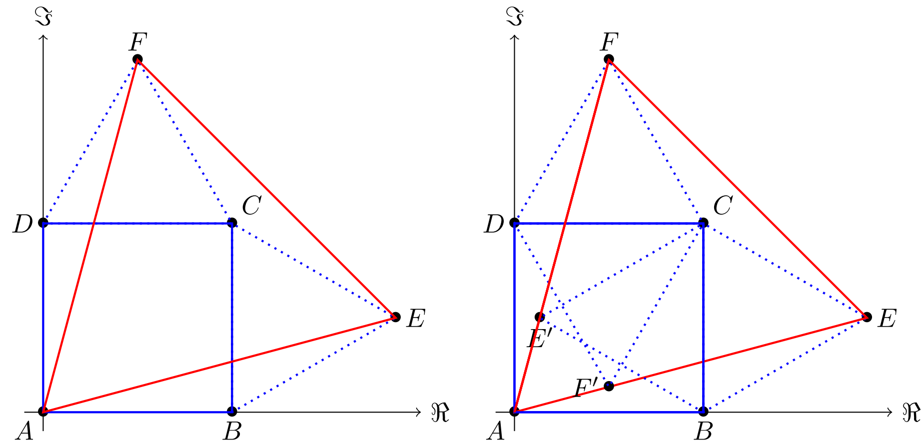
On pourra s'intéresser au cas où $(z_n)_n$ est seulement ultimement périodique $(\exists N, p, \forall n \geq N, z_{n+p} = z_n)$.

4.19 Complexes

Exercise 4.37 (Problème de Thébault (n°2))**.** Soit un carré $ABCD$. Soient E et F tels que BCE et CDF soient équilatéraux (extérieurs au carré). Montrez que AFE est équilatéral. Soient G et H tels que BGC et CHD soient équilatéraux (intérieurs au carré). Montrez que AHG est équilatéral et comparez les aires de AFE et AHG.

Exercise 4.38 (*Solution*)**.** On note les affixes complexes avec des minuscules pour les points correspondants en majuscule. On place le repère tel que $a = 0$. On utilise abondamment $1 + j + j^2 = 0$.

D est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{2}$: $d = ib$. De même, $c = d + b = (1 + i)b$. Ensuite, E est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $+\frac{\pi}{3}$: $(e - c) = -j^2(b - c)$ puis $e = b(1 + i + ij^2) = (1 - ij)b$. Pareillement : $f = d - j^2(c - d) = (i - j^2)b$.



Pour montrer que AEF est équilatéral, il suffit de montrer que $(f-a) = -j^2(e-a)$, or $-j^2 e = (-j^2+i)b = f$. Pour le triangle intérieur, on peut raisonner exactement de la même manière avec $e' = (1-j^2 i)b$ et $f' = (1+i-j^2)b = (i-j)b$. D'où, ici un triangle équilatéral $AF'E'$ (attention à l'orientation).

Pour calculer les aires, on utilise la formule bien connue pour un triangle équilatéral de côté de longueur l : $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$. Donc, on a : $\mathcal{A}_{AEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}|b|^2(2+\sqrt{3})$ et $\mathcal{A}_{AF'E'} = \frac{\sqrt{3}}{4}|b|^2(2-\sqrt{3})$ (on prendra garde à vérifier que c'est positif !).

On remarquera aussi sur la figure que A, E' et F sont alignés, tout comme A, F' et E. Il suffit pour le montrer de voir que $\frac{f}{e'} \in \mathbb{R}$ (idem $\frac{e}{f'} \in \mathbb{R}$). En effet :

$$\frac{f}{e'} = \frac{(i-j^2)b}{(1-j^2 i)b} = \frac{1+i(2+\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}+i} = 2+\sqrt{3} \in \mathbb{R}$$

Par symétrie, on a aussi que $\frac{e}{f'} = 2+\sqrt{3} \in \mathbb{R}$. On en déduit une nouvelle fois que $\mathcal{A}_{AF'E'} \times (2+\sqrt{3})^2 = \mathcal{A}_{AEF}$.

4.20 Complexes

Exercise 4.39 (Construction du pentagone régulier)**.** Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $a = \omega+\omega^4$ et $b = \omega^2+\omega^3$. Déterminez une équation (du second degré) de solutions a et b, puis calculez $\cos {}^{2\pi}/_5$, $\cos {}^{4\pi}/_5$, $\cos {}^{\pi}/_5$ (idem sin).

Le cercle de centre Ω d'affixe $-{}^1/_2$ passant par le point M d'affixe i recoupe l'axe des abscisses en deux points I et J. Montrer que $x_I + x_J = x_I \times x_J = -1$ et en déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier usuel.

On appelle $ABCDE$ ce pentagone. La diagonale $[AC]$ est recoupée par les diagonales $[BD]$ et $[BE]$ en F et G. Calculez $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.

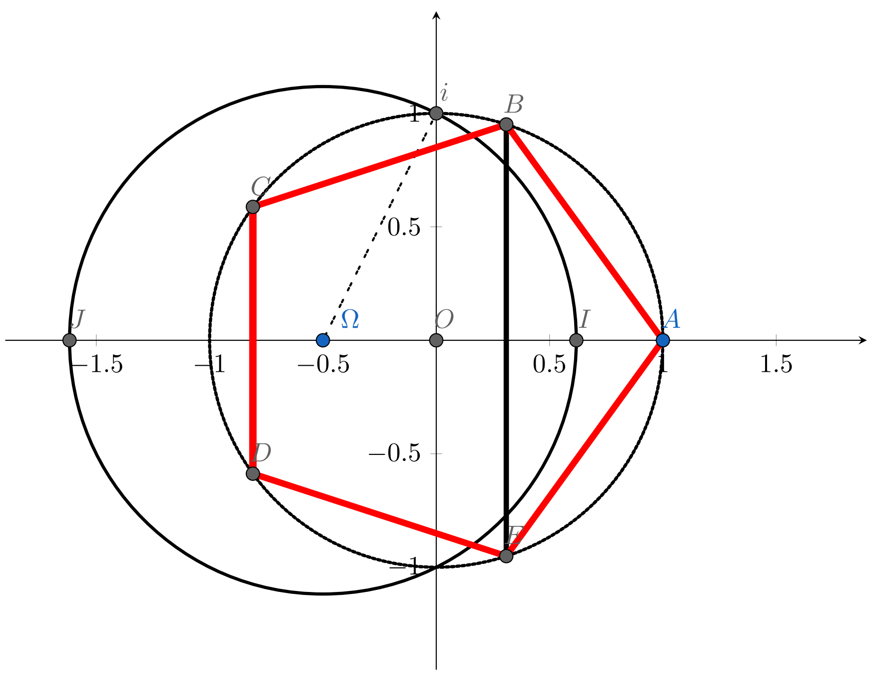
Exercise 4.40 (*Solution*)**.** On a $a = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $b = 2\cos\frac{4\pi}{5}$. En notant $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, on sait que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$, donc $a+b = \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = -1$. En outre, $ab = \omega^3+\omega^4+\omega^6+\omega^7 = -1$ grâce à $\omega^5 = 1$. Ainsi, a et b sont les racines de X^2+X-1, c'est-à-dire : $\{a,b\} = \{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$. Comme $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $a > 0$, d'où :

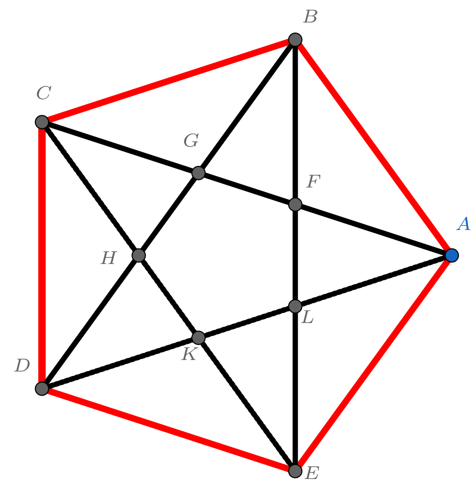
$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

On obtient :

x	$\pi/5$	$2\pi/5$	$4\pi/5$
$\cos x$	$1/4(1+\sqrt{5})$	$1/4(-1+\sqrt{5})$	$1/4(-1-\sqrt{5})$
$\sin x$	$1/4\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$1/4\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$1/4\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Le cercle $\mathcal{C}(\Omega, \Omega M)$ a pour rayon $|\Omega M| = |-1/2 - i| = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Comme Ω est déjà su l'axe des abscisses, on en déduit : $x_I = x_\Omega + R = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $x_J = x_\Omega - R = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = 2\cos\frac{4\pi}{5}$. Ainsi, pour construire le pentagone régulier, il suffit de tracer $\mathcal{C}(O,1)$, puis les médiatrices de $[O,I]$ et $[O,J]$, ce qui nous donne 4 sommets du pentagone, le cinquième étant le point d'affixe 1.





Pour calculer $\frac{AF}{AC}$, on peut utiliser le théorème de Thalès. On appelle $FGHKL$ le pentagone intérieur. Alors, si on regarde AFL et ACD, on obtient $\frac{AF}{AC} = \frac{FL}{CD}$. Puis, en regardant KCD et KBE, on obtient $\frac{KC}{KE} = \frac{CD}{BE}$. Enfin, avec les égalités de longueur $BE = AC$, $KC = AF$, $KE = CF$ et $FL = FG$, on peut poser $x = \frac{AF}{AC}$ et on a :

$$x = \frac{AF}{AC} = \frac{FL}{CD} = FG \times \left(\frac{BE \times AF}{FC}\right)^{-1} = \frac{(1-2x)(1-x)}{1 \times x}$$

(À la dernière étape, on a divisé en haut et en bas par AC^2.) D'où $x^2 - 3x + 1 = 0$ puis $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (car $x < 1$).

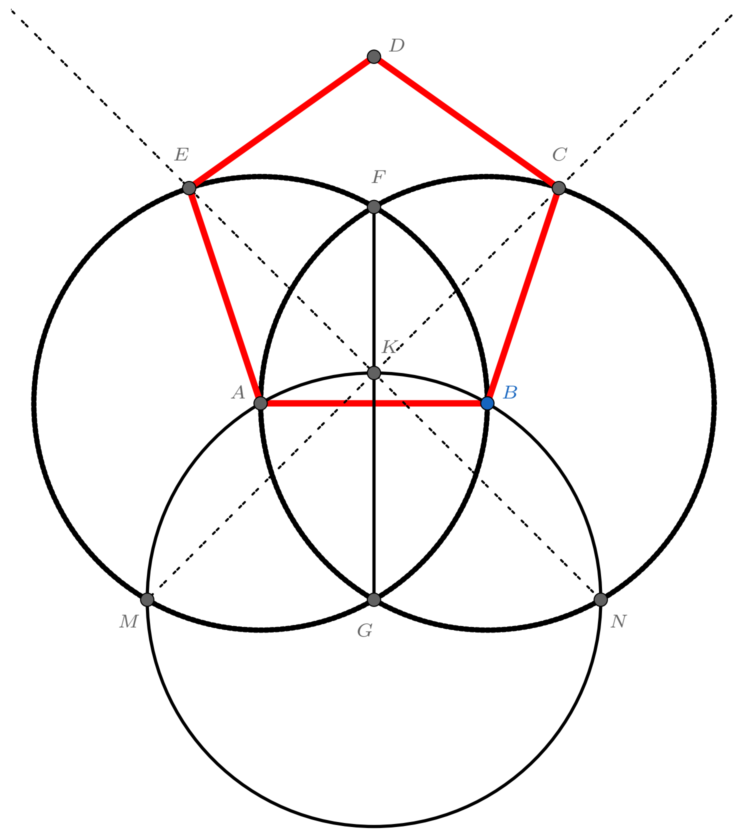
On procède de même pour $y = \frac{FG}{AF}$. On a $y = \frac{1-2x}{x}$ en divisant en haut et en bas par AC. D'où finalement le nombre d'or : $y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

4.21 Complexes

Exercise 4.41 (Construction de Dürer)**.** Que pensez-vous de la méthode de Dürer (on montrera qu'elle construit un pentagone *presque régulier*, avec une erreur de 4/1000) :

Placer A et B ; tracer les cercles $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}(A, |AB|)$ et $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(B, |AB|)$, d'intersection F et G ; tracer $\mathcal{C}(G, |AG|)$ qui coupe $\mathcal{C}_1$ en I et (FG) en K ; (IK) coupe $\mathcal{C}_2$ en C ; puis on clôt le pentagone.

Exercise 4.42 (*Solution*)**.** On commence par tracer la figure et poser quelques noms.



Le plus efficace est de placer l'origine du repère au milieu du segment $[A, B]$. On note par des minuscules les affixes complexes des points en majuscules et i et j les nombres complexes usuels ($i^2 = -1$, $j^3 = 1$).

On sait, par construction que les segments rouges ont tous la même longueur. Néanmoins, il convient de mesurer l'angle entre eux, au niveau de B par exemple. On veut donc les affixes de A, B et C. Soit l la longueur du segment rouge $[A, B]$. On a immédiatement, dans notre repère : $a = -{}^1\!/_2 l$ et $b = +{}^1\!/_2 l$.

Reste c... En raisonnant avec les triangles équilatéraux AGB puis AMG, on obtient $g = -{}^{\sqrt{3}}\!/_2 li$ et $m = g - -j^2(a - g) = -lj$. K est à la verticale de G à une distance l : $k = (1 - {}^{\sqrt{3}}\!/_2)\, l$. Ainsi, comme C est sur la droite (MK), on a d'une part l'existence d'un réel t tel que

$$\frac{c}{l} = k + t(k - m) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + t\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

En outre, C est à une distance l de B :

$$|c-b|^2 = l^2 \quad \text{puis} \quad \left|\frac{c}{l} - \frac{1}{2}\right|^2 = 1$$

En remplaçant, on obtient que t vérifie :

$$(15 - 6\sqrt{3})t^2 + 4(3 - 2\sqrt{3})t - 2\sqrt{3} = 0$$

Ainsi, on trouve 2 valeurs de t possibles, on sait qu'on veut la plus élevée étant donné l'endroit où on souhaite que soit le point C : $t = \frac{-2(3-2\sqrt{3})+\sqrt{48-18\sqrt{3}}}{15-6\sqrt{3}}$.

On a tous le matériel pour conclure : on veut que $\frac{c-b}{a-b} = e^{i\frac{3\pi}{5}}$. Ce qui nous donne :

$$-e^{i\frac{3\pi}{5}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + t\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

On peut comparer (avec une calculatrice) $\frac{\Im(z)}{\Re(z)}$ des deux membres, c'est-à-dire la tan dans l'angle en question. On trouve un angle correspondant de 109.0278° au lieu des 108° attendus, soit $0,95\%$ d'erreur relative.

4.22 Complexes

Exercise 4.43. Calculez $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculez $A_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta)$ et $B_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(k\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercise 4.44 (*Solution*)**.** On a : $C_n = \Re \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$ et $S_n = \Im \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$. Or :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{2i \sin\frac{(n+1)\theta}{2} e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{2i \sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin{}^{\theta}\!/_{2}} e^{i\frac{n}{2}\theta}$$

Il s'ensuit :

$$C_n = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin{}^{\theta}\!/_{2}} \cos\frac{n\theta}{2}$$

$$S_n = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin{}^{\theta}\!/_{2}} \sin\frac{n\theta}{2}$$

Outre la méthode classique, prenons le temps de présenter une réflexion uniquement avec de la trigonométrie :

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{\theta}{2} C_n &= \sum_{k=0}^n 2\sin\frac{\theta}{2}\cos(k\theta) \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\sin\left((k + {}^1\!/_2)\theta\right) - \sin\left((k - {}^1\!/_2)\theta\right)\right] \\
&= \sin\left((n + {}^1\!/_2)\theta\right) - \sin\frac{-\theta}{2} \\
&= 2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit que si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$:

$$C_n = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}}{\sin{}^{\theta}\!/_2}$$

Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\cos(k\theta) = 1$, donc $C_n = n+1$ (le nombre de terme dans la somme).

(Je vous laisse chercher pour S_n...)

Pour ce second calcul, on remarque que, pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} A_n + B_n &= \sum_{k=0}^{n}\left[\sin^2(k\theta)+\cos^2(k\theta)\right] = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \\ A_n - B_n &= \left[\sin^2(k\theta)-\cos^2(k\theta)\right] = \sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{\sin\theta} \end{cases}$$

La seconde égalité provient de l'exercice précédent.

On en déduit donc :

$$\begin{cases} A_n &= \frac{1}{2}\left(n+1+\frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{\sin\theta}\right) \\ B_n &= \frac{1}{2}\left(n+1-\frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{\sin\theta}\right) \end{cases}$$

Pour finir, si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors on a rapidement :

$$\begin{cases} A_n &= n+1 \\ B_n &= 0 \end{cases}$$

4.23 Complexes

Exercise 4.45. Soit P_n le polygone régulier à n côtés. Montrez que le nombre de *pentes* induit par les sommets de P_n est exactement n. La *pente* est le vecteur directeur de la droite reliant deux points.

Pour n impair, en déduire qu'il est possible de disposer n points dans le plan de manière à définir $n-1$ pentes.

N.B. : n pentes pour n pair et $n-1$ pentes pour n impair est le minimum possible pour l'ensemble de configurations de points du plan (1982).

Exercise 4.46 (*Solution*)**.** On peut regarder le polygone $P_n = \left\{\omega^k \ ; \ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ avec $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. L'ensemble des pentes est donné par les nombres complexes $\alpha_{k,\ell} = \omega^k - \omega^\ell$, et deux pentes sont les mêmes si et seulement si les nombres complexes sont des multiples réels l'un de l'autre : $\alpha_{k,\ell} \sim \alpha_{k',\ell'}$ si et seulement si $\frac{\alpha_{k,\ell}}{\alpha_{k',\ell'}} \in \mathbb{R}$.

Or, si $k < \ell$, on pose $\delta = \ell - k$, alors :

$$\alpha_{k,\ell} = \omega^k - \omega^\ell = \omega^k\left(1 - e^{i\frac{2\delta\pi}{n}}\right) = -2\sin\left(\frac{\delta\pi}{n}\right)e^{i\frac{2\pi}{n}(k+\delta/2)}$$

Dès lors, on remarque que :

- Si $\delta = 2p+1$ est impair, alors $\alpha_{k,\ell} \sim \alpha_{k+p,\ k+p+1}$.

- Si $\delta = 2p$ est pair, alors $\alpha_{k,\ell} \sim \alpha_{k+p-1,\ k+p+1}$.

Comment utiliser cela ?

Regardons la diagonale $D_{k,\ell}$ entre ω^k et ω^ℓ dans P_n. Elle sépare les sommets de P_n en deux parties. δ désigne le nombre de côtés entre ω^k et ω^ℓ dans le polygone P_n : il y a deux valeurs possibles (qui donne le même résultat pour $\alpha_{k,\ell}$). Si l'un de ces nombres de côté est de cardinal impair, alors, D est parallèle à l'un des côté. Si aucun des nombre de côté n'est impair, alors D est parallèle à l'une des diagonales extrêmes (entre un sommet ω^a et le sommet ω^{a+2}).

$\star$ Il s'ensuit que si n est impair, alors toute diagonale intérieure est parallèle à l'un des côté du polygone car toute diagonale sépare l'ensemble des sommets en deux parties de parité différentes, donc l'une est impaire. Les côtés ne sont pas parallèles entre eux car sinon, on aurait $\alpha_{k,k+1} \sim \alpha_{a,a+1}$ pour $k, a \in [\![0, n-1]\!]$, c'est-à-dire $e^{i\frac{2\pi}{n}(k+1/2)} = \pm e^{i\frac{2\pi}{n}(a+1/2)}$, soit $\frac{2}{n}(k+1/2) = \frac{2}{n}(a+1/2)$ ou $\frac{2}{n}(k+1/2) = \frac{2}{n}(a+1/2)+1$, la première équation donne $k=a$ et la seconde est impossible car n est impair. Il y a donc exactement n pentes

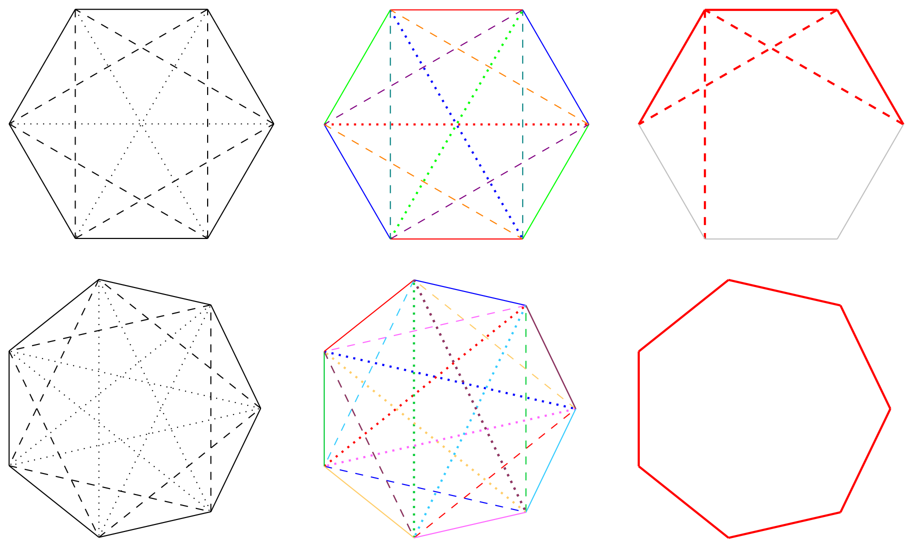
$\star$ En revanche, si n est pair, les diagonales extrêmes ne sont pas parallèles à côté (ni entre elles), mais toute autre diagonale est parallèle soit à un côté, soit à une diagonale extrême. Il semble donc y avoir $2n$ pentes. Cependant, P_n possède une symétrie centrale lorsque n est pair, donc ces pentes sont deux à deux identiques : il n'y a que n pentes au plus. Pour savoir s'il y en a moins que n, on peut écrire le même type d'équations que dans le cas impair :

- $\alpha_{k,k+1} \sim \alpha_{a,a+1} \Leftrightarrow \frac{2}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{n}\left(a+\frac{1}{2}\right)$ ou $\frac{2}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{n}\left(a+\frac{1}{2}\right)+1$. Les deux équations admettent chacune une unique solution. Ces deux solutions correspondent aux deux pentes identiques par la symétrie centrale.
- $\alpha_{k,k+2} \sim \alpha_{a,a+2} \Leftrightarrow \frac{2}{n}(k+1) = \frac{2}{n}(a+1)$ ou $\frac{2}{n}(k+1) = \frac{2}{n}(a+1)+1$. Idem pour les solutions.
- $\alpha_{k,k+1} \sim \alpha_{a,a+2} \Leftrightarrow \frac{2}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{n}(a+1)$ ou $\frac{2}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{n}(a+1)+1$. Aucune solution n'est ici possible car n est pair.

Il y a donc bien exactement n pentes.

Pour trouver une configuration de n points avec $n-1$ pentes pour n impair, il suffit de prendre P_{n-1} ($n-1$ est pair) et d'ajouter le point 0. En effet, il y a déjà dans P_{n-1} les pentes $\alpha_{k,k+2} \sim e^{i\frac{2\pi}{n}(k+1)} = \omega^{k+1}$. Donc toutes les pentes entre 0 est ω^k sont des pentes qui apparaissent déjà dans celles de P_{n-1} : on n'a ajouté aucune pente à P_{n-1} en ajoutant le point 0, il y en a bien exactement $n-1$.

Pour illustrer, on peut regarder l'hexagone et l'heptagone régulier. En premier est dessiné l'ensemble des pentes, en second les classes de parallélismes (une couleur par classe) et en dernier une seule droite par valeur de pente. On remarquera que, pour l'hexagone, le point 0 "apparaît" directement et est relié aux sommets par des pentes déjà présentes.



5 Dénombrement

5.1 Dénombrement

Exercise 5.1. Déterminez $\#GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Exercise 5.2 (*Solution*)**.** On essaye de construire une matrice de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ colonne par colonne.

Pour la première colonne, tout est possible, sauf la colonne nulle, on a donc $n^p - 1$ possibilités. Une fois fixée la première colonne qu'on note C_1, la seconde colonne doit simplement ne pas être multiple de celle-ci, c'est-à-dire $C_2 \notin \{0C_1, 1C_1, ..., (p-1)C_1\}$, il y a p colonnes interdites, donc $n^p - p$ colonnes possibles. Plus généralement, si on a choisi les k premières colonnes, et qu'on veut compter le nombre de possibilités pour C_{k+1}, on sait qu'elle doit former une famille libre avec $(C_1, ..., C_k)$ (qui elle même est libre). Une colonne qui est liée avec $(C_1, ..., C_k)$ est une colonne qui s'exprime comme $\sum_{j=1}^{k} a_j C_j$ où $a_j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, il y a donc p^k colonnes qui feraient de $(C_1, ..., C_{k+1})$ une famille liée, on a donc $n^p - p^k$ choix qui en feraient une famille libre.

Ainsi, le nombre $\#GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ vaut $\prod_{k=0}^{n-1}(n^p - p^k)$.

5.2 Dénombrement

Exercise 5.3. On possède n emplacement et $2k$ boules. De combien de manières peut-on disposer les boules par paires (c'est-à-dire qu'on pose les boules deux par deux, toujours dans des emplacements voisins) ?

Exercise 5.4 (*Solution*)**.** Disposez $2k$ boules par paires dans n emplacement revient à disposer k (paires de) boules dans $n-k$ emplacement. Pour le voir, on regarde la bijection entre les deux qui consiste à supprimer toutes les boules de droites des paires disposées (réciproquement, à dédoubler les boules). Ainsi, on a $\binom{n-k}{k}$ manières de procéder.

5.3 Dénombrement

Exercise 5.5. Montrez qu'il y a autant de partitions d'un entier n en entiers impairs qu'en entiers distincts (utiliser la décomposition binaire).

Calculez par récurrence le nombre de partition en entiers impairs.

Exercise 5.6 (*Solution*)**.** On va utiliser l'écriture binaire.

Si on dispose d'une partition en parts distinctes, on peut fabriquer une partition en parts impaires comme il suit : à chaque part paire $2k$, on associe les deux parts k et k. Si k est impair, on a obtenu une partition en parts impaires, sinon on recommence ce même processus sur toutes les parts paires restantes. Pour la partition $11 = 6 + 4 + 1$, on obtient les étapes successives $11 = (3 + 3) + (2 + 2) + 1 = 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Il faut maintenant vérifier que ce processus est bijectif. Or on dispose d'une bijection réciproque explicite : pour une partition en parts impairs, soit k une part apparaissant p fois, on écrit p en binaire (somme de puissances de 2 distinctes) et on associe à ces p parts de taille k les parts $k\times$ chacune des puissances qui apparaissent dans la décomposition de p en base 2. Il faut vérifier que c'est bien l'application réciproque du processus décrit ci-dessus.

Reste à compter celui qui est le plus simple : il est difficile de donner une expression explicite pour ce nombre, mais si on appelle $p_{n,k}$ le nombre de partitions de n en parts distinctes dont la plus grande part est exactement k, et p_n $(= \sum_{k=1}^{n} p_{n,k})$ le nombre de partitions de n en parts distinctes, on peut voir par récurrence forte que :

$$p_{n,k} = \sum_{j=1}^{k-1} p_{n-k,j}$$

(NB : on a posé $p_{n,k} = 0$ si $k > n$.)

Il n'est pas demandé de résoudre cette récurrence ! On peut aussi regarder la récurrence pour les partitions en parts impaires (on notera tout avec des $'$), pour k impair :

$$p'_{n,k} = \sum_{j=1,\ j \text{ impair}}^{k} p'_{n-k,j}$$

Pour k pair, on a $p_{n,k} = 0$.

La bijection nous donne le fait (peu évident) $p_n = p'_n$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k-1} p_{n-k,j} = \sum_{k=1,\ k \text{ impair}}^{n} \ \sum_{j=1,\ j \text{ impair}}^{k} p'_{n-k,j}$$

Attention, les $p_{n,k}$ et les $p'_{n,k}$ ne sont pas égaux !

5.4 Dénombrement

Exercise 5.7. Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{N}^*$. On définit l'écriture en base $\mathcal{B}$ d'un nombre comme une suite $(a_1, a_2, ..., a_n)$ avec $\forall i,\ 0 \leq a_i < b_i$ et :

$$\overline{a_1 a_2 ... a_n} = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \prod_{i<j} b_j \right)$$

Montrez que le nombre de nombre qu'on peut exprimer avec cette écriture ne dépend pas de l'ordre des (b_i) dans $\mathcal{B}$, mais que l'écriture oui.

Plus précisément, montrer que cette écriture induit une bijection entre le produit cartésien $\prod_i [\![0, b_i - 1]\!]$ et l'ensemble $[\![0, \prod_i b_i - 1]\!]$ (vérifier qu'ils ont bien le même cardinal).

Comment utiliser cette écriture pour fournir un algorithme d'énumération efficace de $\prod_i [\![0, b_i - 1]\!]$?

Exercise 5.8 (*Solution*)**.** Fixons $\mathcal{B}$. Comme on manipule des nombres positif, on constate que toute augmentation de l'un des a_i entraîne une augmentation du nombre $\overline{a_1 a_2 ... a_n}$. Plus précisément, soit $<$ la relation d'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^n$ et $\varphi : \prod_i [\![1, b_i]\!] \to \mathbb{N}$ la fonction $\varphi : (a_1, a_2, .., a_n) \mapsto \overline{a_1 a_2 ... a_n}$. Montrons que cette fonction est strictement croissante.

Soient $(a_1, a_2, .., a_n)$ et $(a'_1, a'_2, .., a'_n)$ tel que $(a_1, a_2, .., a_n) < (a'_1, a'_2, .., a'_n)$. Soit k le plus petit entier tel que $a_k < a'_k$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\varphi\left((a_1, a_2, .., a_n)\right) &= \sum_{i=1}^{k-1} \left(a_i \prod_{i<j} b_j \right) + a_k \prod_{k<j} b_j + \sum_{i=k+1}^{n} \left(a_i \prod_{i<j} b_j \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} \left(a_i \prod_{i<j} b_j \right) + a_k \prod_{k<j} b_j + \sum_{i=k+1}^{n} \left((b_i - 1) \prod_{i<j} b_j \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} \left(a_i \prod_{i<j} b_j \right) + a_k \prod_{k<j} b_j + \sum_{i=k+1}^{n} \left(\left(\prod_{i\leq j} b_j \right) - \left(\prod_{i<j} b_j \right) \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{k-1} \left(a_i \prod_{i<j} b_j \right) + a_k \prod_{k<j} b_j + \prod_{k<j} b_j - 1 \\
&< \sum_{i=1}^{k-1} \left(a_i \prod_{i<j} b_j \right) + (a_k + 1) \prod_{k<j} b_j \\
&< \sum_{i=1}^{k-1} \left(a'_i \prod_{i<j} b_j \right) + a'_k \prod_{k<j} b_j + \sum_{i=k+1}^{n-1} \left(a'_i \prod_{i<j} b_j \right) \\
&< \varphi\left((a'_1, a'_2, .., a'_n)\right)
\end{aligned}$$

Dès lors, comme φ est strictement croissante, elle est injective. On peut regarder ses bornes : $\varphi((0,0,...,0)) = 0$ et

$$\varphi((b_1-1,...,b_n-1)) = \sum_{i=1}^{n}\left((b_i-1)\prod_{i<j} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{i\leq j} b_j - \prod_{i<j} b_j\right) = \prod_i b_i - 1$$

On a donc une fonction injective de $\prod_i [\![0, b_i - 1]\!]$ vers $[\![0, \prod_i b_i - 1]\!]$. Comme on a égalité des cardinaux des deux ensembles, φ est une bijection.

Ainsi, on peut utiliser un algorithme semblable à la décomposition binaire pour associer à un nombre entre 0 et $\prod_i b_i - 1$ un élément de $\prod_i [\![0, b_i - 1]\!]$. Prenons $n \in [\![0, \prod_i b_i - 1]\!]$ puis calculons :

1. $a_1 = n \mod b_1$
2. $n_1 = \lfloor \frac{n}{b_1} \rfloor$
3. $a_2 = n_1 \mod b_2$
4. $n_2 = \lfloor \frac{n_1}{b_2} \rfloor$
5. ...

Un tel algorithme permet de construire en temps $O(\prod_i b_i)$ (soit le temps optimal) les éléments d'un produit cardinal. L'avantage est que l'occupation mémoire demandée est minimale (un seul entier) : on construit l'élément pour $n = 0$, on fait le traitement souhaité ; puis on construit pour $n = 1$, on fait le traitement ; puis pour $n = 2$, etc. À chaque étape, on n'a besoin de retenir que n (en plus de la mémoire occupée par le traitement).

5.5 Dénombrement

Exercise 5.9. Montrez que si un diagramme de Venn à n ensembles est symétrique, alors n est premier.

Exercise 5.10 (*Solution*)**.** Le diagramme est obtenu par rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ d'une forme initiale (patate). De fait, si on regarde les $\binom{n}{k}$ parties qui sont les intersections de k patates $(1 < k < n)$, on sait qu'on en a le même nombre sur chaque patate : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ n|\binom{n}{k}$. Cela induit que n est premier. En effet, dans le cas contraire, soit p un diviseur premier de n. On regarde $\nu_p\left(\frac{1}{n}\binom{n}{p}\right)$. Comme $\frac{1}{n}\binom{n}{p} \in \mathbb{Z}$, on sait que $\nu_p\left(\frac{1}{n}\binom{n}{p}\right) \geq 0$. Or

$$\begin{aligned}\nu_p\left(\frac{1}{n}\binom{n}{p}\right) &= \nu_p\left(\prod_{k=n-p+1}^{n-1} k\right) - \nu_p(p!) \\ &= 0 - \nu_p(p!) \\ &< 0\end{aligned}$$

En effet, il n'y a pas de multiple de p dans $[n-p+1, n-1]$, et comme p est premier, il est premier avec tous les $k \in [n-p+1, n-1]$, donc avec leur produit.

Ainsi, n est premier car il n'admet pas d'autre diviseur premier que lui même.

5.6 Dénombrement

Exercise 5.11. Démontrez par le calcul et la bijection la formule de Chu-Vandermonde : $\sum_k \binom{a}{k}\binom{b}{l-k} = \binom{a+b}{l}$. Généralisez.

Exercise 5.12 (*Solution*)**.** On a, par récurrence sur la valeur de $a+b$:

$$\begin{aligned}\binom{a+b+1}{l+1} &= \binom{a+b}{l} + \binom{a+b}{l+1} \\ &= \sum_{k=0}^{l} \binom{a}{k}\binom{b}{l-k} + \sum_{k=0}^{l+1} \binom{a}{k}\binom{b}{l+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{l} \binom{a}{k}\left(\binom{b}{l-k} + \binom{b}{l+1-k}\right) + \binom{a}{l+1}\binom{b+1}{0} \\ &= \sum_{k=0}^{l+1} \binom{a}{k}\binom{b+1}{l+1-k}\end{aligned}$$

Ainsi, si $a+b=n$ $(1 \leq a, b)$, soit a' et b' tels que $a'+b'=n+1$, on pose $a=a'$ et $b=b'-1$ (sauf si $b'=1$, auquel cas, on pose $a=a'-1$ et $b=b'$). Pour $l \in [1, a'+b'+1]$, le calcul précédent assure par récurrence que la formule est respectée : $\binom{a'+b'}{l} = \sum_k \binom{a'}{k}\binom{b'}{l-k}$. Pour $l=0$, l'égalité est de toute façon évidente : $\sum_{k=0}^{0} \binom{a}{k}\binom{b}{0-k} = \binom{a}{0}\binom{b}{0} = 1 = \binom{a+b}{0}$.

Par ailleurs, choisir l éléments parmi $a+b$ éléments, cela revient à choisir d'abord k éléments dans les a premiers, puis $l-k$ dans les b suivants. Ainsi, on a une bijection entre les parties à l éléments de $[1, a+b]$ et les paires de parties à k éléments dans $[1, a]$ et les parties $l-k$ éléments dans $[1, b]$. Ainsi, si on compare les quantités, on trouve l'égalité souhaitée. On peut généraliser immédiatement en :

$$\sum_{i_1+i_2+...+i_k=l} \binom{a_1}{i_1}\binom{a_2}{i_2}...\binom{a_k}{i_k} = \binom{a_1+a_2+...+a_k}{l}$$

5.7 Dénombrement

Exercise 5.13. Combien y a-t-il de plateaux d'échecs possibles ? (La promotion de pièce est interdite.)

Exercise 5.14 (*Solution*)**.** Cet exercice se complique au fur et à mesure qu'on précise le sens de "plateau". Dans

Un première question "simple" serait de dire que toutes les pièces d'échec sont différenciées : les pions blancs s'appellent "pion1", "pion2",..., "pion8", de même pour les tours, les cavaliers, les fous, et les pièces noires. Un plateau est alors une disposition des pièces d'échecs sur l'échiquier. Il y a 32 pièces différentes, et 64 cases. Si toutes les pièces sont présentes, un plateau revient à choisir 32 cases parmi 64 (qu'on ordonne par l'ordre alpha-numérique de a1 à h8), puis une permutation des 32 pièces (pour choisir quelle pièce va sur quelle case). Il y a donc $\binom{64}{32} \times 32! = \frac{64!}{32!} \approx 4.8 \times 10^{53}$ plateaux d'échecs avec 32 pièces différenciées.

Un plateau peu aussi contenir moins de pièces (au moins les 2 rois légalement, mais **ici** la légalité des plateaux ne nous importe pas), disons k entre 0 et 32. Dès lors, un plateau revient à choisir k cases parmi 64, puis k pièces parmi 32 et enfin une permutation de ces k pièces : il y a $\binom{64}{k}\binom{32}{k}k! = \frac{64!32!}{(64-k)!(32-k)!k!}$ plateaux à k pièces différenciées. Donc il y a N plateaux d'échecs avec des pièces différenciées :

$$N = \sum_{k=0}^{32} \frac{64! \times 32!}{(64-k)!(32-k)!k!} = 64! \times 32! \sum_{k=0}^{32} \frac{1}{(32+k)!(32-k)!k!} \approx 1.2 \times 10^{54}$$

Même s'il semble qu'il y a finalement "peu" de plateaux avec n'importe quel nombre de pièces par rapport au nombre de plateaux à 32 pièces, ce résultat est juste et on peut s'en persuader en considérant qu'il y a "seulement" 2.1×10^{49} plateaux à 25 pièces, ce qui est largement négligeable.

Maintenant, on peut essayer de compter les plateaux dans lesquels les pièces ne sont pas différenciées : échanger les deux tours blanches de place ne change pas le plateau. Imaginons que quelqu'un rentre dans la pièce et trouve un plateau d'échecs avec les pièces placées dessus, il ne saurait pas dire "cette tour est la tour blanche *de gauche* et celle-ci, la tour blanche *de droite*", il dira simplement que ce sont les deux tours blanches.

Dans ce cadre, commençons par compter les plateaux à 32 pièces. On appellera *plateau différencié* un plateau dans lequel on considère que les pièces sont différenciées, et *plateau non-différencié* sinon. Fixons un des $\binom{64}{32}32!$ plateaux différenciés précédents. En échangeant les deux tours blanches, on obtient un autre plateau différencié, mais le même plateau non-différencié. De même, on pourrait échanger les pions blancs entre eux, les cavaliers, les fous, ou l'équivalent en noir. Dès lors, combien de plateau différenciés donnent le même plateau non-différencié ? Pour 1 plateau non-différencié, on a 2! possibilités pour les tours blanches, 2! pour les cavalier, 2! pour les fous, 8! pour les pions, et pareil pour les noirs : $(2! \times 2! \times 2! \times 8!)^2$ plateaux différenciés donnent le même plateau non-différencié. Ainsi, le nombre de plateaux non-différenciés à 32 pièces est :

$$\frac{64!}{32!} \times \frac{1}{(2! \times 2! \times 2! \times 8!)^2} \approx 4.6 \times 10^{42}$$

En notant $\mathcal{P}$ l'ensemble des plateaux différenciés et $\hat{\mathcal{P}}$ les non-différenciés, on vient d'expliquer qu'il y a une bijection :

$$\mathcal{P} \simeq \hat{\mathcal{P}} \times \left(\mathcal{S}_2^3 \times \mathcal{S}_8\right)^2$$

Reste à compter les plateaux non-différenciés à k pièces. Le problème est qu'on ignore quelles sont les pièces choisies : on ne peut pas dire "il y a 2 tours blanches donc on divise par 2!" car on ignore s'il y a belle et bien les 2 tours blanches parmi les k pièces choisies. Prenons le problème dans l'autre sens : plutôt que de raisonner à k fixé, regardons combien de plateaux (non-différenciés) peut-on construire avec n_{tb} tours blanches, n_{cb} cavaliers blanc, n_{fb} fous blancs, etc ? Notons $\vec{n} = (n_{tb}, n_{cb}, n_{fb}, n_{db}, n_{rb}, n_{pb}, n_{tn}, n_{cn}, n_{fn}, n_{dn}, n_{rn}, n_{pn})$ avec b pour "blanc", n pour "noir", et t, c, f, d, r, p pour "tour", "cavalier", "fou", "dame", "roi", "pion". Dès lors, pour $\vec{n}$ fixé, on peut noter $S(\vec{n})$ la somme de ses coordonnées et $P(\vec{n})$ le produit des factorielles de ses coordonnées. Le nombre de plateau non-différenciés pour $\vec{n}$ est alors $\binom{64}{S(\vec{n})}\binom{32}{S(\vec{n})}\frac{S(\vec{n})}{P(\vec{n})}$. Enfin, regardons l'ensemble des valeurs possibles pour $\vec{n}$: il s'agit de $X = \left([\![0,2]\!]^3 \times [\![0,1]\!]^2 \times [\![0,8]\!]\right)^2$. Ainsi, le nombre de plateaux non-différenciée est :

$$\sum_{\vec{n}\in X} \binom{64}{S(\vec{n})}\binom{32}{S(\vec{n})}\frac{S(\vec{n})!}{P(\vec{n})}$$

Ce nombre est bien plus facile à calculer qu'il n'y paraît (avec un ordinateur cela dit) : il y a 944 784 termes. Beaucoup sont identiques, mais laissons cela de côté. Avec un programme Python, on obtient rapidement (1 minute ou 2 quand même, mais je n'ai pas programmé cela très intelligemment) qu'il y a environ 4.6×10^{46} plateaux non-différenciés.

5.8 Dénombrement

Exercise 5.15. À une fête, n personnes sont invitées. Elles peuvent se rencontrer ou non. Montrez qu'au moins 2 invités ont rencontré le même nombre d'invités.

Exercise 5.16 (*Solution*)**.** On va utiliser le principe des tiroirs.

Posons $N(P)$ le nombre d'invités que l'individu P a rencontré pendant la fête. Une personne P fixée peut rencontrer entre 0 et $n-1$ invités, ce qui fait n possibilités pour $N(P)$. Et il y a n personnes, donc on pourrait, *a priori*, avoir 1 personnes par $N(P)$ possible (c'est-à-dire que N serait une bijection entre $\mathcal{P}$, l'ensemble des invités, et $[\![0, n-1]\!]$). Cependant, un tel cas n'est pas possible, parce qu'alors il y a quelqu'un, disons P, avec $N(P) = 0$, et quelqu'un d'autre, disons Q, avec $N(Q) = n-1$. Mais alors, Q a rencontré tout le monde, dont P, mais P, lui, n'a rencontré personne : c'est une contradiction.

Ainsi, on sait que $N : \mathcal{P} \to [\![0, n-1]\!]$ a pour image un ensemble de cardinal au plus $n-1$: N n'est pas injective d'après le principe des tiroirs. En particulier, deux personnes différentes, disons P et Q, sont telles que $N(P) = N(Q)$: (au moins) deux personnes différentes ont rencontré le même nombre d'invités.

5.9 Dénombrement

Exercise 5.17. On considère les nombres à 2 chiffres. Parmi eux, on en prend un ensemble X de 10 nombres quelconque. Montrez qu'on peut trouver deux sous-ensembles distinct A et B de X tel que la somme des nombres de A est égale à celle des nombres de B.

Montrez que dans l'ensemble de 7 éléments $X = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ ne possède pas deux parties disjointes A et B dont les sommes sont les mêmes.

Exercise 5.18 (*Solution*)**.** On va utiliser le principe des tiroirs.

Combien de sommes sont possibles, quand X et A varient ? A peut être, *a priori*, n'importe quel ensemble d'au moins 1 nombre et d'au plus 9 nombres (à deux chiffres). La somme la plus petite est donc 10 et la plus grande $99 + 98 + 97 + 96 + 95 + 94 + 93 + 92 + 91 = 855$. Il y a donc 846 possibilités pour la somme de A. Seulement, comme X a cardinal 10 et A est une partie (qui n'est ni $\emptyset$, ni X) de X, on a $2^{10} - 2 = 1022$ possibilités pour A.

Dès lors, on sait que, parmi les 1022 parties (non triviale) de X, il y en a au moins deux qui ont la même somme par le principe des tiroirs car il n'y a que 846 sommes possibles. Nommons A_1 et B_1 deux parties de X qui ont la même somme. Si A_1 et B_1 ne s'intersectent pas, on a trouvé une solution à notre problème. Sinon, soit $A = A_1 \backslash (A_1 \cap B_1)$ et $B = B_1 \backslash (A_1 \cap B_1)$. Comme on a retiré de A_1 et de B_1 les mêmes nombres pour définir A et B, les parties A et B ont encore la même somme : notant $S(...)$ la somme d'une partie, on a :

$$S(A) = S(A_1) - S(A_1 \cap B_1) = S(B_1) - S(A_1 \cap B_1) = S(B)$$

Les parties A et B étant non triviales (car A_1 et B_1 sont différentes), on a bien trouvé une solution à notre problème.

Pour $X = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$ (X contient des nombres à 1 chiffres, nous ne nous intéressons plus au même problème), on remarque qu'il s'agit de la suite des puissances de 2. Dès lors, on sait, d'après le principe de l'écriture binaire, que chaque entier de $[\![0, 127]\!]$ s'écrit de manière unique comme somme d'éléments de X. Grâce à l'unicité, on en déduit que deux parties différentes de X (même non disjointes) ne peuvent pas donner la même somme.

5.10 Dénombrement, Arithmétique

Exercise 5.19 (Indicatrice d'Euler)**.** Soit $\phi(n) = \#\{k\ ;\ k \wedge n = 1\}$, l'indicatrice d'Euler. Montrez que $\sum_{d|n} \phi(d) = n$ (on pourra raisonner sur les fractions $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n}$).

Exercise 5.20 (*Solution*)**.** Il y a n fractions $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n}$. Écrivons-les sous forme irréductibles : chaque dénominateur est un diviseur de n. Il y a $\phi(d)$ fractions avec d pour dénominateur : en effet, pour k premier avec d, la fraction $\frac{k}{d}$ apparaît comme $\frac{k^{n}/_{d}}{n}$ (car $^{n}/_{d}$ est entier) et une même fraction ne peut pas apparaître deux fois. Ainsi, pour chaque d tel que $d|n$, on peut associer $\phi(d)$ éléments de l'ensemble $\left\{\frac{k}{n}\ ;\ k \in [\![1, n]\!]\right\}$. Réciproquement, on peut associer à chaque élément de $\left\{\frac{k}{n}\ ;\ k \in [\![1, n]\!]\right\}$ un d, diviseur de n, et un k premier avec d (et inférieur à

d). Finalement :

$$\sum_{d|n} \phi(d) = \# \left\{ \frac{k}{n} \ ; \ k \in [\![1, n]\!] \right\} = n$$

5.11 Dénombrement, Coefficients binomiaux

Exercise 5.21 (Théorème de Singmaster)**.** Pour $k \neq 1$, soit $N(k) = \# \left\{ (n, r) \ ; \ k = \binom{n}{r} \right\}$. Montrez que $N(k) = O(\log k)$.

Exercise 5.22 (*Solution*)**.** Remarquons d'abord que $N(k) < \infty$. En effet, si $n > k$, alors $\binom{n}{r} > k$ pour $r \notin \{0, n\}$, et $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \neq k$. Donc si $\binom{n}{r} = k$, alors $n < k$, d'où $N(k) \leq \frac{n(n-1)}{2}$ (c'est le nombre de coefficients binomiaux ne valant pas 1 dans les n premières lignes du triangle de Pascal).

Ensuite, regardons, pour a fixé, l'application $b \mapsto \binom{a+b}{a}$. Elle est strictement croissante, donc $\binom{a+b}{a} = k$ admet au plus 1 solution (peut-être 0) quand a est fixé et b varie. De la même manière, pour b fixé, l'application $a \mapsto \binom{a+b}{a}$ est strictement croissante. Donc $\binom{a+b}{a} = k$ admet au plus 1 solution quand b est fixé et a varie. Supposons maintenant que $k \leq \binom{2s}{s}$, alors si $\binom{a+b}{a} = k$, on a $a \leq s$ et $b \leq s$. Donc $N(k) \leq 2s$ (chaque choix de a donne au plus 1 solution, chaque choix de b aussi et il y a s choix possibles pour a et s choix possibles pour b). Reste à estimer s en fonction de k. Un constat (algébrique ou combinatoire) rapide donne que $2^m \leq \binom{2m}{m}$. Donc si s est le plus petit entier tel que $k \leq \binom{2s}{s}$, alors en particulier $\binom{2(s-1)}{s-1} \leq k$, donc $2^{s-1} \leq k$ puis $s \leq 1 + \log_2 k$. Ainsi : $N(k) \leq 2s \leq 2 + 2\log_2 k = O(\log k)$.

Des estimations plus précises sont connues, la meilleure (en février 2021) étant $N(k) = O\left(\frac{\log \log \log k}{(\log \log k)^3} \log k\right)$, mais il est conjecturé que $N(k) = O(1)$ (c'est-à-dire que $N(k)$ est borné) et la plus grande valeur de $N(k)$ qu'on ait trouvé est $N(3003) = 8$ (testé jusqu'à 2^{48}).

5.12 Dénombrement, Ensembles dénombrables

Exercise 5.23. Les grenouilles et les nénuphars.

6 Dérivation

6.1 Dérivation

Exercise 6.1. Étudiez la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

Exercise 6.2 (*Solution*)**.** f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \backslash [0, 1]$. Elle est aussi définie et continue en 0 et de limite $+\infty$ en 1^+.

Calculons le taux de variation en 0^- :

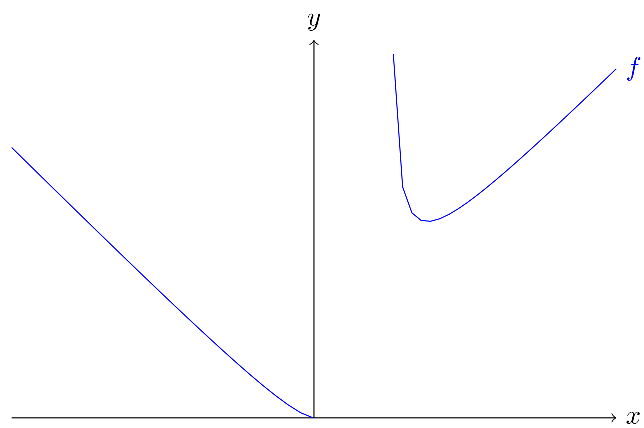
$$\tau_{0^-}(h) = \frac{f(-h) - f(0)}{-h - 0} = \frac{1}{-h} \left(\sqrt{\frac{(-h)^3}{-h-1}} - 0 \right) = -\sqrt{\frac{h}{h+1}} \longrightarrow 0$$

f est bien dérivable sur son ensemble de définition. On peut calculer sa dérivée, le plus simple est de la calculer en logarithmique :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{2x-3}{2x(x-1)}$$

Comme $f(x)$ est toujours positif, on obtient le tableau de signe de f' et le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0			$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



6.2 Dérivation

Exercise 6.3. Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Soit $\Delta : x \mapsto (f(a) - f(x))(g(b) - g(x)) - (g(a) - g(x))(f(b) - f(x))$. Montrez que Δ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et calculez sa dérivée. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Remarquez ce qui se passe quand $g : x \mapsto x$.

Exercise 6.4 (*Solution*)**.** Δ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ par produit. On a :

$$\begin{aligned}\Delta(x) =& - f'(x)(g(b) - g(x)) - g'(x)(f(a) - f(x)) \\ &+ g'(x)(f(b) - f(x)) + f'(x)(g(a) - g(x)) \\ =& f'(x)(g(a) - g(b)) + g'(x)(f(b) - f(a))\end{aligned}$$

On a aussi $\Delta(a) = \Delta(b) = 0$, donc on peut appliquer le théorème de Rolle pour obtenir :

$$\exists c \in]a, b[, \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Lorsque $g : x \mapsto x$, on retrouve l'égalité des accroissements finis. Ce théorème en est une généralisation.

6.3 Dérivation

Exercise 6.5. Montrez que la dérivée n-ième de $f : x \mapsto x^n(1-x)^n$ existe et est : $x \mapsto n! \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \binom{n}{k}^2 (1-x)^{n-k} x^k \right)$.

En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \left(= \binom{2n}{n}\right)$. (regarder le terme en x^{2n} dans le développement de $x^n(1-x)^n$).

Exercise 6.6 (*Solution*)**.** On applique la formule dérivation de Leibnitz :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{n!}{(n-k+j)!} x^{n-k+j} \right) \left((-1)^j \frac{n!}{(n-j)!} (1-x)^{n-j} \right)$$

On peut l'utiliser pour $k = n$, et on obtient :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \frac{n!}{j!} \frac{n!}{(n-j)!} x^j (1-x)^{n-j} \\ &= n! \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}^2 x^j (1-x)^{n-j} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut regarder le développement en somme de $x^n(1-x)^n$, qui est un polynôme. On constate qu'il n'y a qu'un seul terme d'ordre $2n$, le terme dominant, et son coefficient est $(-1)^n$. De fait, dans $f^{(n)}$, le terme d'ordre n est obtenu en dérivant n fois le terme d'ordre $2n$ de f, son coefficient est donc $(-1)^n \times \frac{(2n)!}{(2n-n)!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$. D'autre part, dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus, le terme d'ordre n vaut : $n! \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}^2 \times (-1)^{n-j}$.

Il s'ensuit l'égalité : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

6.4 Dérivation

Exercise 6.7. Soit f continue croissante $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\frac{f(x)}{x} \to k < 1$ quand $x \to +\infty$. Étudiez la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercise 6.8 (*Solution*)**.** Si $u_1 < u_0$, alors, du fait de la croissance de f, on démontre par récurrence que $(u_n)_n$ est décroissante positive donc convergente, disons vers ℓ ; et par continuité de f, on a $f(\ell) = \ell$.

Si $u_1 > u_0$, alors $(u_n)_n$ est croissante. On va montrer qu'elle est convergente car majorée. Supposons qu'elle ne soit pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

Mais alors, à partir d'un certain rang, $\frac{f(u_n)}{u_n} \leq k + \varepsilon$ avec $k + \varepsilon < 1$. Mais dans ce cas, $u_{n+1} < (k+\varepsilon)u_n < u_n$, ce qui contredit la croissance. Finalement, $(u_n)_n$ est bornée et donc convergente (vers un point fixe de f).

Dans tous les cas, $(u_n)_n$ converge. On vient au passage de montrer que f a un point fixe.

6.5 Dérivation

Exercise 6.9. Soit f une fonction s'annulant n fois, en $x_1 < x_2 < ... < x_n$ et n fois dérivable sur $[x_1, x_n]$. Soit $a \in [x_1, x_n]$. Montrez qu'il existe $\lambda \in]x_1, x_n[$ tel que :

$$f(a) = \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (a - x_k)$$

Exercise 6.10 (*Solution*)**.** Si $a \in \{x_k\}_k$, c'est évident car on a 0 des deux côtés.

On pose $A = \frac{f(a)}{\prod_k (a-x_k)}$ et $\varphi : x \mapsto f(x) - A \prod_k (x - x_k)$. La fonction φ est n fois dérivable et s'annule en $n+1$ points distincts. Par le théorème de Rolle (appliqué sur les n différents intervalles), φ' est dérivable $n-1$ fois et s'annule n fois. De le même manière φ'' est dérivable $n-2$ fois et s'annule $n-1$ fois. En poursuivant, on montre par récursion que $\varphi^{(n)}$ au moins un zéro, disons $\lambda \in]x_1, x_n[$. On a alors :

$$\varphi^{(n)}(\lambda) = f^{(n)}(\lambda) - n!A = f^{(n)}(\lambda) - n! \frac{f(a)}{\prod_{k=1}^{n} (a - x_k)} = 0$$

Puis :

$$f(a) = \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (a - x_k)$$

6.6 Dérivation

Exercise 6.11. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup_{x \in [a,b]} f'(x)$. Montrez que f est affine.

Exercise 6.12 (*Solution*)**.** f' étant continue, elle est bornée sur $[a, b]$, on peut donc poser $M = \sup_x f'(x)$. On construit g la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que f en a et en b : $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + f(a)$. Enfin, soit $h = f - g$. On remarque que $h(a) = h(b) = 0$. En outre, h est continue et dérivable sur $[a, b]$ avec $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Supposons que $M = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, alors $h'(x) = f'(x) - M \leq 0$: h est décroissante. Sauf que $h(a) = h(b) = 0$. De fait, h est constante et même nulle. Finalement, $f = g$, f est affine.

6.7 Dérivation

Exercise 6.13 (Théorème de Darboux)**.** Soit f dérivable (pas forcément $\mathcal{C}^1$).

Montrez que l'image d'un intervalle par f' est un intervalle.

(Utilisation de la méthode) Soit $I = [a, b]$ et f dérivable telle que $f(a)f'(b) \geq 0$ et $f(b)f'(a) \leq 0$. Montrez que f' s'annule.

Exercise 6.14 (*Solution*)**.** Soit $x, y \in I$ (l'intervalle de définition de f) et $\lambda \in [f'(x), f'(y)]$ (on suppose $f'(x) < f'(y)$, l'inverse fonctionne aussi). On pose $g_\lambda : x \mapsto f(x) - \lambda x$. g_λ est dérivable (comme somme), et on a $g'_\lambda = f' - \lambda$. Donc $g'_\lambda(x) < 0$ et $g'_\lambda(y) > 0$. De fait, g_λ ne peut être injective car une fonction injective est strictement monotone (donc g'_λ aurait un signe fixe). Dès lors, il existe deux abscisses α, β telles que $g_\lambda(\alpha) = g_\lambda(\beta)$, donc on peut appliquer le théorème de Rolle et on obtient que g'_λ s'annule, disons en γ. Alors : $f'(\gamma) = \lambda$. Ainsi, on a montré que $E = \{f'(x); x \in I\}$ est un intervalle car E respecte la propriété suivante : $\forall a, b \in E, \forall c \in [a, b], c \in E$.

On peut appliquer directement la même méthode pour résoudre l'exercice. On veut montrer que f ne peut pas être injective. Si c'est le cas, on pourra appliquer le théorème de Rolle et montrer que f s'annule. On va raisonner par l'absurde et supposer que f est injective. Or si f est injective, comme elle est dérivable, sa dérivée est de signe constant, disons positif c'est-à-dire f croissante. Alors, $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$ d'après l'énoncé, donc $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$. Or, comme f est croissante, on a en plus $f(a) \leq f(b)$, d'où $0 \leq f(a) \leq f(b) \leq 0$, et les inégalités sont des égalités : $f(a) = f(b) = 0$, et on a une contradiction car on a supposé f injective. Finalement, f ne peut être injective, donc on peut appliquer le théorème de Rolle et trouver un point d'annulation pour f'.

6.8 Dérivation

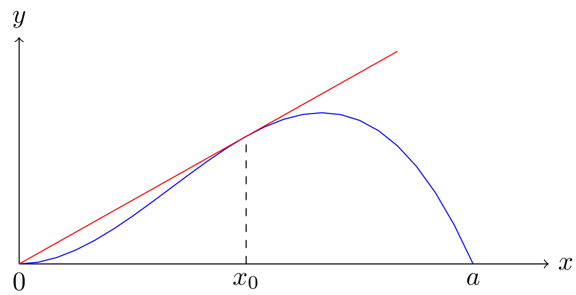
Exercise 6.15. Soit f définie et dérivable sur $[a, b]$ avec $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$. Montrez que $\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

Donnez une interprétation géométrique.

Exercise 6.16 (*Solution*)**.** On pose φ la fonction définie par $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ sinon. Elle est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe c tel que $\varphi'(c) = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = 0$. Or : $\varphi'(c) = \frac{f'(c)(c-a)-(f(c)-f(a))}{(c-a)^2}$. D'où :

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

L'existence de c signifie que la tangente en c à la courbe représentative de f est parallèle à la droite passant par $(a, f(a))$ et $(c, f(c))$. En fait, ces deux droites sont confondues et cet exercice est équivalent à l'exercice **??**.



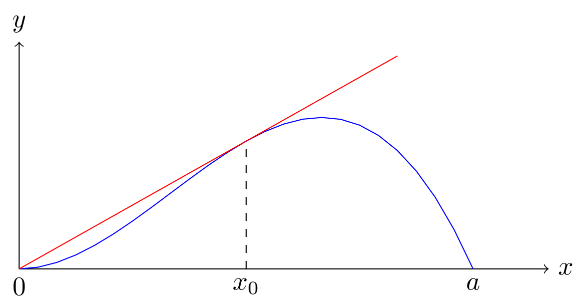
6.9 Dérivation

Exercise 6.17. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ pour un certain $a \neq 0$. Montrer qu'il existe un point distinct de O de la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par l'origine.

Exercise 6.18 (*Solution*)**.** On prendra $a > 0$ pour raisonner et faire des dessins (si $a < 0$, on peut regarder $x \mapsto f(-x)$).

L'équation de la tangente en x_0 à la courbe de f est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Elle passe ainsi en $(0, 0)$ si et seulement si $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$. **Faire un dessin !** On pose la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. D'après les conditions $f(0) = f'(0) = 0$, g est continue en 0.

Ainsi, g est continue sur $[0, a]$ et dérivable sur $]0, a[$ avec $g(0) = 0 = g(a)$. On applique le théorème de Rolle pour trouver x_0 en lequel $g'(x_0) = 0$. Comme $x_0 \neq 0$, une simple dérivation donne l'égalité recherchée : $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$.



6.10 Dérivation

Exercise 6.19. Soit $f \in \mathcal{C}^1$ telle que $f(f(x)) = \frac{x}{2} + 3$ pour tout x. Montrez que f' est constante puis déterminer f (on remarquera que $f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = \frac{f(x)}{2} + 3$).

Exercise 6.20 (*Solution*)**.** On remarque premièrement que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2} + 3\right) = f(f \circ f(x))) = f \circ f(f(x)) = \frac{f(x)}{2} + 3$$

On peut dériver cette égalité pour obtenir : $\forall x \in \mathbb{R}, f'\left(\frac{x}{2}+3\right) = f'(x)$. Soit maintenant $(u_n^{(x)})_n$ la suite définie par $u_0^{(x)} = x$ et $u_{n+1}^{(x)} = \frac{1}{2}u_n^{(x)} + 3$. La suite est arithmético-géométrique et converge vers $6 \left(= \frac{b}{1-a} = \frac{3}{1-1/2}\right)$.

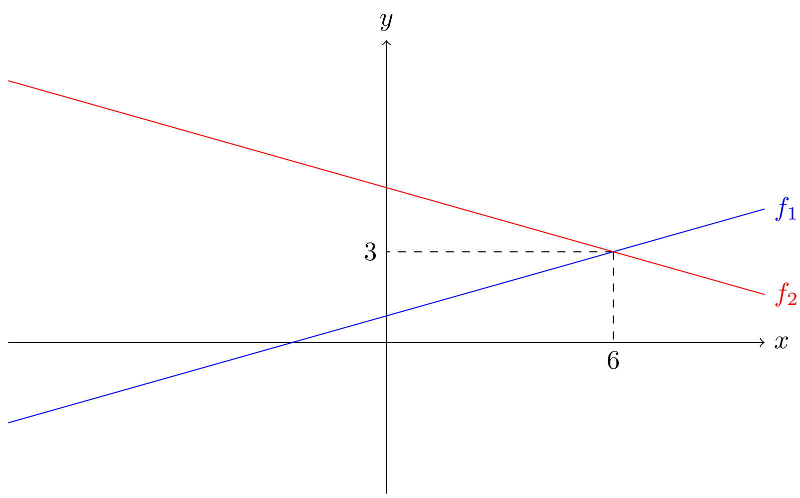
Finalement, par continuité de f', on a : $f'(u_n^{(x)}) \to f'(6)$ quand $n \to +\infty$. Mais on sait que $\left(f(u_n^{(x)})\right)_n$ est une suite constante, donc on en déduit $f'(x) = f'(u_0^{(x)}) = f'(6)$. Ainsi, on a montré que f' est constante ! f est donc une fonction affine : $f(x) = \alpha x + \beta$.

Réciproquement, si $f(x) = \alpha x + \beta$, alors f est solution au problème à condition que :

$$\forall x, \quad \left(\alpha^2 - 1/2\right) x + \alpha\beta + \beta - 3 = 0$$

Cela nous donne les deux seules solutions au problème :

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}x + 3(2-\sqrt{2})$$
$$f_2 : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{2}}x + 3(2+\sqrt{2})$$



6.11 Dérivation

Exercise 6.21 (Fonction de Lambert)**.** Développer la fonction W de Lambert au voisinage de 0. La fonction W de Lambert est l'unique solution $W(x)$ de l'équation $x = we^w$ d'inconnue $w \geq -1$ et de paramètre $x \geq -1/e$. On commencera d'abord par en trouver un équivalent, puis une équation différentielle que satisfait W.

Exercise 6.22 (*Solution*)**.** On pose la fonction $f : x \mapsto xe^x$. W en est la réciproque sur $[-1/e, +\infty[$, à valeur dans $[-1, +\infty[$. En particulier, on a la dérivabilité de W comme réciproque d'une fonction dérivable dont la dérivée vaut

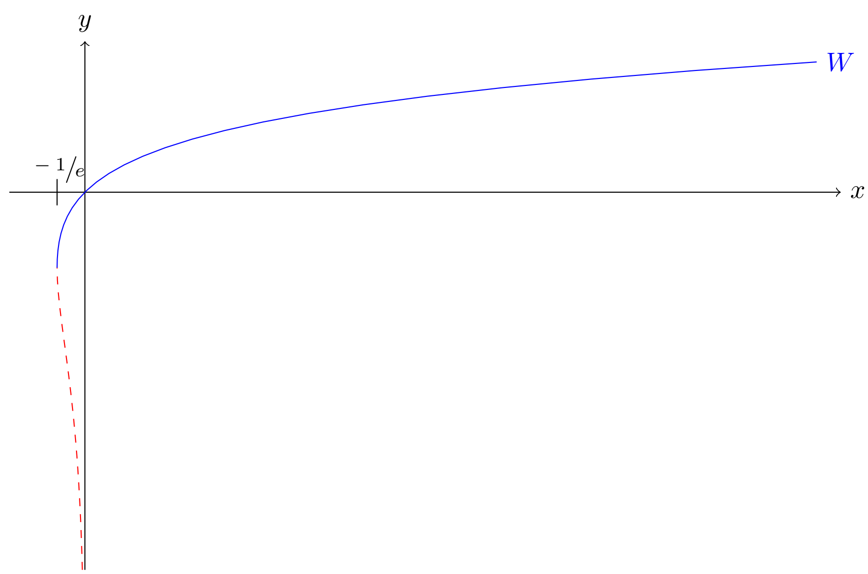
$f'(x) = (1+x)e^x \neq 0$ pour $x \geq -{}^1\!/_e$. Ainsi, on a :

$$W'(x) = \frac{1}{(1+W(x))e^{W(x)}} = \frac{1}{x+e^{W(x)}}$$

Or on a $W(0) = 0$ car 0 est l'unique solution de $0 = we^w$ d'inconnue w. Donc $W'(0) = 1$, et $W(w) \sim_0 x$. Pour aller plus loin, on peut remarquer que, pour $x \neq 0$, $W(x) \neq 0$ (déjà parce que W est croissante comme réciproque d'une fonction croissante, et aussi parce que W est injective et qu'on a déjà trouvé la pré-image de 0), donc on peut écrire que $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$ pour $x \neq 0$, ce qui induit :

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$$

Cela donne l'équation différentielle dont W est solution : $x(1+y)y' = y$. Il est maintenant bien plus facile d'extraire les coefficients du développement de Taylor de W.



6.12 Dérivation

Exercise 6.23. Soir un fonction f dérivable telle que $f'(x) + f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrez que $f'(x) \to 0$ et $f(x) \to 0$ (on pourra poser $g(x) = e^x f(x)$).

Exercise 6.24 (*Solution*)**.** Soit $g : x \mapsto e^x f(x)$. g est dérivable et $g'(x) = (f'(x) + f(x))e^x = o(e^x)$. Soit $\varepsilon > 0$ et $A \geq 0$ tel que :

$$\forall x \geq A, \quad -\varepsilon e^x \leq g'(x) \leq \varepsilon e^x$$

Alors en intégrant sur $[A, x]$: $\varepsilon(e^x - e^A) \leq g(x) - g(A) \leq \varepsilon(e^x - e^A)$.

Finalement : $g(A)e^{-x} - \varepsilon(1 - e^{A-x}) \leq g(x)e^{-x} \leq g(A)e^{-x} + \varepsilon(1 - e^{A-x})$.

Les deux termes d'encadrement tendent vers ε lorsque $x \to +\infty$, donc à partir d'un certain rang B :

$$\forall x \geq B, \quad -2\varepsilon \leq f(x) = g(x)e^{-x} \leq +2\varepsilon$$

Ainsi, $f(x) \to 0$ et par suite $f'(x) = (f(x) + f'(x)) - f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

6.13 Dérivation

Exercise 6.25. Soit f une fonction $\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ trois fois dérivable. Montrez qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(x) + f'(a)) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}$$

(On trouvera le bon A pour utiliser la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - A(x-a)^3$.)

On donnera une interprétation géométrique lorsque f est vue comme une primitive de f'.

Exercise 6.26 (*Solution*)**.** Posons $g : x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$ avec A tel que $g(a) = g(b)$, ce qui est possible en posant $A = \frac{1}{(b-a)^3}\left(f(b) - f(a) + \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right)\right)$.

g est $\mathcal{C}^1$ et deux fois dérivable, avec :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}(f'(x) + f'(a)) - \frac{x-a}{2}f''(x) - 3A(x-a)^2$$

$$g''(x) = \frac{x-a}{2}\left(-12A - f^{(3)}(x)\right)$$

On constate que $g'(a) = 0$, et en outre, comme $g(a) = g(b)$, que g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe, par le théorème de Rolle $d \in]a,b[$ tel que $g'(d) = 0$. Ainsi, on peut appliquer le théorème de Rolle sur $[d,a]$ pour g', et on il existe $c \in]d,a[$ tel que $g''(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$A = -\frac{1}{12}f^{(3)}(c)$$

En écrivant explicitement $g(b) = 0$, on trouve l'égalité souhaitée.

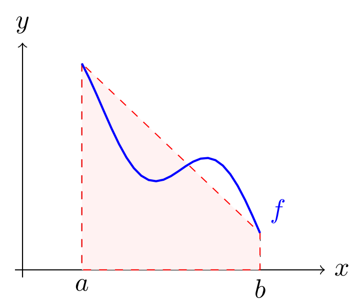
Si on prend F une primitive de f, alors cette égalité donne :

$$\exists c \in]a,b[, \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3$$

Cela signifie que l'aire du domaine entre $x = a$, $x = b$ et $y = 0$, $y = f(x)$ (c'est-à-dire $A_1 = \int_a^b f$) est "bien approchée" par l'aire A_2 du trapèze défini par les 4 points $(a, 0)$, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ et $(b, 0)$, au sens où :

$$|A_1 - A_2| \leq \left(\sup_{x \in [a,b]} |f''(x)| \right) \frac{(b-a)^3}{12}$$

On a ici une approximation à l'ordre 3 en $(b - a)$ alors que l'approximation par la méthode des rectangles ne donne qu'une approximation à l'ordre 2.



6.14 Dérivation

Exercise 6.27 (Méthode du point médian)**.** Soit f deux fois dérivable sur $[a, b]$. Montrez que, pour $x \in [a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{f''(c)}{2}$$

(On pourra poser $g : g : t \mapsto \frac{1}{\left(t - \frac{a+b}{2}\right)} \left(f(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$.)

Montrez ensuite que, avec $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$, on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} M_2$$

Donnez deux interprétations géométriques de la formule ci-dessus : une en traçant l'horizontale $y = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$; une en traçant la tangente passant en $\frac{a+b}{2}$.

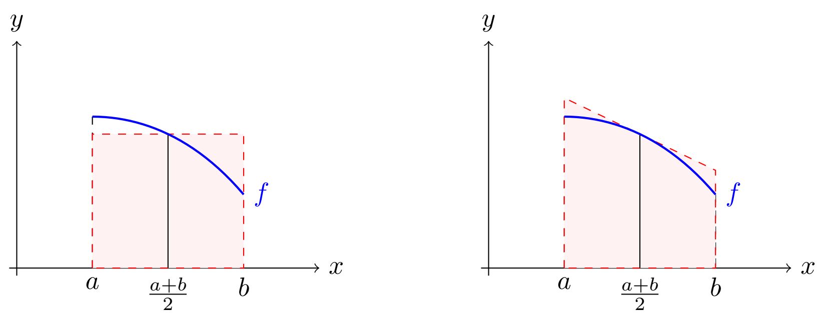
Exercise 6.28 (*Solution*)**.** L'égalité est simplement le théorème de Taylor-Lagrange (sans reste intégral) sur $\left[\frac{a+b}{2}, x\right]$. On peut le redémontrer en posant $g : t \mapsto \frac{1}{\left(t - \frac{a+b}{2}\right)} \left(f(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. La fonction g est alors deux fois dérivable par les théorèmes généraux, et l'application de l'égalité des accroissements finis sur $\left[\frac{a+b}{2}, x\right]$ donne l'existence de $c \in \left]\frac{a+b}{2}, x\right[\subseteq]a, b[$ et l'égalité souhaitée.

Attention, c dépend de x, et on notera c_x pour l'indiquer.

On intègre la formule obtenue sur $[a, b]$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\mathrm{d}t &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&\qquad + \int_a^b \left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{f''(c_t)}{2}\mathrm{d}t \\
&\leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 0 + \frac{M_2}{2}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t^2\mathrm{d}t \\
&\leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{M_2}{24}(b-a)^3
\end{aligned}$$

On peut donner deux interprétations de ce résultat. Premièrement, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est très bien estimée par le rectangle qui passe par le point médian. Ce résultat est un peu surprenant parce que ce rectangle ne semble pas capturer les variations de f (notamment, la méthode usuelle des rectangle, dont la hauteur du rectangle est fixée par le point de gauche ou de droite donne une erreur de l'ordre de $(b-a)^2$, ce qui est beaucoup moins bien). Ce résultat s'explique par une deuxième interprétation : $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ est aussi, d'après notre calcul intégral, l'aire sous la tangente à la courbe en $\frac{a+b}{2}$.



6.15 Dérivation

Exercise 6.29. On pose $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$. Montrez que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercise 6.30 (*Solution*)**.** f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, le problème est en 0.

Si on réussi à prouver que $f^{(n)}(x)$ converge quand $x \to 0$, alors on aura prouvé (par récurrence) que $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ pour tout n, c'est-à-dire $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Après avoir calculé les premières dérivée, on se rend compte qu'on doit montrer par récurrence que $(H_n) : \forall x \neq 0, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$ avec P_n un polynôme.

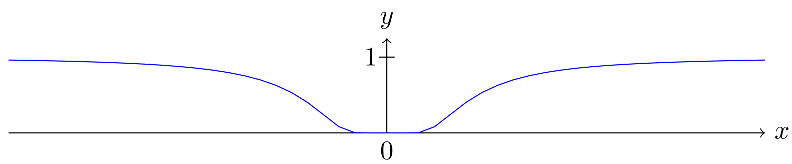
(H_0) et (H_1) sont vraies par un simple calcul.

Supposons (H_n) vraie, alors on a :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x^{3(n+1)}}\left((2-2nx^2)P_n(x) + x^3 P_n'(x)\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

On a montré par récurrence, en posant $P_{n+1} = (2 - 2nX^2)P_n + X^3 P_n'$, que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$. Dès lors, $f^{(n)}(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Ainsi, d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^n$, on a bien démontré que $f \in \mathcal{C}^\infty$.

N.B. : On remarquera qu'on a ici une fonction dont toutes les dérivées sont nulles, donc $f(x) = o(x^n)$ pour tout n quand $x \to 0$, sans que la fonction soit nulle (la fonction tend même vers $+\infty$, et ne s'annule que en 0). **C'est un exemple très classique en analyse d'une fonction localement nulle mais pas nulle.**



7 Développement de Taylor

7.1 Développement de Taylor

Exercise 7.1. Comparez au voisinage de $+\infty$: e^{x^2} avec $\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t$.

Exercise 7.2 (*Solution*)**.** On a : $\forall t \in [0, x], t^2 \leq tx$, donc :

$$0 \leq \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t \leq \int_0^x e^{tx} \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left(e^{x^2} - 1\right)$$

Au voisinage de $+\infty$, on a donc $\int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t = o\left(e^{x^2}\right)$

7.2 Développement de Taylor

Exercise 7.3. Soit f la fonction définie par :

$$x \longmapsto \begin{cases} \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ \cosh\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f a-t-elle un développement limité en 0, si oui lequel (ordre n) ?

Exercise 7.4 (*Solution*)**.** On écrit le développement en 0^+ de f : pour $x > 0$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{(2k)!} + o(x^n)$, donc f est prolongeable en 0^+ en une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

De la même manière, pour $x < 0$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{(2k)!} + o(x^n)$, donc f est prolongeable en 0^- en une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Finalement, comme les prolongements ont le même développement limité en 0^- et en 0^+, la fonction est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en entier, avec pour développement limité en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{(2k)!} + o(x^n)$.

7.3 Développement de Taylor

Exercise 7.5. Donnez un développement à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$.

Exercise 7.6 (*Solution*)**.** En notant F une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, on a : $f(x) = F(x^2) - F(x)$ et f est dérivable, avec :

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

En intégrant, on obtient : $f(x) = f(0) - x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$. Un calcul rapide donne $f(0) = 0$.

7.4 Développement de Taylor

Exercise 7.7. On pose $f : x \mapsto 2\tan x - x$. Montrez que f admet une réciproque impaire sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Calculez le développement de f^{-1} à l'ordre 6.

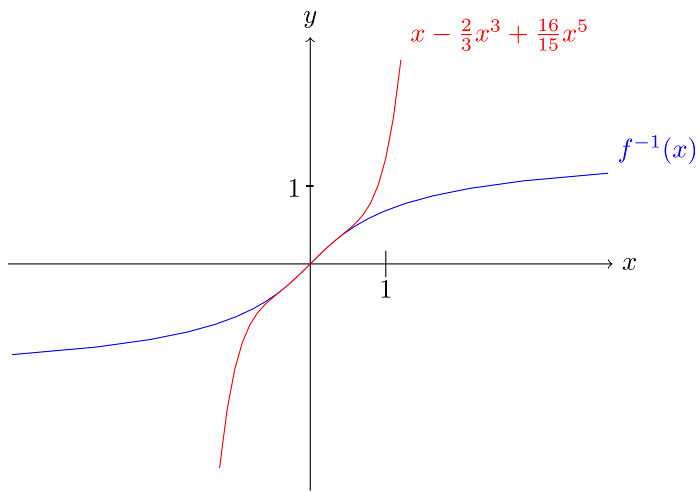
Exercise 7.8 (*Solution*)**.** f est strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et $\mathcal{C}^\infty$, et impaire. On a aussi : $f(\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[) = \mathbb{R}$ par un calcul de limites. f admet donc une réciproque définie sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, impaire et $\mathcal{C}^\infty$.

Le développement à l'ordre 6 de f en 0 est : $f(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$. On note en outre le développement à l'ordre 6 de f^{-1} : $f^{-1}(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6)$. On sait que $f^{-1} \circ f(x) = x$, d'où, par unicité du développement limité :

$$\begin{cases} a_1 & = 1 \\ \frac{2}{3}a_1 + a_3 & = 0 \\ \frac{4}{15}a_1 + 2a_3 + a_5 & = 0 \end{cases}$$

Finalement, on résout : $a_1 = 1$, $a_3 = -\frac{2}{3}$, $a_5 = \frac{16}{15}$ et :

$$f^{-1}(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + o(x^6)$$



7.5 Développement de Taylor

Exercise 7.9 (Approximant de Padé)**.** Déterminez $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la partie principale du développement de $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit du plus grand degré possible.

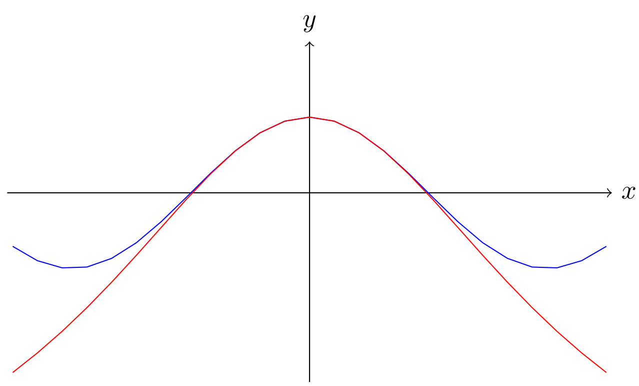
Exercise 7.10 (*Solution*)**.** On peut développer $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$:

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a-b)x^2 + b(b-a)x^4 + b^2(a-b)x^6 + o(x^7)$$

Par unicité du développement limité, on obtient que si on veut que la partie principale est du plus grand degré possible, il faut d'abord que $a - b = -\frac{1}{2}$ et $b(b-a) = \frac{1}{24}$, donc :

$$a = -\frac{5}{12} \text{ et } b = \frac{1}{12}$$

On obtient alors : $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} \sim \frac{1}{480}x^6$, et il est impossible de faire mieux.



7.6 Développement de Taylor

Exercise 7.11. Soit (E) : $2xy'' - y' + x^2 y = 0$. On suppose qu'il existe une fonction f solution de (E) possédant un développement limité à tout ordre. Trouvez f. En déduire le changement de variable adéquat et résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_-$ puis $\mathbb{R}_+$ et enfin $\mathbb{R}$.

Exercise 7.12 (*Solution*)**.** Notons $y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$. Puis :

$$2xy''(x) = \sum_{k=2}^{n+1} 2k(k-1)a_k x^{k-1} + o(x^n)$$

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{n+1} k a_k x^{k-1} + o(x^n)$$

$$x^2 y(x) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k x^{k+2} + o(x^n)$$

En sommant, (E) induit :

$$-a_1 + 2a_2 x + \sum_{k=2}^{n} \left((k+1)(2k-1)a_{k+1} + a_{k-2}\right) x^k = o(x^n)$$

Par unicité du développement limité, on trouve : $a_1 = a_2 = 0$ et $\forall k \geq 2, a_{k+1} = \frac{-1}{(k+1)(2k-1)} a_{k-1}$. Cela nous donne pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{3p+1} = a_{3p+2} = 0$ et $a_{3p} = \frac{(-1)^p 2^p}{9^p (2p)!} a_0$.

On peut constater que toutes les fonction $x \mapsto \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right)$ sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto A \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right)$. On a très envie de poser le changement de variables $t = \frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}$ et $y(x) = z\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right)$, on obtient que $z'' + z = 0$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y(x) = \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3} x^{3/2}\right)$$

Puis sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$y(x) = A \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) + B \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right)$$

Pour résoudre le problème de raccordement sur $\mathbb{R}$, on se rend compte grâce au développement limité qu'il faut et qu'il suffit que $\lambda = A$ et $\mu = B = 0$.

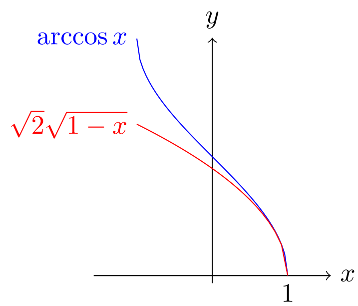
7.7 Développement de Taylor

Exercise 7.13. La fonction $x \mapsto \arccos x$ admet-elle en 1 (à gauche) un développement limité d'ordre 0 ? d'ordre 1 ? Donnez un équivalent simple de $\arccos x$ en 1.

Exercise 7.14 (*Solution*)**.** $\arccos x = o(1)$ (développement limité à l'ordre 0 en 1^-), mais la fonction $x \mapsto \arccos x$ n'est pas dérivable en 1 et n'admet donc pas en 1 un développement limité d'ordre 1.

Puisque $\arccos x = o(1)$, on a $\arccos x \sim \sin(\arccos x)$, d'où, en 1^- :

$$\arccos x \sim \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x}\sqrt{1-x} \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x}$$



7.8 Développement de Taylor

Exercise 7.15. Calculez le développement limité à l'ordre n en 0 de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}$. Soit a_k le k-ème coefficient. Montrer que a_k est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de l'équation $p + 2q = k$.

Exercise 7.16 (*Solution*)**.** On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-x)^2(1+x)} = \frac{1/4}{1-x} + \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{1+x}$$

Donc, comme on connaît le développement de chacun des fractions (le développement de $\frac{1}{(1-x)^2}$ s'obtient en dérivant celui de $\frac{1}{1-x}$), on obtient pour tout n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3+(-1)^k}{4} x^k + o(x^n)$$

D'autre part, on constate que $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$, donc on a aussi :

$$f(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} x^{2j}\right) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+2j=k} 1 \times 1\right) x^k + o(x^n)$$

Finalement, en identifiant les coefficients, on trouve qu'il y a $\frac{1}{4}(2k+3+(-1)^k)$ manières d'écrire k sous la forme $k = p + 2q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

7.9 Développement de Taylor

Exercise 7.17. Soient $a > 0$ et $b > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Donnez un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b)$. Même question pour $e^{-a}f_n(a) - 1 + \frac{a^2}{2n}$.

Exercise 7.18 (*Solution*)**.** On a, quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} f_n(a) &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(a - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e^a\left(1 - \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

Dès lors, on trouve :

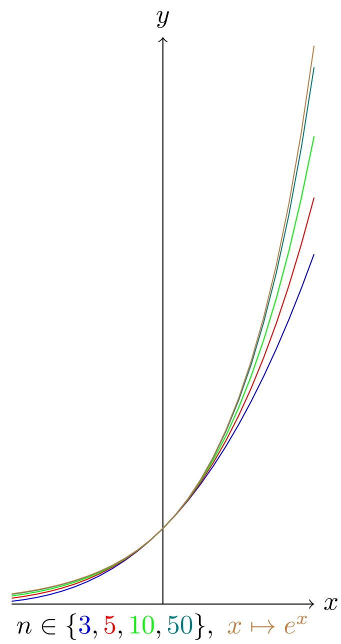
$$\begin{aligned} f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b) &= e^{a+b}\left(1 - \frac{(a+b)^2}{2n}\right) - e^a\left(1 - \frac{a^2}{2n}\right)e^b\left(1 - \frac{b^2}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= e^{a+b}\left(\frac{1}{2n}(-(a+b)^2 + a^2 + b^2)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{-abe^{a+b}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Comme $ab \neq 0$, on a bien trouvé un équivalent de $f_n(a+b) - f_n(a)f_n(b)$.

Pour estimer $e^{-a}f_n(a) - \left(1 - \frac{a^2}{2n}\right)$, on doit pousser un cran plus loin le développement limité de ln et de exp :

$$\begin{aligned} e^{-a}f_n(a) &= e^{-a}\exp\left(a - \frac{a^2}{2n} + \frac{a^3}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{a^2}{2n} + \frac{a^3}{3n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{a^2}{2n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{a^2}{2n} + \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^4}{8}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Pour $a > 0$ (et même $a \notin \{0, -8/3\}$), on a trouvé un équivalent de $e^{-a}f_n(a) - \left(1 - \frac{a^2}{2n}\right)$. On constatera d'ailleurs que cette suite ne converge pas très rapidement vers l'exponentielle.



7.10 Développement de Taylor

Exercise 7.19. Soit $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$. Montrer que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f' n'admet en 0 aucun développement limité d'aucun ordre que ce soit.

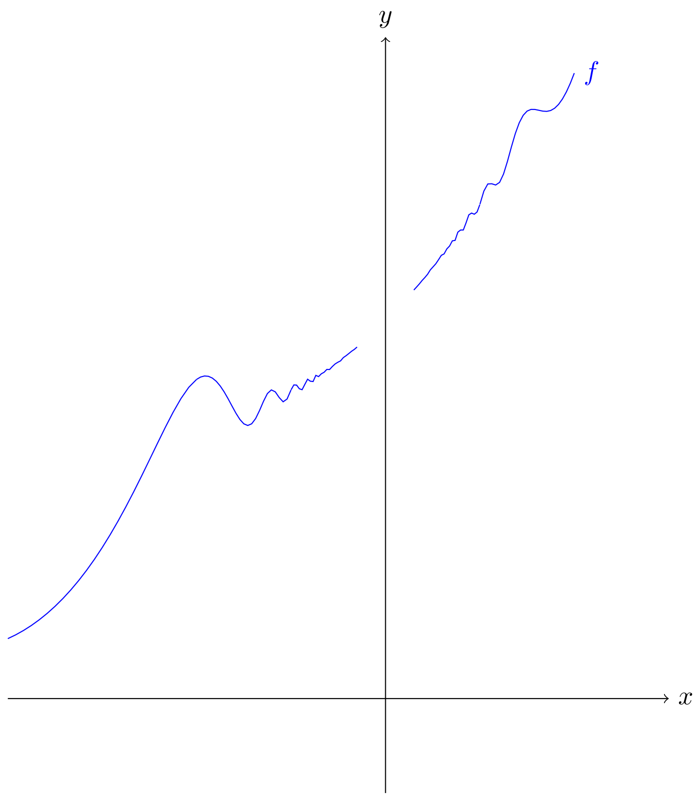
Exercise 7.20 (*Solution*)**.** On a $|\sin \frac{1}{x^2}| \leq 1$, donc $x^3 \sin \frac{1}{x^2} = O(x^3) = o(x^2)$, d'où, au voisinage de 0 : $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$.

f est continue et dérivable en 0 car elle admet un développement limité d'ordre 1. On obtient au passage que $f'(0) = 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition et somme. Pour $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$$

f' n'est donc pas continue au voisinage de 0. Pour le constater, on peut regarder que $f'\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right) \to -1$ et $f'\left(\frac{1}{\sqrt{\pi/2 + 2n\pi}}\right) \to 1$ alors que les deux suites d'argument tendent vers 0. On ne peut donc pas trouver de développement limité d'ordre 0 pour f'.

Mon ordinateur a beaucoup de mal à tracer la courbe sur $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.



7.11 Développement de Taylor

Exercise 7.21. Étudiez au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x}$. Existe-t-il une tangente ?

Exercise 7.22 (*Solution*)**.** On connaît la dérivée de $s \mapsto \arcsin x : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On a le développement à l'ordre 4 en 0 :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)$$

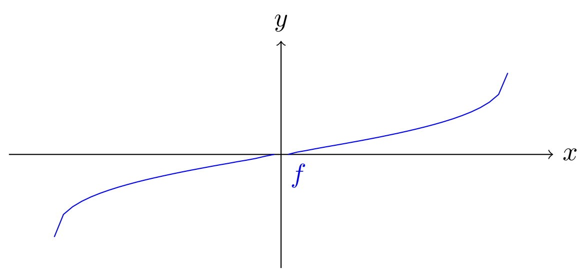
On intègre ensuite en calculant $\arcsin(0) = 0$:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

Dès lors, on peut calculer :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\arcsin x} &= \frac{1}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{40}x^4+o(x^4)} \\
&= \frac{1}{x}\left(1+\left(-\frac{1}{6}x^2-\frac{3}{40}x^4\right)+\left(-\frac{1}{6}x^2-\frac{3}{40}x^4\right)^2\right)+o(x^3) \\
&= \frac{1}{x}-\frac{1}{6}x-\frac{17}{360}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

Finalement, $f(x)=\frac{1}{6}x+\frac{17}{360}x^3+o(x^3)$, donc on peut prolonger f par $f(0)=0$ et $\mathcal{C}_f$ admet alors une tangente en $(0,0)$ de pente $+\frac{1}{6}$. La courbe traverse (avec inflexion) sa tangente.



7.12 Développement de Taylor

Exercise 7.23. Étudiez de la fonction $f : x \mapsto \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ avec $0<a<b$ des réels fixés.

Exercise 7.24 (*Solution*)**.** En 0, on a :

$$\begin{aligned}
x\ln f(x) &= \ln\left(\frac{1}{2}(e^{x\ln a}+e^{x\ln b})\right) \\
&= \ln\left(1+\frac{x}{2}(\ln a+\ln b)+\frac{x^2}{4}(\ln^2 a+\ln^2 b)+o(x^2)\right) \\
&= 1+x\ln\sqrt{ab}+\frac{x^2}{4}(\ln^2 a+\ln^2 b)-\frac{1}{2}\left(x\ln\sqrt{ab}\right)^2+o(x^2) \\
&= x\ln\sqrt{ab}+\frac{x^2}{8}\ln^2\frac{a}{b}+o(x^2) \\
f(x) &= \exp\left(\ln\sqrt{ab}+\frac{x}{8}\ln^2\frac{a}{b}+o(x)\right)=\sqrt{ab}\left(1+\frac{x}{8}\ln^2\frac{a}{b}\right)+o(x)
\end{aligned}$$

f est ainsi prolongeable par $\sqrt{ab}$ en 0 et dérivable avec $f'(0)=\frac{\sqrt{ab}}{8}\ln^2\frac{a}{b}>0$.

En $+\infty$, on a (avec $0<a<b$) :

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\left(\ln b^x-\ln 2+\ln\left(1+\frac{a^x}{b^x}\right)\right)\longrightarrow \ln b$$

De fait, f converge vers b.

En $-\infty$, on peut écrire $f(-x) = \frac{ab}{f(x)}$ pour conclure que $f(x) \to_{-\infty} a$.

Reste à calculer la dérivée pour $x \neq 0$. f étant strictement positive, on peut déterminer ses variations en regardant $(\ln f)'(x)$:

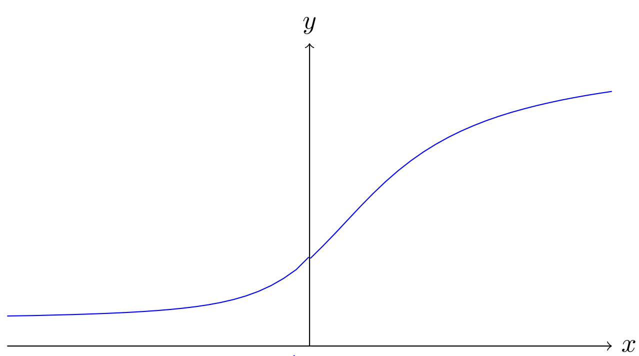
$$(\ln f)'(x) = \frac{-1}{x^2} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) + \frac{1}{x} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x}$$

On pose $g(x) = x^2(\ln f)'(x)$ dont on cherche le signe. g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec :

$$g'(x) = x \frac{(ab)^x (\ln a - \ln b)^2}{(a^x + b^x)^2}$$

Il s'ensuit que g admet un minimum global (strict) en 0 (plus précisément sa limite en 0 est son infimum sur $\mathbb{R}$) : $g(x) \to 0$ quand $x \to 0$, et ainsi $g > 0$ sur $\mathbb{R}$, et $f' > 0$ et f strictement croissante.

<u>NB :</u> On remarquera que l'inégalité $\lim_{-\infty} f(x) < f(-1) < f(0) < f(1) < \lim_{+\infty} f(x)$ redonne l'inégalité bien connue entre a, b et les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique.



$a = \frac{1}{3},\ b = 4$

7.13 Développement de Taylor

Exercise 7.25. Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ et x fixé. Déterminez la limite quand $h \to 0$ de $\frac{f(x-h)+f(x+h)-2f(x)}{h^2}$.

En déduire une méthode pour approximer la solution d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre 2 (en vous inspirant de la méthode d'Euler).

Exercise 7.26 (*Solution*)**.** On a :

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + o(h^2)$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2)$$

Donc :

$$f(x-h) + f(x+h) = 2f(x) + h^2 f''(x)$$

Ainsi : $\frac{1}{h^2}\left(f(x-h) + f(x+h) - 2f(x)\right) \to f''(x)$ quand $h \to 0$.

En particulier, si on prend une équation différentielle du second ordre, on peut l'écrire de la forme (E) : $y''(x) = F(x, y(x), y'(x))$. Imaginons qu'on connaît la valeur d'une solution f en x_0 (soit qu'elle soit donnée par les conditions de Cauchy, soit qu'on ait calculé une approximation de la solution jusqu'en x_0), on souhaite alors déterminer une valeur approchée de la solution en $x_0 + h$ pour un pas h fixé à l'avance (h très petit). Si on connaît $f(x_0 - h)$ et $f'(x_0)$, pas de problème :

$$f(x_0 + h) \simeq 2f(x_0) + h^2 F(x_0, f(x_0), f'(x_0)) - f(x_0 - h)$$

Maintenant, l'idée est la suivante :

- On part de F et d'une condition initiale $(x_0, f(x_0), f'(x_0))$.
- On pose $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0)$ et $f'(x_0 + h) = f'(x_0)$ (méthode d'Euler)
- On pose $f(x_0 + 2h) = 2f(x_0 + h) + h^2 F\left[x_0 + h, f(x_0 + h), f'(x_0 + h)\right] - f(x_0)$ puis $f'(x + 2h) = \frac{1}{h}\left[f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h)\right]$
- On continue $f(x_0+(k+1)h) = 2f(x_0+kh)+h^2 F\left[x_0 + kh, f(x_0 + h), f'(x_0 + kh)\right] - f(x_0+(k-1)h)$ puis $f'(x+(k+1)h) = \frac{1}{h}\left[(f(x_0 + (k+1)h) - f(x_0 + kh)\right]$

La valeur de $f(x_0 + kh)$ est de plus en plus éloignée de la solution véritable, mais l'erreur diminue quand on diminue h.

Dans la pratique, cette méthode (et surtout ses variantes) est légèrement meilleure que la méthode d'Euler mais assez peu utilisée car on dispose aujourd'hui des méthodes de Runge-Kutta.

7.14 Développement de Taylor

Exercise 7.27 (Règle de Worthington)**.** Montrez que le développement de $\tan^{-1}$ à l'ordre 6 est $\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + O(x^7)$.

Montrez que le développement de $f : x \mapsto \frac{3x}{1+2\sqrt{1+x^2}}$ à l'ordre 6 est $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{36}x^5 + O(x^7)$.

Application : Prenons un triangle rectangle dont le plus petit angle est A. Soit a le côté opposé à A, b le côté adjacent et c l'hypoténuse. Montrez que $A \simeq \frac{3a}{b+2c}$.

Exercise 7.28 (*Solution*)**.** L'application tan est impaire, $\mathscr{C}^\infty$ et bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$. En particulier $\tan^{-1}$ est impaire et $\mathscr{C}^\infty$, donc admet un développement à l'ordre 6 de la forme $\tan^{-1} x = ax + bx^3 + cx^5 + O(x^7)$.

Or on sait que :

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)$$

On peut regarder ou bien $\tan^{-1} \circ \tan x = x$ ou bien $\tan \circ \tan^{-1} x = x$. La première équation est plus aisée. On obtient en substituant :

$$
\begin{aligned}
x &= a\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right) + b\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right)^3 + c\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right)^5 + O(x^7) \\
&= ax + \left(\frac{a}{3} + b\right)x^3 + \left(\frac{2a}{15} + 3 \times \frac{b}{3} + c\right)x^5 + O(x^7)
\end{aligned}
$$

On peut alors résoudre le système (l'identification se justifie par l'unicité du développement limité) :

$$
\begin{cases}
a &= 1 \\
\frac{a}{3} + b &= 0 \\
\frac{2a}{15} + b + c &= 0
\end{cases}
$$

D'où : $a = +1$, $b = -1/3$ et $c = +1/5$. En fait, $\tan^{-1}$ admet un développement limité à n'importe quel ordre : $\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$.

On remarque que la fonction f est aussi impaire et $\mathscr{C}^\infty$. Pour en avoir un développement limité à l'ordre 6, il faut calculer un développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ à l'ordre 5. On a :

$$
\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + O(x^6)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+h} &= 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 - h^5 + O(h^6) \\
\frac{1}{1+2\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^6)} \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{12}x^4\right) + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{12}x^4\right)^2\right) + O(x^6) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{9}\right)x^4\right) + O(x^6) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{36}x^4\right) + O(x^6)
\end{aligned}
$$

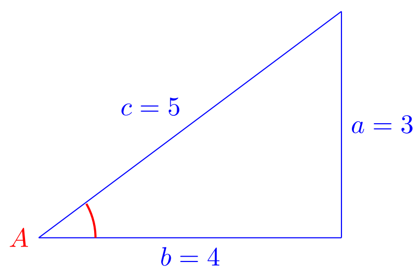
$$
f(x) = 1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{36}x^5 + O(x^7)
$$

Ainsi, on constate que $f(x)$ est une approximation raisonnablement précise de $\tan^{-1} x$ pour x petit. Notamment, leurs développements concordent à l'ordre 4 et on a $\frac{1}{5} = \frac{7}{35} \simeq \frac{7}{36}$ avec $\frac{7}{36} \leq \frac{1}{5}$. De fait : $f(x) \approx \tan^{-1} x$ avec $f(x) \leq \tan^{-1} x$ pour x suffisamment petit. En poussant le développement de f plus loin, on se rend compte que les coefficient ne s'éloignent de ceux $\tan^{-1}$ que très lentement, ce qui donne un très très bonne approximation, même pour des x assez grands.

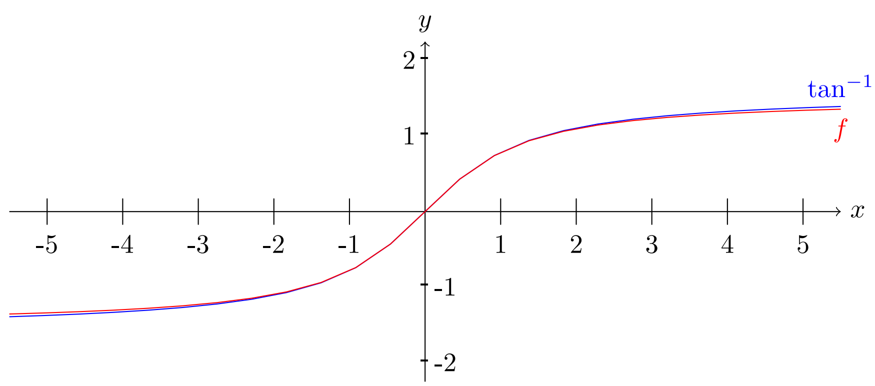
Dans un triangle rectangle, on a : $\tan A = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{a}{b}$. Comme A est le plus petit des trois angle, sa tangente est la plus petite des trois (tan est croissante), donc $\frac{a}{b}$ peut être considéré raisonnablement petit (on peut toujours choisir l'angle de sorte que $\frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} \leq 1$). Dès lors :

$$A = \tan^{-1}\frac{a}{b} = \frac{3^a/_b}{1 + 2\sqrt{1 + \left(^a/_b\right)^2}} = \frac{3a}{b + 2c}$$

On a l'avantage d'avoir une forme très facile à calculer à la main (même pas de carrés à calculer) qui donne une bonne approximation des trois angles. Sur la figure ci-dessous, l'angle A vaut $\tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 0.6435$ et on a $\frac{3a}{b+2c} = \frac{3\times 3}{4+2\times 5} = \frac{9}{14} \approx 0.6429$ alors qu'on a pris (volontairement) un triangle avec $\frac{a}{b}$ très grand.



Regardons à quel point $\tan^{-1}$ est bien approximé par f :



7.15 Développement de Taylor

Exercise 7.29 (Extrapolation de Richardson)**.** On cherche à estimer un nombre $A \in \mathbb{R}$ et on possède une fonction f tel que, quand $h \to 0$, on ait : $f(h) = A + a_1h^{k_1} + a_2h^{k_2} + ... + a_nh^{k_n} + O\left(h^{k_n} + 1\right)$ dont les k_i sont connus mais les a_i sont inconnus.

Estimez $\frac{t^{k_1} f(^h/_t) - f(h)}{t^{k_1} - 1}$. En déduire une méthode pour avoir une estimation de A en $O\left(h^{k_n} + 1\right)$. En quoi cette méthode peut souvent être meilleure que de juste calculer $f(h)$ avec h plus petit ?

Comment estimer k_1 si les k_i sont inconnus ?

Exercise 7.30 (*Solution*)**.** On a :

$$f(h) = A + a_1 h^{k_1} + a_2 h^{k_2} + ... + a_n h^{k_n} + O\left(h^{k_n} + 1\right)$$
$$f\left(\frac{h}{t}\right) = A + \frac{1}{t^{k_1}} a_1 h^{k_1} + \frac{1}{t^{k_2}} a_2 h^{k_2} + ... + \frac{1}{t^{k_n}} a_n h^{k_n} + O\left(h^{k_n} + 1\right)$$

$$t^{k_1} f\left(\frac{h}{t}\right) - f(h) = \left(t^{k_1} - 1\right) A + \left(\frac{t^{k_1}}{t^{k_2}} - 1\right) a_2 h^{k_2} + ... + O\left(h^{k_n} + 1\right)$$
$$\frac{t^{k_1} f\left(h/t\right) - f(h)}{t^{k_1} - 1} = A + b_2 h^{k_2} + ... + b_n h^{k_n} + O\left(h^{k_n} + 1\right)$$

On remarque que le terme en h^{k_1} a disparu : on a gagné $(k_2 - k_1)$ ordres dans l'approximation.

On peut poursuivre l'élimination : posons $f_1 : x \mapsto \frac{t^{k_1} f(x/t) - f(x)}{t^{k_1} - 1}$. On possède un développement de f qui commence par $A + b_2 h^{k_2}$. On élimine se terme en considérant $\frac{t^{k_2} f_1(h/t) - f_1(h)}{t^{k_2} - 1}$. On continue en posant $f_2 : x \mapsto \frac{t^{k_2} f_1(x/t) - f_1(x)}{t^{k_2} - 1}$, et ainsi de suite. On aura bien $A = f_n(h) + O\left(h^{k_n+1}\right)$. On pourrait aussi changer le t à chaque étape, mais cela comporte assez peu d'intérêt.

Imaginons qu'on évalue f en h, on a alors $|A - f(h)| \approx a_1 h^{k_1}$. Si maintenant on évalue f_1 en h, on a $|A - f_1(h)| \approx b_2 h^{k_2}$, donc, si on voulait avoir la même approximation en utilisant f, il faudrait l'évaluer en s tel que : $a_1 s^{k_1} = b_2 h^{k_2}$, soit $s = \left(\frac{b_2}{a_1}\right)^{1/k_1} h^{k_2/k_1}$. Or $k_1 < k_2$, donc, pour h petit, s est très très petit. Notamment, évaluer f_1 en h a demandé d'évaluer f en h et en h/t (où t est une constante), donc si $s < h/t$, il sera plus facile d'évaluer par f_1 que par f pour la même qualité d'évaluation (en supposant qu'évaluer f de plus en plus proche de 0 est de plus plus difficile). Comme on connaît la formule de b_2, on obtient la condition :

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{k_1}} \left(\frac{t^{k_1 - k_2} - 1}{t^{k_1} - 1}\right)^{\frac{1}{k_1}} h^{\frac{k_2}{k_1}} < \frac{h}{t}$$

Soit :

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{k_1}} \left(\frac{t^{k_1 - k_2} - 1}{t^{k_1} - 1}\right)^{\frac{1}{k_1}} t < h^{1 - \frac{k_2}{k_1}}$$

Ce n'est pas évident que cette méthode est meilleure, mais, dans la pratique, h est très petit, on s'arrange souvent pour prendre f paire, donc k_2/k_1 est raisonnablement plus grand que 1, et $t = 2$ donne de bons résultats (notamment parce qu'il s'implémente bien dans le langage binaire des ordinateurs). Les a_2/a_1 ne peuvent pas être trop grands pour des raisons de convergences (voire le cours sur les séries entières en Spé).

Cette approximation permet souvent de passer d'une dizaine à une centaine de chiffres après la virgule sur des constantes difficiles à calculer.

Lorsqu'on ne connaît pas k_1, cette approximation permet de l'estimer de plusieurs manières. En effet, même si on ne peut pas construire f_1 car sa formule fait intervenir k_1, on peut poser $g_j : x \mapsto \frac{t^j f(x/t) - f(x)}{t^j - 1}$ pour h (petit) et t (par exemple 2) fixés, puis incrémenter j. On devrait obtenir $g_j(h) \approx A + \frac{1}{t^{k_1}} h^{k_1}$ (une constante vis-à-vis de j), ce qui donne déjà une idée de k_1 même sans la valeur de A. Quand on arrive à $j = k_1$, la valeur de $g^j(h)$ change brutalement, ce qui se voit sur le tracé graphique. Une autre méthode, est dévaluer g^j en plusieurs points proches et de voir quel est l'ordre des variations.

7.16 Développement de Taylor

Exercise 7.31. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue avec : $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$ au voisinage de 0 ($a > 0$, $\alpha > 1$).

Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez que si u_0 est suffisamment petit, alors $(u_n)_n$ est décroissante et converge vers 0.

Soit $\beta > 0$, on pose $x_n = \frac{1}{u_{n+1}^\beta} - \frac{1}{u_n^\beta}$. Trouvez un équivalent de $(x_n)_n$. En choisissant β et en utilisant le théorème de Césaro, trouver un équivalent de $(u_n)_n$.

Appliquez l'exercice ci-dessus avec $f = \sin$.

Exercise 7.32 (*Solution*)**.** Les équivalences $f(x) \sim x$ et $f(x) - x \sim ax^\alpha$ prouvent qu'il existe un voisinage de 0^+ tel que $\forall x \in]0, \eta],\ 0 < f(x) < x$. Donc $[0, \eta]$ est stable par f : si $u_0 \in [0, \eta]$, alors $\forall n,\ u_n \in [0, \eta]$, et $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$. Ainsi, u_n est décroissante et minorée par 0, donc elle converge, disons vers ℓ. Alors, comme f est continue, on a $f(\ell) = \ell$, mais si $\ell \neq 0$, comme (par passage à la limite) $\ell \in [0, \eta]$, on a $f(\ell) < \ell$, ce qui est une contradiction. Ainsi, $\ell = 0$.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} x_n &= (u_n - au_n^\alpha + o(u_n^\alpha))^{-\beta} - u_n^{-\beta} \\ &= u_n^{-\beta} \left(\left(1 - au_n^{\alpha-1} + o\left(u_n^{\alpha-1}\right)\right)^{-\beta} - 1 \right) \\ &\sim a\beta u_n^{\alpha-\beta-1} \end{aligned}$$

Pour $\beta = \alpha - 1$, on a $x_n \to a(\alpha - 1)$. Or, comme $u_n \to 0$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(u_{n+1}^{-\beta} - u_n^{-\beta} \right) \sim \frac{1}{n} u_n^{-\beta}$$

D'après le théorème de Césaro, pour $\beta = \alpha - 1$: $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_n \to a(\alpha - 1)$. Donc :

$$nu_n^{\alpha-1} \sim \frac{1}{a(\alpha-1)} \text{ et enfin } u_n \sim \left(\frac{1}{na(\alpha - 1)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Pour $f = \sin$, on a :

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$$

En outre : $\forall x > 0,\ \sin x < x$, donc $\forall x \in]0, \pi[,\ 0 < \sin x < x$.

De fait, si $u_0 \in [0, \pi]$ et $u_{n+1} = \sin u_n$, alors $u_n \to 0$ avec $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

7.17 Développement de Taylor

Exercise 7.33. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, qu'on notera u_n. Montrez que $u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, puis que $u_n \sim \ln n$. Trouvez un équivalent de $v_n = u_n - \ln n$ puis montrez qu'il existe des nombres a, b tels que $u_n = a \ln n + b\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercise 7.34 (*Solution*)**.** La fonction $f : x \mapsto e^x + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et son image est $[1, +\infty[$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(u_n) = n$, i.e. $e^{u_n} + u_n - n = 0$.

On remarque que $e^{u_n} + u_n \leq e^{2u_n}$ car $u_n \geq 0$, donc $n \leq e^{2u_n}$ puis $u_n \geq \ln n/2$. De fait : $u_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Dès lors, $u_n = o(e^{u_n})$, d'où $n = e^{u_n} + o(e^{u_n})$. Dès lors, $\frac{n}{e^{u_n}} = 1 + o(1)$. On passe au logarithme :

$$\ln \frac{n}{e^{u_n}} = \ln(1 + o(1)) = 0 + o(1)$$

Il s'ensuit : $\ln e^{u_n} = \ln n + o(1)$, soit $u_n \sim \ln n$.

Ensuite, on a (car $v_n = o(1)$) :

$$n = ne^{v_n} + \ln n + v_n$$

$$n(e^{v_n} - 1) = -\ln n - v_n \sim -\ln n$$

Finalement, en remplaçant et en utilisant $e^x - 1 \sim x$:

$$v_n \sim e^{v_n} - 1 \sim -\frac{\ln n}{n}$$

$$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

7.18 Développement de Taylor

Exercise 7.35. Montrez que $\exp\left(h\frac{\partial}{\partial x}\right) f = f(... + h)$. **Pas possible en Sup.**

Exercise 7.36 (*Solution*)**.** Cet exercice est plus une remarque qu'un véritable exercice. On a le développement en séries entières :

$$\exp\left(h\frac{\partial}{\partial x}\right) f = \left(\sum_{k \geq 0} \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\right) f = \sum_{k \geq 0} \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}$$

Dès lors, si f est développable en séries entières au voisinage de x, on a alors :

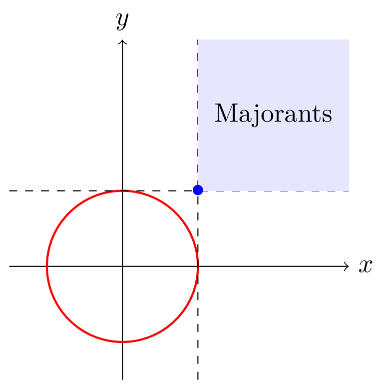
$$\left(\exp\left(h\frac{\partial}{\partial x}\right) f\right)(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x) = f(x + h)$$

8 Ensembles ordonnés et relations d'équivalence

8.1 Ensembles ordonnés et relations d'équivalence

Exercise 8.1. Soit la relation sur $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \prec (x',y') \Leftrightarrow x \leq x'$ et $y \leq y'$. Montrez que $\prec$ est une relation d'ordre partielle sur $\mathbb{R}^2$. Le cercle unité a-t-il des majorants ? Une borne supérieure ? Un maximum ? Donnez une CNS pour qu'un sous-ensemble du plan ait un maximum.

Exercise 8.2 (*Solution*)**.** La relation est évidemment réflexive et antisymétrique. Pour la transitivité, il suffit de l'écrire.



Le cercle unité $\mathbb{U}$ contient les points $(0,1)$ et $(1,0)$: tout majorant doit avoir ses deux coordonnées supérieures à 1. Inversement, si $(x,y) \in \mathcal{M} = \{(a,b)\ ;\ a \geq 1, b \geq 1\}$, alors soit $(z,t) \in \mathbb{U}$. En particulier $z \leq 1 \leq x$ et $t \leq 1 \leq y$. Ainsi, $\mathcal{M}$ est bien l'ensemble des majorants du cercle unité. Le minimum de $\mathcal{M}$ est $(1,1)$, qui est donc la borne supérieure de $\mathbb{U}$. Comme ce point n'est pas dans $\mathbb{U}$, ce dernier n'a pas de maximum.

Pour d'un sous-ensemble D du plan ait un maximum, il faut et il suffit qu'il ait un point "en haut à droite", c'est-à-dire que le point $(\max_{(x,y)\in D} x, \max_{(x,y)\in D} y)$ soit dans D. La démonstration en est évidente.

8.2 Ensembles ordonnés et relations d'équivalence

Exercise 8.3. Une relation $\mathcal{R}$ est un *pré-ordre* si elle est réflexive et transitive.

Soit $\mathcal{R}$ un pré-ordre et $\mathcal{T}$ la relation : $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x)$. Montrez que $\mathcal{T}$ est une relation d'équivalence.

Soit X et Y deux classes d'équivalence modulo $\mathcal{T}$. On définit la relation $X\mathcal{S}Y$ par $\exists x \in X, \exists y \in Y, x\mathcal{R}y$. Montrez que $X\mathcal{S}Y \Leftrightarrow \forall x \in X, \forall y \in Y, x\mathcal{R}y$. Montrez que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des classes d'équivalences modulo $\mathcal{T}$.

Montrez que la relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est un pré-ordre, précisez la relation d'équivalence et la relation d'ordre qui s'en déduisent.

Exercise 8.4 (*Solution*)**.** $\mathcal{T}$ hérite de la réflexivité et de la transitivité de $\mathcal{R}$. Pour ce qui est de la symétrie, elle vient de la commutativité de $\wedge$.

Soient X et Y tels que $X\mathcal{S}Y$. Soient $x \in X$ et $y \in Y$. Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ tels que $x_0\mathcal{R}y_0$. Alors, on sait que $x\mathcal{T}x_0$, donc $x\mathcal{R}x_0 \wedge x_0\mathcal{R}x$. Par transitivité, on a en particulier $x\mathcal{R}y_0$. Pareillement : $y\mathcal{R}y_0 \wedge y_0\mathcal{R}y$ et en particulier $y_0\mathcal{R}y$. Ainsi, par transitivité, $x\mathcal{R}y$.

$\mathcal{S}$ est réflexif (trivial) ; anti-symétrique car si $X\mathcal{S}Y \wedge Y\mathcal{S}X$, alors $\forall x, y \in X\times Y, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$ (i.e. $x\mathcal{T}Y$), donc $X = Y$ (comme classes d'équivalence modulo $\mathcal{T}$) ; et transitive (héritage de $\mathcal{R}$). C'est bien une relation d'ordre.

La relation $\mathcal{R} = |$ est bien un pré-ordre sur $\mathbb{Z}$ (attention, c'est un ordre sur $\mathbb{N}$ mais pas sur $\mathbb{Z}$).

On obtient $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow x = \pm y \Leftrightarrow |x| = |y|$ et donc les classes d'équivalence $\mathcal{C}(x) = \{-x, x\}$ (pour $x \in \mathbb{Z}$).

On obtient $\mathcal{C}(x)\mathcal{S}\mathcal{C}(y)$ qui est bien une relation d'ordre car on a levé l'ambiguïté qui empêchait $|$ d'être anti-symétrique. On peut voir en fait que les classes d'équivalences de $\mathcal{T}$ sont paramétrées de manière unique par les entiers naturels. Formellement, on a la bijection $\psi : X \mapsto \max_{x\in X} x$ dont la réciproque est $\varphi : x \mapsto \mathcal{C}(x)$. φ est croissante pour les relations $|$ et $\mathcal{S}$. Inversement, on peut dire que $X\mathcal{S}Y \Leftrightarrow \psi(X)|\psi(Y)$.

On aurait pu procéder de même avec la divisibilité dans les polynômes, les matrices, où avec plein d'autres pré-ordres.

8.3 Ensembles ordonnés et relations d'équivalence

Exercise 8.5. Étudiez les relations suivantes : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$ sur $\mathbb{R}$; $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}^*, y = px^q$ sur $\mathbb{R}\backslash]-1;1[$.

Exercise 8.6 (*Solution*)**.** On a $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \sin^2 x = \sin^2 y$. La relation est donc bien réflexive, symétrique et transitive, c'est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de x est $\mathcal{C}(x) = (x + \pi\mathbb{Z}) \cup ((\pi - x) + \pi\mathbb{Z})$. **Un dessin est le bienvenu !**

La relation $\mathcal{S}$ est réflexive, transitive et anti-symétrique : c'est une relation d'ordre. Pour prouver qu'elle est ant-symétrique, on regarde les fonctions $f_{p,q}$: $x \mapsto px^q$. Elles sont strictement croissantes sur $[1; +\infty[$ si et seulement si p ou $q > 1$. Par contraposée, si $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$ et $x, y \geq 1$, alors $x = y$. On peut raisonner de même dans $]-\infty; -1]$. Pour combiner les deux, on se rend compte qu'il est impossible que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$ avec $x < -1$ et $y > 1$ car si $y\mathcal{S}x$ et $y \geq 0$, alors $x \geq 0$. Cette relation n'a ni minorant, ni majorant (même si on la restreint à $]-\infty; -1]$ ou à $[1; +\infty)$, elle est partielle, et même pour tout élément x, on peut trouver un élément y tel que ni $x\mathcal{S}y$, ni $y\mathcal{S}x$. Comme $1/2 = 2 \times 1/4$ et $1/4 = (1/2)^2$, $\mathcal{R}$ n'est pas anti-symétrique sur $\mathbb{R}$.

8.4 Ensembles ordonnés et relations d'équivalence

Exercise 8.7. Soit $\mathcal{R}$ la relation suivante sur $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$. Montrez que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et dénombrez ses classes d'équivalence.

Exercise 8.8 (*Solution*)**.** La relation est évidement réflexive et symétrique. Pour la transitivité, il suffit de l'écrire.

Ensuite, on trace la fonction $x \mapsto xe^{-x}$, et on se rend compte que la classe d'équivalence de x contient :

- 1 élément si $x \leq 0$ ou $x = 1$.
- 2 éléments si $x > 0$ et $x \neq 1$.

8.5 Ensembles ordonnés et relations d'équivalence

Exercise 8.9 (Coupures de Dedekind)**.** Soit $(E,\leq)$ un ensemble totalement ordonné. Une *coupure sur* E est une paire $A,B\in\mathcal{P}(E)$, noté $(A|B)$ avec :

- $A\cap B=\emptyset$ et $A\cup B=E$
- $\forall a\in A,\forall b\in B,\ a\leq b$

Soit $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des coupures sur E. On définit une relation sur $\mathcal{C}(E)$ par $(A|B)\preceq(C|D)\Leftrightarrow A\subseteq C$. Montrez que c'est une relation d'ordre totale.

On définit *l'amalgame de* E par $\mathcal{A}=E\cup\mathcal{C}(E)$, muni de la relation $\ll$ qui étend la relation précédente avec pour $z\in E$ et $(A|B)\in\mathcal{C}(E)$, $z\ll(A|B)\Leftrightarrow z\in A$, et $(A|B)\ll z\Leftrightarrow z\in B$. Montrez qu'il s'agit d'une relation d'ordre total sur $\mathcal{A}$.

Montrez que E est dense dans $\mathcal{A}$.

Exercise 8.10 (*Solution*)**.** La relation $\preceq$ est :

- <u>Réflexive :</u> $(A|B)\preceq(A|B)$ car $A\subseteq A$.
- <u>Symétrique :</u> Si $(A|B)\preceq(C|D)$ et $(C|D)\preceq(A|B)$, alors $A\subseteq C$ et $C\subseteq A$, donc $A=C$, puis $B=E\backslash A=A\backslash C=D$, donc $(A|B)=(C|D)$.
- <u>Transitive :</u> Si $(A|B)\preceq(C|D)$ et $(C|D)\preceq(X|Y)$, alors $A\subseteq C\subseteq X$, donc $(A|B)\preceq(X|Y)$.
- <u>Total :</u> Si $(A|B)$ et $(C|D)$ sont des coupures, alors soit $A\cap C\neq\emptyset$, soit $B\cap C\neq\emptyset$. Dans le second cas, soit $c\in C\cap B$, dans ce cas, $\forall a\in A,\ a\leq c$, donc $A\subseteq C$. Dans le premier cas, comme $A\cup B=E$, on a $C\subseteq A$. Ainsi, soit $(A|B)\preceq(C|D)$, soit $(C|D)\preceq(A|B)$.

La relation $\ll$ est :

- <u>Réflexive :</u> Si $z\in E$, alors $z\ll z$ car $z\leq z$; si $(A|B)\in\mathcal{C}(E)$, alors $(A|B)\ll(A|B)$ car $(A|B)\preceq(A|B)$.
- <u>Symétrique :</u> Soient $x,y\in\mathcal{A}$, tels que $x\ll y$ et $y\ll x$. Si $x,y\in E$, alors $x=y$. Si $x,y\in\mathcal{C}(E)$, alors $x=y$. Si $x\in E$ et $y=(A|B)\in\mathcal{C}(E)$, alors $x\in A$ car $x\ll(A|B)$, et $x\in B$ car $(A|B)\ll x$, sauf que $A\cap B=\emptyset$, donc ce cas est impossible. Le cas $x\in\mathcal{C}(E)$ et $y\in E$ se traite pareillement.
- <u>Transitive :</u> Soient $x,y,z\in\mathcal{A}$ avec $x\ll y$ et $y\ll z$. Si $x,y,z\in E$ ou $x,y,z\in\mathcal{C}(E)$, alors $x\ll z$. Si $x,y\in E$ et $z=(A|B)\in\mathcal{C}(E)$, alors $y\in A$ et $x\leq y$, donc $x\in A$ sinon on aurait $x\in B$ mais $x\leq y$ ce qui contredit $\forall a\in A,\forall b\in B,\ a\leq b$. Donc $x\ll z$. Les 5 autres cas se traitent de manière similaire.
- <u>Total :</u> Soient $x,y\in\mathcal{A}$. Si $x,y\in E$, alors $x\ll y$ ou $y\ll x$. Si $x,y\in\mathcal{C}(E)$, alors $x\ll y$ ou $y\ll x$. Si $x\in E$ et $y=(A|B)\in\mathcal{C}(E)$, alors soit $x\in A$ et $x\ll y$, soit $x\in B$ et $y\ll x$. L'ordre est bien total.

Montrons la densité de E dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que pour $x,y\in\mathcal{A}$ fixés avec $x\ll y$ et $x\neq y$, on cherche $e\in E$ tel que $x\ll e\ll y$. Si $x\in E$, c'est évident (prendre $e=x$). Si $y\in E$, idem. Reste le cas $x,y\in\mathcal{C}(E)$. Notons $x=(A|B)$ et $y=(C|D)$. Comme $x\ll y$, on a $A\subseteq C$, et comme $x\neq y$, on a $C\backslash A\neq\emptyset$. Soit donc $e \in C \backslash A(\subseteq E)$. Dans ce cas, $e \in E \backslash A = B$, donc $x \ll e$. Comme $x \in C$, on a aussi $e \ll y$, soit $x \ll e \ll y$ comme on le souhaitait.

Pour aller plus avant dans cette idée de coupure, on notera que l'amalgame de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$ (c'est d'ailleurs une construction usuelle de $\mathbb{R}$), et on pourra lire l'excellent (mais un peu compliqué à ce stade) papier sur les nombres de Conway.

9 Équations différentielles

9.1 Équations différentielles

Exercise 9.1. Soit g une fonction continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On pose $f : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$. Montrez que f est dérivable et que $f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)g(t)\ \mathrm{d}t$. En déduire que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$. Conclure en résolvant l'équation.

Exercise 9.2 (*Solution*)**.** On peut soit utiliser les expressions trigonométriques, soit les nombres complexes afin de développer le $\sin(x-t)$. Le but est de ne plus avoir de x dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \left(\frac{e^{i(x-t)} - e^{-i(x-t)}}{2i}\right) g(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i} e^{ix} \int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2i} e^{-ix} \int_0^x e^{it} g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

f est donc bien définie et $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On a sa dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2i}\left(ie^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t + e^{ix} \times \frac{g(x)}{e^{ix}}\right) - \frac{1}{2i}\left(-ie^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t + e^{-ix} \times e^{ix} g(x)\right) \\ &= \frac{1}{2} e^{ix} \int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2} e^{-ix} \int_0^x e^{it} g(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \cos(x-t)g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Non seulement on a l'expression souhaitée, mais en plus on constate qu'on peu facilement calculer la dérivée seconde par le même procédé (en repartant de l'avant dernière ligne) :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\left(ie^{ix}\int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t + e^{ix} \times \frac{g(x)}{e^{ix}}\right) + \frac{1}{2}\left(-ie^{-ix}\int_0^x e^{it}g(t)\mathrm{d}t + e^{-ix} \times e^{ix} g(x)\right) \\ &= \frac{2}{2} g(x) - \left(\frac{1}{2i} e^{ix} \int_0^x \frac{g(t)}{e^{it}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2i} e^{-ix} \int_0^x e^{it} g(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= g(x) - \int_0^x \sin(x-t)g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi, f est solution du problème de Cauchy : $f'' + f = g$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

On sait désormais résoudre entièrement cette équation car on vient d'en exhiber une solutions particulière. Les solutions sont exactement les fonctions y telles que :

$$\exists \lambda, \mu, \forall x, y(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin x + f(x)$$

Pour résoudre le problème de Cauchy associé avec $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$, par exemple, il faut et il suffit de prendre $\lambda = \alpha$ et $\mu = \beta$.

9.2 Équations différentielles

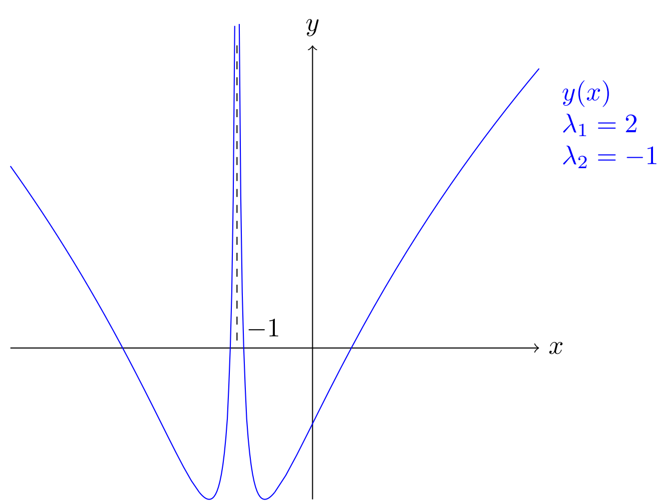
Exercise 9.3. Intégrez l'équation suivante (sur tout intervalle ne contenant pas -1) : $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' - 2 = 0$

Exercise 9.4 (*Solution*)**.** On pose $z = y'$, on a une équation d'ordre 1 en z. La solution homogène est $\lambda \frac{1}{x+1}$, et une méthode de variation de la constante mène à :

$$z(x) = \frac{1}{x+1} \left(2 \ln |1 + x| + \lambda_1\right)$$

On intègre donc pour trouver finalement sur tout intervalle qui ne contient pas -1 :

$$y(x) = \ln^2 |x+1| + \lambda_1 \ln |x+1| + \lambda_2$$



9.3 Équations différentielles

Exercise 9.5. Résoudre sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $|x|y' + (x-1)y = x^3$.

Exercise 9.6 (*Solution*)**.** Sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation revient à $\left(\frac{e^x}{x}y\right)' = xe^x$. Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 - x + \lambda x e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{R}_-^*$, l'équation revient à $(-xe^{-x}y)' = x^3e^{-x}$. On résout alors le problème de la solution particulière en la cherchant de la forme polynôme (de degré 3)$\times e^{-x}$. Les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 + 3x + 6 + \frac{\mu e^x + 6}{x}$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.

Si on souhaite effectué un recollement $\mathcal{C}^1$, on se rend compte (continuité) qu'il faut que $y(0) = 0$ et par suite $\mu = -6$. En outre, on a les dérivées à gauche et à droite de 0 : $-1+\lambda$ et $3+(-6)\times\frac{1}{2} = 0$. Ainsi, $\lambda = 1$ est la seule possibilité. Il existe donc une unique solution $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour cette équation :

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 - x + xe^x \text{ si } x \leq 0 \\ x^2 + 3x + 6 - 6\frac{e^x - 1}{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

9.4 Équations différentielles

Exercise 9.7. Intégrez l'équation différentielle :

$$x^2 + y^2 = 2xyy'$$

Exercise 9.8 (*Solution*)**.** On pose $z = y^2$, alors $x^2 + z = xz'$, ce qu'on résout en $z(x) = \lambda x + x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$. Cela donne donc $y(x) = \pm\sqrt{x^2 + \lambda x}$.

Si on souhaite intégrer cette équation sur $\mathbb{R}$ en entier avec $y \in \mathcal{C}^1$, alors, par continuité, on sait que y garde un signe constant sur tout intervalle où elle ne s'annule pas, et qu'elle se prolonge par continuité en 0 par 0. Ainsi, il existe $\lambda_-, \lambda_+ \in \mathbb{R}$ tels que :

$$y(x) = \begin{cases} \pm\sqrt{x^2 + \lambda_- x} \text{ si } x < 0 \\ \pm\sqrt{x^2 + \lambda_+ x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Supposons $\lambda_- < 0$, alors $y(x)$ n'est pas dérivable en $-\lambda_-$, donc pas $\mathcal{C}^1$. On en déduit $\lambda_- \geq 0$ et pareillement $\lambda_+ \geq 0$. On teste la dérivée en 0 : $y'(x) = \frac{2x + \lambda_\pm}{2\sqrt{x^2 + \lambda_\pm x}}$. Pour que y soit continûment dérivable en 0, on en déduit $\lambda_\pm = 0$, puis $y(x) = x$ ou $y(x) = -x$ sur $\mathbb{R}$ (qui toutes deux fonctionnent).

9.5 Équations différentielles

Exercise 9.9. Soit a un réel non nul. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T \neq 0$. Montrez que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est de période T.

Exercise 9.10 (*Solution*)**.** On sait que les solutions de l'équation différentielle proposée sont de la forme

$$g : x \mapsto \lambda e^{-ax} + e^{-ax}\int_0^x e^{at} f(t)\mathrm{d}t \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Donc pour un réel x fixé :

$$\begin{aligned}g(x+T)-g(x) &= \lambda e^{-ax}(e^{-aT}-1)+e^{-a(x+T)}\left(\int_0^T e^{at}f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{x+T} e^{at}f(t)\mathrm{d}t\right)-e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\mathrm{d}t\\ &= \lambda e^{-ax}(e^{-aT}-1)+e^{-a(x+T)}\int_0^T e^{at}f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On a effectué un changement de variable dans la seconde intégrale avec $u=t-T$.

Ainsi, g est T périodique si et seulement si $\lambda=\frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\int_0^T e^{at}f(t)\mathrm{d}t$. Cette constante existe car $a\neq 0$ et $T\neq 0$. Finalement :

$$g(x)=\left(\frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\int_0^T e^{at}f(t)\mathrm{d}t\right)e^{-ax}+e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\mathrm{d}t$$

9.6 Équations différentielles

Exercise 9.11. On considère l'équation $(1-x^2)y''-xy'+y=0$. Intégrez-la sur $]-1,1[$ en posant $x=\sin t$. Intégrez-la sur $]-\infty,-1[$ puis sur $]1,+\infty[$. Étudiez le problème du recollement.

Exercise 9.12 (*Solution*)**.** En posant $x=\sin t$, on a $z(t)=y(\sin t)$, donc $z'(t)=\cos t y'(\sin t)$ puis $z''(t)=\cos^2 t y''(\sin t)\sin t y'(\sin t)$. Il s'ensuit que l'équation équivaut à $z''+z=0$, et on trouve les solutions de la forme $z(t)=A\sin t+B\cos t$, ce qui redonne $y(x)=Ax+B\sqrt{1-x^2}$ en utilisant l'arcsin.

Pour $x>1$, on peut poser $x=\cosh t$, et on a $z''-z=0$, puis $z(t)=\alpha\cosh t+\beta\sinh t$. Cela donne $y(x)=\alpha x+\beta\sqrt{x^2-1}$. En remarquant que si y est solution de l'équation, alors $x\mapsto y(-x)$ aussi, on trouve que les solutions pour $x<-1$ sont précisément de la même forme.

Un recollement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas possible, par contre on peut construire plein de recollements continus.

9.7 Équations différentielles

Exercise 9.13 (Fonctions de Bessel de première espèce)**.** On pose l'équation différentielle non-linéaire $(E_n): x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$.

Soit la suite de fonction $(J_n)_n\in\mathcal{F}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que J_0 soit solution de (E_0) et $J_{n+1}(x)=\frac{nJ_n(x)}{x}-J_n'(x)$. Montrez que J_n est solution de (E_n). Montrez que $J_{n+1}(x)+J_{n-1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)$. En déduire que $J_{n+1}-J_{n-1}=-2J_n'$ puis $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^nJ_n(x)\right)=x^nJ_{n-1}(x)$. Calculez $J_n(0)(=0)$ pour $n\neq 0$.

Exercise 9.14 (*Solution*)**.** On va raisonner par récurrence. On fixe $f=\frac{nJ_n(x)}{x}-J_n'(x)$. Il s'agit de montrez que f vérifie (E_{n+1}). Calculons déjà J_n''' en dérivant (E_n) :

$$\forall x,\ 2xJ_n''+x^2J_n'''+J_n'+xJ_n''+2xJ_n+(x^2-n^2)J_n'=0$$

Ainsi :

$$\forall x,\ -x^2 J_n''' = 3xJ_n'' + (x^2 - n^2 + 1)J_n' + 2xJ_n$$

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) &= xnJ_n'' - 2nJ_n' + \frac{2nJ_n}{x} - x^2 J_n''' \\ &= xJ_n''(n+3) + J_n'(x^2 - n^2 - 2n + 1) + J_n\left(\frac{2n}{x} + 2x\right) \end{aligned}$$

Puis :

$$xf'(x) = -xJ_n'' + nJ_n' - \frac{n}{x}J_n$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &x^2 f'' + xf' + (x^2 - n^2)f \\ &\quad = xJ_n''(n+2) + J_n'(x^2 - n^2 - n + 1) + J_n\left(\frac{x}{n} + 2x\right) - (x^2 - (n+1)^2)\left(\frac{nJ_n}{x} - J_n'\right) \\ &\quad = xJ_n''(n+2) + J_n'(n+2) + (x^2 - n^2)J_n\frac{n+2}{x} \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

On obtient la dernière égalité en multipliant la ligne par $\frac{x}{n+2}$, et en utilisant l'hypothèse de récurrence : J_n est solution de (E_n). On a bien montré que $J_{n+1} = \frac{nJ_n}{x} - J_n'$ est solution de (E_{n+1}).

Grâce à cela, on exprime $\frac{2nJ_n}{x} - J_{n+1}$ en fonction de J_{n-1}. D'une part : $\frac{2nJ_n}{x} - J_{n+1} = \frac{nJ_n}{x} + J_n'$. Ensuite, on a aussi : $\frac{nJ_n}{x} = \frac{n(n-1)J_{n-1}}{x^2} - \frac{nJ_{n-1}'}{x}$. On peut aussi dériver l'égalité pour obtenir : $J_n' = \frac{(n-1)J_{n-1}'}{x} - \frac{(n-1)J_{n-1}}{x^2} - J_{n-1}''$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{2nJ_n}{x} - J_{n+1} &= \frac{nJ_n}{x} + J_n' \\ &= \frac{n(n-1)J_{n-1}}{x^2} - \frac{nJ_{n-1}'}{x} + \frac{(n-1)J_{n-1}'}{x} - \frac{(n-1)J_{n-1}}{x^2} - J_{n-1}'' \\ &= \frac{-1}{x^2}\left(x^2 J_{n-1}'' + xJ_{n-1}' - (n-1)^2 J_{n-1}\right) \\ &= J_{n-1} \end{aligned}$$

On a utilisé (E_{n-1}) pour obtenir la dernière ligne.

Ensuite, on a un système de deux équations. On en déduit :

$$\begin{cases} J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) \\ J_{n-1} - J_{n+1} = 2J_n' \end{cases}$$

Pour calculer la dérivée souhaitée, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^n J_n(x)\right) &= nx^{n-1}J_n(x) + x^n J_n'(x)\\ &= \frac{x^n}{2}\left(\frac{2nJ_n(x)}{x} + 2J_n'\right)\\ &= x^n J_{n-1}(x)\end{aligned}$$

On a simplement sommé les deux égalités précédentes pour obtenir la dernière ligne.

La valeur de $J_n(0)$ pour $n \neq 0$ peut être obtenue en faisant tendre $x \to 0$ dans l'équation différentielle. On obtient immédiatement que $-n^2 J_n(0) = 0$. On notera aussi que $J_n'(0) = 0$ pour $n > 1$ grâce aux égalités précédentes. En fait, on peut aller beaucoup plus loin dans le développement de Taylor en 0 : $J_n(x) \in o(x^{n-1})$ et même $J_n(x) \in O(x^{n-1})$, voire $J_n(x) = \frac{1}{n!2^n}x^n + O(x^{n+2})$.

Les fonctions de Bessel de première espèce ont encore plein d'autres propriétés. On pourra les voir en Spé par exemple. Il en existe aussi de "seconde espèce", mais elles sont bien plus loin du programme. Ce sont des réponses à des problèmes physiques de mécaniques ondulatoire en particulier. On notera la formule générale (qui donne les valeurs explicites de J_0) :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - x\sin t)\mathrm{d}t$$

9.8 Équations différentielles

Exercise 9.15. Soit (E) une équation différentielle homogène linéaire du 2^{nd} ordre (pas à coefficients constant) dont on connaît une solution y_0 qui ne s'annule pas. On pose $z : y(x) = z(x)y_0(x)$. Résolvez (E).

Exercise 9.16 (*Solution*)**.** On pose $(E) : a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0$ d'inconnue la fonction y. En posant z tel que $y = z.y_0$, on a :

$$\begin{aligned}ay'' + by' + cy &= a(z.y_0)'' &&+ b(z.y_0)' &&+ cz.y_0\\ &= a(z''.y_0 + 2z'.y_0' + z.y_0'') &&+ b(z'.y_0 + z.y_0') &&+ cz.y_0\\ &= (ay_0)z'' + (2ay_0' + by_0)z' + (ay_0'' + by_0' + cy_0)z\end{aligned}$$

Comme y_0 est solution, on obtient donc que z' vérifie l'équation linéaire en f du premier ordre : $a(x)y_0(x)f'(x) + (2a(x)y_0'(x) + b(x)y_0(x))f = 0$. Ce qu'on sait résoudre !

9.9 Équations différentielles

Exercise 9.17. Soit q une fonction $\mathcal{C}^1$ tels que : $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, q(x) > 0$ et $q'(x) > 0$. Montrez que les solutions de $y'' + q(x)y = 0$ sont bornées au voisinage de $+\infty$. (Considérez $z(x) = y^2(x) + \frac{y'(x)^2}{q(x)}$ pour $x \geq A$).

Exercise 9.18 (*Solution*)**.** Si y est solution de l'équation, on a alors :

$$\begin{aligned} z'(x) &= 2y'y - y^2\frac{q'}{q^2} + 2y'y''\frac{1}{q} \\ &= -y'^2\frac{q'}{q^2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Par suite, z est une fonction positive et décroissante au voisinage de $+\infty$: elle y est bornée. L'inégalité $\forall x \geq A, 0 \leq y^2(x) \leq z(x)$ prouve alors que y est bornée au voisinage de $+\infty$.

9.10 Équations différentielles

Exercise 9.19. Avec $u = x' + iy'$, résolvez :

$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases} \qquad \text{(avec conditions de Cauchy en 0)}$$

Exercise 9.20 (*Solution*)**.** Avec $u = x' + iy'$, on a $u' = -i\omega u$, puis :

$$u = u_0 e^{i\omega t} = (x'(0)\cos\omega t - y'(0)\sin\omega t) + i\,(x'(0)\sin\omega t + y'(0)\cos\omega t)$$

Ainsi, on obtient en intégrant :

$$x(t) = \frac{x'(0)}{\omega}\sin\omega t + \frac{y'(0)}{\omega}\cos\omega t + x(0) - \frac{y'(0)}{\omega}$$

Et :

$$y(t) = -\frac{x'(0)}{\omega}\cos\omega t + \frac{y'(0)}{\omega}\sin\omega t + y(0) + \frac{x'(0)}{\omega}$$

L'équation sur z s'intègre indépendamment en $z(t) = z'(0)t + z(0)$.

9.11 Équations différentielles

Exercise 9.21. On considère l'équation $y' = y + x^2y^2$ pour laquelle on admet le théorème suivant : pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple (I, f) appelé *solution maximale* tel que f soit solution de l'équation sur I avec $f(x_0) = y_0$ et f n'admet pas de prolongement (qui reste solution) à un intervalle qui contient strictement I.

Donner l'expression des solutions maximales de cette équation.

Exercise 9.22 (*Solution*)**.** On fixe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et (I, f) l'unique solution maximale associée. Si $y_0 = 0$, alors la solution $f = 0$ et $I = \mathbb{R}$ convient, et par unicité, on a $(I, f) = (\mathbb{R}, x \mapsto 0)$. On se place du coup dans le cas ou f ne s'annule pas sur I :

$$\frac{f'}{f} - \frac{1}{f} = x^2$$

Dès lors, $g = {}^1\!/\!_f$ vérifie $g' + g = x^2$. En intégrant, il existe $\lambda : g(x) = \lambda e^{-x} - x^2 + 2x - 2$. Or on a aussi $g(x_0) = {}^1\!/\!_{y_0}$, donc $\lambda = e^{x_0}\left(\frac{1}{y_0} + x_0^2 - 2x_0 + 2\right)$.

Finalement, $f(x) = \frac{1}{\lambda e^{-x} - x^2 + 2x - 2}$ sur le plus grand intervalle (contenant x_0) sur lequel le dénominateur ne s'annule pas.

Ce raisonnement permet de traiter les équations différentielles, dites de Bernoulli, de la forme : $y' = a(x)y + b(x)y^n$.

9.12 Équations différentielles

Exercise 9.23. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Montrez qu'il existe au plus une application $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que (puis appliquez avec $f = \cos$) :

$$\forall x, g(x) = \int_0^x (x - t)g(t)\mathrm{d}t + f(x)$$

Exercise 9.24 (*Solution*)**.** On pose F une primitive de $t \mapsto tg(t)$ et G une de $t \mapsto g(t)$. On a alors $g(x) = xG(x) - xG(0) - F(x) + F(0) + f(x)$.

En dérivant deux fois, on obtient que g est solution au problème de Cauchy $g''(x) - g(x) = f''(x)$ et $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$. De fait, si une solution existe, alors elle est unique (attention, elle n'existe pas forcément).

Les solutions homogènes sont de la forme $\lambda e^{-x} + \mu e^x$, donc pour $f = \cos$, on obtient $g'' - g = -\cos$, puis $g(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^x + \frac{1}{2}\cos x$. Avec les conditions initiales, on trouve $\lambda = \mu = \frac{1}{4}$, d'où $g(x) = \frac{1}{2}(\cosh x + \cos x)$.

10 Espaces euclidiens

10.1 Espaces euclidiens

Exercise 10.1. Soit E un espace euclidien. Soient $(u_i)_i$ unitaires tels que $\forall i \neq j, (u_i|u_j) = \alpha \neq 1$. On cherche α quand $(u_i)_i$ est liée.

Montrez que $\sum_i u_i = 0$, puis en déduire α.

Donnez un exemple (en dimension 2, voire 3) d'une telle famille et déterminer la taille d'une famille équi-angulaire.

Exercise 10.2 (*Solution*)**.** On sait que la famille est liée. Soit $(\lambda_i)_i$ tels que $\sum_i \lambda_i u_i = 0$. Pour tout j, on a d'une part : $(\sum_i \lambda_i u_i | u_j) = \lambda_j + \sum_{i \neq j} \alpha\lambda_i$; et d'autre $(\sum_i \lambda_i u_i | u_j) = (0|u_j) = 0$. On appelle $\Lambda = \sum_i \lambda_i$, et on a donc : $\lambda_j + \alpha(\Lambda - \lambda_j) = 0$. Ainsi, on obtient :

$$\lambda_j = \frac{-\alpha}{1 - \alpha}\Lambda$$

C'est une valeur qui ne dépend pas de j, donc on peut poser $\lambda = \lambda_1 = ... = \lambda_n$ et on obtient $\sum_i \lambda_i u_i = \sum_i \lambda u_i = \lambda \sum_i u_i$. Finalement : $\sum_i u_i = 0$.

Ainsi, on peut maintenant regarder l'égalité sur la norme de $\sum_i u_i$:

$$\begin{aligned} 0 &= \left|\left|\sum_i u_i\right|\right|^2 \\ &= \left(\sum_i u_i \middle| \sum_j u_j\right) \\ &= \sum_{i,j}(u_i|u_j) \\ &= \sum_{i\neq j}\alpha + \sum_{i=j} 1 \\ &= n(n-1)\alpha + n \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement $\alpha = \frac{-1}{n-1}$. **Attention, n est ici la taille de la famille, pas la dimension de l'espace E !** On sait que la famille est liée, donc $\dim(\mathrm{Vect}((u_i)_i)) \leq n-1$. En dimension 2, on peut par exemple prendre un polygone régulier (disons un triangle équilatérale), et prendre u_i les vecteurs du centre du polygone à ces sommets. En dimension 3, on a la même chose avec les polyèdres réguliers.

10.2 Espaces euclidiens

Exercise 10.3. Travail sur la transposée de $f : E \to F$, à savoir ${}^t f : F^* \to E^*$ définie par ${}^t f(l) = l \circ f$.

10.3 Espaces euclidiens

Exercise 10.4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$. Montrez que φ est un produit scalaire si et seulement si $tr(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.

Exercise 10.5 (*Solution*)**.** Quoi qu'il arrive, φ est bi-linéaire et symétrique, avec $\varphi(0,0) = 0$, quelque soit les valeurs de a,b et c.

φ est définie positive si et seulement si $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) > 0$ pour tout x_1, x_2. Or on a :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

Pour $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient $a > 0$. Pour $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient $c > 0$. Ainsi, $tr(A) > 0$.

Pour le déterminant, on peut utiliser un argument de Cauchy : on regarde le polynôme de degré 2 $at^2 + 2bt + c = \varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right) > 0$. Comme ce polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (il est toujours > 0), son discriminant est strictement négatif, or $\Delta = 4b^2 - 4ac = -4\det(A)$. Donc $\det(A) > 0$.

Travaillons sur la réciproque maintenant. Si $\det(A) > 0$, alors $\varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ garde un signe (strict) constant quand t varie. En particulier, pour $t = 0$, on en déduit que ce polynôme est du signe de sa valeur en 0 : c. Or, comme $tr(A) = a + c > 0$ et $\det(A) = ac - b^2 > 0$, on en déduit $ac > 0$ d'où a et c de même signe et comme $a + c > 0$, $a > 0$ et $c > 0$, et finalement $\forall y, \varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right) > 0$. En outre, $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = a > 0$. Ainsi, soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Si $x_2 \neq 0$, alors soit $t = \frac{x_1}{x_2}$, on a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, donc :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_2^2 \varphi\left(\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right) > 0$$

Si $x_2 = 0$, alors :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) > 0$$

On a prouvé que φ est un produit scalaire si et seulement si $tr(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.

10.4 Espaces euclidiens

Exercise 10.6. On pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculez $\{u\}^\perp$, $\{v\}^\perp$ et $\{u, v\}^\perp$.

Exercise 10.7 (*Solution*)**.** $\dim\{u\}^\perp = 2$, et on a une base évidente $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$\dim\{v\}^\perp = 2$, et on a une base $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Pour trouver une telle base, on prend d'abord un vecteur orthogonal à v, disons $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ensuite, on cherche un vecteur qui est orthogonal à v et à w. Pour ce faire, nommons ce vecteur $e = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On doit respecter les deux égalités $(v|e) = a + b + 2c = 0$

et $(w|e) = 2b - c = 0$. On sait aussi qu'on peut choisir l'un des coefficients librement (non nul) car $\dim\{v, w\}^\perp = 1$. Le plus simple est de prendre $b = 1$, alors $c = 2$ d'après $2b - c = 0$, et $a = -5$ d'après $a + b + 2c = 0$.

$\dim\{u, v\}^\perp = 1$ car u et v sont libres, et on a une base $(f) = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$.

Alors on doit avoir $(u|f) = a = 0$ et $(f|v) = a + b + 2c = 0$. Ainsi, $f = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10.5 Espaces euclidiens

Exercise 10.8. Soit u et v deux vecteurs distincts d'un espace euclidien E tels que $||u|| = ||v||$. Soit $H = \{x \in E \ ; \ ||u - x|| = ||v - x||\}$. Faites un dessin dans le plan et dans l'espace. Montrez que $H = \{u - v\}^\perp$, en déduire la dimension de H. Montrez que v est l'image de u par la symétrie orthogonale vis-à-vis de H.

Exercise 10.9 (*Solution*)**. Il est fortement conseillé de faire des dessins !** On obtient la construction de la médiatrice et du plan médiateur.

On a la suite d'équivalence :

$$\begin{aligned}
&x \in H \\
\Leftrightarrow &||u - x|| = ||v - x|| \\
\Leftrightarrow &(u - x|u - x) = (v_x|v_x) \\
\Leftrightarrow &||u||^2 - 2(u|x) + ||x||^2 = ||v||^2 - 2(v|x) + ||x||^2 \\
\Leftrightarrow &(u|x) = (v|x) \\
\Leftrightarrow &(u - v|x) = 0
\end{aligned}$$

On a utilisé l'hypothèse $||u|| = ||v||$. Ainsi, on a bien $H = \{u - v\}^\perp$. On en déduit que H est un hyperplan, que sa dimension est $\dim E - 1$, et qu'on peut fabriquer une base orthogonale de E en prenant une base orthogonale de H, disons $(e_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ et en lui adjoignant un vecteur normal à H, par exemple $u - v$. Alors, la symétrie orthogonale à H est l'application linéaire s_H qui s'exprime dans cette base par :

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall i, s_H(e_i) = e_i \\ s_H(u - v) = -(u - v) \end{array} \right.$$

On exprime maintenant u dans cette base : $u = \sum_i \frac{(u|e_i)}{||e_i||^2} e_i + \frac{(u|u-v)}{||u-v||^2}(u - v)$.

Dès lors, on peut calculer $s_H(u)$:

$$\begin{aligned}
s_H(u) &= \sum_i \frac{(u|e_i)}{||e_i||^2} s_H(e_i) + \frac{(u|u-v)}{||u-v||^2} s_H(u-v) \\
&= \sum_i \frac{(u|e_i)}{||e_i||^2} e_i + \frac{-(u|u-v)}{||u-v||^2}(u-v) \\
&= \sum_i \frac{(v|e_i)}{||e_i||^2} e_i + \frac{(v|u-v)}{||u-v||^2}(u-v) \\
&= v
\end{aligned}$$

Pour le terme de gauche, on a utilisé $e_i \perp (u-v)$, donc $(u|e_i) - (v|e_i) = 0$. Pour le deuxième terme, on a utilisé $(v|u-v) = (v|u) - ||v||^2 = -\big(||u||^2 - (v|u)\big) = -(u-v|u)$.

10.6 Espaces euclidiens

Exercise 10.10. Soit E un espace euclidien. Montrez qu'une application linéaire qui est orthogonale et auto-adjointe est une symétrie orthogonale. "auto-adjointe" signifie que $\forall x, y, (x|f(y)) = (f(x)|y)$ et "orthogonale" $\forall x, y, (f(x)|f(y)) = (x|y)$.

Exercise 10.11 (*Solution*)**.** Soit g l'application en question.

On pose $(e_i)_i$ une base orthonormée de Ker $(g - Id)$ et on la complète en une base orthonormée de E : $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_k, f_{k+1}, ..., f_n)$. On veut montrer que $\forall i, g(e_i) = e_i$ et $\forall j, g(f_j) = -f_j$. La première égalité est évidente dans la mesure où $e_i \in$ Ker $(g - Id)$. Soit maintenant p fixé. On calcule les coefficients de $g^2(f_p)$ dans la base $\mathcal{B}$ grâce au produit scalaire. On note que $(f(f(x))|y) = (f(x)|f(y)) = (x|y)$, donc :

$$\forall i, (g^2(f_p)|e_i) = (f_p|e_i) = 0$$

$$\forall j, (g^2(f_p)|f_j) = (f_p|f_j) = \delta_{pj}$$

Donc $g^2(f_p) \in \mathrm{Vect}(f_p)$. On pose λ tel que $g(f_p) = \lambda f_p$. On a alors $(g^2(f_p)|f_p) = \lambda^2$, d'où $\lambda^2 = 1$ par l'égalité au-dessus. Comme $f_p \notin$ Ker $(g - Id)$ d'après la manière dont on l'a définit, on obtient que $\lambda = -1$, et ainsi $g(f_p) = -f_p$. g est bien une symétrie orthogonale.

10.7 Espaces euclidiens

Exercise 10.12 (Fonction scalaire de Leibnitz)**.** Soient $(a_i)_i \in \mathbb{R}^n$ de somme non nulle et $(A_i)_i \in E^n$ d'un espace euclidien E. On construit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \sum_i a_i MA_i^2 = \sum_i a_i ||M - A_i||^2$. On pose G le barycentre de $\{(A_i, a_i)\}_i$, c'est-à-dire l'unique point tel que $\sum_i a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. En déduire que $f(M) = f(G) + (\sum_i a_i)\, MG^2$.

Soient A et B deux points du plan et a et b deux réels. Quel est le lieu des points M du plan qui vérifient $aAM^2 + bBM^2 = k$ où k est une constante ?

Exercise 10.13 (*Solution*)**.** On regarde $\left(\sum_i a_i\right) MG^2$ grâce la définition de G, qu'on peut réécrire pour plus de clarté $\sum_i a_i G = \sum_i a_i A_i$:

$$\begin{aligned}
f(G) &= \sum_i a_i \left(||G||^2 + ||A_i||^2 - 2(G|A_i)\right) \\
&= \sum_i a_i ||A_i||^2 + \sum_i a_i ||G||^2 - 2\left(G \middle| \sum_i a_i A_i\right) \\
&= \sum_i a_i ||A_i||^2 + \sum_i a_i ||G||^2 - 2\left(G \middle| \sum_i a_i G\right) \\
&= \sum_i a_i ||A_i||^2 + \sum_i a_i ||G||^2 - 2\sum_i a_i (G|G) \\
&= \sum_i a_i \left(||A_i||^2 - ||G||^2\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on peut calculer que :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_i a_i\right) MG^2 &= \left(\sum_i a_i\right) \left(||M||^2 + ||G||^2 - 2(M|G)\right) \\
&= \left(\sum_i a_i\right) ||M||^2 + \sum_i a_i ||G||^2 - 2\left(M \middle| \sum_i a_i G\right) \\
&= \left(\sum_i a_i\right) ||M||^2 + \sum_i a_i ||G||^2 - 2\left(M \middle| \sum_i a_i A_i\right) \\
&= \sum_i a_i \left(||M||^2 + ||A_i||^2 - 2(M|A_i)\right) - \sum_i a_i ||A_i||^2 + \sum_i a_i ||G||^2 \\
&= \left(\sum_i a_i\right) MA_i^2 - f(G)
\end{aligned}$$

On obtient bien la formule désirée.

En particulier, si on cherche l'ensemble des points M du plan tel que $aAM^2 + bBM^2 = k$, en supposant $a + b \neq 0$, on obtient que correspond aux points du plan tels que $(a+b)MG^2 = \textit{constante}$, c'est donc un cercle de centre G (le barycentre de $\{(A,a);(B,b)\}$). Son rayon vaut $\sqrt{\frac{k-f(G)}{a+b}} = \sqrt{\frac{k-(aAG^2+bBG^2)}{a+b}}$. Dans les cas extrêmes, ce cercle peut se réduire au point G où même à l'ensemble vide (théorème de Leibnitz).

10.8 Espaces euclidiens

Exercise 10.14. Pour i, j, calculez $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2^k}\right)^i \left(\frac{1}{2^k}\right)^j$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, calculez $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} P\left(\frac{1}{2^k}\right) Q\left(\frac{1}{2^k}\right)$. On note $(P|Q)$ cette quantité. Montrez que c'est un produit scalaire. Montrez qu'il n'existe pas de $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = P(0)$. Commentez.

Exercise 10.15 (*Solution*)**.** Fixons i, j. Alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2^k}\right)^i\left(\frac{1}{2^k}\right)^j = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{1+i+j}}\right)^k = \frac{1}{1-1/2^{1+i+j}} = \frac{2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1}$$

Ensuite, écrivons $P = \sum_i p_i X_i$ et $Q = \sum_j q_j X^j$, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} P\left(\frac{1}{2^k}\right) Q\left(\frac{1}{2^k}\right) = \sum_{i,j} p_i q_j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2^k}\right)^i\left(\frac{1}{2^k}\right)^j = \sum_{i,j} \frac{p_i q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1}$$

Cette quantité définit bien un produit scalaire :

- $(\lambda P|Q) = \sum_{i,j} \frac{\lambda p_i q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} = \lambda \sum_{i,j} \frac{p_i q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} = \lambda(P|Q)$
- $(P+R|Q) = \sum_{i,j} \frac{(p_i+r_i) q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} = \sum_{i,j} \frac{p_i q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} + \sum_{i,j} \frac{r_i q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} = (P|Q) + (R|Q)$
- $(P|Q) = \sum_{i,j} \frac{p_i q_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} = \sum_{i,j} \frac{q_i p_j 2^{1+i+j}}{2^{1+i+j}-1} = (Q|P)$
- $(P|P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} P^2\left(\frac{1}{2^k}\right) \geq 0$ (tous les termes sont positifs)
- Si $(P|P) = 0$, alors on a une somme de termes positifs qui est nulle, donc tous les termes sont nuls : $\forall i,\ \frac{1}{2^k} P^2\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$, donc P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = P(0)$. Alors, notons $M = \sup_{[0,1]} |Q|$ qui existe car Q est continue. Soit $P_n = (-1)^{n+1} 2^{\frac{n(n+1)}{2}} (X-1)\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X - \frac{1}{2^2}\right) ... \left(X - \frac{1}{2^n}\right)$, le polynôme qui vaut 0 sur tous les $\frac{1}{2^i}$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ et 1 en 0. Pour $i \leq n < k$, on a : $\left|\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^i}\right| < \left|0 - \frac{1}{2^i}\right| = \frac{1}{2^i}$, donc $|P_n(1/2^k)| \leq |P_n(0)| = 1$ en effectuant le produit. Dès lors :

$$\forall n,\ |(P_n|Q)| = \left|\sum_{k>n} \frac{1}{2^k} P_n\left(\frac{1}{2^k}\right) Q\left(\frac{1}{2^k}\right)\right| \leq \sum_{k>n} \frac{1}{2^k} \times 1 \times M = \frac{M}{2^{n+1}} \to 0$$

Cela contredit l'hypothèse $(P_n|Q) = P_n(0) = 1$. Dès lors, il ne peut pas exister de Q tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = P(0)$.

Autre méthode, proposée par Mathilde Colin de Verdière : Si Q est tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = P(0)$, alors en particulier, $(XQ|Q) = (XQ)(0) = 0$. Sauf que $(XQ|Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} Q^2\left(\frac{1}{2^k}\right)$ est une somme de termes positifs. Donc si cette somme est nulle, alors tous les termes sont nuls, et en particulier : $\forall k,\ Q^2\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$, donc Q a une infinité de racines. Il s'ensuit que $Q = \vec{0}$ (le polynôme nul). Mais alors $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = (P|\vec{0}) = 0$, ce qui n'est pas ce qu'on veut. Ainsi, il n'est pas possible de trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ (P|Q) = P(0)$.

Cela donne un produit scalaire très étrange : il contrevient au théorème de Riesz. Le théorème de Riesz dit que si E est de dimension finie, toute forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ s'écrit comme $\varphi = \langle x|\cdot\rangle$ pour un certain $x \in E$. Ici, on a un espace $\mathbb{R}[X]$ (de dimension infinie) et une forme linéaire $\phi : P \mapsto P(0)$ qui ne s'écrit pas comme "un produit scalaire contre quelque chose". On a donc montré que le théorème de Riesz n'est plus vrai en dimension infinie. Il existe des versions du théorème de Riesz en dimension infinie, mais elles sont bien plus compliquées.

Notons que tout argument montrant que trouver Q (tel que $\forall P,\ (P|Q) = P(0)$) est impossible doit utiliser une infinité de dimension : nos arguments doivent échouer en dimension finie. Dans la première méthode, on voit bien qu'on a besoin d'une infinité de dimension pour construire les P_n. Pour la deuxième méthode, c'est plus subtile : imaginons qu'on essaye de faire fonctionner cet argument dans F de dimension finie (on peut réfléchir comme si $F \subseteq \mathbb{R}_n[X]$ pour un certain n, ce n'est pas forcément le cas, mais l'idée est la même) alors il est possible que $XQ \notin F$, ce qui fait échouer l'argument. C'est parce qu'on peut **toujours** prendre XQ dans $\mathbb{R}[X]$ que l'argument y fonctionne.

N.B. : On peut se poser la même question avec d'autres produits scalaires. Avec le produit scalaire terme à terme, $\langle P|Q\rangle = \sum_k p_k q_k$, prendre $Q = 1$ donne $\langle P|Q\rangle = P(0)$. Avec le produit scalaire intégral, $\langle P|Q\rangle = \int_0^1 PQ$, ce n'est pas possible : toujours avec $M = \sup_{[0,1]} |Q|$, et $P_n = (1-X)^n$, on a $|\langle P_n|Q\rangle| \leq \int_0^1 M(1-x)^n \mathrm{d}x = \frac{M}{n+1} \to 0$ alors que $P_n(0) = 1$.

10.9 Espaces euclidiens

Exercise 10.16. On pose $\widehat{u,v} = \arccos\left(\frac{(u|v)}{||u||\ ||v||}\right)$. Si $\dim E \geq 3$, montrez qu'il n'existe pas $u_1, u_2, u_3 \in E$ tels que $\forall i \neq j,\ \widehat{u_i, u_j} > \frac{2\pi}{3}$.

Exercise 10.17 (*Solution*)**.** L'angle ne change pas en renormalisant les vecteurs, donc on peut choisir u_1, u_2, u_3 de norme 1.

Si u_1, u_2 et u_3 sont sur une même droite, i.e. $\dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = 1$, alors $u_i = \pm u_j$ car les vecteurs sont unitaires. Donc l'angle entre u_i et u_j est 0 si $u_i = u_j$ ou π si $u_i = -u_j$. Mais si deux des angles valent π, alors le troisième vaut 0 : disons que $\widehat{u_1, u_2} = \widehat{u_1, u_3} = \pi$, alors $u_2 = -u_1 = u_3$, donc $\widehat{u_2, u_3} = 0$.

En dimension 2, les vecteurs unitaires correspondent à des points du cercle unité. il n'est pas possible de placer 3 points à strictement plus d'un tiers de cercle les uns des autres (un dessin fonctionne).

En dimension 3, considérons u_3', le projeté orthogonal de u_3 dans le plan $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Complétons (u_1) et une base orthonormée (u_1, e_2) de $\mathcal{P}$. On a $u_3' = (u_3|u_1)u_1 + (u_3|e_2)e_2$. Donc $(u_3'|u_1) = (u_3|u_1)$. Mais par un raisonnement analogue : $(u_3'|u_2) = (u_3|u_2)$. Donc on a trois vecteurs u_1, u_2, u_3' en dimension 2 avec des angles de strictement plus que $\frac{2\pi}{3}$: ce n'est pas possible.

Finalement, comme on n'a que trois vecteurs, l'espace qu'ils engendre est de dimension au plus 3 : on a traité tous les cas.

On pourra aussi essayer de montrer qu'une famille $(u_1, ..., u_p)$ qui est obtuse, i.e. $(u_i|u_j) \leq 0$, vérifie toujours $p \leq n+1$ où $n = \dim \mathrm{Vect}(u_1, ..., u_p)$.

10.10 Espaces euclidiens, Cauchy-Schwartz

Exercise 10.18. Soit E un espace euclidien avec son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $P \in \mathscr{L}(E)$ de norme ≤ 1 (i.e. $\forall x \in E, ||Px|| \leq ||x||$) et auto-adjoint ($\forall x, y \in E, \langle x, Py \rangle = \langle Px, y \rangle$). Montrez que $(x|y)_{P,\lambda} = \langle x \,|(id_E - \lambda P)y \,\rangle$ est un produit scalaire pour tout $0 < \lambda < 1$.

Exercise 10.19 (*Solution*)**.** $(\cdot|\cdot)_{P,\lambda}$ est linéaire à gauche. En outre, on a, comme P est auto-adjoint :

$$(y|x)_{P,\lambda} = \langle y, x \rangle - \lambda \langle y, Px \rangle = \langle x, y \rangle - \lambda \langle x, Py \rangle = (x|y)_{P,\lambda}$$

Ainsi, $(\cdot|\cdot)_{P,\lambda}$ est symétrique. Cela montre que $(\cdot|\cdot)_{P,\lambda}$ est bilinéaire.

Soit $x \in E$, alors, d'après Cauchy-Schwartz et l'inégalité sur la norme de P :

$$(x|x)_{P,\lambda} = ||x||^2 - \lambda \langle x, Px \rangle \geq ||x||^2 - ||Px|| \times ||x|| \geq ||x||^2 - ||x|| \times ||x|| = 0$$

Ainsi, $(\cdot|\cdot)_{P,\lambda}$ est positive. Vérifions qu'elle est définie positive. Soit $u \neq \vec{0}$ tel que $(x|x)_{P,\lambda} = 0$, alors, par Cauchy-Schwartz :

$$\frac{1}{\lambda}||x||^2 = \langle x, Px \rangle \leq ||x|| \times ||Px||$$

Il s'ensuit que : $\frac{||Px||}{||x||} \geq \frac{1}{\lambda}$, donc la norme de P est plus grande que $\frac{1}{\lambda} > 1$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, on en déduit que $(\cdot|\cdot)_{P,\lambda}$ est bien définie positive : c'est un produit scalaire.

10.11 Espaces euclidiens, Cauchy-Schwartz

Exercise 10.20. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Prouvez que $(x + 2y + 3z)^2 \leq 14$ et étudiez les cas d'égalité.

On suppose maintenant que $x^2+2y^2+3z^2 \leq 1$. Prouvez que $(x+y+z)^2 \leq {}^{11}/_{6}$ (on pourra poser $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ et montrez qu'il s'agit d'un produit scalaire).

Exercise 10.21 (*Solution*)**.** On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz avec :

$$(x+2y+3z)^2 = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)^2 \leq \left|\left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right|\right|^2 \left|\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right|\right|^2 \leq 1 \times (1^2+2^2+3^2) = 14$$

Le cas d'égalité est obtenu lorsque $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Inversement, φ est bien un produit scalaire (on peut regarder l'exercice sur les produits scalaires issus de matrices 2×2), donc on peut l'utiliser pour regarder l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur le produit scalaire ente $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$:

$$(x+y+z)^2 = \varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)^2 \leq \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\|_\varphi^2 \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\|_\varphi^2 \leq 1\times(1^2+2\times{}^1\!/_2{}^2+3\times{}^1\!/_3{}^2) = {}^{11}\!/_6$$

10.12 Espaces euclidiens, Cauchy-Schwartz

Exercise 10.22. Soient $a < b$ deux réels. Établissez l'inégalité suivante puis ses cas d'égalité :

$$\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

Exercise 10.23 (*Solution*)**.** On peut écrire l'inégalité de Cauchy-Schwartz avec le produit scalaire sur les fonctions $(f|g) = \int_a^b fg$. On regarde le produit scalaire entre f et $\mathbb{1} : x \mapsto 1$:

$$\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 = (f|\mathbb{1})^2 \leq \int_a^b 1^2\mathrm{d}t \times \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t = (b-a)\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

10.13 Espaces euclidiens, Cauchy-Schwartz

Exercise 10.24. Soit n un entier. Prouvez que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), tr(A) \leq \sqrt{n}\sqrt{tr({}^tAA)}$.

Exercise 10.25 (*Solution*)**.** On sait qu'on a un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ via $(A|B) = tr({}^tAB)$ En particulier, on peut faire le produit scalaire entre A et I_n puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$tr({}^tI_nA) \leq \sqrt{tr({}^tI_nI_n)}\sqrt{tr({}^tAA)} = \sqrt{n}\sqrt{{}^tAA}$$

10.14 Espaces euclidiens, Cauchy-Schwartz

Exercise 10.26. Montrez l'inégalité de Minkowski ((a_i) et (b_i) des réels) : $\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$.

Exercise 10.27 (*Solution*)**.** Il s'agit de montrer la version itérée d'une inégalité déjà fort utile : $a^2 + b^2 \geq 2ab$. En effet, cette inégalité revient à $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, ce qui est le cas (le membre de gauche étant $(a-b)^2$). On pose $A = \sum_k a_k^2$ et idem pour B. On a donc : $\sum_k (a_k+b_k)^2 = A + B + 2\sum_k a_kb_k$; et à droite : $(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2 = A + B + 2\sqrt{AB}$. On veut donc comparer $\left(\sum_k a_kb_k\right)^2$ et $AB = \left(\sum_k a_k^2\right)\left(\sum_k b_k^2\right)$. C'est exactement l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $\mathbb{R}^n$ pour les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et le produit scalaire usuel : $(\vec{a}|\vec{b}) = \sum_k a_kb_k$.

Pour la culture, on pourra essayer de démontrer les inégalités plus générales de Hölder et de Minkowski, pour $p \geq 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\sum_k |a_k||b_k| \leq \left(\sum_k |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_k |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left(\sum_k |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_k |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_k |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

10.15 Espaces euclidiens, Matrices

Exercise 10.28 (Matrice de Gram)**.** Soit $e_i \in E$ et $G = [(e_i|e_j)]_{i,j}$. Si $\mathcal{B} = (e_i)_i$ est une base orthonormée, montrez que pour $x, y \in E$ et $X, Y \in \mathbb{R}^n$ leurs coordonées dans $\mathcal{B}$, on a $(x|y) = {}^tXGY$. Montrez que $u \in \mathscr{L}(E)$ est orthogonale ssi $G(e_1, ..., e_n) = G(u(e_1), ..., u(e_n))$ pour une base $(e_i)_i$. On note $\mathcal{G} = \det G$. Soit M la matrice de $(e_i)_i$ dans une base orthonormée, montrez que Montrez que $G = {}^tMM$, et que $\mathcal{G}(e_1, ..., e_n) \neq 0$ ssi $(e_i)_i$ est libre. En déduire que $\mathcal{G}$ est le carré du produit mixte. Pour $(e_i)_i$ libre, soit $F = \text{Vect}(e_i)_i$ un sous-espace de E, et $x \in F$. Montrez que $\text{dist}(x, F)^2 = \frac{\mathcal{G}(e_1,...e_p,x)}{\mathcal{G}(e_1,...e_p)}$.

Exercise 10.29 (*Solution*)**.** On a $X = ((x|e_i))_i$ et $Y = ((y|e_i))_i$, donc :

$$\begin{aligned}
{}^tXGY &= \sum_{i,j} (x|e_i)(e_i|e_j)(y|e_j) \\
&= \sum_j \left(\sum_i (x|e_i)e_i \middle| e_j\right)(e_j|y) \\
&= \sum_j (x|e_j)(y|e_j) \\
&= \left(x \middle| \sum_j (y|e_j)e_j\right) \\
&= (x|y)
\end{aligned}$$

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est orthogonal, alors pour tout x, y, on a $(u(x)|u(y)) = (x|y)$, donc pour toute base $(e_i)_i$, on a :

$$G(u(e_1), ..., u(e_n)) = [(u(e_i)\,|u(e_j)\,)]_{i,j} = [(e_i|e_j)]_{i,j} = G(e_1, ..., e_n)$$

Réciproquement, si $G(u(e_1), ..., u(e_n)) = G(e_1, ..., e_n)$ pour une base $(e_i)_i$ orthonormée, alors soit $x, y \in E$. Alors, en notant U la matrice de u dans la base des $(e_i)_i$:

$$(u(x)|u(y)) = {}^t(UX)G(UY) = {}^tX({}^tUGU)Y$$

Or on sait ce que vaut ${}^tUGU$: la matrice U est $[(u(e_i)|e_j]_{i,j}$, donc dans la cellule i,j de ${}^tUGU$, on a ${}^tU_iGU_j$ où U_i est la i-ième colonne de U. Comme ${}^tXUY = (x|y)$, on trouve que la cellule i,j de ${}^tUGU$ est $(U_i|U_j)$, c'est-à-dire $(u(e_i)|u(e_j))$. Donc ${}^tUGU = G(u(e_1,...,u(e_n))$. Comme $G(u(e_1),...,u(e_n)) = G(e_1,...,e_n)$, on trouve :

$$(u(x)|u(y)) = {}^tX({}^tUGU)Y = {}^tXGY = (x|y)$$

Ainsi, u est bien orthogonale.

D'ailleurs, on a prouvé que si $G(u(e_1),...,u(e_n)) = G(e_1,...,e_n)$ pour **une** base orthonormée fixée, alors u est orthogonale, donc $G(u(e'_1),...,u(e'_n)) = G(e'_1,...,e'_n)$ pour **toute** base orthonormée.

Soit $f_1,...,f_n$ une base orthonormée et $M = [(e_j|ef_i)]_{i,j}$ la matrice de $(e_i)_i$ dans cette base. Alors :

$${}^tMM = \left[\sum_k (e_i|f_k)(e_j|f_k)\right]_{i,j} = \left[\left(e_j \middle| \sum_k (e_i|f_k)f_k\right)\right]_{i,j} = [(e_i|e_j)]_{i,j} = G$$

Ensuite, $(e_i)_i$ est libre si et seulement si M est inversible, si et seulement si $\det M \neq 0$, si et seulement si $\mathcal{G} = \det G = (\det M)^2 \neq 0$.

On remarque aussi qu'une fois choisie une base $(f_i)_i$ pour orienter E, on a $\mathcal{G} = (\det M)^2$, donc $\mathcal{G}$ est bien le carré du produit mixte.

Cela donne une manière très efficace de calculer le volume du parallélotope engendré par la famille $(e_i)_i$ sans avoir besoin d'une base.

Premièrement, si $x \in F$, alors d'un part $\mathrm{dist}(x,F) = 0$, et d'autre part la famille $(x, e_1, ..., e_p)$ est liée, donc $\mathcal{G}(x, e_1, ..., e_p) = 0$ d'après la conclusion ci-dessus.

Supposons que $x \notin F$ et notons $d = \mathrm{dist}(x,F)$. Alors soit $(f_i)_i$ une base orthonormée de F : le projeté orthogonale de x sur F est $\pi_F(x) = \sum_k (x|f_k)f_k$. D'après le théorème de Pythagore $||\pi_F(x)||^2 + d^2 = ||x||^2$. Par ailleurs, comme $x = (x - \pi_F(x)) + \pi_F(x)$ avec $\pi_F(x) \in F$ et $(x - \pi_F(x)) \in F^\perp$, et que les e_i sont dans F, on a $(x|e_i) = (\pi_F(x)|e_i)$ pour tout i. Donc le déterminant de Gram s'écrit (on note $G = g(e_1, ..., e_n)$ par soucis de place) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(e_1,...,e_n,x) &= \begin{vmatrix} & & & (x|e_1) \\ & G & & \vdots \\ & & & (x|e_n) \\ (x|e_1) & ... & (x|e_n) & ||x||^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} & & & (\pi_F(x)|e_1) \\ & G & & \vdots \\ & & & (\pi_F(x)|e_n) \\ (\pi_F(x)|e_1) & ... & (\pi_F(x)|e_n) & ||\pi_F(x)||^2 + d^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} & & & (\pi_F(x)|e_1) \\ & G & & \vdots \\ & & & (\pi_F(x)|e_n) \\ (\pi_F(x)|e_1) & ... & (\pi_F(x)|e_n) & ||\pi_F(x)||^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & G & & \vdots \\ & & & 0 \\ (\pi_F(x)|e_1) & ... & (\pi_F(x)|e_n) & d^2 \end{vmatrix} \\
&= \mathcal{G}(e_1,...,e_n,\pi_F(x)) + d^2 \times \mathcal{G}(e_1,...,e_n)
\end{aligned}$$

Or le premier déterminant est nul, car $\pi_F(x) \in F = \mathrm{Vect}(e_1, ...e_n)$, donc la famille $(e_1, ..., e_n, \pi_F(x))$ est liée. On est ramené à l'égalité : $\mathrm{dist}(x, F)^2 = \frac{\mathcal{G}(e_1,...e_n,x)}{\mathcal{G}(e_1,...e_n)}$.

On est capable de calculer immédiatement la distance de x à un sous-espace vectoriel grâce à une base de ce sous-espace.

N.B. : Ici, on peut utiliser le produit mixte pour conclure plus subtilement. Il est conseillé de dessiner le raisonnement qui va suivre dans $\mathbb{R}^3$. En effet, $\mathcal{G}(e_1, ...e_n, x)$ est le (carré du) volume engendré par $(e_1, ...e_n, x)$ alors que $\mathcal{G}(e_1, ...e_n)$ est le (carré du) volume engendré par $(e_1, ...e_n)$. On sait (on le faisait au collège) que le volume engendré par $(e_1, ...e_n, x)$ s'obtient comme le volume engendré par $(e_1, ...e_n)$ multiplié par la "hauteur" de x par rapport au "plan" des $(e_i)_i$ (à l'espace engendré par les $(e_i)_i$). Donc le rapport des deux volume donne la hauteur, ou encore, mis au carré : $\mathrm{dist}(x, F)^2 = \frac{\mathcal{G}(e_1,...e_n,x)}{\mathcal{G}(e_1,...e_n)}$. Le calcul de déterminant ci-dessus justifie algébriquement cette construction géométrique.

10.16 Espaces euclidiens, Matrices

Exercise 10.30. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrez que $M = QR$ pour une unique matrice $Q \in O_n$ et une unique matrice triangulaire supérieure R à coefficients diagonaux positifs. Soit E euclidien, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ une base orthonormée de E, $(u_i)_{1 \le i \le n} \in E^n$. Montrez que $|\det_{\mathcal{B}}(u_i)_i| \le \prod_j ||u_j||$.

Exercise 10.31 (*Solution*)**.** Notons $a_1, ..., a_n$ les colonnes de M. Alors, d'après le procédé de Gram-Schmidt, il existe une unique famille orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ vérifiant $\forall i,\ \mathrm{Vect}(a_1, ..., a_i) = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_i)$ et $(a_i|u_i) \ge 0$. Comme M est inversible, $(e_i)_i$ est une base. On peut écrire Q la matrice dont les colonnes sont les e_i et $R = [(a_i|e_j)]_{i,j}$. Alors Q est un changement de base orthogonal, donc $Q \in O_n$, et R est triangulaire supérieur (en vertu de $\forall i,\ \mathrm{Vect}(a_1, ..., a_i) =$

Vect$(e_1, ..., e_i)$), à coefficient diagonaux positifs (en vertu de $(a_i|e_i) \geq 0$). Les coefficients de R sont bien strictement positifs car M est inversible.

Réciproquement, la donnée de Q et R donne un procédé de Gram-Schmidt, donc on a bien l'unicité.

Pour informations, si la matrice M n'est pas inversible, elle peut toujours se décomposer sous la forme $M = QR$, mais cette fois on ne peut plus demander que les coefficients diagonaux de R soient strictement positifs ni que la décomposition soit unique.

Maintenant, prenons $(u_i)_i \in E$. Si la famille est liée, alors son déterminant est nul, donc l'inégalité est vérifiée. Sinon, la matrice M dont les colonnes sont les u_i est inversible, donc on peut donner un décomposition QR de M. Comme R est triangulaire, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux, qui sont les $(u_i|e'_i)$, avec $(e'_i)_i$ la base orthonormée décrite par Q. Dès lors, par Cauchy-Schwarz, et avec $||e'_i|| = 1$, on a :

$$|\det_{\mathcal{B}}(u_i)_i| = |\det M| = |\det Q| \times |\det R| = 1 \times \left|\prod_i (u_i|e'_i)\right| \leq \prod_i ||u_i||$$

Cela s'appelle l'inégalité de Hadamard.

10.17 Espaces euclidiens, Matrices

Exercise 10.32 (Sous-groupe fini de $GL(E)$)**.** Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien et G un sous-groupe fini de $GL(E)$. On définit $(x|y) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\langle gx|gy\rangle$. Montrez que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire. Soit $\mathcal{O}'(E)$ le groupe orthogonal associé, montrez que G est un sous-groupe de $\mathcal{O}'(E)$. Montrez qu'il existe $\varphi \in GL(E)$ tel que $\forall g \in G,\ \varphi g \varphi^{-1} \in \mathcal{O}(E)$. En déduire que G est conjugué à un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(E)$ (conjugué : il existe $\psi \in GL(E)$ et H un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ tel que $G = \psi H \psi^{-1}$).

Exercise 10.33 (*Solution*)**.** Comme G est fini, la somme $(x|y) = \frac{1}{\#G}\sum_g \langle gx|gy\rangle$ est bien définie. Comme tous les $g \in G \subset GL(E)$ sont des applications linéaires, pour y fixé, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\#G}\sum_g \langle gx|gy\rangle$ est linéaire (c'est un somme de fonctions linéaires). En outre, $(\cdot|\cdot)$ est symétrique car $\langle\cdot|\rangle$ l'est. Pour $x \in E$ et $g \in G$, on a $\langle gx|gx\rangle \geq 0$, donc $(x|x) \geq 0$ car c'est une somme de termes positifs. Si $(x|x) = 0$, alors tous les termes de la somme sont nuls car chaque terme est positif. Or $Id_E \in G$ car G est un groupe, donc $\langle x|x\rangle = 0$, puis $x = \vec{0}$.

On a bien montré que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.

G est un groupe, donc pour montrer que G est un sous-groupe de $\mathcal{O}'(E)$, il suffit de montrer que $G \subseteq \mathcal{O}'(E)$, c'est-à-dire que tout $h \in G$ est orthogonal pour $(\cdot|\cdot)$, c'est-à-dire que $\forall h \in G, \forall x, y \in E,\ (hx|hy) = (x|y)$. Or $g \mapsto gh$ est un bijection de G (de bijection réciproque $g \mapsto gh^{-1}$), donc :

$$(hx|hy) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\langle ghx|ghy\rangle = \frac{1}{\#G}\sum_{f\in G}\langle fx|fy\rangle = (x|y)$$

Donc G est un sous-groupe (fini) de $\mathcal{O}'(E)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, orthonormée pour $\langle\cdot|\cdot\rangle$, et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ une base de E orthonormée pour $(\cdot|\cdot)$. Soit φ l'endomorphisme de changement de base $\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$. Alors φ^{-1} est le changement de base $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$, donc $(g\varphi^{-1}e_i|g\varphi^{-1}e_j) = (ge'_i|ge'_j) = \delta_{i,j}$, puis $\left\langle\varphi g\varphi^{-1}e_i|\varphi g\varphi^{-1}e_j\right\rangle = (g\varphi^{-1}e_i|g\varphi^{-1}e_j) = \delta_{i,j}$, donc $\varphi g\varphi^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Prenons pour finir $\psi = \varphi^{-1}$ et $H = \{\varphi g\varphi^{-1} \ ; \ g \in G\}$, alors H est un sous-groupe (fini) de $\mathcal{O}(E)$ et G lui est conjugué par ψ.

N.B. : Ce résultat est très important, parce qu'il permet d'équiper d'une structure puissante tous les sous-groupes finis de $GL(E)$, rien qu'en équipant E d'un produit scalaire (ce qui est souvent relativement facile à faire).

10.18 Espaces euclidiens, Matrices

Exercise 10.34. Déterminez les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \ \langle X\,|AX\,\rangle = 0$.

Exercise 10.35 (*Solution*)**.** Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$0 = \langle X+Y|A(X+Y)\rangle = \langle X|AX\rangle + \langle Y|AX\rangle + \langle X|AY\rangle + \langle Y|AY\rangle = \langle Y|AX\rangle + \langle X|AY\rangle$$

Donc $\langle Y|AX\rangle + \langle X|AY\rangle = 0$, mais on sait que $\langle X|AY\rangle = \langle {}^tAX|Y\rangle$, d'où $\forall X, Y, \ \langle (A+{}^tA)X|Y\rangle = 0$, donc $\forall X, (A+{}^tA)X = \vec{0}$. Il s'ensuit que $A = -{}^tA$, c'est-à-dire que A est antisymétrique.

Réciproquement, si A est antisymétrique, alors pour $X \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle X|AX\rangle = \left\langle {}^tAX|X\right\rangle = -\langle AX|X\rangle$$

Donc $\forall X, \ \langle X|AX\rangle = 0$.

11 Espaces vectoriels

11.1 Espaces vectoriels

Exercise 11.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant $A \cap B = A \cap C$, $A + B = A + C$ et $B \subset C$. Montrer que $B = C$.

Exercise 11.2 (*Solution*)**.** Il suffit de montrer que $C \subset B$. Soit x un élément de C. Alors $x \in A+C = A+B$ et il existe $(y, z) \in A \times B$ tel que $x = y+z$. Mais $z \in B \subset C$ et donc, puisque C est un sous-espace vectoriel de E, $y = x - z$ est dans C. Donc, $y \in A \cap C = A \cap B$ et en particulier y est dans B. Finalement, $x = y + z$ est dans B. On a montré que tout élément de C est dans B et donc que, $C \subset B$. Puisque d'autre part $B \subset C$, on a $B = C$.

11.2 Espaces vectoriels

Exercise 11.3. Montrer que $a = (1, 2, 3)$ et $b = (2, -1, 1)$ engendrent le même sous-espace de $\mathbb{R}^3$ que $c = (1, 0, 1)$ et $d = (0, 1, 1)$.

Exercise 11.4 (*Solution*)**.** Il suffit de montrer que $c \in \mathrm{Vect}(a, b)$ et $d \in \mathrm{Vect}(a, b)$ pour avoir $\mathrm{Vect}(a, b) \subset \mathrm{Vect}(a, b)$. Ensuite, on montrera que $\mathrm{Vect}(a, b) \subset \mathrm{Vect}(c, d)$. On a rapidement : $a = c + 2d$ et $b = 2c - d$. Dès lors, $\mathrm{Vect}(a, b) \subset \mathrm{Vect}(a, b)$. Inversement, on peut retrouver linéairement c et d en fonction de a et b en résolvant le système :

$$\begin{cases} c + 2d & = a \\ 2c - d & = b \end{cases}$$

On obtient $c = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b$ et $d = \frac{2}{5}a - \frac{1}{5}b$.

Pour montrer que $c \in \mathrm{Vect}(a, b)$, on peut aussi chercher directement x, y tel que $c = xa + yb$, ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 2y & = 1 \\ 2x - y & = 0 \\ 3x + y & = 1 \end{cases}$$

On trouve $x = {}^1\!/_5$ et $y = {}^2\!/_5$ (il faut vérifier que les 3 équations sont vérifiées par ces solutions). Ainsi, on a bien $c \in \mathrm{Vect}(a, b)$. On peut procéder de même pour les trois autres appartenances.

11.3 Espaces vectoriels

Exercise 11.5. Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$. En combien de points faut-il évaluer un polynôme de degré n pour le déterminer entièrement ?

Exercise 11.6 (*Solution*)**.** Écrivons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on peut alors écrire les conditions données :

$$\begin{cases} -a + b - c + d & = 1 \\ a + b + c + d & = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d & = 1 \end{cases}$$

On a un variable auxiliaire. On trouve par pivot :

$$\begin{cases} b & = -a - {}^1\!/_2 \\ c & = -2a + {}^1\!/_2 \\ d & = 2a \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des polynômes P tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$ est $\{aX^3 - (a + \frac{1}{2})X^2 - (2a - \frac{1}{2})X + 2a; a \in \mathbb{R}\}$.

11.4 Espaces vectoriels

Exercise 11.7. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u = (1, 2, -5, 3)$ et $v = (2, -1, 4, 7)$. Déterminer λ et μ réels tels que $(\lambda, \mu, -37, -3)$ appartienne à F.

Exercise 11.8 (*Solution*)**.** Raisonnons par analyse-synthèse. Supposons qu'on puisse trouver λ, μ tels que $w = (\lambda, \mu, -37, -3) \in F$, soit alors x et y tels que $w = xu + yv$, on obtient en particulier le système suivant :

$$\begin{cases} -5x + 4y & = -37 \\ 3x + 7y & = -3 \end{cases}$$

On trouve : $x = \frac{247}{47}$ et $y = -\frac{126}{47}$ puis $\lambda = u + 2v = \frac{-5}{47}$ et $\mu = 2u - v = \frac{620}{47}$.

Réciproquement, les valeurs ci-dessus garantissent que $(\lambda, \mu, -37, -3) = xu + yv$, donc $(\lambda, \mu, -37, -3) \in F$.

11.5 Espaces vectoriels

Exercise 11.9. Soit C l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes sur $\mathbb{R}$. C est-il un espace vectoriel pour les opérations usuelles ? Montrez que $V = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); \exists (g, h) \in C^2, f = g - h\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercise 11.10 (*Solution*)**.** C n'est pas un espace vectoriel car $(x \mapsto x) \in C$ mais $-(x \mapsto x) \in C$: C n'est pas stable par multiplication par les scalaires. Par contre, C est stable par somme a coefficient positifs.

Soient $(f, g, h, j) \in C$ on pose $x = f - g$ et $y = h - j$. On a $x + y = (f + h) - (g + j) \in V$, $-x = g - f \in C$, donc $(V, +)$ est un groupe. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si $\lambda \geq 0$, on peut écrire : $\lambda x = (\lambda f) - (\lambda g) \in V$, si $\lambda < 0$, on peut écrire $\lambda x = (|\lambda| g) - (|\lambda| f) \in V$. Donc V est stable par multiplication par des scalaires réels. Reste à vérifier les 4 axiomes.

$$1.x = 1.f - 1.g = f - g = x$$

$$(\lambda + \mu)x = (\lambda + \mu)f - (\lambda + \mu)g = \lambda(f - g) + \mu(f - g) = \lambda x + \mu x$$

$$\lambda(x + y) = \lambda(f - g + h - j) = \lambda f - \lambda g + \lambda h - \lambda j = \lambda x + \lambda y$$

$$(\lambda\mu)x = (\lambda\mu)f - (\lambda\mu)g = \lambda(\mu f) - \lambda(\mu g) = \lambda(\mu x)$$

11.6 Espaces vectoriels

Exercise 11.11. Dans le plan, on se donne n points $A_1, ..., A_n$. Existe-t-il n points $M_1, ..., M_n$ tels que A_i soit le milieu de $[M_i, M_{i+1}]$ $(1 \leq i \leq n-1)$, et A_n soit le milieu de $[M_n, M_1]$?

Exercise 11.12 (*Solution*)**.** On nomme a_k les affixes des A_k et m_k celles de M_k. On peut écrire le système correspondant $m_n + m_1 = 2a_n$ et $m_k + m_{k+1} = 2a_k$. Donc $z_{k+1} = -z_k + 2a_k$, puis $z_n = 2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-1-j}a_j$. En utilisant la dernière égalité, on a donc : $2\sum_k (-1)^{n-k}a_k = (1 - (-1)^n)z_1$.

On a donc deux possibilités, soit n est impair, et alors on trouve une valeur explicite pour z_1, et ainsi pour tous les autres z_k.

Si n est pair, il faut que $\sum_k (-1)^k a_k = 0$. Si c'est le cas, on obtient un système à $n-1$ équations qu'on a déjà résolu. On a une infinité de solutions. On notera que dans ce cas, le système de points A_k est centré en 0.

11.7 Espaces vectoriels

Exercise 11.13 (Fonction vectorielle de Leibnitz)**.** Soient $(a_i)_i \in \mathbb{R}^n$ de somme non nulle et $(A_i)_i \in E^n$ d'un espace vectoriel E. On construit $f : E \to E$ définie par $f(M) = \sum_i a_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_i a_i(A_i - M)$. On pose G le barycentre de $\{(A_i, a_i)\}_i$, c'est-à-dire l'unique point tel que $\sum_i a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Montrez que $f(M) = \left(\sum_i a_i\right) \overrightarrow{MG}$. En déduire les coordonnées de G dans le repère de centre O. Donner une représentation matricielle de ce résultat.

Que se passe-t-il si $\sum_i a_i = 0$?

Exercise 11.14 (*Solution*)**.** On a (où $\overrightarrow{MG}$ est une constante vis-à-vis de l'indice i) :

$$f(M) = \sum_i a_i(A_i - M) = \sum_i a_i A_i - \sum_i a_i M = \sum_i a_i G - \sum_i a_i M = \sum_i a_i \overrightarrow{MG}$$

En particulier, en regardant depuis le centre O, on a $f(O) = \sum_i a_i \overrightarrow{OA_i} = \left(\sum_i a_i\right) \overrightarrow{OG}$. Ainsi, si on note $(g_j)_j$ les coordonnées de G dans une base de l'espace vectoriel en jeu, on a : $g_j = \frac{1}{\sum_i a_i} \sum_i a_i x_{i,j}$ où $x_{i,j}$ est la coordonnée de A_i sur le j-ième vecteur de base. Matriciellement, si on pose $A = [x_{i,j}]_{i,j}$ la matrice qui donne les coordonnées des A_i dans la base choisie, et $\vec{a}$ le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, on peut écrire : $G = \frac{1}{\sum_i a_i}\ {}^tA.\vec{a}$.

Si $\sum_i a_i = 0$, alors on ne peut pas définir G. Par contre, la fonction f est constante : $f(M) = \sum_i a_i A_i - \sum_i a_i M = \sum_i a_i A_i$ (qui ne dépend pas de M). En particulier, pour j fixé, on constate que $a_j = -\sum_{i \neq j} a_i$, donc $f = \sum_i a_i A_i = \sum_{i \neq j} a_i A_i - \left(\sum_{i \neq j} a_i\right) A_j = \sum_{i \neq j} a_i \overrightarrow{A_j A_i}$; en notant G_j le centre de gravité de $\{(A_i, a_i)\}_{i \neq j}$, on a aussi $f = a_j \overrightarrow{G_j A_j}$ (cela fonctionne quel que soit j donné).

11.8 Espaces vectoriels

Exercise 11.15. Soit $F = \left\{ f \in E \ ; \ \int_0^1 f = 0 \right\}$ pour $E = \mathcal{C}^0([0,1])$. Montrez que F est un sous-espace et donnez un supplémentaire.

Exercise 11.16 (*Solution*)**.** F est le noyau de l'application linéaire $\varphi : f \mapsto \int_0^1 f$, c'est donc un sous-espace vectoriel. On peut écrire $f = \left(f - \int_0^1 f\right) + \int_0^1 f$.

Le premier élément est dans F et le second est une fonction constante. Ainsi, l'espace des fonctions constantes, $G = \{x \mapsto c\ ;\ c \in \mathbb{R}\}$, est un supplémentaire de F car on a $E = F + G$ d'après l'égalité précédente, et $F \cap G = \{x \mapsto 0\}$ avec un rapide raisonnement.

On peut d'ailleurs remarquer que pour tout élément $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$, on a : $F \oplus \mathrm{Vect}(x) = E$, ce qu'on reverra quand on étudiera les hyperplans.

11.9 Espaces vectoriels

Exercise 11.17. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, (x, u(x))$ est liée. Montrez que u est une homothétie.

Exercise 11.18 (*Solution*)**.** Comme pour tout x, $(x, u(x))$ est liée, on peut poser λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$. On a : $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$ d'une part, et en outre : $u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. En particulier, si la famille (x, y) est libre, alors on peut identifier les coefficients et on a : $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$. Soit maintenant x fixé et S tel que $E = \mathrm{Vect}(x) \oplus S$. On pose $\lambda = \lambda_x$ (qui est une quantité fixée), si $y \in S$ alors $u(y) = \lambda y$ d'après le raisonnement précédent. Si $y \in \mathrm{Vect}(x)$, soit μ le scalaire tel que $y = \mu x$, on a par linéarité $u(y) = \mu u(x) = \mu\lambda x = \lambda(\mu x) = \lambda y$. Ainsi, u est une homothétie de rapport λ.

NB : On peut aussi remarquer que (si $\dim E \geq 2$) on peut trouver deux vecteurs x et z qui sont libres. En écrivant toujours $E = \mathrm{Vect}(x) \oplus S$ et $\lambda_x = \lambda$, on a $u(y) = \lambda y$; en particulier $u(z) = \lambda z$ et $\lambda_z = \lambda$; or si $y \in \mathrm{Vect}(x)$, alors (y, z) est libre, donc $\lambda_y = \lambda$ et u est bien une homothétie.

11.10 Espaces vectoriels

Exercise 11.19. Étudiez la liberté des familles suivantes :

- $((2, i, 4, -i); (i, -1, -i, 1); (0, 3, -i, 1))$
- (f_a, f_b, f_c) où $f_u : x \mapsto \sin(x + u)$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.
- $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $f_n : x \mapsto nx + n^2 + 1$.

Exercise 11.20 (*Solution*)**.** Regardons chaque famille :

- Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $au + bv + cw = \vec{0}$ (où u, v, w désignent les vecteurs de $\mathbb{C}^4$ du sujet). On obtient un système de 4 équations à 3 inconnues, reste à montrer qu'il est incompatible. En ajoutant les deuxièmes et quatrième lignes, on trouve $c = 0$, puis en ajoutant la première et la troisième, on obtient $a = 0$, ce qui donne $b = 0$ pour finir. La famille est bien libre.
- Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ les fonctions cos et sin. On a $f_u = (\cos u)\vec{x} + (\sin u)\vec{y}$. De fait, f_a, f_b et f_c sont 3 vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de 2 vecteurs : ils forment une famille liée.
- f_0, f_1 et f_2 sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$. Donc, la famille (f_0, f_1, f_2) est une famille liée puis la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est liée en tant que sur-famille d'une famille liée.

11.11 Espaces vectoriels

Exercise 11.21. Soit F un sous-espace de E, et $v, w \in E$. Montrez que :

$$F + \mathbb{K}.v = F + \mathbb{K}.w \Leftrightarrow \exists u \in F, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha\beta \neq 0 \text{ et } u + \alpha v + \beta w = 0$$

Exercise 11.22 (*Solution*)**.** Comme $v \in (F + \mathbb{K}.v) = (F + \mathbb{K}.w)$, on peut trouver $x \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $v = x + \alpha w$. De la même manière, on peut trouver $y \in F$ et $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $w = y + \beta v$. Si $\alpha \neq 0$, la première égalité donne ce qu'on souhaite. Si $\beta \neq 0$, la deuxième égalité donne ce qu'on souhaite. Si $\alpha = \beta = 0$, alors on a $(-x-y)+v+w = 0$ où $(-x-y) \in F$: on a encore gagné.

Réciproquement, si $\exists u, \alpha, \beta : u + \alpha v + \beta v = 0$ avec $\alpha\beta \neq 0$, on en déduit que $w = \frac{-1}{\beta}(u + \alpha v)$, donc $w \in F + \mathbb{K}.v$. Pareillement, $v \in F + \mathbb{K}.w$. Finalement : $F + \mathbb{K}.v = F + \mathbb{K}.w$.

11.12 Espaces vectoriels

Exercise 11.23. Soient $a, b, c \in [0,1]^3$. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus 2. Montrez l'existence de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$.

Déterminez explicitement ces réels en fonction de a, b, c.

Exercise 11.24 (*Solution*)**.** On pose $P(x) = p_2x^2 + p_1x + p_0$, on obtient $\int_0^1 P = \frac{1}{3}p_2 + \frac{1}{2}p_1 + p_0$. D'un autre côté : $\alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c) = (\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2)p_2 + (\alpha a + \beta b + \gamma c)p_1 + (\alpha + \beta + \gamma)p_0$. Ainsi, on a $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha + \beta + \gamma & = 1 \\ \alpha a + \beta b + \gamma c & = 1/2 \\ \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 & = 1/3 \end{array}\right.$$

On a un système de 3 équations à 3 inconnues (qui sont α, β et γ), sa résolution, si on parvient à l'existence d'une solution, prouvera l'existence d'un triplet tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$. Or ce système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{llll} \alpha+ & \beta+ & \gamma & = 1 \\ & \beta(b-a)+ & \gamma(c-a) & = 1/2 - a \\ & \beta(b^2-a^2)+ & \gamma(c^2-a^2) & = 1/3 - a^2 \end{array}\right.$$

Puis à :

$$\left\{\begin{array}{llll} \alpha+ & \beta+ & \gamma & = 1 \\ & \beta(b-a)+ & \gamma(c-a) & = 1/2 - a \\ & & \gamma(c-a)(c-b) & = 1/3 - 1/2(b+a) + ba \end{array}\right.$$

Ainsi, si a, b et c sont différents, alors on a une unique solution au système :

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha & = \frac{2+6bc-3c-3b}{6(a-b)(a-c)} \\ \beta & = \frac{2+6ca-3a-3c}{6(b-c)(b-a)} \\ \gamma & = \frac{2+6ba-3a-3b}{6(c-b)(c-a)} \end{array}\right.$$

N.B. : Si $c = a$ (ou $b = c$ ou $a = b$), on se retrouve avec 2 équations pour 3 inconnues, donc on a une infinité de solutions, une infinité de candidats (α, β) valides pour $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P = \alpha P(a) + \beta P(b)$, dont on a l'expression explicite.

11.13 Espaces vectoriels

Exercise 11.25. Soient f et g deux formes linéaires $E \to \mathbb{K}$. Montrez que : $f \times g = 0 \Leftrightarrow g = 0$ ou $f = 0$.

Exercise 11.26 (*Solution*)**.** Le sens réciproque $\Leftarrow$ est évident.

Supposons par l'absurde que $f \times g = 0$ avec $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Alors, soit $x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$. Si $g(x) \neq 0$, on a une contradiction avec $f(x) \times g(x) = 0$, donc $g(x) = 0$. Soit $y \in E$ tel que $g(y) \neq 0$ (idem, on a $f(y) = 0$). On regarde avec la linéarité :

$$f(x+y) \times g(x+y) = (f(x) + f(y))(g(x) + g(y)) = f(x)g(y) \neq 0$$

On a donc une contradiction. Ainsi, on a montré que pour toutes formes linéaires f et g : $f \times g = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ou $g = 0$.

11.14 Espaces vectoriels

Exercise 11.27. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Montrez que : $\text{Ker } v \subset \text{Ker } u \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E), u = w \circ v$. En déduire que : v injectif $\Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E), w \circ v = Id_E$

Exercise 11.28 (*Solution*)**.** Le sens réciproque, $\Leftarrow$, est évident dans le mesure où si $x \in \text{Ker } v$ avec $u = w \circ v$, il s'ensuit que $u(x) = w(v(x)) = w(\vec{0}) = \vec{0}$, puis $x \in \text{Ker } u$: $\text{Ker } v \subset \text{Ker } u$.

Le sens direct est plus difficile. Soit $y \in \text{Im } v$ et $x \in E$ tel que $v(x) = y$. On veut définir $w(y) = u(x)$, mais il faut vérifier que $u(x)$ ne dépend pas du choix de x tel que $v(x) = y$. Soit alors $x, x' \in E$ tels que $v(x) = v(x') = y$, alors $v(x - x') = \vec{0}$, donc $(x - x') \in \text{Ker } v \subset \text{Ker } u$, d'où $u(x - x') = \vec{0}$ puis $u(x) = u(x')$: on peut bien définir $w(y) = u(x)$ où x est n'importe quel antécédent de y par v.

Soit maintenant F un supplémentaire de $\text{Im } v$ dans E. On pose $\forall z \in F, w(z) = \vec{0}$. Cela permet de définir w par linéarité : pour tout $x \in E$, on écrit $x = y + z$ avec $y \in \text{Im } v$ et $z \in F$ et on pose $w(x) = w(y)$ (ce qu'on a déjà définit précédemment).

Vérifions que $w \in \mathscr{L}(E)$ et que $u = w \circ v$. Soient $x_1, x_2 \in E$ et λ un scalaire. On écrit la décomposition sur $E = \text{Im } v \oplus F$: $x_1 = y_1 + z_1$ et $x_2 = y_2 + z_2$, d'où $x_1 + \lambda x_2 = (y_1 + \lambda y_2) + (z_1 + \lambda z_2)$. Dès lors, $w(x_1 + \lambda x_2) = w(y_1 + \lambda y_2)$. Or, si $v(t_1) = y_1$ et $v(t_2) = y_2$, on a $v(t_1 + \lambda t_2) = x_1 + \lambda x_2$, donc $w(x_1 + \lambda x_2) = u(t_1 + \lambda t_2) = u(t_1) + \lambda u(t_2) = w(x_1) + \lambda w(x_2)$. On a montré que w est linéaire.

Ensuite, soit T un supplémentaire de $\text{Ker } v$ dans E. On écrit $x = s + t$ avec $s \in \text{Ker } v$ et $t \in T$. On a alors :

$$w(v(x)) = w(v(s) + v(t)) = w(v(t)) = u(t) = u(t) + u(s) = u(x)$$

Donc on a prouvé le sens direct, $\Rightarrow$.

Il suffit maintenant d'appliquer la propriété démontrée avec $u = Id_E$, ce qui est possible car v est injective si et seulement si Ker $v \subset$ Ker $Id_E = \{\vec{0}\}$.

11.15 Espaces vectoriels

Exercise 11.29. Montrez que p est un projecteur si et seulement si $Id_E - p$ est un projecteur.

Exercise 11.30 (*Solution*)**.** p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$. Partant de ce présupposé, on teste :

$$(Id_E - p)^2 = Id_E - 2p + p^2 = Id_E - p$$

On vient de prouver que si p est un projecteur, alors $Id_E - p$ est un projecteur.

Réciproquement, supposons que $q = Id_E - p$ est un projecteur, alors (par ce qu'on vient de montrer) $Id_E - q$ est un projecteur. Or $Id_E - q = p$, ce qui conclut.

On remarquera d'ailleurs que comme p vaut l'identité sur son image, on a : Ker $(Id_E - p) =$ Im p et Im $(Id_E - p) =$ Ker p. Ainsi, le projecteur $Id_E - p$ est le projecteur associé à p dans le sens où si p projette sur F parallèlement à G, alors $Id_E - p$ projette sur G parallèlement à F.

11.16 Espaces vectoriels

Exercise 11.31. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrez que si f et g commutent, alors Ker g et Im g sont stables par f. Réciproquement, montrez que si g **est un projecteur** et que Ker g et Im g sont stables par f, alors f et g commutent.

Exercise 11.32 (*Solution*)**.** Supposons que f et g commutent. Soit $x \in$ Ker g, alors $g(f(x)) = f(g(x)) = f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc $f(x) \in$ Ker g. De même, si $y \in$ Im g, soit $x \in E$ tel que $g(x) = y$, on a $f(y) = f(g(x)) = g(f(x))$, donc $f(y) \in$ Im g. Ker g et Im g sont stables par f.

Réciproquement, on suppose que $g^2 = g$, et que Ker g et Im g sont stabilisés par f. Comme g est un projecteur, on a $E =$ Im $g \oplus$ Ker g, donc soit $x \in E$ qu'on écrit $x = y + z$ avec $y \in$ Im g et $z \in$ Ker g. On a :

$$f(g(x)) = f(g(y) + g(z)) = f(g(y)) = f(y)$$

On a utilisé que $g(y) = y$ car g est l'identité sur son image. En outre :

$$g(f(x)) = g(f(y)) + g(f(z)) = f(y) + \vec{0}$$

On a utilisé que $f(y) \in$ Im g, et g est l'identité sur son image, et $f(z) \in$ Ker g.

Ainsi, on a bien $f(g(x)) = g(f(x))$, donc f et g commutent.

11.17 Espaces vectoriels

Exercise 11.33. Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On définit :

$$\varphi : f \longmapsto \left(x \mapsto \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right)$$

Montrez que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Est-ce que φ est injective ? surjective ?

Exercise 11.34 (*Solution*)**.** On a :

$$\begin{aligned}\varphi(f+\lambda g)(x) &= \int_0^x t(f+\lambda g)(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + \lambda\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t\\ &= (\varphi(f)+\lambda\varphi(g))(x)\end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire.

φ est injective : on regarde son noyau. Soit $f \in \mathrm{Ker}\ \varphi$. Alors $\forall x, \varphi(f)(x) = 0$, et comme $\varphi(f)$ est dérivable, on obtient $\forall x, \varphi(f)'(x) = xf(x) = 0$, puis $\forall x \neq 0, f(x) = 0$ et par continuité, f est la fonction nulle. On a montré que $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{x \mapsto 0\}$, c'est-à-dire que φ est injective.

φ n'est pas surjective car $\varphi(f)$ est toujours dérivable : on ne peut pas atteindre tous les éléments de E. On peut tenter de calculer $\mathrm{Im}\ \varphi$. Soit g un fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ et g' dérivable en 0, alors on peut poser $f : t \mapsto g'(t)/t$ et $f(0) = 0$. On a bien $f \in E$ grâce aux hypothèses qui assurent la continuité en 0. En outre, $\varphi(f) = \int_0^x t\frac{g'(t)}{t}\mathrm{d}t = [g(t)]_0^x = g(x) - g(0) = g(x)$. Réciproquement, si $g \in \mathrm{Im}\ \varphi$, alors on pose f continue telle que $\varphi(f) = g$, on a alors $g(0) = \int_0^0 tf(t)\mathrm{d}t = 0$, puis en dérivant $g'(x) = xf(x)$, donc $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $g'(0) = 0$ et enfin $\frac{g'(x)-g(0)}{x-0} = f(x)$ converge quand $x \to 0$, donc g est deux fois dérivable en 0. Finalement (et on a bien un espace vectoriel) :

$$\mathrm{Im}\ \varphi = \{g \in E; g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), g(0) = g'(0) = 0, g' \text{ dérivable en } 0\}$$

11.18 Espaces vectoriels

Exercise 11.35. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $U : f \mapsto f' - 2xf$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculez $\mathrm{Ker}\ U^n$.

Exercise 11.36 (*Solution*)**.** On a $\mathrm{Ker}\ U = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{x^2})$, en résolvant l'équation différentielle.

Soit $f \in \mathrm{Ker}\ E$. On pose g tel que $f(x) = g(x)e^{x^2}$ (on va faire une méthode de variation de la constante à l'ordre n), et on a : $U(f)(x) = g'(x)e^{x^2}$. Par récurrence immédiate : $U^n(f)(x) = g^{(n)}e^{x^2}$. On trouve ainsi que $f \in \mathrm{Ker}\ U^n$ si et seulement $\forall x, g^{(n)}(x) = 0$ si et seulement si g est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Ainsi :

$$\mathrm{Ker}\ U^n = \left\{x \mapsto P(x)e^{x^2}; P \in \mathbb{R}_n[X]\right\}$$

11.19 Espaces vectoriels

Exercise 11.37. Soient F et G deux sous-espaces de E tels que $F + G = E$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrez que $F' \oplus G = E$.

Exercise 11.38 (*Solution*)**.** Comme $F' \subset F$, on a : $F' \cap G \subset F' \cap (G \cap F) = \{\vec{0}\}$, car F' et $G \cap F$ sont supplémentaires dans F.

En outre, soit $x \in E$. On peut écrire $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, car $E = F + G$. Ensuite, on peut écrire $x_F = y_{F'} + y_G$ avec $y_{F'} \in F'$ et $y_G \in (G \cap F) \subset G$, car $F' \oplus (G \cap F) = F$. Ainsi : $x = y_{F'} + (y_G + x_G)$ avec $y_{F'} \in F'$ et $(y_G + x_G) \in G$. Finalement : $E = F' + G$.

On a bien montré que : $E = F' \oplus G$.

11.20 Espaces vectoriels

Exercise 11.39. Soient E un espace vectoriel et $(v_1, ..., v_n)$ une famille de vecteurs. On construit $\pi : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ par : $\pi(i) = \min\{j \; ; \; v_i \in \mathrm{Vect}(v_{i+1}, ..., v_j)\}$ où les indices sont entendus modulo n.

N.B. : Si $v_i \notin \mathrm{Vect}(v_k)_{k \neq i}$, alors $\pi(i) = i$, et si $v_i = \vec{0}$, alors $\pi(i) = i$.

Montrez que π est une permutation.

Exercise 11.40 (*Solution*)**.** Il suffit de montrer que π est injective.

Tous les indices qui suivent sont à considérer modulo n.

Or si $\pi(i) = j \neq i$, alors il existe des coefficient $\lambda_{i+1}, ..., \lambda_j$ tels que :

$$v_i = \sum_{k=i+1}^{j} \lambda_k v_k$$

En outre, $\lambda_j \neq 0$ car sinon, on aurait $v_i \in \mathrm{Vect}(v_{i+1}, ..., v_{j-1})$, donc $\pi(i) < j$. Dès lors :

$$v_j = \frac{1}{\lambda_j} \left(v_i - \sum_{k=i+1}^{j-1} \lambda_k v_k \right)$$

Si $\pi(i') = j$ avec $i' < i$ (quitte à échanger les rôles de i et i', cela traitera le cas général), alors il existe des coefficients $(\mu_k)_k$ tels que :

$$v_{i'} = \sum_{k=i'+1}^{j} \mu_k v_k$$

On peut remplacer v_j par son expression en fonction de $(v_i, ..., v_{j-1})$ de sorte à obtenir une expression de $v_{i'}$ en fonction de $(v_{i'+1}, ..., v_{j-1})$, donc $\pi(i') < j$, ce qui est une contradiction :

$$v_{i'} = \sum_{k=i'+1}^{j-1} \mu_k v_k + \frac{1}{\lambda_j} \left(v_i - \sum_{k=i+1}^{j-1} \lambda_k v_k \right)$$

Ainsi, si $\pi(i) = \pi(i') \neq i$, alors $i = i'$.

Reste à voir ce qui se passe quand $\pi(i) = i = \pi(i')$. Si $v_i = \vec{0}$, alors $\mathrm{Vect}(v_{i'+1}, ..., v_i) = \mathrm{Vect}(v_{i'+1}, ..., v_{i-1})$, donc $\pi(i') < i$. Si $v_i \notin \mathrm{Vect}(v_j)_{j\neq i}$ est non-nul, alors $\pi(i') = i$ donne comme avant $v_i = \frac{1}{\lambda'_i}\left(v_{i'} - \sum_{k=i'+1}^{i-1} \lambda'_k v_k\right)$, donc en particulier $v_i \in \mathrm{Vect}(v_{i'}, ..., v_{i-1})$, ce qui n'est pas.

Finalement, π est injective donc bijective (car $\pi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$) : c'est une permutation.

11.21 Espaces vectoriels

Exercise 11.41. Pour une permutation $\sigma \in S_n$, on pose le vecteur $\pi(\sigma) \in \mathbb{R}^n$ défini par ses coordonnées : $\pi(\sigma)_i = \sigma(i)$. On note $t_j = (j\ n)$ la transposition qui échange j et n (si $j = n$, c'est l'identité). Montrez que la famille $(\pi(t_j))_{1\leq j\leq n}$ est libre ($n \neq 3$).

Montrez que les points $(\pi(\sigma))_{\sigma\in S_n}$ sont dans un même hyperplan affine. En déduire la dimension de l'espace affine engendré par $(\pi(\sigma))_{\sigma\in S_n}$.

Exercise 11.42 (*Solution*)**.** Soit λ_j tels que $\sum_j \lambda_j \pi(t_j) = 0$. On pose $\Lambda = \sum_j \lambda_j$. Sur la coordonnée i, on a $\pi(t_j)_i = i$ si $i \notin \{j, n\}$, $\pi(t_j)_j = n$ et $\pi(t_j)_n = j$. De fait, en coordonnée $i \neq n$:

$$\sum_{j\neq i}(\lambda_j \times i) + \lambda_i \times n = 0$$

$$i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j + (n-i)\lambda_i = 0$$

$$\lambda_i = \frac{-i}{n-i}\Lambda$$

En coordonnée $i = n$, on a : $\sum_{j=1}^n j\lambda_j = 0$. De fait, on en déduit : $\lambda_n = \frac{\Lambda}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j^2}{n-j}$. On a ainsi :

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = \Lambda\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j^2}{n-j} - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{j}{n-j}\right) = \frac{\Lambda}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j(j-n)}{n-j} = \frac{n-1}{2}\Lambda$$

Finalement, pour $n \neq 3$, on obtient que $\Lambda = 0$, puis, grâce aux formules précédentes, $\forall j, \lambda_j = 0$: la famille est libre. Pour $n = 3$, elle ne l'est pas car $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = +3/2$ convient.

On remarque que : $\sum_{i=1}^n \sigma(i) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi, la famille $(\pi(\sigma))_\sigma$ est contenu dans l'hyperplan affine $H = \{x \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n(n+1)}{2}\}$ qui est parallèle à l'hyperplan (linéaire) $\mathrm{Ker}\ \phi$ où $\phi : x \mapsto \sum_i x_i$. On a même $H = \pi(id) + \mathrm{Ker}\ \phi$. En outre, pour $n \neq 3$, la famille $(\pi(t_j) - \pi(id))_{1\leq j\leq n-1}$ est libre, dans $\mathrm{Ker}\ \phi$ et de cardinal $n-1$, donc engendre $\mathrm{Ker}\ \phi$: la dimension affine de $(\pi(\sigma))_\sigma$ est exactement $n-1$.

Pour $n = 3$, un dessin montre qu'on obtient bien un objet de dimension affine 2. On peut aussi voir que le raisonnement précédent donne toujours que $(\pi(t_j))_{1\leq j\leq n-1}$ est libre, ce qui permet de conclure que $\pi(t_1)$ et $\pi(t_2)$ sont affinement indépendants.

11.22 Espaces vectoriels

Exercise 11.43. Soit $\mathbb{F}$ un **corps fini** à q éléments. On regarde $\mathbb{F}^n$, un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$ de dimension n. Montrez qu'il est possible d'écrire $\mathbb{F}^n$ comme la réunion de $q+1$ hyperplan $H_1, ..., H_{q+1}$ avec $\dim \bigcap_{i=1}^{q+1} H_i = n-2$. On commencera par le cas du plan, $n = 2$.

Exercise 11.44 (*Solution*)**.** Prenons le cas $n = 2$, on veut écrire $\mathbb{F}^2$, qui a q^2 éléments comme une réunion de $q+1$ droites. Soit un point (x, y) de $\mathbb{F}^2$.

- Cas $x \neq 0$: On pose $\lambda = \frac{y}{x}$. On a $\lambda \in \mathbb{F}$ car c'est un corps et $(x, y) = x \times (1, \lambda) \in \text{Vect}((1, \lambda))$.
- Cas $x = 0$: On a $(0, y) = y \times (0, 1) \in \text{Vect}((0, 1))$.

Ainsi, si on prend la réunion de toutes les droites $(\text{Vect}((1, \lambda)))_{\lambda\in\mathbb{F}}$ avec la droite $\text{Vect}((0, 1))$, on a recouvert tout le plan $\mathbb{F}^2$ par $q+1$ droites :

$$\mathbb{F}^2 = \text{Vect}((0, 1)) \cup \bigcup_{\lambda\in\mathbb{F}} \text{Vect}((1, \lambda))$$

On a aussi $\text{Vect}((0, 1))\cap\text{Vect}((1, \lambda)) = \{\vec{0}\}$ et $\text{Vect}((1, \lambda))\cap\text{Vect}((1, \mu)) = \{\vec{0}\}$ pour $\lambda \neq \mu$, donc la règle de $\dim \bigcap_{i=1}^{q+1} H_i = n-2$ est même respectée dans un sens plus fort.

On va considérer $\mathbb{F}^n$ comme le plan $\text{Vect}(e_1, e_2)$ et $\text{Vect}(e_i)_{i\geq 3}$. En effet : $\mathbb{F}^n = \text{Vect}(e_1, e_2) \oplus \text{Vect}(e_i)_{i\geq 3}$. On va utilise le même principe que précédemment, on va séparer le plan $\text{Vect}(e_1, e_2)$ entre $q+1$ droites explicitées ci-avant et ajouter à chaque droite $\text{Vect}(e_i)_{i\geq 3}$ pour obtenir un hyperplan. Ainsi, on espère avoir recouvert tous les points de $\mathbb{F}^n$ par $q+1$ hyperplans.

Techniquement, voici comment on procède. On définit, pour $\lambda \in \mathbb{F}$ la forme linéaire sur $\mathbb{F}^n$:

$$\varphi_\lambda : (x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto \lambda x_1 - x_2$$

On définit aussi la forme linéaire :

$$\phi : (x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto x_1$$

Cela permet de définir les $q+1$ hyperplans $H_\lambda = \text{Ker } \varphi_\lambda$ et $H = \text{Ker } \phi$. On va montrer que $\mathbb{F}^n = H \cup \bigcup_{\lambda\in\mathbb{F}} H_\lambda$ et que $H \cap \bigcap_{\lambda\in\mathbb{F}} H_\lambda \simeq \mathbb{F}^{n-2}$, ce qui répondra à la question.

Soit $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{F}^n$. Si $x_1 = 0$, alors $\vec{x} \in H$ car $\phi(\vec{x}) = 0$. Sinon, on pose $\lambda = \frac{x_2}{x_1} \in \mathbb{F}$ (car c'est un corps), et on a $\varphi_\lambda(\vec{x}) = \frac{x_2}{x_1} \times x_1 - x_2 = 0$, donc $\vec{x} \in H_\lambda$. Ainsi, on a bien montré que :

$$\mathbb{F}^n = H \cup \bigcup_{\lambda\in\mathbb{F}} H_\lambda$$

Maintenant, soit $\vec{x} = (0, 0, x_3, ..., x_n)$, alors $\forall\lambda, \varphi_\lambda(\vec{x}) = 0$ et $\phi(\vec{x}) = 0$, donc $\vec{x} \in H \cap \bigcap_{\lambda\in\mathbb{F}} H_\lambda$. Réciproquement, si $\vec{x} \in H \cap \bigcap_{\lambda\in\mathbb{F}} H_\lambda$, alors $\phi(\vec{x}) = x_1 = 0$ puis $\forall\lambda, \varphi_\lambda(\vec{x}) = \lambda \times 0 - x_2$, donc $x_2 = 0$. Finalement :

$$H \cap \bigcap_{\lambda\in\mathbb{F}} H_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{F}^n ; x_1 = x_2 = 0\} = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\geq 3} \simeq \mathbb{F}^{n-2}$$

On a bien montré que $\mathbb{F}^n$ peut être recouvert par $q + 1$ hyperplans dont l'intersection globale est de dimension $n - 2$ (ce qui est presque le plus grand possible, assez surprenant). On pourrait même montrer que ce recouvrement est optimal au sens où il n'existe pas de recouvrement utilisant moins d'hyperplans.

11.23 Espaces vectoriels

Exercise 11.45. Soit $\mathbb{K}$ un corps **infini**. Montrez que qu'un plan (espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension 2) ne peut pas être la réunion d'un nombre fini de droite. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (pas forcément de dimension finie). Montrez que E ne peut pas s'écrire comme une réunion d'un nombre fini d'hyperplans.

Exercise 11.46 (*Solution*)**.** Prenons une base (e_1, e_2) du plan $\mathcal{P}$ en question. Alors, chaque $Vect\left(\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}\right)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ est une droite de $\mathcal{P}$ avec $Vect\left(\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}\right) \cap Vect\left(\begin{pmatrix}1\\\mu\end{pmatrix}\right) = \{\vec{0}\}$ pour $\lambda \neq \mu$. Ainsi, si $\mathcal{P}$ est une réunion de droites, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe une de ces droites (disons Δ) telles que $\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix} \subset \Delta$ et par égalité des dimensions : $\Delta = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}\right)$. Ainsi, chaque droite $Vect\left(\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}\right)$ est un élément de cette réunion et comme elles sont toutes disjointe (sauf en $\vec{0}$), on a une réunion sur une infinité de droites (car $\mathbb{K}$ est infini). Finalement, $\mathcal{P}$ ne peut pas s'écrire comme une réunion d'un nombre fini de droites.

Montrons maintenant par récurrence sur n que $E \neq \bigcup_{i=1}^n H_i$ avec H_i des hyperplans de E. Pour $n = 1$, c'est évident par les dimensions.

Fixons $n > 1$ et supposons que $E = \bigcup_{i=1}^n H_i$. Si $H_1 \subset \bigcup_{i=2}^n H_i$, alors on a $E = \bigcup_{i=2}^n H_i$ (on a écrit E comme réunion de $n - 1$ hyperplans), ce qui est impossible par hypothèse de récurrence. Ainsi, on peut prendre un élément $x_1 \in H_1$ tel que $x_1 \notin \bigcup_{i\neq 1} H_i$. De la même manière, soit $x_2 \in H_2$ tel que $x_2 \notin \bigcup_{i\neq 2} H_i$. On considère le plan $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(x_1, x_2)$. $H_i \cap \mathcal{P}$ est soit un plan, soit une droite ($H_i \cap \mathcal{P} = \{\vec{0}\}$ est impossible mais cela ne servira pas) suivant si $\mathcal{P} \subset H_i$ ou non (c'est un espace vectoriel de dimension au plus 2 car contenu dans $\mathcal{P}$). $H_1 \cap \mathcal{P}$ est une droite car $x_2 \in \mathcal{P}$ et $x_2 \notin H_1$. Pareillement, $H_2 \cap \mathcal{P}$ est une droite. Plus encore, pour tout $i \geq 3$, $H_i \cap \mathcal{P}$ est une droite car $x_1 \in \mathcal{P}$ et $x_1 \notin H_i$. Finalement, on a l'égalité :

$$\mathcal{P} = E \cap \mathcal{P} = \left(\bigcup_{i=1}^n H_i\right) \cap \mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^n (H_i \cap \mathcal{P})$$

On a écrit $\mathcal{P}$ comme une réunion finies de droites : ce n'est pas possible !

Ainsi, on a démontré (par l'absurde et par récurrence) que E, espace vectoriel (de dimension finie ou non) sur un corps infini, ne peut pas s'écrire comme une réunion finie d'hyperplans.

N.B. 1 : On peut remplacer "hyperplans" par "sous-espaces strictes" dans ce théorème car tout sous-espace strict est contenu dans un hyperplan.

N.B. 2 : Si $\mathbb{K}$ est fini, alors le théorème est faux. Un contre exemple peut être obtenu en prenant le corps trivial $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ (avec $1+1=0$ et les autres opérations usuelles) et regarder le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathbb{F}_2^2 = \{(0,0);(0,1);(1,0);(1,1)\}$ qui est la réunion des trois droites $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}_2}((1,0))$, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}_2}((0,1))$ et $\mathrm{Vect}_{\mathbb{F}_2}((1,1))$. Cependant, même si le corps est fini, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est toujours pas un espace vectoriel (sauf si l'un est inclus dans l'autre).

N.B. 3 : On peut regarder l'**??** dans lequel on montre que pour un espace vectoriel de dimension finie sur un corps **non-dénombrable**, ne peut pas être écrit comme une réunion dénombrable de sous-espaces stricts.

11.24 Espaces vectoriels

Exercise 11.47. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrez que Ker f, Ker $(f - Id)$ et Ker $(f + Id)$ sont en somme directe.

Exercise 11.48 (*Solution*)**.** Soient $x \in$ Ker f, $y \in$ Ker $(f - Id)$ et $z \in$ Ker $(f + Id)$ tels que $x + y + z = \vec{0}$. On veut montrer que, alors, $x = y = z = \vec{0}$. En appliquant f, on a :

$$f(x+y+z) = y - z = \vec{0}$$

En appliquant à nouveau f à $y - z = \vec{0}$, on trouve :

$$y + z = \vec{0}$$

On se obtient donc avec le système :

$$\begin{cases} x+y+z & = \vec{0} \\ y-z & = \vec{0} \\ y+z & = \vec{0} \end{cases}$$

Une résolution donne immédiatement $x = y = z = \vec{0}$. Ainsi, Ker f, Ker $(f - Id)$ et Ker $(f + Id)$ sont en somme directe.

Cependant, rien n'oblige à ce que Ker $f \oplus$ Ker $(f - Id) \oplus$ Ker $(f + Id) = E$. Pour s'en persuader, il suffit de regarder $f : x \mapsto 2x$ (sur $E = R^n$ par exemple).

On peut s'interroger plus généralement sur un CNS sur λ, μ tels que Ker f, Ker $(f + \lambda Id)$ et Ker $(f + \mu Id)$ soient en somme direct, ou bien une CNS sur les $(\lambda_i)_i$ tels que les (Ker $(f + \lambda_i))_i$ soient en somme directe.

11.25 Espaces vectoriels (affines voire euclidiens)

Exercise 11.49 (Fonction de Morse)**.** Soit un espace vectoriel de dimension finie et un ensemble de vecteurs $(x_i)_i \in E^N$. Montrez qu'il existe une forme linéaire φ sur E tel que $\forall i, j, i \neq j \Rightarrow \varphi(x_i) \neq \varphi(x_j)$. Donnez un exemple en 3D.

Exercise 11.50 (*Solution*)**.** Pour commencer, regardons ce qui se passe quand $\varphi(x_i) = \varphi(x_j)$, i.e. $\varphi(x_j - x_i) = 0$ pour un couple i, j donné.

On peut construire une base $\mathcal{B}$ de E dont le premier vecteur est $x_j - x_i$. On note E^* l'espace des formes linéaires sur E. On sait que les morphismes coordonnées associés à cette base $\mathcal{B}$ est une base de E^*, notée $\mathcal{B}^* = (\phi_1, ...\phi_n)$. En particulier, si $\varphi(x_i) = \varphi(x_j)$, alors φ est dans l'hyperplan de E^* donné par $\{f = \sum_k \lambda_k \phi_k \in E^*; \lambda_1 = 0\}$ (hyperplan des vecteurs pour lesquels la première coordonnée est nulle). Nommons $H_{i,j}$ cet hyperplan de E^*.

Réciproquement, si $\varphi \in H_{i,j}$, alors $\varphi(x_j - x_i) = 0$, donc $\varphi(x_i) = \varphi(x_j)$.

Ainsi, si $\forall i, j, \varphi(x_i) \neq \varphi(x_j)$, alors $\varphi \notin \bigcup_{i,j} H_{i,j}$ (on a même l'équivalence). Reste à montrer que $\bigcup H_{i,j} \neq E^*$: une réunion d'hyperplans n'est pas l'espace complet. Cela constitue un autre exercice, **??**.

Finalement, il existe des fonctions de Morse, même une infinité, quelque soit l'ensemble de points en question. Par exemple, si on prend un polyèdre dans l'espace (un cube, un mobile pour enfant, etc), alors il existe un manière de le tenir de sorte que à ce que chacun de ses sommets soit à une hauteur différente de tous les autres sommets.

11.26 Espaces vectoriels (affines)

Exercise 11.51. On définit une transformation affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ par $\forall \lambda_i, x_i,\ \sum_{i=1}^d \lambda_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^d \lambda_i f(x_i)$.

Montrez que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est une transformation affine.
2. $L : x \mapsto f(x) - f(\vec{0})$ est une fonction linéaire.
3. $\exists M \in Mat_{m,n}(\mathbb{R}), \vec{b} \in \mathbb{R}^m,\ f(x) = Mx + \vec{b}$.

Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une transformation affine si et seulement si $\forall x, y \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Exercise 11.52 (*Solution*)**.** <u>1. $\Rightarrow$ 2.</u> On a bien :

- $L(\vec{0}) = f(\vec{0}) - f(\vec{0}) = \vec{0}$ (vérification pour la forme)
- $L(\mu x) = f(\mu x) - f(\vec{0}) = f\left(\mu x + (1-\mu)\vec{0}\right) - f(\vec{0}) = \mu f(x) + (1-\mu) f(\vec{0}) - f(\vec{0}) = \mu L(x)$
- $L(x+y) = f\left(\frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}(2y)\right) - f(\vec{0}) = \frac{1}{2}\left(f(2x) - f(\vec{0})\right) + \left(f(2x) - f(\vec{0})\right) = \frac{1}{2} L(2x) + \frac{1}{2} L(2y) = L(x) + L(y)$ Attention au choix de coefficients ici : un dessin est le bienvenu.

2. $\Rightarrow$ 3. Soit M la matrice associée à L et $\vec{b} = f(\vec{0})$. Dans ce cas :

$$f(x) = L(x) + f(\vec{0}) = Mx + \vec{b}$$

3. $\Rightarrow$ 1. Si $f(x) = Mx + \vec{b}$, alors soient λ_i, x_i tels que $\sum_i \lambda_i = 1$. On a :

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = M\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) + \vec{b} = \left(\sum_i \lambda_i M x_i\right) + \left(\sum_i \lambda_i\right)\vec{b} = \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

Il est évident que si f est une transformation linéaire, alors f respecte $\forall x, y, \lambda,\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

Montrons la réciproque. Soient λ_i, x_i tels que $\sum_i \lambda_i = 1$. Soit $\Lambda = \sum_{i \neq d} \lambda_i$ et $x = \sum_{i\neq d} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i$. On note que $\lambda_d = 1 - \Lambda$, puis :

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = f(\Lambda x + (1-\Lambda)x_d) = \Lambda f(x) + \lambda_d f(x_d)$$

On peut effectuer une récurrence sur d car on s'est ramené au cas $d-1$ en posant $\lambda'_i = \frac{\lambda_i}{\Lambda}$ et $x'_i = x_i$ pour $1 \leq i \leq d-1$ avec $\sum_{i=1}^{d-1} \lambda'_i = \frac{1}{\Lambda}\sum_{i\neq d} \lambda_i = 1$.

Dès lors, par récurrence :

$$f(x) = f\left(\sum_{i\neq d} \lambda'_i x_i\right) = \sum_{i \neq d} \lambda'_i f(x_i) = \frac{1}{\Lambda}\sum_{i\neq d} \lambda_i f(x_i)$$

Et finalement :

$$f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \Lambda f(x) + \lambda_d f(x_d) = \sum_{i\neq d} \lambda_i f(x_i) + \lambda_d f(x_d) = \sum_i \lambda_i f(x_i)$$

11.27 Espaces vectoriels, Déterminant

Exercise 11.53 (Lemme des tresses)**.** Montrez qu'une application tri-linéaire $E^3 \to F$ qui est antisymétrique pour ses deux premières variables et symétrique pour ses deux dernières est alors nulle.

Exercise 11.54 (*Solution*)**.** Soit f cette application. Soit $(x, y, z) \in E^3$, on a :

$$f(x,y,z) = f(x,z,y) = -f(z,x,y) = -f(z,y,x) = f(y,z,x) = f(y,x,z) = -f(x,y,z)$$

Ainsi, $f(x, y, z) = 0$ (c'est le seul vecteur de F égal à son opposé).

11.28 Espaces vectoriels, Déterminant

Exercise 11.55. λ-déterminant (Desnanot-Jacobi, Mills-Robin-Ramsey, etc).

12 Espaces vectoriels de dimension finie

12.1 Espaces vectoriels de dimension finie

Exercise 12.1. Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_0, u_1, ..., u_n)$ une famille de n vecteurs de rang s. On suppose qu'il existe une sous-famille $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ de r vecteurs de rang s'. Montrez que $s' \geq r + s - n$.

Exercise 12.2 (*Solution*)**.** Soit $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et $F' = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}')$. Soit $H = \mathrm{Vect}(\mathcal{F} \backslash \mathcal{F}')$ le complémentaire de F' dans F. On a $H + F' = F$ (mais nécessairement $H \oplus F' = F$). On regarde les dimensions :

$$\begin{aligned} &\dim F = s \\ &\dim F' = s' \\ &\dim H \leq n - r \\ &\dim H + \dim F' \geq \dim F \end{aligned}$$

L'avant-dernière inégalité vient du fait qu'on a une famille génératrice de H de taille $n - r$ (la famille $\mathcal{F} \backslash \mathcal{F}'$).

La dernière inégalité vient de $H + F' = F$ avec la formule de Grassmann : $\dim H + s' - \dim(H \cap F') = s$.

On en conclut que $s - s' \leq \dim H \leq n - r$, d'où $s' \geq s + r - n$.

12.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Exercise 12.3 (Matroïdes)**.** On se donne n vecteurs : $(v_i)_{i \in [1,n]} \in \mathbb{R}^d$. On construit $\mathcal{I} = \{E \subset [1, n]; (v_i)_{i \in E} \text{ est libre}\}$. Montrez que $\mathcal{I}$ est un matroïde, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} & \emptyset \in \mathcal{I} \\ \forall X \in \mathcal{I}, & Y \subset X \Rightarrow Y \in \mathcal{I} \\ \forall X, Y \in \mathcal{I}, & |X| < |Y| \Rightarrow \exists e \in Y \backslash X,\ X \cup \{e\} \in \mathcal{I} \end{cases}$$

Exercise 12.4 (*Solution*)**.** Une famille vide est libre (par définition, il n'y a pas de dépendance linéaire dans cette famille de vecteurs). Donc, $\emptyset \in \mathcal{I}$.

Toute sous-famille d'une famille libre est libre (car on ne peut en trouver une dépendance linéaire) : $\forall X \in \mathcal{I}, Y \subset X \Rightarrow X \in \mathcal{I}$.

La vraie question commence ici. Soit $X, Y \in \mathcal{I}$ avec $|X| < |Y|$. On pose $E_X = \mathrm{Vect}(v_i)_{i \in X}$ et idem pour E_Y. Imaginons que $\forall j \in Y, v_j \in E_X$, alors E_X contient une famille libre de taille $|Y|$, donc $\dim E_X = |X| > |Y|$, ce qui n'est pas. De fait, on peut prendre v_e, $e \in Y$ tel que $v_e \notin E_X$. Mais dans ce cas $(v_i)_{i \in X \cup \{e\}}$ est libre car elle est de cardinal $|X| + 1$ est engendre un espace de dimension $\geq |X| + 1$. Ainsi, $X \cup \{e\} \in \mathcal{I}$: on a bien un matroïde.

12.3 Espaces vectoriels de dimension finie

Exercise 12.5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\forall x, \exists p_x, f^{p_x}(x) = \vec{0}$. Montrez que f est nilpotente.

Exercise 12.6 (*Solution*)**.** Soit $(e_k)_k$ un base de E. On pose, pour chaque k, p_k tel que $f^{p_k}(e_k) = \vec{0}$ et $p = \max_k p_k$. On a alors, pour tout k : $f^p(e_k) = f^{p-p_k}(f^{p_k}(e_k)) = \vec{0}$. Soit maintenant $x \in E$ avec sa décomposition dans la base $(e_k)_k$: $x = \sum_k \alpha_k e_k$. On obtient :

$$f^p(x) = f^p\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f^p(e_k) = \vec{0}$$

Ainsi, f est bien nilpotente.

12.4 Espaces vectoriels de dimension finie

Exercise 12.7. Soit $\mathbb{K}$ un corps **infini** et **commutatif**. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Montrez que E ne peut pas s'écrire comme une réunion d'un nombre fini de sous-espaces strictes.

Exercise 12.8 (*Solution*)**.** Cet exercice est complètement équivalent à l'**??**, mais la méthode est très différente.

On va raisonner par récurrence et par l'absurde.

E ne peut pas s'écrire comme réunion de $n = 1$ sous-espace strict.

Supposons maintenant que E ne peut pas s'écrire comme réunion de $n-1$ sous-espaces stricts (n fixé), mais que $E = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ avec F_i des sous-espaces stricts. On ne peut pas avoir $F_1 \subset \bigcup_{i=2}^{n}$, sans quoi $E = \bigcup_{i=2}^{n} F_i$ et on aurait écrit E comme une réunion de $n-1$ sous-espaces stricts. Soit alors $x \in F_1$ tel que $x \notin \bigcup_{i=2}^{n} F_i$. De même, on ne peut avoir $\bigcup_{i=2}^{n} F_i \subset F_1$ sinon $E = F_1$ (ce qui n'est pas car F_1 est un sous-espace strict). Prenons ainsi $y \in \bigcup_{i=2}^{n} F_i$ et $y \notin F_1$. On pose la fonction $\mathbb{K} \to [1, n]$:

$$f : \lambda \longmapsto \min\{i \;;\; x + \lambda y \in F_i\}$$

Cette fonction est bien définie car $\forall \lambda, x + \lambda y \in E = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$. Elle est aussi injective ! En effet, trouvons d'abord les antécédents de 1. Si $f(\lambda) = 1$, alors $x + \lambda y \in F_1$, et comme $x \in F_1$ et que F_1 est un espace vectoriel, on obtient $y \in F_1$, ce qui n'est pas. Donc $f(\lambda)$ ne vaut jamais 1.

Maintenant, supposons que $f(\lambda) = f(\mu) = j \neq 1$, alors $u = x + \lambda y \in F_j$ et $v = x + \mu y \in F_j$, donc $\mu u - \lambda v \in F_j$ car F_j est un espace vectoriel, or, par commutativité de $\mathbb{K}$:

$$\mu u - \lambda v = \mu x + \mu\lambda y - \lambda x - \lambda\mu y = (\mu - \lambda)x \in F_j$$

Comme $j \neq 1$, on a $x \notin F_j$ et comme ce dernier est un espace vectoriel, on a $\mu - \lambda = 0$: on a montré que f est injective.

Seulement, on vient de définir une fonction injective d'un ensemble infini $\mathbb{K}$ vers l'ensemble fini $[1, n]$... On a bien abouti à une contradiction, et on en déduit que E ne peut pas s'écrire comme une réunion de n sous-espaces stricts (et par récurrence, quelque soit n).

12.5 Espaces vectoriels de dimension finie

Exercise 12.9 (Centre de $\mathscr{L}(E)$)**.** Soit E un espace vectoriel (quelconque) et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $\forall x \in E, f(x) \in \mathrm{Vect}(x)$. Montrez que f est une homothétie.

On suppose que E est de dimension finie. Montrez que l'ensemble des applications linéaires qui commutent avec toutes les autres est exactement l'ensemble des homothéties.

Exercise 12.10 (*Solution*)**.** On a déjà montré que si $(x, f(x))$ est liée pour tout x, alors f est une homothétie en **??**.

Supposons maintenant que E est de dimension finie n et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ qui commute avec toutes les autres. Si $x = \vec{0}$, alors on a bien $f(x) = \vec{0} \in \{\vec{0}\} = \mathrm{Vect}(x)$. Supposons $x \neq \vec{0}$ et posons $D = \mathrm{Vect}(x)$. Comme E est de dimension finie, on peut construire H un supplémentaire de la droite D dans E (c'est vrai de beaucoup d'espaces vectoriels qui ne sont pas de dimension finie, comme de ceux qui ont une base, mais pas de tous). Soit s la symétrie par rapport à D et parallèlement à H. s commute avec f, donc, comme $x \in D$:

$$s(f(x)) = f(s(x)) = f(x)$$

Ainsi, $s(f(x)) = f(x)$, donc $f(x) \in D = \mathrm{Vect}(x)$, et d'après la question précédente, f est un homothétie.

Réciproquement, si f est une homothétie, alors elle commute avec tous les éléments de $\mathscr{L}(E)$ car si $g \in \mathscr{L}(E)$, et $f(x) = \lambda x$, alors :

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = f(g(x))$$

12.6 Espaces vectoriels de dimension finie

Exercise 12.11. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrez que $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ est de dimension finie et la donner. Montrez que la famille des $(\varphi_k)_k$ est une base de E^* avec : $\varphi_k : P \mapsto P^{(k)}(0)$.

Exercise 12.12 (*Solution*)**.** Il y a deux possibilités. Ou bien on utilise la formule du cours qui indique que $\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$ et on obtient immédiatement $\dim E^* = \dim E = n + 1$. Ou bien on en refait la démonstration. Soient E et F deux espaces de dimension finies, avec $n =\sim E$. Alors, on a la bijection $\mathscr{L}(E, F) \to F^n$ définie par $u \mapsto u(e_i)$ où $(e_i)_i$ est une base de E. Cette bijection est linéaire, c'est donc un isomorphisme et on a $\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim F^n = n \times \dim F$.

Ainsi, comme la famille $(\varphi_k)_k$ est de cardinal $n+1$, il suffit de montrer qu'elle est libre ou bien qu'elle est génératrice pour obtenir que c'est une base de E^*. Soit $(\lambda_k)_k \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k = 0$ (l'application nulle). dès lors, on a en particulier :

$$\forall j, 0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k(X^j) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{j!}{(j-k)!} \delta_{jk} = j! \lambda_j$$

Ainsi, $\forall j, \lambda_j = 0$ et la famille des $(\varphi_k)_k$ est libre, donc c'est une base.

12.7 Espaces vectoriels de dimension finie, VanderMonde

Exercise 12.13. Montrez que $\mathbb{Q}^2$ est réunion dénombrable de sous-espaces vectoriels stricts de $\mathbb{Q}^2$ vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, trouver un (voire deux) espace(s) vectoriel(s) de dimension infinie qui sont réunion dénombrables de sous-espaces stricts.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**. Montrez que E n'est pas réunion dénombrable de sous-espaces vectoriels stricts. (On pourra poser $x_\lambda = 1e_1 + \lambda e_2 + \lambda^2 e_3 + ... + \lambda^{n-1} e_n$ où $(e_i)_i$ est une base de E.)

Exercise 12.14 (*Solution*)**.** $\mathbb{Q}^2 = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^2} \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(x)$ est bien la réunion dénombrable d'espaces stricts.

Pour $\mathbb{K}$, on a $\mathbb{K}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{K}_n(X)$.

Soit $n = \dim E$. On pose, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $x_\lambda = 1e_1 + \lambda e_2 + \lambda^2 e_3 + ... + \lambda^{n-1} e_n$. On raisonne par l'absurde en supposant $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ où E_k est un sous-espace stricte de E. On s'intéresse à la manière de "ranger" les $(x_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{K}}$ dans les $(E_i)_i$. On sait que $\dim E_k \leq n-1$. Supposons que $(x_{\lambda_1}, ..., x_{\lambda_n})$ soient n vecteurs de E_k construit comme expliqués précédemment. Alors, comme la taille de la famille dépasse la dimension de l'espace, cette famille et liée. En particulier, son déterminant est nul : $\det(x_{\lambda_i})_i = VdM(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$ (VdM désigne le déterminant de Van der Monde). Dès lors, il existe un terme de produit qui est nul : $\exists i \neq j, \lambda_i = \lambda_j$. Ainsi, il ne peut y avoir n vecteurs de type x_λ différents : $\#\{\lambda \in \mathbb{K}; x_\lambda \in E_k\} \leq n-1$. Cependant, par hypothèse $E = \bigcup_k E_k$, donc :

$$\mathbb{K} = \{\lambda; x_\lambda \in E\} = \bigcup_k \{\lambda; x_\lambda \in E_k\}$$

Or on a prouvé que le dernier ensemble est dénombrable, alors que $\mathbb{K}$ ne l'est pas (pour rappel, on a pris $\mathbb{K}$ un corps non-dénombrable comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On en déduit que notre hypothèse est impossible : on ne peut pas écrire un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie comme une réunion dénombrable de sous-espaces stricts.

12.8 Espaces vectoriels de dimension finie, Polynômes

Exercise 12.15. Soit $\psi : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ une application définie sur $\mathbb{R}[X]$. Montrez que ψ est linéaire, calculez son noyau ($\mathrm{Ker}\ \psi = \mathbb{R}_1[X]$) et $\psi(\mathbb{R}_n[X])$ pour tout n ($= \mathbb{R}_{n-1}[X]$ par le théorème du rang). Calculez $dom(\psi(P))$ (le coefficient dominant) et $\deg \psi(P)$ en fonction de $dom(P)$ et $\deg P$.

En déduire un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} k^r (\sim \frac{1}{r+1} n^{r+1})$.

Exercise 12.16 (*Solution*)**.** ψ est linéaire car :

$$\psi(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q) \circ (X+1) - (P + \lambda Q) = \psi(P) + \lambda \psi(Q)$$

Soit $P \in \text{Ker } \psi$. Alors soit d son degré. On se place dans $\mathbb{C}$. Si P n'est pas un polynôme constant non nul, alors il admet une racine (théorème d'Alembert-Gauss), soit z celle-ci. Dans ce cas, $z+1$ est aussi une racine de P car $P(z+1) = P(z) = 0$. En fait, P a plus de racine que son degré car $z+k$ est racine pour tout k. Ainsi, par ce raisonnement par l'absurde, nous avons montré que $P \in \text{Ker } \psi \Rightarrow \psi \in \mathbb{R}_1[X]$. Comme l'inclusion réciproque si vérifie aisément, on a bien $\text{Ker } \psi = \mathbb{R}_1[X]$.

On se place maintenant dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$. D'après le théorème du rang, on a $\dim \mathbb{R}_1[X] + \dim \psi(\mathbb{R}_n[X]) = \dim \mathbb{R}_n[X]$. Or $\deg \psi(P) \leq n-1$ car le coefficient de $P(X+1)$ et de $P(X)$ sur X^n sont les mêmes. De fait, $\psi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et on a même égalité par l'égalité des dimensions.

On fixe $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a alors :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j = \sum_{j=0}^{d} \left(\sum_{k=j}^{d} \binom{k}{j} a_k \right) X^j$$

Ainsi, le coefficient de $\psi(P)$ sur X^j est $\sum_{k=j}^{d} \binom{k}{j} a_k - a_j$. En particulier on peut calculer le coefficient de X^{d-1} : $\binom{d-1}{d-1} a_{d-1} + \binom{d}{d-1} a_d - a_{d-1} = d a_d \neq 0$ On a donc prouvé que $\deg \psi(P) = \deg P - 1$ et $dom(\psi(P)) = \deg P \times dom(P)$.

On a de quoi faire une somme télescopique : $\sum_{k=0}^{n} \psi(P)(k) = P(n+1) - P(0) \sim dom(P) \times n^{\deg P}$. En particulier, si on trouve P tel que $\psi(P) = X^r$, on aura un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} k^r$ comme souhaité. On sait qu'un tel P existe dans $\mathbb{R}_{r+1}[X]$ car $\psi(\mathbb{R}_{r+1}[X]) = \mathbb{R}_r[X]$. On sait aussi qu'on veut $dom(\psi(P)) = 1$ et $\deg \psi(P) = r$, donc, d'après les résultats établis, on a $\deg P = r+1$ et $dom(P) \times (r+1) = 1$. On obtient finalement : $\sum_{k=0}^{n} k^r \sim \frac{1}{r+1} n^{r+1}$.

13 Fonctions continues

13.1 Fonctions continues

Exercise 13.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction possédant la propriété des valeurs intermédiaires et injective. Montrez que f est continue.

Même question pour g possédant la propriété des valeurs intermédiaires et telle que $\forall r \in \mathbb{Q}, X_r = g^{-1}(\{r\})$ est fermée (c'est-à-dire que toute suite convergente de points de X_r a sa limite dans X_r).

Exercise 13.2 (*Solution*)**.** Supposons que f ne soit pas continue (mais injective et ayant la propriété des valeurs intermédiaires). Soit alors a un point de discontinuité de f et $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0, \exists x, |x-a| < \eta, |f(x) - f(a)| > \varepsilon$. On pose $y_+ = f(a) + \varepsilon/2$ et $y_- = f(a) - \varepsilon/2$. Soit b_0 tel que $|f(b_0) - f(a)| > \varepsilon$. Si $f(b_0) < f(a) - \varepsilon$, alors on peut construire $c_0 \in]b_0, a[$ tel que $f(c_0) = y_-$ grâce aux valeurs intermédiaires. Si $f(b_0) > f(a) + \varepsilon$, alors on peut construire $c_0 \in]b_0, a[$ tel que $f(c_0) = y_+$. Ensuite, on peut construire b_1 tel que $|b_1 - a| < |c_0 - a| (= \eta)$ et

$|f(b_1)-f(a)| > \varepsilon$. Cela permet de construire $c_1 \in]b_1, a[$ tel que $f(c_1) \in \{y_-, y_+\}$. On a bien $c_0 \neq c_1$ (car $c_0 < b_1 < c_1$).

On poursuit ainsi pour construire des suites $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ tels que tous les c_n soient différents et que $\forall n, f(c_n) \in \{y_-, y_+\}$. Cela contredit le caractère injectif de f car on a trouvé plus de deux antécédents à un ensemble à deux éléments (on aurait d'ailleurs pu construire une suite de seulement 3 éléments). Ainsi, notre supposition était erronée : f est continue.

Supposons maintenant g non continue (mais ayant la propriété des valeurs intermédiaires et la fermeture des images réciproques sur $\mathbb{Q}$). Soit a un point de discontinuité de g. On peut reprendre le raisonnement précédent avec y_+ et y_- des rationnels différents de a (grâce à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Plus précisément, on choisit une suite $(\eta_n)_n$ strictement positive qui tend vers 0, puis on construit par récurrence une suite $(c_n)_n$ qui vérifie $\forall n, g(c_n) \in \{y_-, y_+\}$ et $\eta_n > |c_n - a|$ (cela est possible car on peut toujours ajuster le choix de b_n dans le raisonnement précédent pour le rendre plus proche de a au besoin). Alors, on a $c_n \to a$ quand $n \to +\infty$, mais $\forall n, c_n \in (X_{y_-} \cup X_{y_+})$ qui est fermé, donc comme $(c_n)_n$ converge, sa limite est dans $X_{y_-} \cup X_{y_+}$, d'où $g(a) \in \{y_-, y_+\}$, ce qui n'est pas.

Finalement, g est continue.

13.2 Fonctions continues

Exercise 13.3. Trouvez f bijective de $[0,1]$ sur lui-même et discontinue en chacun de ses points.

Exercise 13.4 (*Solution*)**.** On peut (presque) poser :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ce faisant, on obtient une bijection de $[0,1]$ dans lui-même (sa réciproque est elle-même), qui est discontinue sauf en $1/2$. On peut corriger cette fonction pour pleinement répondre à la question :

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, x \neq 0, x \neq 1/2 \\ 1-x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \tilde{f}(0) = 1/2 \ ; \ \tilde{f}(1/2) = 0 & \end{cases}$$

Cette fonction est une bijection (involution) de $[0,1]$ discontinue partout.

13.3 Fonctions continues

Exercise 13.5. Étudiez en chaque point de $\mathbb{R}_+^*$ l'existence d'une limite à droite, à gauche, et la continuité de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ et $f(0) = 1$. Généralisez à $f_n : x \mapsto x^n \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Tracez f_1.

Exercise 13.6 (*Solution*)**.** Si $x > 1$, alors $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$, puis $f(x) = 0$: f est continue sur $]1, +\infty[$.

Pour tout k entier, la fonction est continue sur $\left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right[$ car elle coïncide avec $x \mapsto kx^2$. Reste à déterminer les limites en $\frac{1}{k}^+$ et $\frac{1}{k}^-$. À droite, on a :

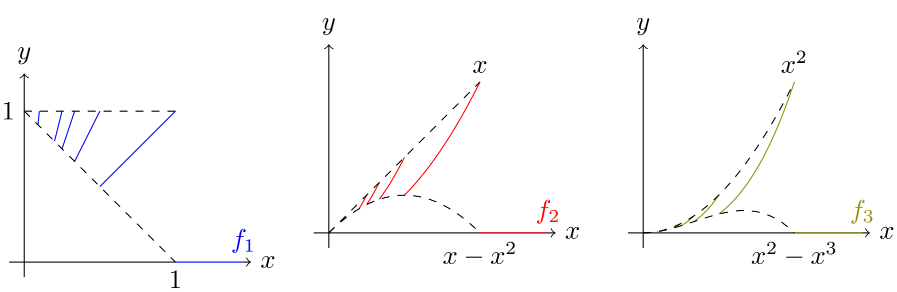
$$\lim_{\frac{1}{k}^+} f(x) = \frac{k-1}{k^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$$

À gauche, on a :

$$\lim_{\frac{1}{k}^-} f(x) = \frac{1}{k}$$

La fonction est ainsi discontinue en tout pour $x = \frac{1}{k}$ $(k \geq 1)$. Elle est continue en 0 car $\forall x, \frac{1}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$, donc $\forall x, 1 - x \leq f(x) \leq 1$, puis $f(x) \to 1$ quand $x \to 0$.

Si on regarde la fonction $f_n : x \mapsto x^n \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, alors on a, par le même raisonnement que f_n et continue sur $]1, +\infty[$ (elle y est nulle) et coïncide avec $x \mapsto kx^n$ sur tout intervalle $\left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right[$. Elle a donc les limites $\frac{k-1}{k^n}$ par la droite, et $\frac{k}{k^n} = \frac{1}{k^{n-1}}$ par la gauche. Finalement, aucune des f_n n'est continue (chacune a pour domaine de continuité $\mathbb{R} \backslash \bigcup_k \{\frac{1}{k}\}$), mais elles se "rapprochent" d'une fonction continue.



13.4 Fonctions continues

Exercise 13.7. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $K = [c, d] \subset f(I)$. Montrez qu'il existe $L \subset I$ un segment tel que $f(L) = K$.

Exercise 13.8 (*Solution*)**.** Soient $A = \{x \in I; f(x) = c \text{ et } \exists y, x < y, f(y) = d\}$ et $a = \sup A$. Soit $B = \{x > a; f(x) = d\}$ et $b = \inf B$.

Soit une suite de points de A qui tend vers a, disons $(a_n)_n$, alors $\forall n, f(a_n) = c$, et par continuité de f, $f(a) = c$. De même, $f(b) = d$. En outre, $a < b$ car $b \in B \subset [a, +\infty[\cap I$.

On va prouver que $f([a, b]) = [c, d]$. Tout d'abord, par le théorème des valeurs intermédiaires, $[c, d] \subset f([a, b])$ car $c \in f([a, b])$ et $d \in f([a, b])$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) < c$, alors $x > a$ et on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour trouver $y \in [x,b]$ tel que $f(y) = c$ (car $f(x) < c < f(b)$). Cependant, on a alors trouvé y tel que $f(y) = c$ et $b > y$ avec $f(b) = d$ mais aussi $y > a$, ce qui contredit la maximalité de a. Inversement, s'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) > d$ et $x < b$, alors on peut trouver par le théorème des valeurs intermédiaires $y \in [a,x]$ qui contredit la minimalité de b car $f(y) = d$ mais $a < y < b$. Finalement, $f([a,b]) \subset [c,d]$ et on a montré l'égalité.

13.5 Fonctions continues

Exercise 13.9. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que g est périodique, que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$ et que $f+g$ est croissante. Montrez que g est constante.

Exercise 13.10 (*Solution*)**.** Supposons g non constante et soit $T > 0$ une de ses périodes. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $y \leq x + NT$. Alors, pour tout n :

$$f(y+nT)+g(y+nT) \leq f(x+nT+NT)+g(x+nT+NT) = f(x+nT+NT)+g(x)$$

Le membre de gauche tend vers $g(y)$ quand $n \to +\infty$ et celui de droite vers $g(x)$, d'où : $g(y) \leq g(x)$. Par un argument symétrique, on a aussi : $g(x) \leq g(y)$. Ainsi, g est constante.

13.6 Fonctions continues

Exercise 13.11. Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues qui commutent. On veut montrer qu'il existe un point commun : $\exists x, f(x) = g(x)$.

a) <u>Par l'absurde :</u> montrez qu'en l'absence de point commun, on peut supposer $f > g$, puis qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x, f(x) \geq g(x) + \alpha$ puis $\forall x, f^n(x) \geq g^n(x) + n\alpha$ et concluez.

b) <u>Par les points fixes :</u> on pose X l'ensemble des points fixes de f, montrez qu'il n'est pas vide, qu'il admet un minimum x_m et un maximum x_M et concluez en comparant f et g en x_m et x_M.

Exercise 13.12 (*Solution*)**.** a) <u>Par l'absurde :</u> Supposons que ni $f > g$, si $g > f$, alors il existe x, y tels que $f(x) > g(x)$ et $f(y) < g(y)$. Mais alors la fonction $f - g$ est continue, positive et négative. Elle s'annule donc par le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists z, f(z) = g(z)$. Par symétrie d'argument, on peut supposer $f > g$. Comme $f - g$ est continue strictement positive sur un segment, on peut trouver $\alpha = \inf_{[0,1]} f - g > 0$. Dès lors : $\forall x, f(x) \geq g(x) + \alpha$. Ensuite :

$$\forall x, f(f(x)) \geq g(f(x)) + \alpha = f(g(x)) + \alpha \geq g(g(x)) + \alpha + \alpha = g^2(x) + 2\alpha$$

En itérant cet argument, on en déduit que $\forall n, x, f^n(x) \geq g^n(x) + n\alpha$. Mais en faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient $f^n(x) \geq +\infty$, alors que $f(x) \in [0,1]$. De cette absurdité découle l'existence d'un point commun à f et g.

b) Par les points fixes : X n'est pas vide car $\tilde{f} : x \mapsto f(x) - x$ est continue avec $\tilde{f}(0) \geq 0$ et $\tilde{f}(1) \leq 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $\tilde{f}$ s'annule, c'est-à-dire que f admet un point fixe. Comme X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ borné (inclus dans $[0,1]$), il admet une borne inférieur et une borné supérieure, nommons-les x_m et x_M. Soit une suite de points de X, $(x_k)_k$ qui tend vers x_m. On a : $\forall k, f(x_k) = x_k$ car $x_k \in X$. Par continuité, l'égalité passe à la limite et on trouve que : $f(x_m) = x_m$, ce qui induit que cette borne inférieure est atteinte, c'est un minimum. De la même manière, x_M est un maximum. En outre, g stabilise X. En effet, soit $x \in X$, alors, par commutation, $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$, donc $g(x)$ est un point fixe de f. De fait, $g(x_m) \in X$, et par minimalité de x_m, on obtient que $g(x_m) \geq x_m$. Pareillement, $g(x_M) \leq x_M$. Cela donne que $g - f$ est continue, d'abord positive (en x_m), puis négative. Ainsi, elle s'annule par le théorème des valeurs intermédiaires, donc on peut trouver un point tel que $f(y) = g(y)$.

13.7 Fonctions continues

Exercise 13.13. Soit f définie sur un voisinage de 0 et vérifiant : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$. Montrez que $f \in o(x)$.

Exercise 13.14 (*Solution*)**.** Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que $\forall 0 < |x| < \eta, \left|\frac{f(2x)-f(x)}{x}\right| \leq$ ${}^{\varepsilon}/_{2}$. On notera que $\forall k, |{}^{x}/_{2^k}| < \eta$. Fixons x tel que $0 < |x| < \eta$, alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{2^k}{x} \left[f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right] \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Or on a $\frac{1}{x} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. De fait, à partir d'un certain rang N, on a : $\left|\frac{1}{x} f\left(\frac{x}{2^N}\right)\right| \leq {}^{\varepsilon}/_{2}$. Il s'ensuit que :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x} f\left(\frac{x}{2^N}\right)\right| + \left|\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} \frac{2^k}{x} \left[f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)\right]\right| \leq \varepsilon$$

Finalement, on a bien que $\frac{f(x)}{x} \to 0$ quand $x \to 0$.

13.8 Fonctions continues

Exercise 13.15. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Soit $B \subset A$ une partie dense de A. Montrez que $f(B)$ est dense dans $f(A)$. En déduire que $\{\cos n; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,+1]$.

Exercise 13.16 (*Solution*)**.** Soit $y \in f(A)$ et $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Comme B est dense dans A, on peut trouver une suite $(x_n)n \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$ quand $n \to +\infty$. Comme f est continue, $f(x_n) \to f(x)$, donc on a construit une suite d'éléments de $f(B)$ qui tend vers $f(x) \in A$. Ainsi, $f(B)$ est dense dans $f(A)$.

Le groupe $\mathbb{Z}[2\pi]$ est dense dans $\mathbb{R}$ car $2\pi \notin \mathbb{Q}$ (exercice classique sur les groupes), donc, comme cos est une fonction continue, on a que $\cos(\mathbb{Z}[2\pi]) = \{\cos(n + 2k\pi); n, k \in \mathbb{Z}\} = \{\cos n; n \in \mathbb{N}\}$ (on a utilisé la parité de cos et sa 2π-périodicité) est dense dans $\cos(\mathbb{R}) = [-1, +1]$.

13.9 Fonctions continues

Exercise 13.17. Soit $f : x \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{P}}(x)$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. Pour $x > 1$, étudier la convergence de la suite $(f(xn))_n$. Est-ce que f admet une limite en $+\infty$?

Exercise 13.18 (*Solution*)**.** Soit $x > 1$, alors on peut distinguer deux cas. Si $x \notin \mathbb{Q}$, on obtient que $\forall n, xn \notin \mathcal{P} \subset \mathbb{Z}$, d'où $f(xn) = 0$ et $f(nx) \to 0$ quand $n \to +\infty$. D'autre part, si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $p \wedge q = 1$, il s'ensuit que $p > q \geq 1$, et nx est entier si et seulement si $q|n$, mais dans ce cas, $p|nx$ et nx n'est premier que dans le cas où $p \in \mathcal{P}$ et $n = q$. Ainsi, quand $n \to +\infty$, $f(nx) \to 0$ (avec égalité pour $n > q$, voire avant).

f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet, si elle en avait une, ce serait 0 d'après le raisonnement précédent, cependant, on notant $(p_n)_n$ la suite des nombres premiers, on a $f(p_n) = 1 \to 1$, ce qui contredit l'hypothétique $f(x) \to 0$ (on s'appuie ici sur l'infinité des nombres premiers, c'est-à-dire $p_n \to +\infty$).

13.10 Fonctions continues

Exercise 13.19. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que f soit croissante mais $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrez que f est continue.

Exercise 13.20 (*Solution*)**.** Supposons que f n'est pas continue. Soit alors a un point de discontinuité de f. Comme f est croissante, $f(a)$ majore f sur $]0, a[$, donc, par le théorème de la limite monotone, f admet une limite en a^-. Cette limite ℓ est strictement inférieure à $f(a)$ sinon f serait continue en a. Mais par ce même théorème appliqué à $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, on a une limite pour g en a^- qui est strictement supérieure à $g(a) = \frac{f(a)}{a}$. Seulement, cette limite vaut $\frac{\ell}{a} < \frac{f(a)}{a}$...

Finalement, f ne peut être discontinue en aucun point : f est continue.

13.11 Fonctions continues

Exercise 13.21. Soit f définie par $f(-1) = f(1) = 0$ et si $|x| \neq 1$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}+1}{x^{2n}-1}$. Étudiez la continuité de f.

Exercise 13.22 (*Solution*)**.** On trouve $f(x) = 1$ pour $|x| > 1$ et $f(x) = -1$ pour $|x| < 1$, donc les points de discontinuité sont $\{-1, +1\}$.

13.12 Fonctions continues

Exercise 13.23. Soient $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$, f, g continues et g croissante. On suppose que f et g commutent. Montrez qu'elles ont un point fixe commun.

Exercise 13.24 (*Solution*)**.** Soit X l'ensemble des points fixe de f. X est non vide car $x \mapsto f(x)-x$ est continue, positive en 0 et négative en 1 donc s'annule et ce point d'annulation est un point fixe de f. X admet donc une borne inférieure (X est bornée car inclus dans $[0,1]$), m.

On a : $m \in X$ car on peut trouver une suite d'éléments, $(x_n)_n$ de X qui tend vers m quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire $\forall n, f(x_n) = x_n$, et par continuité de f, l'égalité passe à la limite en $f(m) = m$. g stabilise X car g commute avec f. En effet, si $x \in X$, alors $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$ d'où $g(x) \in X$. Dès lors, $g(m) \geq m$ sinon on contredirait la minimalité de m.

On peut construire la suite $(g^n(m))_n$ (où g^n désigne $g \circ g \circ \ldots \circ g$, n fois). Cette suite est croissante par récurrence immédiate, car g est croissante : $g^{n+1}(m) \geq g^n(m)$ est vrai pour $n = 0$ et si cela est vrai pour un n fixé, alors on peut appliquer la fonction croissante g des deux côtés pour obtenir $g^{n+2}(m) \geq g^{n+1}(m)$. Cette suite est majorée car c'est une suite dans $[0,1]$: elle admet une limite ℓ.

On va montrer que $f(\ell) = g(\ell) = \ell$: c'est le point fixe commun recherché. D'une part, la suite $(g^n(m))_n$ est dans X par récurrence car g stabilise X. Il s'ensuit que sa limite est aussi dans X car f est continue (on a déjà vu cet argument pour prouver que $m \in X$) : $f(\ell) = \ell$. D'autre part, ℓ est le limite de $g^n(m)$ quand $n \to +\infty$, de fait, en passant à la limite dans $g^{n+1}(m) = g(g^n(m))$, par continuité de g, on a $g(\ell) = \ell$.

13.13 Fonctions continues

Exercise 13.25. Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. On suppose que f vérifie la propriété suivante : pour tous les points $c < d$ de l'intervalle, il existe e compris entre c et d tel que $f(e) = f(a)$ ou $f(e) = f(b)$. Montrer que f est constante.

Exercise 13.26 (*Solution*)**.** Soit c un réel quelconque intervalle de l'intervalle $]a,b[$. Soit d_n une suite de l'intervalle qui tend vers c par valeur supérieure. D'après l'hypothèse, il existe $c \leq e_n \leq d_n$ tel que $f(e_n) = f(a)$ ou $f(e_n) = f(b)$. Maintenant, par le théorème des gendarmes, on constate que e_n tend vers c, et par continuité de f en c, $f(e_n)$ tend vers $f(c)$. Ainsi, on a obligatoirement $f(c) = f(a)$ ou $f(c) = f(b)$. Ainsi, f ne peut prendre que deux valeurs : $f(a)$ et $f(b)$. Or, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, une fonction continue qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs est constante. Donc f est constante.

13.14 Fonctions continues

Exercise 13.27. Soit f une fonction continue avec $f(0) = f(1)$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in [0, 1 - {}^1\!/_n]$ tel que : $f(c_n) = f(c_n + {}^1\!/_n)$. En considérant $g_\alpha : x \mapsto \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right)$, montrez qu'on ne peut pas remplacer le ${}^1\!/_n$ précédent par un α arbitraire.

Exercise 13.28 (*Solution*)**.** Pour $n = 1$, c'est évident : $c_1 = 0$ convient car $f(0) = f(0 + {}^1\!/_1)$.

Supposons $n \geq 2$ et posons la fonction $g_n : x \mapsto f(x + {}^1\!/\!_n) - f(x)$. g_n est continue, et :

$$\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = f(1) - f(0) = 0$$

Dès lors, il est impossible que tous les $g_n({}^k\!/\!_n)$ soient du même signe (strict) : soit l'un d'entre eux est nul, soit il y en a un positif et un négatif.

Si $g({}^k\!/\!_n) = 0$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors $c_n = {}^k\!/\!_n \in [0, 1 - {}^1\!/\!_n]$ convient : $f({}^k\!/\!_n) = f({}^k\!/\!_n + {}^1\!/\!_n)$.

Sinon, soient $i \neq j$ tels que $g({}^i\!/\!_n) < 0$ et $g({}^j\!/\!_n) > 0$ avec $i, j \in [\![0, n-1]\!]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme g est continue, il existe $c_n \in \left[\frac{\min(i,j)}{n}; \frac{\max(i,j)}{n}\right] \subseteq [0, 1 - {}^1\!/\!_n]$ tel que $g(c_n) = 0$, c'est-à-dire : $f({}^k\!/\!_n) = f({}^k\!/\!_n + {}^1\!/\!_n)$.

On constate que $g_\alpha(0) = g_\alpha(1) = 1$. Cependant, si $g_\alpha(x) = g_\alpha(x + \alpha)$, alors, en simplifiant, on obtient : $\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) = 1$, donc ${}^1\!/\!_\alpha$ est entier : on ne peut pas remplacer ${}^1\!/\!_n$ par un α quelconque, au contraire, les seuls α possibles sont les ${}^1\!/\!_n$.

13.15 Fonctions continues

Exercise 13.29. Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et telle que $f(x) \to 0$ et $\frac{f(2x) - f(x)}{x} \to 0$ quand $x \to 0$. En étudiant $g : x \to \frac{f(2x) - f(x)}{x}$, montrez que $\frac{f(x)}{x} \to 0$ quand $x \to 0$. En déduire que f est continue en 0.

Exercise 13.30 (*Solution*)**.** Si f est définie sur $]-\delta, +\delta[$ (avec $\delta > 0$), alors g est définie sur $]-{}^\delta\!/\!_2, +{}^\delta\!/\!_2[\setminus\{0\}$.

Soit $x \in]-{}^\delta\!/\!_2, +{}^\delta\!/\!_2[\setminus\{0\}$, alors :

$$\forall n,\ f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right) = x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$$

On en déduit :

$$\forall n,\ \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\left|g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right| + \left|\frac{f({}^x\!/\!_{2^n})}{x}\right|$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ fixé.

Comme $g(x) \to 0$ quand $x \to 0$, pour x suffisamment petit, tous les $\frac{x}{2^k}$ vérifient : $\left|g\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| < \varepsilon$. Dès lors :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\left|g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right| \leq \varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{2^{k+1}} \leq \varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq \varepsilon$$

D'un autre côté $f(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Donc, à x fixé, pour n suffisamment grand, $\frac{x}{2^n}$ est suffisamment petit de sorte que :

$$\left|\frac{f(x/2^n)}{x}\right| \leq \varepsilon$$

En cumulant, on fixe d'abord x suffisamment petit puis n suffisamment grand et on obtient :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq 2\varepsilon$$

Ainsi, f est dérivable en 0 avec $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) = 0$. En particulier, f est continue en 0 car dérivable en 0.

13.16 Fonctions continues

Exercise 13.31 (Lemme du soleil levant)**.** Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit X l'ensemble des points "invisibles à droite", c'est-à-dire l'ensemble des $x \in]a, b[$ tels qu'il existe $y \in]x, b]$ tel que $g(x) < g(y)$. Montrez que X est une réunion dénombrable d'intervalle $(]a_n, b_n[)_n$. Montrez que : $\forall n, a_n \neq a \Rightarrow g(a_n) = g(b_n)$ et $a_n = a \Rightarrow g(a) \leq g(b_n)$.

Exercise 13.32 (*Solution*)**.** X est un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, soit $x \in X$, et y tel que $g(y) = \max_{]x,b]} g$ (qui est bien un maximum car g est continue sur $[a, b]$). Alors, comme $y \neq x$, on peut trouver $\varepsilon(= \frac{1}{2}(y - x)$ par exemple), tel que $[x, x + \varepsilon] \subset X$. Inversement, s'il n'y a pas de voisinage à gauche de x dans X, alors cela signifie que tous les $z \in [x - \varepsilon, x[$ vérifient $g(z) \geq g(y)$, donc, par continuité $g(x) \geq g(y)$, ce qui n'est pas.

Ainsi, X est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc une réunion dénombrable d'intervalles. Si ce fait n'est pas connu, on peut le démontrer comme il suit. On peut écrire X comme une réunion d'intervalles maximaux (pour chaque x dans X, on construit l'intervalle le plus grand possible au sens de l'inclusion qui contient x), chaque intervalle est ouvert, sans quoi X ne le serait pas (car chaque intervalle est disjoint des autres). Reste à montrer qu'on a une quantité dénombrable d'intervalle. Comme chaque intervalle est ouvert, il est non vide, et on peut trouver un rationnel dedans (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). En particulier, on peut construire la fonction qui a chaque intervalle associe un rationnel dedans (peut importe lequel) : c'est une fonction **injective** de l'ensemble des intervalle vers $\mathbb{Q}$, donc l'ensemble des intervalle est dénombrable.

Montrons d'abord que pour tout $x \in]a_n, b_n[$, $g(b_n) \geq g(x)$. Considérons pour cela un point t en lequel g atteint son maximum sur $[x, b]$. Puisque $[x, b_n[\subset X$, t appartient à $[b_n, b]$ donc, comme $b_n \notin X$, $g(t) \leq g(b_n)$. A fortiori, $g(x) \leq g(b_n)$. Par continuité, $g(a_n) \leq g(b_n)$. Si $a_n \neq a$, on a même $g(a_n) = g(b_n)$. En effet, comme $a_n \notin X$, $g \leq g(a_n)$ sur $[a_n, b]$, en particulier $g(b_n) \leq g(a_n)$. Si $a_n = a$, on ne dispose pas de plus d'informations.

13.17 Fonctions continues, Dénombrement

Exercise 13.33 (Fonction de Conway en base 13)**.** Pour $x \in [0,1]$, on écrit x en base "tridécimale" (base 13) en utilisant les symboles $\{0, 1, .., 9, A, B, C\}$ (on écrira des développement propres, qui ne se terminent pas par une infinité de C). On construit la fonction f suivante :

- Si, à partir d'un certain rang, le développement tridécimal de x s'écrit $Ax_1x_2...x_nCy_1y_2...$ avec toutes les décimales $x_i, y_j \in \{0, ..., 9\}$, alors $f(x) = x_1x_2...x_n, y_1y_2...$ (en base 10).
- Si, à partir d'un certain rang, le développement tridécimal de x s'écrit $Bx_1x_2...x_nCy_1y_2...$ avec toutes les décimales $x_i, y_j \in \{0, ..., 9\}$, alors $f(x) = -x_1x_2...x_n, y_1y_2...$ (en base 10).
- Sinon, $f(x) = 0$.

On prolonge f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f(x - \lfloor x \rfloor)$. Montrez que pour tout intervalle I non réduit à un point, $f(I) = \mathbb{R}$. En déduire que f est discontinue partout mais respecte une propriété plus forte que celle des valeurs intermédiaires.

Exercise 13.34 (*Solution*)**.** Si on montre que $f(I) = \mathbb{R}$ pour tout intervalle non trivial, alors f ne peux être continue car elle n'est pas bornée au voisinage de n'importe quel $a \in \mathbb{R}$. Elle respectera aussi la propriété des valeurs intermédiaires car pour $a < b \in \mathbb{R}$, et $c \in [f(a), f(b)]$, on a $c \in f([a, b]) = \mathbb{R}$. Reste à montrer que $f(I) = \mathbb{R}$ pour tout intervalle I non réduit à un point.

Soient $a < b$ et $r \in \mathbb{R}$, on veut trouver $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = r$. On prend un $c \in]a, b[$ quelconque et on écrit en base 10 : $r = \pm x_1x_2...x_n, y_1y_2....$ On pose $x_0 = A$ si $r > 0$, $x_0 = B$ sinon. On écrit $c = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k 13^k$ ($\gamma_k \in \{0, ..., 9, A, B, C\}$) le développement en base 13. On va modifier c afin qu'il se termine par $x_0x_1x_2...x_nCy_1y_2...$: pour ce faire, on choisi $K \in \mathbb{N}$ et on construit $c_K = \sum_{k > -K} \gamma_k 13^k$. Enfin, on pose $d = 0, x_0x_1..x_nCy_1y_2...$ en base 13 et $\tilde{c} = c_K + 13^{-K} d$. On a $|\tilde{c} - c| \leq 13^{-K}$, donc pour K suffisamment grand, $\tilde{c} \in]a, b[$, et comme $\tilde{c}$ se termine par $x_0x_1x_2...x_nCy_1y_2...$, son image par f vaut r.

On a prouvé que $f(]a, b[) = \mathbb{R}$ (tout intervalle contient un intervalle $]a, b[$).

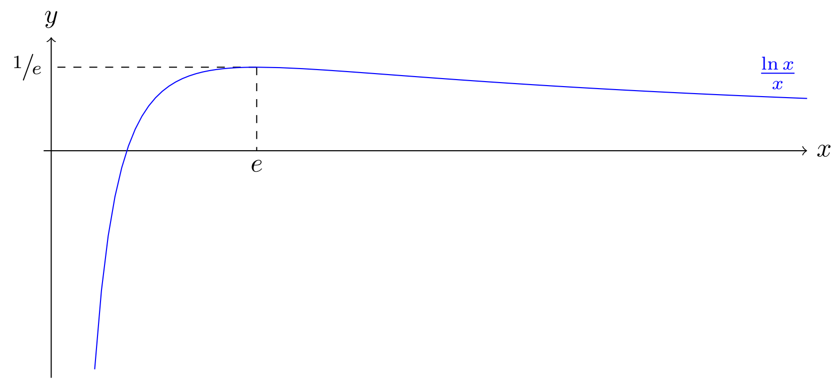
14 Fonctions usuelles

14.1 Fonctions usuelles, Étude de fonction

Exercise 14.1. Étudiez la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ (ensemble de définition, graphe, etc).

En déduire la résolution de l'équation $a^b = b^a$ ou a et b sont entiers naturels.

Exercise 14.2 (*Solution*)**.** La fonction est définie, continue et dérivable comme quotient de fonctions sur $]0; +\infty[$. On a pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Donc, f est croissante avant e et décroissante après. Elle atteint son maximum global en e, de valeur $f(e) = e^{-1}$. On a aussi les limites : $\lim_0 f(x) = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f(x) = 0^+$. D'où le tableau et le graphe qui vont bien.



Supposons que $a^b = b^a$ avec a, b des entiers naturels (non-nuls) et $a < b$ (le cas $a = b$ fournissant bien évidemment une solution). Alors $\ln a^b = \ln b^a$, et il s'ensuit $f(a) = f(b)$. En appliquant le théorème de la bijection pour f sur $I :=]0, e]$ et $J := [e, +\infty[$, on en déduit que a et b ne peuvent pas être tous les deux dans I ou tous les deux dans J, donc $a \leq e$. De fait, $a \in \{1; 2\}$ et il y a au plus 1 $b \neq a$ tel que $f(b) = f(a)$. Finalement, on traite les deux cas à la main :

1. $\underline{a = 1}$, alors $f(a) = 0$ et il est impossible de trouver b (sinon, on aurait $\ln b = 0$, or $b > e$).
2. $\underline{a = 2}$, alors $b = 4$ convient.

Finalement, les couples solutions de l'équation $a^b = b^a$ avec a et b naturels sont $\{(a, a); a \in \mathbb{N}\} \cup \{(2, 4); (4, 2)\}$.

14.2 Fonctions usuelles, Étude de fonction

Exercise 14.3. Déterminez : $\max\{\sqrt[n]{n}; n \in \mathbb{N}\}$.

Exercise 14.4 (*Solution*)**.** On regarde les variations de la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{\ln x}{x}}$. La fonction est bien définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$(\ln f)'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Donc f est croissante sur $]0; e]$ puis décroissante sur $]e; +\infty[$. On en déduit que le maximum de $\sqrt[n]{n}$ est atteint pour $n = 2$ ou pour $n = 3$. Reste à savoir si $\sqrt{2}$ est plus grand que $\sqrt[3]{3}$ ou le contraire. Or on a :

$$(\sqrt{2})^6 = 8 < 9 = (\sqrt[3]{3})^6$$

Ainsi : $\max\{\sqrt[n]{n}; n \in \mathbb{N}\} = \sqrt[3]{3}$.

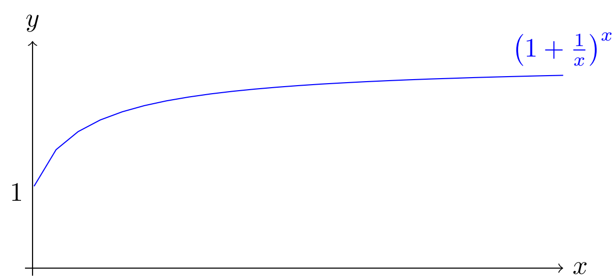
14.3 Fonctions usuelles, Étude de fonction

Exercise 14.5. Tracez le graphe de $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercise 14.6 (*Solution*)**.** Domaine de définition de f : $\mathbb{R}_+^*$, dérivable dessus (car $1 + \frac{1}{x} > 0$).

$\lim_0 f(x) = 1$ et $\lim_{+\infty} f(x) = e$. Il faut passer par le logarithme et les théorèmes de croissances comparées.

$(\ln f)'(x) = f(x)\left(\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}\right)$. La partie de droite est une fonction décroissante (de dérivée $\frac{-1}{x(x+1)^2} < 0$) de limite 0 en $+\infty$, donc positive strictement. Ainsi, f est strictement croissante.



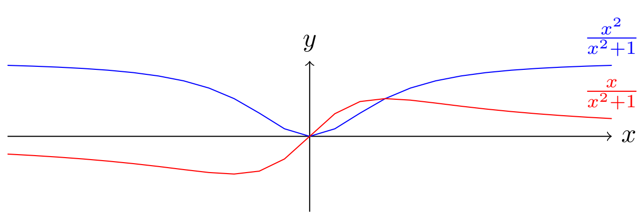
14.4 Fonctions usuelles, Étude de fonction

Exercise 14.7. Montrez que $f : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$ et $g : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Généralisez : soit P et Q deux fonctions polynomiales (réelles), dans quels cas la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{P}{Q}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$?

Exercise 14.8 (*Solution*)**.** Sur $\mathbb{R}$, x^2+1 est toujours non nul, donc les fonctions sont bien définies. En outre, leurs limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont finies (0 et 1), donc elles sont bornées. Par contre, n'ayant pas encore de tel théorème sur les fonctions continues, il faudra le justifier proprement.

Sinon, on peut faire le calcul à la main et montrer que $0 \leq f < 1$ et $|g| \leq \frac{1}{2}$. On finira par des tracés de graphes. Les tableaux de variation serviront à justifier du caractère borné.



Avec la méthode des limites, on obtient que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ (on suppose que P et Q n'ont pas de racines communes) est bornée sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont respectées :

- Q n'a pas de racines dans I (et que Q ne s'annule pas aux bords de I).
- Si $\pm\infty \in I$, alors $\deg P \leq \deg Q$.

14.5 Fonctions usuelles, Étude de fonction

Exercise 14.9. Montrez que $\forall x \in]0;1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$. (On demandera aussi le graphe de la fonction $f : x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$.)

Étudiez aussi les cas limites ($x \to 0$ et $x \to 1$).

Exercise 14.10 (*Solution*)**.** L'expression est correctement définie pour $x \in]0;1[$, elle est positive. On calcul donc $\ln f$ et on en établit le tableau de variation.

$$\ln f(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$$

$\ln f$ est dérivable comme somme et produit :

$$(\ln f)'(x) = \ln x + 1 - \ln(1-x) - 1 = \ln\frac{x}{1-x} = -\ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

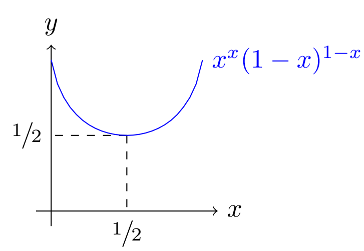
Donc $\ln f$ et par là même f est strictement décroissante sur $]0;{}^1\!/_2]$ puis strictement croissante sur $[{}^1\!/_2;1[$. Elle atteint un minimum global en $\frac{1}{2}$ qui vaut :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

On a bien l'inégalité souhaitée.

On peut remarquer que f est laissé inchangée par l'opérateur $f(.) \mapsto f(1-.)$, donc son graphe admet un axe de symétrie vertical en $x = \frac{1}{2}$. Par ailleurs, on peut calculer les limites de f en 0 et en 1.

- $\lim_0 \ln f(x) = 0 + (1-0) \times 0 = 0$ donc $\lim_0 f(x) = 1$.
- Par symétrie, $\lim_1 f(x) = 1$.



14.6 Fonctions usuelles, Logarithmes et puissances

Exercise 14.11. Résoudre : $\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0$.

Exercise 14.12 (*Solution*)**.** Attention, l'expression n'est définie que pour $x \notin \{\frac{1}{100}; \frac{1}{10}; 1\}$. On a dans ce cas :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ln 10}(\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10)) &= \frac{\ln 10x \ln 100x + 2\ln x \ln 100x + 3\ln x \ln 10x}{(\ln x)(\ln 10x)(\ln 100x)} \\ &= \frac{6(\ln x)^2 + (3+4+3)\ln 10(\ln x) + 2(\ln 10)^2}{(\ln x)(\ln x + \ln 10)(\ln x + 2\ln 10)}\end{aligned}$$

On cherche les racines d'un trinôme avec $a = 6$, $b = 10\ln 10$ et $c = 2\ln^2 10$. On a (avec $b' = b/2$) $\Delta' = 13\ln^2 10 > 0$ et donc $\ln x \in \{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}\ln 10; \frac{-5+\sqrt{13}}{6}\ln 10\}$. Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} := \{10^{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}}; 10^{\frac{-5+\sqrt{13}}{6}}\}$$

14.7 Fonctions usuelles, Logarihtmes et puissances

Exercise 14.13. Résoudre $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ (on doit trouver $\frac{3}{2}$).

Exercise 14.14 (*Solution*)**.** Plusieurs approches possibles. Par exemple on peut raisonner par équivalences :

$$\begin{array}{lll} & 2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} & = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \\ \Leftrightarrow & \frac{3}{2}2^{2x} & = \frac{4\sqrt{3}}{3}3^x \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{4}{3}\right)^x & = \frac{8}{3\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow & x & = \frac{\ln 8 - \ln 3\sqrt{3}}{\ln 4 - \ln 3} \\ \Leftrightarrow & x & = \frac{3}{2} \end{array}$$

On peut aussi remarquer que $\frac{3}{2}$ est solution (parce que cela revient à écrire la décomposition de 12 en bases 2 et 3), puis montrer que l'équation n'a qu'une seule solution.

14.8 Fonctions usuelles, Logarihtmes et puissances

Exercise 14.15. Calculez $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Exercise 14.16 (*Solution*)**.** On repasse en forme exponentielle : $(x^x)^x = e^{x^2\ln x}$ et $x^{(x^x)} = e^{x^x \ln x}$. De fait, on doit regarder $(x^2 - x^x)\ln x$ $(= x^2(1 - x^{x-2})\ln x)$.

— <u>$x \to +\infty$:</u> Si $x > 2$, alors l'expression est négative, et elle tend vers $-\infty$ (comme produit). Donc $\lim_{+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0$.

— <u>$x \to 0$:</u> On a (formellement) $(0-1) \times -\infty$. On trouve $\lim_0 \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = +\infty$.

14.9 Fonctions usuelles, Logarihtmes et puissances

Exercise 14.17. Justifier de l'existence et simplifiez : $\frac{\cosh(\ln x)+\sinh(\ln x)}{x}$ $(= 1)$; et : $\ln(\sqrt{x^2+1}+x) + \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ $(= 0)$.

Exercise 14.18 (*Solution*)**.** La première expression est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et la seconde sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{\cosh(\ln x)+\sinh(\ln x)}{x}=\frac{1}{2x}(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x})=1$$

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}^2-x^2\right)=\ln(1)=0$$

14.10 Fonctions usuelles, Logarihtmes et puissances

Exercise 14.19. Résoudre $\ln|x+1|-\ln|2x+1|\leq\ln 2$.

Exercise 14.20 (*Solution*)**.** L'inégalité est équivalente avec $(x+1)^2\leq 4(2x+1)^2$ *et* $x\neq 1$ *et* $x\neq\frac{1}{2}$. Ainsi, l'ensemble de solution est (on le dessinera sur un axe réel) :

$$\mathcal{S}=]-\infty;-1[\cup]-1;-{}^{3}\!/\!{}_{5}]\cup[-{}^{1}\!/\!{}_{3};+\infty[$$

14.11 Fonctions usuelles, Logarihtmes et puissances

Exercise 14.21. Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2\ln_x y+2\ln_y x=-5 \\ xy=e \end{cases}$$

Exercise 14.22 (*Solution*)**.** Il faut faire attention à ce que $x,y\neq 1$ et $x,y\in\mathbb{R}_+^*$. On a alors $\ln xy=1$, donc $\ln y=1-\ln x$. On remplace dans la première expression : $2\frac{1-\ln x}{\ln x}+2\frac{\ln x}{1-\ln x}=-5$. Ainsi, on obtient $2(1-\ln x)^2+2\ln^2 x=-5\ln x(1-\ln x)$ et finalement $-\ln^2 x+\ln x+2=0$, soit $(\ln x+1)(-\ln x+2)=0$. Ainsi, $(x,y)=(e^2,e^{-1}$ et $(x,y)=(e^2,e^{-1})$ sont les seules possibilités (et elles fonctionnent).

14.12 Fonctions usuelles, Logarihtmes et puissances

Exercise 14.23. Résoudre : $(\sqrt{x})^x=x^{\sqrt{x}}$

Exercise 14.24 (*Solution*)**.**

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x &\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}\ln x}=e^{\frac{1}{2}x\ln x} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln x=\frac{1}{2}x\ln x \\ &\Leftrightarrow (x=1)\ \textit{ou}\ (x=2\sqrt{x}) \\ &\Leftrightarrow (x=1)\ \textit{ou}\ (x=4) \end{aligned}$$

14.13 Fonctions usuelles, Polynômes

Exercise 14.25. Faites l'étude d'une fonction polynomiale de degré 3 de la forme $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

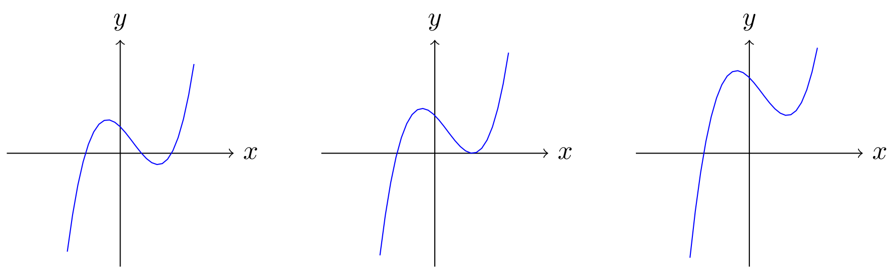
Déterminez graphiquement et numériquement $Q(x) := P(x - \frac{b}{3a})$ (on doit retrouver les polynômes de la forme $X^3 + pX + q$, qui sont "centrés".)

Construisez un discriminant pour les polynômes $X^3 + pX + q$.

Exercise 14.26 (*Solution*)**.** On cherche ici à construire un nombre qui se calcule à partir de p et q et dont un simple regard sur le signe nous donnerait le nombre de racines réelles du polynôme $P = X^3 + pX + q$. On remarque tout d'abord que :

$$\left(\lim_{x\to+\infty} P(x)\right) \times \left(\lim_{x\to-\infty} P(x)\right) < 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires/théorème de bijection, la fonction polynomiale P (qui est continue) s'annule sur $\mathbb{R}$. Donc P a 1 ou 3 racines sur $\mathbb{R}$. **Faites un dessin !**



En dérivant, on a : $P' = 3X^2 + p$, donc la fonction polynomiale P atteint ses extrêma en $\alpha := -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ et $\beta := +\sqrt{\frac{-p}{3}}$, **qui sont réels à la condition** $p \leq 0$. On regarde alors les valeurs prises par P en ces abscisses, et surtout leur produit :

$$\begin{aligned}
P(\alpha)P(\beta) &= (q - \sqrt{-p/3}(p + \sqrt{-p/3}^2))(q + \sqrt{-p/3}(p + \sqrt{-p/3}^2)) \\
&= q^2 - \sqrt{-p/3}^2(\frac{2}{3}p)^2 \\
&= \frac{1}{27}\Delta_3
\end{aligned}$$

Où on a fixé le discriminant du polynôme de degré 3, $X^3 + px + q$:

$$\Delta_3 = 27q^2 + 4p^3$$

Ainsi, le simple calcul de ce nombre nous permet d'étudier le signe de $P(\alpha)P(\beta)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P admet une racine entre ces extrêma si ledit produit est négatif. La réciproque se montre simplement en établissant le tableau de variation de la fonction polynomiale P.

Attention cependant, ici, c'est lorsque qu'on a $\Delta_3 < 0$ que le polynôme a 3 racines réelles ! Inversement, lorsque $\Delta_3 > 0$, il n'y a qu'une seule racine réelle, et pour $\Delta_3 = 0$, il y a une racine simple et une double (mais on ne peut dire laquelle est laquelle sans pousser plus loin l'analyse).

Remark. La condition "$p < 0$" est bien induite par "$\Delta_3 < 0$", il n'est donc pas nécessaire de la vérifier en plus.

14.14 Fonctions usuelles, Trigonométrie

Exercise 14.27. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n|\sin x|$. Quels sont les cas d'égalité ?

Exercise 14.28 (*Solution*)**.** Preuve par récurrence avec les formules d'addition. Cas d'égalité qui se voit dans la récurrence.

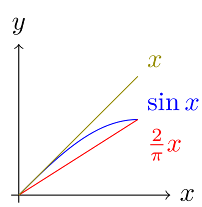
$$\begin{aligned} |\sin(nx)| &= |\sin(nx)\cos x + \cos(nx)\sin x| && (Formule\ d'addition) \\ &\leq |\sin(nx)||\cos x| + |\cos(nx)||\sin x| && (Inegalite\ triangulaire) \\ &\leq |\sin(nx)| + |\sin x| && (|\cos x| < 1) \\ &\leq n|\sin x| + |\sin x| && (Hypothese\ de\ recurrence) \\ &\leq (n+1)|\sin x| \end{aligned}$$

Donc le cas d'égalité intervient quand, d'une part, $|\cos x| = 1$, ce qui induit $x \in \pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a $\sin x = 0$ et $\sin(nx) = 0$, ce qui est bien une égalité.

14.15 Fonctions usuelles, Trigonométrie

Exercise 14.29. Montrez : $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

Exercise 14.30 (*Solution*)**.** En dérivant, on obtient les tableaux de variation, et les inégalités souhaitées.



14.16 Fonctions usuelles, Trigonométrie hyperbolique

Exercise 14.31. Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifiez $\sinh^2 x \cos^2 x + \cosh^2 x \sin^2 x$.

Exercise 14.32 (*Solution*)**.** Utilisez $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et $\sinh^2 - \cosh^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \sinh^2\cos^2 + \cosh^2\sin^2 &= \sinh^2\cos^2 + (1+\sinh^2)\sin^2 \\ &= \sinh^2(\cos^2 + \sin^2) + \sin^2 \\ &= \sinh^2 + \sin^2 \end{aligned}$$

14.17 Fonctions usuelles, Trigonométrie hyperbolique

Exercise 14.33. Résoudre en fonction de a, b et c des réels, l'équation $a\cosh x + b\sinh x = c$.

Exercise 14.34 (*Solution*)**.** Avec des exponentielle, on obtient que $x \in \mathbb{R}$ vérifie $a\cosh x + b\sinh x = c$ si et seulement si e^x est racine du polynôme $(a+b)X^2 - 2cX + (a-b)$. Cela donne lieu à plein de disjonctions de cas !

14.18 Fonctions usuelles, Trigonométrie hyperbolique

Exercise 14.35 (Transformation de Gudermann)**.** On suppose que $x = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$.
Montrez que $\tanh\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}$; $\tanh x = \sin y$ et $\cosh x = \frac{1}{\cos y}$.

Exercise 14.36 (*Solution*)**.** On a $e^x = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) = \frac{1+\tan\frac{y}{2}}{1-\tan\frac{y}{2}}$, donc en inversant : $\tan\frac{y}{2} = \frac{e^x-1}{e^x+1} = \tanh\frac{x}{2}$. Ensuite, on peut montrer que :

$$\tanh x = \frac{2\tanh\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{y}{2}}{1-\tan^2\frac{y}{2}} = \sin y$$

Finalement, $\frac{1}{\cosh^2 x} = 1-\tanh^2 x = 1-\sin^2 x = \cos^2 x$. En remarquant que si $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) > 0$ (ce qui est le cas car on a passé cette expression au logarithme), alors $\cos y > 0$, on conclut.

15 Fractions rationnelles

15.1 Fractions rationnelles

Exercise 15.1. Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle avec $P \wedge Q = 1$, telle que $F' = \frac{1}{X}$. Montrez que $X|Q$, puis que si $X^n|Q$, alors $X^n|Q'$. Concluez qu'une primitive de $\frac{1}{X}$ ne peut pas être une fraction rationnelle.

Exercise 15.2 (*Solution*)**.** On a : $F' = \frac{P'Q-PQ'}{Q^2} = \frac{1}{X}$, donc $RX = Q^2$ avec $R = P'Q - PQ'$. Ainsi, $X|Q^2$. Comme X est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, on a $X|Q$.

Supposons que $X^n|Q$, alors notons $Q^2 = X^{2n}B$, on a $RX = Q^2 = X^{2n}B$, puis $X^{2n-1}B = P'Q - PQ'$, d'où $X^n|(P'Q - PQ')$. Comme $X^n|P'Q$, on obtient $X^n|PQ'$, sauf que P est premier avec X^n car P est premier avec Q (qui est multiple de X^n). Finalement : $X^n|Q'$.

Supposons que $F' = \frac{1}{X}$ pour une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ ($P \wedge Q = 1$), alors en notant q le degré de Q, on sait que 0 est racine de Q avec multiplicité au moins 1. Mais si 0 est racine de Q avec multiplicité n, alors 0 est racine de Q' avec multiplicité n aussi, donc racine de Q avec multiplicité $n+1$. Dès lors, la multiplicité de 0 comme racine de Q est aussi grande qu'on veut, plus grande que son degré : Q est le polynôme nul... Cela est une contraction avec $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$.

15.2 Fractions rationnelles

Exercise 15.3 (Théorème de Lucas)**.** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines $\alpha_1, ..., \alpha_n$ de multiplicité $a_1, ..., a_n$. Soient $(A_i)_i$ les points d'affixe $(\alpha_i)_i$. En décomposant $\frac{P'}{P}$ en éléments simples, montrez que si β est racine de P' mais pas de P, alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\beta - \alpha_k} = 0$. En déduire que B, d'affixe β, est un barycentre (à poids positifs) des $(A_i)_i$.

Que ce passe-t-il géométriquement quand on itère ce processus ?

Exercise 15.4 (*Solution*)**.** On a : $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X - \alpha_k}$ car P est scindé et on note n_k la multiplicité de α_k. Donc $\frac{P'}{P}(\beta) = \frac{P'(\beta)}{P(\beta)} = 0$ car $P(\beta) \neq 0$ par hypothèse. Il s'ensuit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\beta - \alpha_k} = 0$$

Dès lors, on peut écrire β comme un barycentre à poids positifs des α_k :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\beta - \alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(\overline{\beta} - \overline{\alpha_k})}{|\beta - \alpha_k|^2} = \overline{\beta} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{|\beta - \alpha_k|^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \overline{\alpha_k}}{|\beta - \alpha_k|^2}$$

Comme cette somme vaut 0, en conjuguant et isolant β, on obtient une expression de β comme barycentre à poids positifs des α_k :

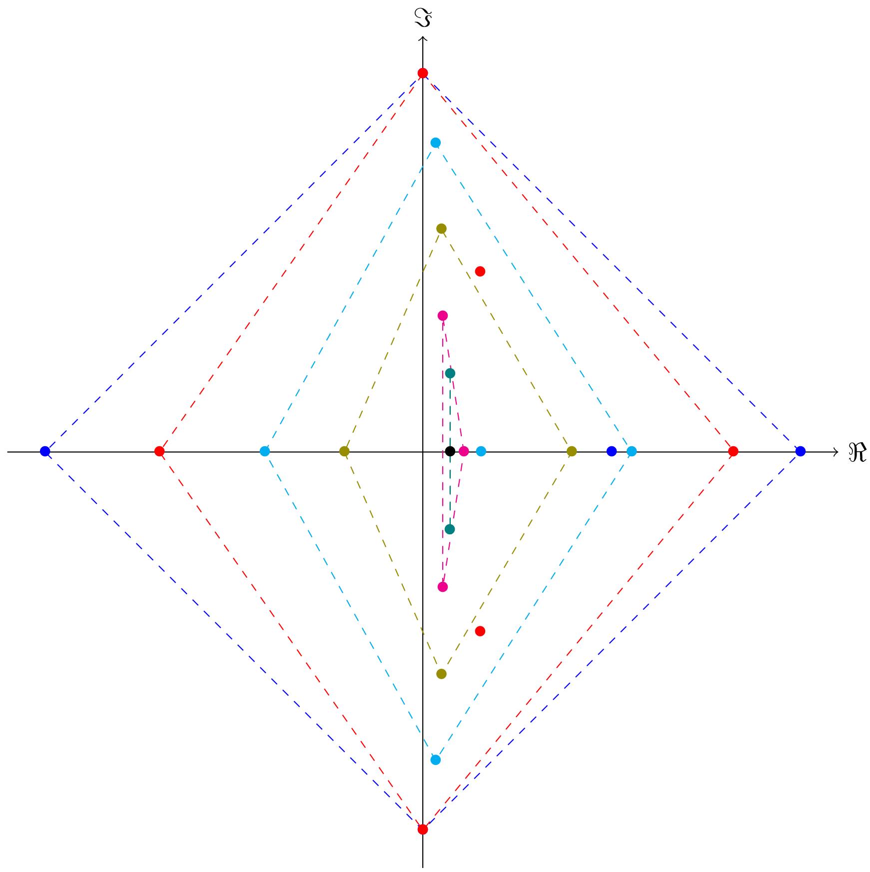
$$\beta = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{|\beta - \alpha_k|^2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{|\beta - \alpha_k|^2} \alpha_k$$

Cela signifie, géométriquement, que si on place les A_k (d'affixe α_k, racines de P) dans le plan, les points B_j, qui ont pour affixe les racines β_j de P', sont tous dans l'enveloppe convexe du polygone formés par les A_k : certaines racines de P sont aussi racines de P' (les multiples), et les autres sont strictement dans l'enveloppe convexe.

On peut poursuivre en traçant l'enveloppe convexe des β_j : les racines de P'' sont dedans, etc.

Ce théorème donne une version dans $\mathbb{C}$ du fait que les racines de P' sont dans l'intervalle $[\min_{x\ ;\ P(x)} x, \max_{y\ ;\ P(y)} y]$ pour les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ scindés dans $\mathbb{R}$.

Exemple avec $P = (X - i)^2(X + i)^2(X - 1)(X + 1)(X - 1/2)$. On notera qu'une des racines de P est dans l'enveloppe convexe des racines de P'', en autres emplacements étranges : le problème de l'enchevêtrement des racines n'est donc pas simple, même une fois établi le théorème de Lucas.



P, P', P'', $P^{(3)}$, $P^{(4)}$, $P^{(5)}$, $P^{(6)}$

15.3 Fractions rationnelles

Exercise 15.5. Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. Montrez que F est paires si et seulement si P et Q sont pairs. Trouvez un critère pour F impaire.

Exercise 15.6 (*Solution*)**.** Si $F = \frac{P}{Q}$ est paire, alors $\frac{P(-X)}{Q(-X)} = \frac{P}{Q}$, donc $PQ(-X) = P(-X)Q$, donc $P|P(-X)$ par le lemme de Gauss car P est premier avec Q. Comme P et $P(-X)$ ont le même degré, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P(-X) = \lambda P$. Comme le coefficient dominant de $P(-X)$ vaut $(-1)^{\deg P}$ fois le coefficient dominant de P, on obtient $\lambda = (-1)^{\deg P}$: $P(-X) = (-1)^{\deg P} P$ se substitue dans $PQ(-X) = P(-X)Q$ pour donner $Q(-X) = (-1)^{\deg P} Q$.

Ainsi, si F est paire, soit P et Q sont pairs, soit P et Q sont impairs. Cependant, le deuxième cas n'est pas possible car alors P et Q admettent 0 comme racine et ne sont donc pas premiers entre eux. Ainsi : F paire $\Leftrightarrow$ P et Q pairs.

Maintenant, si $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ est impaire, alors $F' = \frac{P'Q-PQ'}{Q^2}$ est paire, donc Q^2 est pair par le raisonnement précédent : $\forall x,\ Q(-x) \in \{Q(x), -Q(x)\}$. Dès lors, $Q(-X)$ coïncide une infinité de fois ou avec Q ou avec $-Q$: comme c'est un polynôme, on obtient $Q(-X) = Q$ ou $Q(-X) = -Q$. En substituant dans l'expression de F, on trouve finalement : F est impaire $\Leftrightarrow$ (P est pair et Q impair) ou (P est impair et Q pair).

15.4 Fractions rationnelles

Exercise 15.7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples non-nulles $x_1, ..., x_n$. Décomposez en éléments simples la fraction $\frac{1}{XP}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} \left(= \frac{-1}{P(0)}\right)$.

Exercise 15.8 (*Solution*)**.** Comme 0 n'est pas racine de P, $\frac{1}{XP}$ admet une décomposition en éléments simples de degré 1 :

$$\frac{1}{XP} = \frac{\alpha_0}{X} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - x_k}$$

Multiplions par X et faisons tendre $x \to 0$: $\frac{1}{P(0)} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} 0$.

Ensuite, multiplions par $X - x_k$ et faisons tendre $x \to x_k$. D'une part : $\lim_{x \to x_k} \frac{1}{x} \frac{x - x_k}{P(x) - P(x_k)} = \frac{1}{x_k P'(x_k)}$. Et d'autre part, le membre droite tend vers α_k.

Finalement :

$$\frac{1}{XP} = \frac{1/P(0)}{X} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1/x_k P'(x_k)\right)}{X - x_k}$$

Maintenant, multiplions les deux côtés par X et faisons tendre $x \to +\infty$: $\frac{x}{xP(x)} \to 0$, $x\frac{1/P(0)}{x} = \frac{1}{P(0)}$ et $x \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1/x_k P'(x_k)\right)}{x - x_k} \to \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)}$. Il s'ensuit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = \frac{-1}{P(0)}$$

15.5 Fractions rationnelles

Exercise 15.9. Soit n fixé. Écrire sous forme d'une seule fraction rationnelle ($\mathbb{U}_n$ est le groupe des racines n-ième de l'unité) :

$$F = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega X}{\omega^2 X^2 + \omega X + 1}$$

Exercise 15.10 (*Solution*)**.** Commençons par regarder, pour $\omega \in \mathbb{U}_n$ le terme de la somme. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$:

$$\frac{\omega X + 1}{\omega^2 X^2 + \omega X + 1} = \frac{\omega X + 1}{(\omega X - j)(\omega X - j^2)} = \frac{a}{\omega X - j} + \frac{b}{\omega X - j^2}$$

On trouve : $a = \frac{\omega\frac{j}{\omega}+1}{\omega\frac{j}{\omega}-j^2} = \frac{j}{j-1}$ et $b = \frac{-1}{j-1}$. Il s'ensuit que (comme $\mathbb{U}_n$ est stable par $z \mapsto \frac{1}{z}$) :

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{j-1}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\left(\frac{j}{\omega X - j} - \frac{1}{\omega X - j^2}\right) \\ &= \frac{1}{j-1}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\left(\frac{j/\omega}{X - j/\omega} - \frac{1/\omega}{X - j^2/\omega}\right) \\ &= \frac{1}{j-1}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\left(\frac{j\omega}{X - j\omega} - \frac{\omega}{X - j^2\omega}\right) \end{aligned}$$

Maintenant, on remarque que $(j\omega)^n = j^n$, donc : $\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}(X - j\omega) = X^n - j^n$. De fait, $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{j\omega}{X-j\omega}$ est la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle de la forme $\frac{P}{X^n-j^n}$ pour un certain $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

On sait que, pour $\omega \in \mathbb{U}_n$ fixé, $\frac{z^n-j^n}{z-j\omega} \to n(j\omega)^{n-1}$ (le polynôme dérivé) quand $z \to j\omega$, donc, en multipliant par $X - j\omega$ puis en évaluant en $j\omega$ l'égalité $\frac{P}{X^n-j^n} = \sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{j\omega}{X-j\omega}$, on trouve $\frac{P(j\omega)}{n(j\omega)^{n-1}} = j\omega$, puis $P(j\omega) = nj^n$. Comme P vaut la même valeur sur $\mathbb{U}_n$ et est de degré $\leq n-1$, P est constant de valeur nj^n. Ainsi :

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{j\omega}{X - j\omega} = \frac{nj^n}{X^n - j^n}$$

Le même raisonnement avec j^2 donne :

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{\omega}{X - j^2\omega} = \frac{nj^{2n-2}}{X^n - j^{2n}}$$

Finalement :

$$F = \sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{\omega X}{\omega^2 2X^2 + \omega X + 1} = \frac{n}{j-1}\left(\frac{j^n}{X^n - j^n} - \frac{j^{2n-2}}{X^n - j^{2n}}\right)$$

Cette forme est beaucoup plus simple que celle de départ, on peut cependant encore la simplifier :

- Si $n = 3p$: $F = \frac{3p}{j-1}\left(\frac{1}{X^{3p}-1} - \frac{j}{X^{3p}-1}\right) = \frac{-3p}{X^n-1}$
- Si $n = 3p+1$: $F = \frac{3p+1}{j-1}\left(\frac{j}{X^{3p+1}-j} - \frac{1}{X^{3p+1}-j^2}\right) = \frac{(3p+1)(X^{3p+1}+1)}{X^{6p+2}+X^{3p+1}+1}$
- Si $n = 3p+2$: $F = \frac{3p+2}{j-1}\left(\frac{j^2}{X^{3p+2}-j^2} - \frac{j^2}{X^{3p+2}-j}\right) = \frac{3p+2}{X^{6p+4}+X^{3p+2}+1}$

16 Groupe symétrique

16.1 Groupe symétrique

Exercise 16.1 (Théorème de Futurama)**.** Soit k transpositions **différentes** $(\tau_i)_i \in \mathcal{S}_n^k$. On pose $\sigma = \tau_k\tau_{k-1}...\tau_2\tau_1$. Montrez qu'il existe des transpositions

différentes $(\pi_j)_j \in \mathcal{S}_{n+2}^p$ telles que $\pi_p ... \pi_1 \sigma = id$ et $\forall i \neq j, \pi_i \neq \tau_j$. Montrez qu'on peut prendre $p \leq n+3$.

Exercise 16.2 (*Solution*)**.** La solution est ici.

16.2 Groupe symétrique

Exercise 16.3. Résolution du problème du taquin (montrez que toutes les permutations possibles sur un taquin 3×3 sont de signature 1 et généralisez aux taquins $n \times n$, n impair).

Référence pour les exercices de groupe symétrique.

Exercise 16.4 (*Solution*)**.** Lorsqu'on réalise un déplacement horizontal d'un jeton, on ne change par l'ordre des numéros, et la permutation correspondante est simplement l'identité. Lorsqu'on réalise un déplacement vertical d'un jeton, que ce soit vers le haut ou vers le bas, on produit un cycle de longueur 3, donc une permutation de signature égale à 1. La position finale étant obtenue comme suite de déplacements horizontaux ou verticaux, la permutation obtenue correspond à un produit de cycles de longueur 3, donc à un produit de permutations de signature égale à 1. C'est donc aussi une permutation de signature égale à 1.

Sur un taquin $n \times n$, une position peut être obtenue par produit de cycles de longueur n. En particulier, si n est impair, alors chaque n-cycle est de signature 1, donc le taquin est de signature 1.

16.3 Groupe symétrique

Exercise 16.5. Montrez que le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est distingué dans $\mathcal{S}_n$ (i.e. que $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \forall \tau \in \mathcal{A}_n, \sigma\tau\sigma^{-1} \in \mathcal{A}_n$).

Montrez qu'une permutation est dans le groupe alterné si et seulement si elle s'écrit comme un produit d'un nombre pair de transpositions.

Montrez qu'un cycle de $\mathcal{S}_n$ de longueur m est dans $\mathcal{A}_n$ si et seulement si m est impair. Montrez que $\mathcal{A}_n$ est le groupe engendré par les 3-cycles.

Soit τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Montrez que $\phi : \sigma \mapsto \sigma\tau$ est une bijection de $\mathcal{S}_n$ et calculez le cardinal de $\mathcal{A}_n$ grâce à elle.

Montrez que $D\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n$ pour $n \geq 5$ (utilisez que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles), puis calculez $D\mathcal{A}_n$ pour $n \leq 4$ (DG désigne le groupe dérivé de G : c'est le groupe engendré par $\{aba^{-1}b^{-1}; a, b \in G\}$).

Exercise 16.6 (*Solution*)**.** On a $\varepsilon(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)^{-1} = \varepsilon(\tau)$, donc $\mathcal{A}_n$ est stable par conjugaison.

Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$. Comme les transposition engendre $\mathcal{S}_n$, on peut écrire σ comme un produit de transposition. Comme chaque transposition a pour signature -1 et que σ a pour signature $+1$, il a un nombre paire de transposition. Réciproquement, un produit d'un nombre pair de transpositions est dans $\mathcal{A}_n$ car sa signature est $+1$.

La signature d'un p-cycle de $\mathbb{S}_n$ est égale $(-1)^{p-1}$. donc un p-cycle est dans $\mathcal{A}_n$ si et seulement si p est impair. On écrit $\sigma \in \mathcal{A}_n$ comme un produit de transpositions. Il suffit donc de prouver que le produit de deux transpositions est aussi produit de 3-cycles. On distingue deux cas :

1. Les transpositions sont à supports disjoints : on écrit alors $(i\ j) \circ (k\ l) = (i\ k\ j) \circ (k\ l\ i)$.
2. Les supports des deux transpositions ont un élément en commun : on écrit alors $(i\ j) \circ (i\ k) = (i\ k\ j)$.

ϕ est une bijection de $\mathcal{S}_n$ car on peut exhiber sa bijection réciproque : $\psi : \sigma \mapsto \sigma\tau^{-1}$. En particulier, $\varepsilon(\phi(\sigma)) = (-1) \times \varepsilon(\sigma)$ car τ est une transposition. De fait, $\phi(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{S}_n \backslash \mathcal{A}_n$, et réciproquement. On en déduit $\#\mathcal{A}_n = \frac{1}{2}\#\mathcal{S}_n = \frac{n!}{2}$.

D'une part, $D\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_n$ est évident grâce à la signature. Par ailleurs, soient a, b et c distincts. On veut montrer que $(a\ b\ c) \in D\mathcal{A}_n$. Soit σ telle que $\sigma(a) = a$, $\sigma(b) = c$ et $\sigma(c) = b$. On a alors $\sigma(a\ b\ c)\sigma^{-1} = (a\ c\ b) = (a\ b\ c)^2$. Si $\sigma \in \mathcal{A}_n$, on a gagné car $\sigma(a\ b\ c)\sigma^{-1}(a\ c\ b)^{-1} = (a\ b\ c) \in D\mathcal{A}_n$. Si $\sigma \notin \mathcal{A}_n$, soient d et e distincts de a, b, c (ce qui est possible car $n \geq 5$). On change σ en $\sigma \circ (d\ e)$, donc on change sa signature et on a $\sigma \circ (d\ e) \in \mathcal{A}_n$, donc on a gagné. Ainsi, on a bien que tous les 3-cycles sont dans $D\mathcal{A}_n$, et comme les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}_n$, on a finalement : $D\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n$.

16.4 Groupe symétrique

Exercise 16.7 (Code de Lehmer)**.** Montrez que c'est une bijection. Montrez que l'algorithme usuel le calcule bien (quelle complexité ?). Déterminer le code de Lehmer de la permutation symétrique.

16.5 Groupe symétrique

Exercise 16.8. Soit n un entier impair supérieur ou égal à 3 et $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\sigma^2 = id$. Montrez que σ possède au moins un point fixe.

Exercise 16.9 (*Solution*)**.** On regarde la partition de $[1, n]$ en orbites de σ. Comme $\sigma^2 = id$, l'orbite de x sous l'action de σ est soit $\{x\}$, soit $\{x, \sigma(x)\}$. Or on sait que la somme des cardinaux des orbites est exactement n (tout les nombres entre 1 et n apparaissent dans exactement une orbite). Donc, comme n est impair, si toutes les orbites étaient du type $\{x, \sigma(x)\}$, alors on aurait une contradiction (car $n = \sum \#\mathcal{C}_x = \sum 2$ serait pair). Ainsi, il existe au moins un point fixe (une orbite de taille 1)..

16.6 Groupe symétrique

Exercise 16.10. Montrez que le type cyclique d'une permutation est stable par conjugaison. Montrez que le type cyclique est stable par l'inverse. En déduire que toute permutation est conjuguée à son inverse.

Exercise 16.11 (*Solution*)**.** Soit $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ où τ est une transposition. On s'intéresse au type cyclique de $s = \sigma\tau\sigma^{-1}$. Écrivons $\tau = (a\ b)$, si $x \neq \sigma(a), \sigma(b)$, alors $s(x) = x$ et $s(\sigma(a)) = \sigma(b)$ et $s(\sigma(b)) = \sigma(a)$, donc $s = (\sigma(a)\ \sigma(b))$. De fait, pour une permutation quelconque $\gamma \in \mathcal{S}_n$, on peut écrire γ comme un produit de transposition $\gamma = \tau_1\tau_2...\tau_k$, et regarder $s = \sigma\gamma\sigma^{-1}$:

$$s = \sigma\tau_1...\tau_k\sigma^{-1} = \left(\sigma\tau_1\sigma^{-1}\right)\left(\sigma\tau_2\sigma^{-1}\right)...\left(\sigma\tau_k\sigma^{-1}\right)$$

De fait, en changeant tous les $[1, n]$ qui apparaissent dans la décomposition en produit de cycles de γ par $[\sigma(1), \sigma(n)]$, on obtient la décomposition en produit de cycles de $\sigma\gamma\sigma^{-1}$. Ainsi, le type cyclique de γ n'a pas été modifié par la conjugaison.

L'inverse d'un p-cycle est aussi un p-cycle (c'est le même cycle écrit dans l'ordre inverse), donc en décomposant γ en produit de cycles à supports disjoints, puis en inversant chacun de ses cycles, on obtient bien γ^{-1} avec le même type cyclique.

On a en fait montré quelque chose de bien plus puissant tout à l'heure : on a montré que deux permutations qui ont même type cyclique sont conjuguées. En effet, soient deux permutations de même type cyclique γ, γ', on les écrit comme produit de cycle $\pi_1\pi_2...\pi_k$ et $\pi'_1\pi'_2...\pi'_k$ on définit la permutation σ qui à π_1 associe π'_1, etc ("associer" signifie que si $\pi_1 = (a_1\ a_2\ ...\ a_p)$ et $\pi'_1 = (b_1\ b_2\ ...\ b_p)$ alors $\sigma(a_i) = b_i$). Un fois fait, on a $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma'$.

En particulier, on a que σ^{-1} est du même type cyclique que σ, donc elles sont conjuguées. Cela est assez particulier comme propriété et n'est pas vrai dans un groupe quelconque (par exemple, c'est faux dans un groupe cyclique où un groupe commutatif).

16.7 Groupe symétrique

Exercise 16.12. Calculez la signature de :

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n-1 & n \\ n & n-1 & ... & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercise 16.13 (*Solution*)**.** On note ε_n la signature de σ_n. On va trouver une relation de récurrence. En effet, on peut regarder $(1\ n)\sigma_n$:

$$(1\ n)\sigma_n = \begin{pmatrix} 2 & 3 & ... & n-2 & n-1 \\ n-1 & n-2 & ... & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ce qui a la même signature que σ_{n-2} quitte à re-numéroter les indices. On a donc une relation d'ordre 2 sur ε_n : $\varepsilon_n = -\varepsilon_{n-2}$. On calcule $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = -1$ et on en déduit $\varepsilon_{2n} = (-1)^{n-1}$ et $\varepsilon_{2n+1} = (-1)^n$.

Une autre façon de procéder est de remarquer que σ_n est le produit des transpositions suivantes : $(1\ n)$, $(2\ n-1)$, etc... Il suffit alors de compter le nombre de transpositions pour déterminer la signature.

16.8 Groupe symétrique

Exercise 16.14 (Superpermutation)**.** Une superpermutation de taille n est une suite finie de nombre qui contient toutes les permutations de $\mathcal{S}_n$ comme sous-suite (une sous-suite est une partie contiguë de la suite). Montrez qu'il existe des superpermutation pour toute taille.

La longueur d'une superpermutation est le nombre d'éléments de la suite. Montrez qu'il y a une seule superpermutation de taille 2 de longueur minimale.

Montrez que $(1,2,3,1,2,1,3,2,1)$ est une superpermutation.

Montrez que toute superpermutation de taille n est de longueur au moins $(n-1)!$.

Si s est une superpermutation de taille n, on définit une suite s' par le procédé suivant : on sépare s en chaque permutation $(a_1,...,a_n)$, puis on les transforme en $(a_1,...,a_n,n+1,a_1,...,a_n)$, et enfin on les re-fusionne dans l'ordre. Montrez que la suite s' ainsi obtenue est une superpermutation. En déduire qu'il existe des superpermutations de taille $\sum_{k=1}^n k!$.

Exercise 16.15 (*Solution*)**.**

16.9 Groupe symétrique

Exercise 16.16. Déterminez le centre du groupe symétrique (les éléments qui permutent avec tous les autres). On pourra commencer par regarder $\phi_{(a\ b)}$: $\sigma \mapsto \sigma(a\ b)\sigma^{-1}$.

Exercise 16.17 (*Solution*)**.** Soit $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ où τ est une transposition. On s'intéresse au type cyclique de $s = \sigma\tau\sigma^{-1}$. Écrivons $\tau = (a\ b)$, si $x \neq \sigma(a), \sigma(b)$, alors $s(x) = x$ et $s(\sigma(a)) = \sigma(b)$ et $s(\sigma(b)) = \sigma(a)$, donc $s = (\sigma(a)\ \sigma(b))$. Donc $\phi_{(a\ b)}(\sigma) = (\sigma(a)\ \sigma(b))$.

Soit σ qui commute avec tous les éléments de $\mathcal{S}_n$. En particulier, σ commuta avec toutes les permutations $(a\ b)$, donc $\phi_{(a\ b)}(\sigma) = (a\ b)$. Ainsi, $(\sigma(a)\ \sigma(b)) = (a\ b)$. Il s'ensuit que $\sigma(a) \in \{a, b\}$. Soit $c \neq a, b$, alors on a aussi $\phi_{(a\ c)}(\sigma) = (a\ c)$ puis $\sigma(a) \in \{a, c\}$. On en déduit par intersection que $\sigma(a) = a$. Finalement, le centre de $\mathcal{S}_n$ est réduit à $\{id\}$.

16.10 Groupe symétrique

Exercise 16.18. On pose $\sigma_i = (1\ 2\ ...\ i) \in \mathcal{S}_n$. Montrez que toute permutation $s \in \mathcal{S}_n$ s'écrit de manière unique : $s = \sigma_n^{k_n} \circ \sigma_{n-1}^{k_{n-1}} \circ ... \circ \sigma_2^{k_2}$ avec $k_j \in \{0, .., j-1\}$.

Exercise 16.19 (*Solution*)**.** Montrons l'existence par récurrence. Soit s une permutation de $\mathcal{S}_n$, et on note $p = s(n)$. $\sigma_n^{n-p}(p) = n$, donc $\sigma_n^{n-p}s$ est une permutation de $[1, n-1]$. Ainsi, par récurrence, on peut obtenir la décomposition souhaitée (en effet : $(\sigma_n^{n-p})^{-1} = \sigma_n^p$).

Supposons maintenant qu'on dispose de deux décompositions $s = \sigma_n^{k_n} ... \sigma_2^{k_2} = \sigma_n^{j_n} ... \sigma_2^{j_2}$ et soit r le plus grand entier tel que $k_r \neq j_r$. On a donc $s' = \sigma_r^{k_r} ... \sigma_2^{k_2} = \sigma_r^{j_r} ... \sigma_2^{k_2}$, cependant : $s'(r) = \sigma_r^{k_r}(r)$ d'une part et $s'(r) = \sigma_r^{j_r}(r)$ qui sont différents...

16.11 Groupe symétrique

Exercise 16.20. On note $t_i = (1\ i)$. Soit ϕ un automorphisme de $\mathcal{S}_n$ qui transforme une transposition en une transposition. Montrez qu'il existe une famille $(a_i)_{i\in[1,n]}$ telle que $\forall i \geq 2, \phi(t_i) = (a_1\ a_i)$. Montrez que l'application $s : i \mapsto a_i$ est une bijection. Montrez que ϕ est l'automorphisme intérieur associé à s, c'est-à-dire que $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \phi(\sigma) = s\sigma s^{-1}$ (on pourra d'abord prouver que si $\tau = (a\ b)$, alors $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a)\ \sigma(b))$).

Exercise 16.21 (*Solution*)**.** Montrons d'abord que les supports de $\phi(t_k)$, $\phi(t_j)$ sont non disjoints. S'ils l'étaient, alors $\phi(t_k)$ et $\phi(t_j)$ commuteraient, et on pourrait écrire $t_kt_j = \phi^{-1}(\phi(t_kt_j)) = \phi^{-1}(\phi(t_k)\phi(t_j)) = \phi^{-1}(\phi(t_j)\phi(t_k)) = t_jt_k$, ce qui n'est pas.

Comme $\phi(t_k)$ et $\phi(t_j)$ sont des transpositions, on les écrit $\phi(t_k) = (a_k\ b_k)$ et $\phi(t_j) = (a_j\ b_j)$. On sait qu'au moins deux des nombres qui apparaissent sont les mêmes, quitte à re-numéroter : $\phi(t_k) = (a_1\ a_k)$ et $\phi(t_j) = (a_1\ a_j)$. Cependant, on doit montrer que $\forall i \geq 2, \phi(t_i) = (a_1\ a_i)$. Soit ainsi, i quelconque différent de k et j (ce qui est possible car $n \geq 3$). Comme $\phi(t_i)$ ne commute pas avec les $\phi(t_k)$ et $\phi(t_j)$, les supports ne sont pas disjoints. De fait, en écrivant $\phi(t_i) = (a_i\ b_i)$, on a deux cas possibles, soit $a_1 \in \{a_i, b_i\}$, soit le contraire, ce qui conduit à $a_j, a_k \in \{a_i, b_i\}$. Comme ϕ est injective, $a_j \neq a_k$, donc $\phi(t_i) = (a_j\ a_k)$, cependant, cela est impossible car alors : $\phi(t_j)\phi(t_k)\phi(t_i) = \phi(t_k)$ et donc $t_jt_kt_i = t_k$, ce qui n'est pas. Nous sommes donc dans le premier cas et $\phi(t_i) = (a_1\ a_i)$.

Les a_i sont deux à deux distincts sans quoi ϕ ne pourrait être bijective. Dès lors, $s : i \mapsto a_i$ est bijective ; $s \in \mathcal{S}_n$.

Soit $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ où τ est une transposition. On s'intéresse au type cyclique de $s = \sigma\tau\sigma^{-1}$. Écrivons $\tau = (a\ b)$, si $x \neq \sigma(a), \sigma(b)$, alors $s(x) = x$ et $s(\sigma(a)) = \sigma(b)$ et $s(\sigma(b)) = \sigma(a)$, donc $s = (\sigma(a)\ \sigma(b))$.

Ainsi, ϕ et la fonction centrale associée à $s : i \mapsto a_i$ coïncident sur les $(t_i)_i$. Comme les $(t_i)_i$ engendrent $\mathcal{S}_n$ comme groupe, et que ϕ et la fonction centrale sont des morphismes de groupe, on a bien $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \phi(\sigma) = s\sigma s^{-1}$.

17 Intégration (Calcul d'intégrales et primitives)

17.1 Intégration

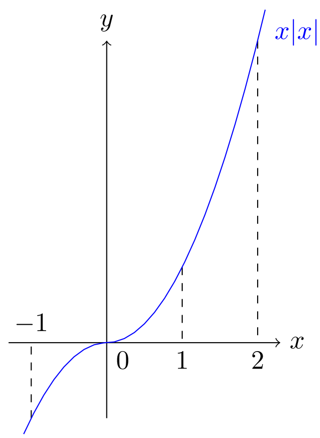
Exercise 17.1. Calculez les intégrales suivantes :

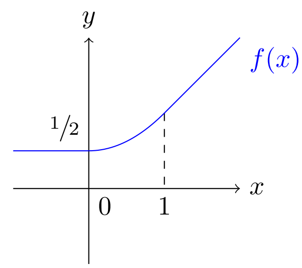
- $\int_{-1}^{1} x|x|\mathrm{d}x$ (on doit trouver 0).
- $\int_{-1}^{2} x|x|\mathrm{d}x$ (on doit trouver $7/3$).
- Calculez $f(x) = \int_0^1 \max(x,t)\mathrm{d}t$. Représentez f.

Exercise 17.2 (*Solution*)**.**
- $\int_{-1}^{1} x|x|\mathrm{d}x = 0$ car on intègre une fonction impaire sur un domaine symétrique.
- $\int_{-1}^{2} x|x|\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} x|x|\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{7}{3}$.

- ⋆ Si $x \leq 0$, alors $f(x) = \int_0^1 t\mathrm{d}t = 1/2$.
  ⋆ Si $x \geq 1$, alors $f(x) = \int_0^1 x\mathrm{d}t = x$.
  ⋆ Si $0 \leq x \leq 1$, alors $f(x) = \int_0^x x\mathrm{d}t + \int_x^1 t\mathrm{d}t = x^2 + \frac{1}{2}(1 - x^2) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$.

On pourra vérifier que f est continue et même dérivable (indéfiniment).





17.2 Intégration

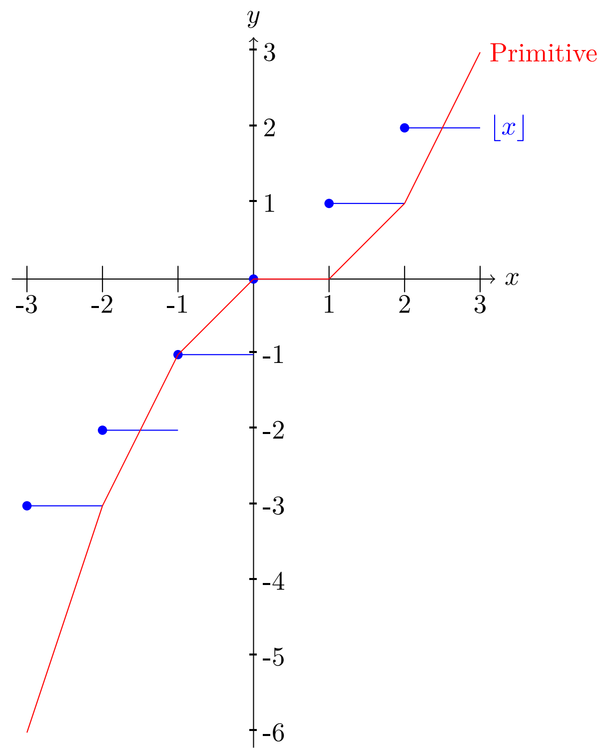
Exercise 17.3. Tracez la primitive de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ qui s'annule en 0 et donnez une formule explicite.

Exercise 17.4 (*Solution*)**.** On commence par tracer la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Ensuite, on sait que sa primitive qui s'annule en 0 passe par le point $(0, 0)$, puis a une pente de 1 entre $(0, 0)$ et $(1, 0)$, puis de 2 entre $(1, 0)$ et $(2, 1)$, puis de 3 entre $(2, 1)$ et $(3, 3)$, etc. Donc on doit relier les points (n, u_n) et $(n + 1, u_{n+1})$ (pour $n \in \mathbb{N}$) avec u_n qui vérifie : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \int_0^{n+1} \lfloor x \rfloor \mathrm{d}x = \int_0^n \lfloor x \rfloor \mathrm{d}x + \int_n^{n+1} \lfloor x \rfloor \mathrm{d}x = u_n + n$, donc $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.

Dans les négatifs, on doit relier les points $(-n, v_n)$ avec $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = v_n - (n + 1)$, donc $v_n = -\frac{n(n+1)}{2}$.

La formule explicite s'en déduit.



17.3 Intégration

Exercise 17.5. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\mathrm{d}x$.

Calculez $I_0(= {}^{\pi}/_4)$ et $I_1(= {}^{\ln 2}/_2)$ puis trouvez une récurrence d'ordre 2 pour I_n. En déduire I_n et sa limite.

En déduire la limite de $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ (c'est $\ln 2$) et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ (c'est $\frac{\pi}{4}$).

Exercise 17.6 (*Solution*)**.** $I_0 = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x = [-\ln\cos(x)]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\ln 2$.

On remarque que $I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\left(1+\tan^2(x)\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}(x)\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$. On en déduit déjà que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $I_n \geq 0$, donc $0 \leq I_n = \frac{1}{n+1} - I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

La formule explicite est plus compliquée à obtenir. Le plus rapide est de regarder la somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = ... = I_0 - (-1)^n I_{2n}$$

Donc $I_{2n} = (-1)^n(\frac{\pi}{4} - v_n)$. On a de même $I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2}(\ln 2 - u_n)$ en calculant $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = I_1 - (-1)^n I_{2n+1}$.

Finalement, comme $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

17.4 Intégration

Exercise 17.7. Montrez que :

$$\left(\forall(\alpha,\beta) \in [a,b]^2, \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = 0\right) \Rightarrow (\forall x \in [a,b], f(x) = 0)$$

Exercise 17.8 (*Solution*)**.** Soit F la primitive de f : $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$. On a $F(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Or $F' = f$, donc $f = 0$, d'après le théorème principal de l'intégration.

Autre méthode : On peut, *si on a vu le chapitre de théorie de l'intégration (pas seulement celui de calcul)*, utiliser le fait que, pour f continue par morceau, si on suppose $f \neq 0$, alors il existe un point x tel que $f(x) \neq 0$, et un voisinage de x sur lequel f garde un même signe et ne s'annule pas. En intégrant sur cet intervalle, on obtient une valeur non nulle, ce qui contredit l'hypothèse.

17.5 Intégration

Exercise 17.9. Déterminez $I_{p,q}(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^p(t-\beta)^q\mathrm{d}t \left(= \frac{(-1)^q(\beta-\alpha)^{p+q+1}}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}\right)$.

Exercise 17.10 (*Solution*)**.** On se rappelle que $\int t^n \ \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]$.

On effectue le changement de variables $u = t - \alpha$ ($\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$) : $I_{p,q}(\alpha,\beta) = \int_0^{\beta-\alpha} u^p(u-(\beta-\alpha))^q\mathrm{d}u = I_{p,q}(0,\beta-\alpha)$. Donc, on se bornera à étudier $I_{p,q}(0,x)$.

Ensuite, en posant $u = xv$ ($\mathrm{d}u = x\mathrm{d}v$), on a $I_{p,q}(0,x) = x^{p+q+1}\int_0^1 v^p(v-1)^q\mathrm{d}v = x^{p+q+1}I_{p,q}(0,1)$.

On va maintenant faire une IPP pour calculer $I_{p,q} = \int_0^1 t^p(t-1)^q\mathrm{d}t$. On pose

$u' = t^p$ et $v = (t-1)^q$, on a $u = \frac{1}{p+1}t^{p+1}$ et $v' = q(t-1)^{q-1}$, donc :

$$\begin{aligned}
I_{p,q} &= \left[\frac{1}{p+1}t^{p+1}(t-1)^q\right]_0^1 - \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(t-1)^{q-1}\mathrm{d}t \\
&= \frac{-q}{p+1}I_{p+1,q-1} \\
&= (-1)^q\left(\prod_{k=0}^{q-1}\frac{q-k}{p+1+k}\right)I_{p+q,0} \\
&= (-1)^q\frac{q!p!}{(p+q)!}\frac{1}{p+q+1} \\
&= \frac{(-1)^q}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}
\end{aligned}$$

Finalement, $I_{p,q}(\alpha,\beta) = \frac{(-1)^q(\beta-\alpha)^{p+q+1}}{(p+q+1)\binom{p+q}{p}}$.

Remark. On a $I_{p,q} = (-1)^q I_{q,p}$. On peut le vérifier en posant le changement de variable $u = 1-t$.

17.6 Intégration

Exercise 17.11. Soit $\varphi(t) = \frac{\sinh t}{t}$ $(t \neq 0)$, $\varphi(0) = 1$. Soit $f(x) = \int_x^{2x}\varphi(t)\mathrm{d}t$. Montrez que f est bien définie, donnez sa parité. Montrez qu'elle est dérivable et calculez sa dérivée. Dressez son tableau de variations.

Exercise 17.12 (*Solution*)**.** Comme φ est continue (une justification basique de la limite en 0 est attendue tant que le cours de continuité n'a pas été vu), elle possède une primitive Φ qui s'annule en 0. On a : $f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$, elle est bien définie.

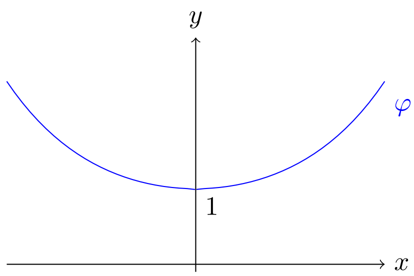
En outre, comme φ est paire, Φ est impaire (cela se démontre par changement de variable $u = -t$). De fait, f est impaire comme somme de fonctions impaires. Φ est dérivable (sa dérivée est φ), donc f aussi et on a :

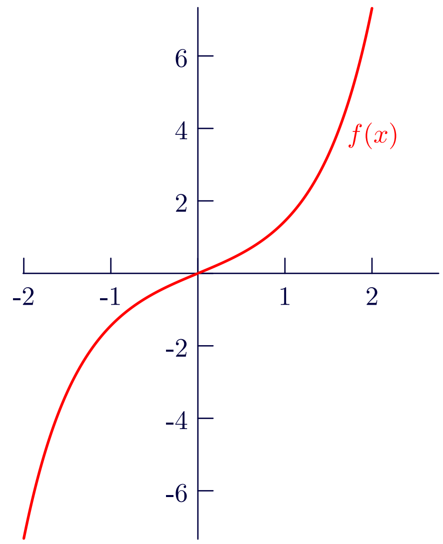
$$f'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{\sinh(2x) - \sinh(x)}{x}$$

Comme sinh est croissante, on a $\sinh(2x) - \sinh(x) > 0$ si et seulement si $2x > x$ et donc $x > 0$. Ainsi, on a $f'(0) = 0 (= \varphi(2*0) - \varphi(0))$ (limites par taux d'accroissement) et sinon $f'(x) > 0$. Finalement :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On constate que $\lim_{+\infty} f'(x) = +\infty$ en développant les exponentielles, d'où les limites indiquées.





17.7 Intégration

Exercise 17.13. Déterminez $\int \ln^n \left(= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \left[x \ln^{n-k} x\right]}{(n-k)!}\right)$.

Exercise 17.14 (*Solution*)**.** Intégration par parties : $\int \ln^n = [x \ln^n x] - n \int \ln^{n-1}$. De fait :

$$\int \ln^n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \left[x \ln^{n-k} x\right]}{(n-k)!}$$

17.8 Intégration

Exercise 17.15 (Règle de Bioche)**.** Observer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \, \mathrm{d}t$, puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t)\mathrm{d}t (= \frac{\pi}{8} \ln 2)$.

Exercise 17.16 (*Solution*)**.** On pose le changement de variables (bijectif) $u = \frac{\pi}{4} - t$ ($\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$) :

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos t \, \mathrm{d}t = -\int_{\pi/4}^{0} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right) \, \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/4} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - u\right) \, \mathrm{d}u$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/4} \left[\ln(\sin t + \cos t) - \ln\cos t\right]\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/4} \left[\ln\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) - \ln\cos t\right]\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\ln 2\ \mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\ \mathrm{d}t - \int_0^{\pi/4} \ln\cos t\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{8}\ln 2
\end{aligned}$$

17.9 Intégration

Exercise 17.17. Déterminez $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$ ($I = J = \frac{\pi}{4}$). En déduire la valeur de $K = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}(= \frac{\pi}{4})$.

Exercise 17.18 (*Solution*)**.** On a $I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t+\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t = [\ln(\cos t+\sin t)]_0^{\pi/2} = 0$. Ainsi, $I = J = \frac{\pi}{4}$.

On pose $K = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$. On effectue le changement de variables $t = \sin u$ ($\mathrm{d}t = \cos(u)\mathrm{d}u$) qui est bijectif pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Dès lors, $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)\mathrm{d}u}{|\cos u|+\sin(u)} = I = \frac{\pi}{4}$.

17.10 Intégration

Exercise 17.19. Donnez la primitive qui s'annule en 0 de :

- $x \mapsto \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x$ (on trouve $x \mapsto e^{x\ln x - x} - 1$)
- $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}$ (on trouve $x \mapsto \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^6} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right|\right) + Cst$)
- $x \mapsto \frac{\sin^2(x/2)}{(x-\sin x)^3}$ (on trouve $x \mapsto \frac{-1}{4(x-\sin x)^2} + Cst$)

Exercise 17.20 (*Solution*)**.**

- $\int \left(\frac{x}{e}\right)^x \ln x\ \mathrm{d}x = \int (x\ln x - x)' e^{x\ln x - x}\ \mathrm{d}x = e^{x\ln x-x} + Constante$. Pour qu'elle s'annule en 0, on prend la constante égale à -1.
- On pose $u = \sqrt{1+x^6}$ ($\mathrm{d}u = \frac{3x^5}{\sqrt{1+x^6}}\mathrm{d}x$ d'où $\frac{1}{3}u\mathrm{d}u = x^5\mathrm{d}x$), on a $\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^6}x^5\mathrm{d}x = \int \frac{u}{u^2-1}\frac{1}{3}u\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\left(u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right) + Cst = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^6} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right|\right) + Cst$. Il n'est pas possible de prendre un Cst telle qu'une primitive s'annule en 0 car toutes les primitives tendent vers $-\infty$ en 0.
- On a $\frac{\sin^2(x/2)}{(x-\sin x)^3} = \frac{1}{2}\frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^3}$, donc sur un intervalle où $x \neq \sin x$, une primitive est $x \mapsto \frac{-1}{4(x-\sin x)^2} + Cst$. Il n'est pas possible de prendre un Cst telle qu'une primitive s'annule en 0 car toutes les primitives tendent vers $-\infty$ en 0.

17.11 Intégration

Exercise 17.21. Soit f une fonction définie sur $[0, a]$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$) continue strictement croissante, dérivable et dont la dérivée et continue avec $f(0) = 0$. On note f^{-1} sa réciproque.

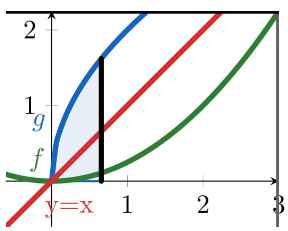
Montrez que, pour $x \in [0, a]$: $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf(x)$. **Faites un dessin !**

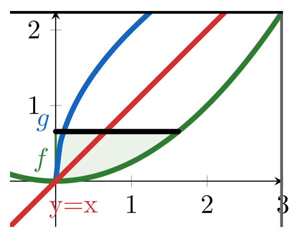
Soit u, v tels que $0 \leq u \leq a$ et $0 \leq v \leq f(a)$. Montrez que $uv \leq \int_0^u f + \int_0^v f^{-1}$

Application : Montrez l'inégalité de Young : $\forall (p, q) \in]1, +\infty[, (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \Rightarrow uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.

Exercise 17.22 (*Solution*)**.** On notera que f^{-1} est bien continue (cours sur la continuité), donc les calculs demandés sont valides.

On constate le l'égalité des aires bleues et vertes sur le dessin, par symétrie ($g = f^{-1}$ et $a = 3$) :



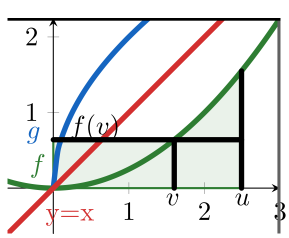


L'aire bleue valant $\int_0^{f(x)} g$, on a immédiatement la première égalité : $\int_0^x f + \int_0^{f(x)} g = xf(x)$. Démontrons-là par le calcul.

On pose F la primitive de f qui s'annule en 0, $\tilde{F}$ celle de f^{-1} (attention, ce n'est absolument pas F^{-1}, et F n'a pas de raison d'être même bijective), et $G : x \mapsto \int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\ \mathrm{d}t$. G est bien définie et dérivable avec : $G(x) = F(x) + \tilde{F}(f(x))$, donc $G'(x) = F'(x) + f(x) \times \tilde{F}'(f(x)) = f(x) + f(x) \times f^{-1}(f(x)) = f(x) + xf'(x)$. On constate que c'est la même dérivée que pour $x \mapsto xf(x)$, et qu'elle coïncident en 0.

$\star$ Supposons que $f^{-1}(v) \leq u$, l'inégalité (qui se voit sur le dessin) découle de la croissance de la fonction f :

$$\int_0^u f + \int_0^v f^{-1} = vf^{-1}(v) + \int_{f^{-1}(v)}^u f \geq vf^{-1}(v) + v(u - f^{-1}(v)) = uv$$



$\star$ Supposons que $v \geq f(u)$, l'inégalité (qui se voit sur le dessin) découle de la croissance de la fonction f^{-1} :

$$\int_0^u f + \int_0^v f^{-1} = uf(u) + \int_{f(u)}^v f^{-1} \geq uf(u) + u(v - f(u)) = uv$$

on pose $f : t \mapsto t^{p-1}$ et $g : x \mapsto x^{q-1}$. On a $g(f(t)) = g(t^{p-1}) = t^{(p-1)(q-1)} = t$. En effet, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{pq}$, donc par hypothèse $pq = p + q$. Finalement : $g = f^{-1}$. En appliquant l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité de Young :

$$uv \leq \int_0^u t^{p-1} \, \mathrm{d}t + \int_0^v t^{q-1} \, \mathrm{d}t = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

18 Intégration (Généralité, Riemann)

18.1 Intégration

Exercise 18.1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $p, t, i : [-a, a] \to \mathbb{R}$ trois fonctions continues par morceaux avec p et t paires, i impaire. Simplifiez :

$$\int_{-a}^a \frac{p(x)}{1 + t(x)^{i(x)}} \, \mathrm{d}x$$

En déduire la valeur de $\int_{-e}^e \frac{x^4}{1+\pi^{x^7}} \, \mathrm{d}x$ et $\int_{-e}^e \frac{x^4}{1+(\cos x)^{\sin x}} \, \mathrm{d}x$.

Exercise 18.2 (*Solution*)**.** L'intégrale d'une fonction sur un intervalle symétrique est égale à l'intégrale de sa partie paire. En effet, si $f = g + h$ avec g paire et h impaire, alors :

$$\int_{-a}^a f = \int_{-a}^a g + \int_{-a}^a h = \int_{-a}^a g = 2 \int_0^a g$$

Or on sait que la partie paire de f est $x \mapsto 1/2\,(f(x) + f(-x))$, donc on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a \frac{p(x)}{1 + t(x)^{i(x)}} \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left(\frac{p(x)}{1 + t(x)^{i(x)}} + \frac{p(-x)}{1 + t(-x)^{i(-x)}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-a}^a p(x) \frac{1 + t(x)^{-i(x)} + 1 + t(x)^{i(x)}}{\left(1 + t(x)^{i(x)}\right)\left(1 + t(x)^{-i(x)}\right)} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-a}^a p(x) \frac{2 + t(x)^{i(x)} + \frac{1}{t(x)^{i(x)}}}{1 + t(x)^{i(x)} + \frac{1}{t(x)^{i(x)}} + t(x)^{i(x)} \frac{1}{t(x)^{i(x)}}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-a}^a p(x) \times 1 \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^a p(x) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On en déduit que cette intégrale ne dépend pas de t ni de i (du moment que p et t sont paires et i impaire).

En particulier, les deux intégrales proposées sont égales et valent :

$$\int_0^e x^4 = \frac{e}{5}$$

18.2 Intégration

Exercise 18.3 (Fonction de Gudermann)**.** On définit $gd : \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\cosh u}$. Montrez que $\tan \frac{gd(t)}{2} = \tanh \frac{t}{2}$, puis $gd'(t) = \cos gd(t)$. En déduire que gd est bijective et tracer son graphe.

On note $arcgd$ la fonction réciproque de gd. Montrez que $arcgd(\theta) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$.

Grâce à un changement de variable *gudermannien*, montrez que $\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^n \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\cosh t}\right)^{n+1} \mathrm{d}t$.

18.3 Intégration

Exercise 18.4 (Intégrale de Gauss)**.** On admet que (théorème de Fubini) : $\iint_{(x,y)\in D_x\times D_y} f(x)g(y) = \left(\int_{x\in D_x} f(x)\right)\left(\int_{y\in D_y} g(y)\right)$.

On note C_a le carré de côté a : $C_a = [0,a]\times[0,a]$; et D_a le quart de disque de rayon a : $D_a = \{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2 ; x^2+y^2 \leq a\}$. Calculez $\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et exprimez $\iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en fonction de l'intégrale (partielle) de Gauss $\int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x$. En déduire un encadrement de l'intégrale partielle, puis calculer l'intégral de Gauss (on notera qu'un carré est toujours entre deux quarts de cercle).

Exercise 18.5 (*Solution*)**.** Avec un passage en coordonnées polaire, c'est-à-dire un changement de variables $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on a : $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$; $x^2+y^2 = r^2$. Ainsi :

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{C_a} re^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^a re^{-r^2}\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\right) = \frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{2}e^{r^2}\right]_0^a$$

Par ailleurs :

$$\iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{C_a} e^{-x^2}e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_0^a e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$$

Un simple dessin permet de vérifier que $D_a \subset C_a \subset D_{a\sqrt{2}}$. Comme $f : (x,y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)} \geq 0$, on a $\iint_{D_a} f \leq \iint_{C_a} f \leq \iint_{D_{a\sqrt{2}}} f$. Cela nous donne l'encadrement :

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{2}e^{r^2}\right]_0^a \leq \left(\int_0^a e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 \leq \frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{2}e^{r^2}\right]_0^{a\sqrt{2}}$$

Finalement, en faisant tendre $a \to +\infty$, on obtient la valeur bien connue de l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; et par symétrie : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

18.4 Intégration

Exercise 18.6. Est-ce qu'il existe une fonction f continue telle que : $\forall x,\ \int_0^{x^3+x} f(t)\mathrm{d}t = x$?

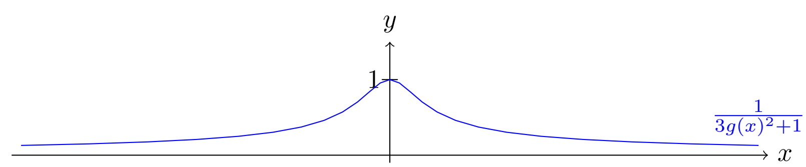
Est-ce qu'il existe une fonction f continue telle que : $\forall x,\ \int_0^{x^3+x^2} f(t)\mathrm{d}t = x$?

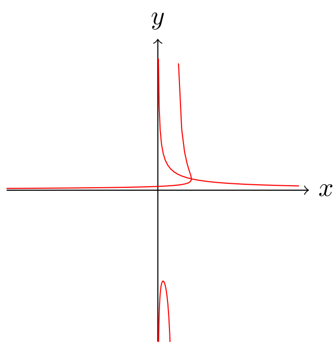
Exercise 18.7 (*Solution*)**.** Supposons que f existe, alors soit F la primitive de f qui s'annule en 0. On aurait : $\int_0^{x^3+x} f = F(x^3+x)$, d'où, en dérivant :

$$(3x^2+1)f(x^3+x) = 1$$

On est amené à résoudre $f(x^3+x) = \frac{1}{3x^2+1}$. Or $x \mapsto x^3+x$ est strictement croissante donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (en regardant sa dérivée). Soit g sa bijection réciproque. g est continue et $f : x \mapsto \frac{1}{3g(x)^2+1}$. f ainsi définie est continue car $3g(x)^2+1 \neq 0$.

Réciproquement, si g est la bijection réciproque de $x \mapsto x^3+x$, alors $f : x \mapsto \frac{1}{3g(x)^2+1}$ vérifie $f(x^3+x) = \frac{1}{3x^2+1}$ et est continue (car $3g(x)^2+1 \neq 0$), donc répond au problème. On a prouvé que le problème admet une (unique) solution.





Dans ce second problème, f doit respecter $f(x^3+x^2) = \frac{1}{3x^2+2x}$. Or le dénominateur s'annule en $x = 0$, donc $f(0^3+0^2)$, i.e. $f(0)$ n'est pas définie. $f\left((-1/3)^3 + (-1/3)^2\right)$ soit $f\,(2/27)$ n'est pas définie non plus. En outre, le graphe obtenu ne donne pas une fonction car différentes ordonnées sont possibles pour une même hauteur.

18.5 Intégration

Exercise 18.8. Soient f et g dérivables avec $(f-g)' = f+g$. Soit $h = f'$. On veut calculer $\mathcal{I} = \int_a^b \frac{h}{f+g}$. Pour ce faire, introduisez $i = g'$ et $\mathcal{J} = \int_a^b \frac{-i}{f+g}$.

En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\mathrm{d}x$ et $\int_a^b \frac{e^x}{\cosh x}\mathrm{d}x$.

Exercise 18.9 (*Solution*)**.** On a :

$$\mathcal{I}+\mathcal{J}=\int_a^b \frac{h-i}{f+g}=\int_a^b \frac{(f-g)'}{f+g}=\int_a^b 1\mathrm{d}x=b-a$$
$$\mathcal{I}-\mathcal{J}=\int_a^b \frac{h+i}{f+g}=\int_a^b \frac{(f+g)'}{f+g}=\int_{f(a)+g(a)}^{f(b)+g(b)} \frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln\frac{f(b)+g(b)}{f(a)+g(a)}$$

D'où :

$$\mathcal{I}=\frac{1}{2}\left(b-a+\ln\frac{f(b)+g(b)}{f(a)+g(a)}\right)$$
$$\mathcal{J}=\frac{1}{2}\left(b-a-\ln\frac{f(b)+g(b)}{f(a)+g(a)}\right)$$

Ce qu'on n'a vraiment utilisé, c'est $h+i=(f+g)'$ et $h-i=f+g$, donc l'hypothèse $h=\frac{1}{2}(f+g+f'+g')$ suffit.

Appliquons avec $f=\sin$ ($h=\cos$) et $g=\cos$. On a bien $(f-g)'=f+g$, d'où (on prendra le temps de vérifier que l'intégrande est bien définie, notamment que $\cos+\sin\neq 0$ sur $[0,\pi/2]$) :

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}}{\cos 0+\sin 0}=\frac{\pi}{4}$$

Appliquons avec $f: x\mapsto e^x$ et $g: x\mapsto e^{-x}$. On a : $h: x\mapsto\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}\right)=e^x$. Donc, comme cosh ne s'annule pas :

$$\int_a^b\frac{\exp}{\cosh}=2\int_a^b\frac{\exp}{\exp+1/\exp}=b-a+\ln\frac{e^b+1/e^b}{e^a+1/e^a}=b-a+\ln\frac{\cosh b}{\cosh a}$$

18.6 Intégration

Exercise 18.10 (Identité intégrale de Frullani)**.** Calculez $\int_a^b f'(xt)\mathrm{d}t$ pour a,b et x fixés. En déduire $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$ pour une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec $f(x)\to\ell$ quand $x\to+\infty$.

Appliquez à $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-tx}}{x}\mathrm{d}x$ $(=\ln t)$.

Pas faisable en Sup ? À moins d'autoriser les inversions d'intégrales sans justifications...

Exercise 18.11 (*Solution*)**.** On a, avec le changement de variables $u=xt$, $\mathrm{d}u=x\mathrm{d}t$:

$$\int_a^b f'(xt)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_{ax}^{bx}f'(u)\mathrm{d}u=\frac{f(bx)-f(ax)}{x}$$

Par suite :

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b f'(xt)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

Ici, la fonction $(x,t) \mapsto f'(xt)$ est continue (au sens de $\mathbb{R}^2$) sur $[0,+\infty[\times[a,b]$, donc on a le droit d'échanger les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = -\int_a^b \left(\int_0^{+\infty} f'(xt)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

De fait (l'intégrale intérieure ressemble furieusement à du déjà vu) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{1}{t}\left(\ell - f(0)\right)\mathrm{d}t = \left(\ell - f(0)\right)\ln\frac{a}{b}$$

Appliquons avec $f : x \mapsto e^{-x}$ (donc $\ell = 0$ et la dérivabilité est bien respectée), $a = 1$ et $b = t$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-tx}}{x}\mathrm{d}x = (0 - e^0)\ln\frac{1}{t} = \ln t$$

18.7 Intégration

Exercise 18.12. Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ et $g \in \mathcal{C}^0_m([a,b])$ positive. Montrez qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$. Si g est continue et strictement positive, montrez que c peut être pris dans $]a,b[$.

Exercise 18.13 (*Solution*)**.** Comme f est continue sur $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes, disons $m_f = \min f$ et $M_f = \max f$. Dès lors : $m_f g \leq fg \leq M_f g$. En intégrant, on a donc : $m_f\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M_f\int_a^b g$. Cela induit qu'il existe $k \in [m_f, M_f]$ tel que $\int_a^b fg = k\int_a^b g$.

f étant continue sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$ car $k \in [m_f, M_f] = f([a,b])$. On a bien montré qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.

Cette question est plus subtile qu'il n'y parait.

Si f est constante, alors le résultat est évident.

Supposons f non constante. On a déjà montré que $k = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$ est dans $[m_f, M_f]$. Supposons que $k = m_f$. Alors on peut regarder $x \mapsto f(x)g(x) - m_f g(x)$ qui est continue et positive. Mais l'intégrale de cette fonction est nulle si $k = m_f$, donc la fonction est nulle elle-même, ce qui induit que $\forall x,\ f(x) = m_f$ (sinon, $\int_a^b fg > m_f\int_a^b g$) : cela contredirait l'hypothèse selon laquelle f n'est pas constante.

De même, $k = M_f$ induit f constante.

Ainsi, on peut supposer que $k \in]m_f, M_f[$. Comme f est continue, elle atteint ses bornes, disons $f(x_m) = m_f$ et $f(x_M) = M_f$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à f sur $[x_m, x_M]$, on sait qu'il existe $c \in [x_m, x_M]$ tel que $f(c) = k$, mais $c \neq x_m$ et $c \neq x_M$ car on sait que $f(x_m) =\neq k$ et

$f(x_M) \neq k$. Ainsi, comme $[x_m, x_M] \subseteq [a,b]$, on a bien exhibé $c \in]a,b[$ tel que $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$.

18.8 Intégration

Exercise 18.14 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $u_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$. Montrez que $u_n \to 0$. Montrez que cette propriété est conservée quand f est continue par morceaux.

Exercise 18.15 (*Solution*)**.** Soit $a_1 < ... < a_p$ une subdivision adaptée à f et y_i les valeurs prises par f sur $]a_i, a_{i+1}[$. On a :

$$u_n = \int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \sum_i y_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_i y_i \left(\cos(na_{i+1} - \cos(na_i)\right)$$

Soit M la plus grande valeur des y_i (qui sont en nombre fini par définition. Alors :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n}\sum_i M \times 2 = \frac{2Mp}{n}$$

Où p est la taille de la subdivision (pour rappel).

Ainsi, quand $n \to +\infty$, on a bien $u_n \to 0$.

Si f est continue par morceaux, alors soit $\varepsilon > 0$ et φ une fonction en escalier proche de f à ε près : $\forall x \in [a,b],\ |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Dès lors, $u_n = \int_a^b \varphi(x)\sin(nx)\mathrm{d}x + \int_a^b (f(x) - \varphi(x))\sin(nx)\mathrm{d}x$. Pour n assez grand, le premier terme est majoré (en valeur absolue) par ε car on sait qu'il tend vers 0 vu que φ est en escalier. Le second terme, quant à lui, est majoré par :

$$\left|\int_a^b f(x) - \varphi(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,|\sin(nx)|\mathrm{d}x \leq (b-a)\varepsilon \times 1$$

Finalement, on a bien que, pour tout $\varepsilon > 0$, $|u_n| \leq (b - a + 1)\varepsilon$: la suite tend vers 0.

<u>**N.B. :**</u> Ce lemme assure que les coefficients d'une transformée de Fourier (ici, discrète, mais cela fonctionne aussi en continue) tendent vers 0.

18.9 Intégration

Exercise 18.16 (Norme $\mathcal{L}^\infty$)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ positive. Montrez que $\left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \to \sup f$.

Pour g continue et strictement positive sur $[a,b]$, montrez que $v_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$ converge et donnez sa limite.

Exercise 18.17 (*Solution*)**.** Notons $M = \sup f$ et $u_n = \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n}$.

Comme $\forall x,\ 0 \leq f(x) \leq M$, on a $\int_a^b f^n \leq \int_a^b M^n = (b-a)M^n$. Donc $u_n \leq M(b-a)^{1/n}$.

Par ailleurs, soit $\varepsilon > 0$ et c tel que $f(c) = M$ (qui existe parce que f est une fonction continue sur un segment). Soit alors I, un intervalle autour de c sur lequel $\forall x \in I,\ f(x) \geq M - \varepsilon$. Notons η la longueur de I. Alors $u_n \geq \eta^{1/n}(M-\varepsilon)$. Or $\eta^{\frac{1}{n}} \to 1$ quand $n \to +\infty$. Donc pour n assez grand, $\eta^{1/n} \geq 1 - \varepsilon$, d'où, à partir d'un certain rang :

$$u_n \geq (1-\varepsilon)(M-\varepsilon) \geq M - (M+1)\varepsilon$$

De la même manière, quand $n \to +\infty$, $(b-a)^{1/n} \to 0$, donc, à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq M + \varepsilon$.

Il s'ensuit que, à partir d'un certain rang :

$$M - (M+1)\varepsilon \leq u_n \leq M + \varepsilon$$

Cela montre que $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

On a déjà étudié la limite de v_n pour $g = 1$. Si maintenant g est continue strictement positive sur $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes, ainsi $m_g = \min g > 0$ et $M_g = \max g > 0$. Notons $M_f = \max f$ pour clarifier. Dès lors, on a :

$$v_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leq M_g^{1/n} \left(\int_a^b (f(x))^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \to M_f$$

et

$$v_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geq m_g^{1/n} \left(\int_a^b (f(x))^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \to M_f$$

Donc $v_n \to M_f$ quand $n \to +\infty$, quel que soit g.

N.B. : La première partie de cet exercice conduit à un résultat important. On peut considérer l'ensemble des fonctions telles que $\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$ est finie (f n'étant pas nécessairement continue sur $[a,b]$, mais par exemple seulement continue sur $]a,b[$). Cet ensemble forme un espace vectoriel (ce n'est pas évident), *l'espace* $\mathcal{L}^p$, qu'on peut munir d'une notion de distance, la *norme* $\mathcal{L}^p$ définie par $\left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$. L'égalité ci-dessus montre que l'espace $\mathcal{L}^\infty$ s'interprète comme l'espace des fonctions bornées.

18.10 Intégration

Exercise 18.18. Montrez que $\ln(n!) = n\ln n - n + O(\ln n)$.

Exercise 18.19 (*Solution*)**.** On va utiliser le fait que $\ln(n!) = \ln \prod_{k=1}^{n} = \sum_{k=1}^{n} \ln k$. Notons qu'on peut faire commencer la somme à $k = 2$. Donc si on arrive à avoir un encadrement de $\ln k$, on en aura une de $\ln(n!)$. Or $x \mapsto \ln x$ est une fonction strictement croissantes, donc :

$$\int_{k-1}^{k} \ln \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln$$

Ensuite, on somme l'inégalité de gauche pour $k = 2$ à $k = n$, on trouve : $\int_1^n \ln \leq \ln(n!)$. Puis on somme celle de droite pour $k = 1$ à $k = n - 1$: $\ln((n-1)!) \leq \int_1^n \ln$; d'où, en ajoutant $\ln n$ de chaque côté : $\ln(n!) \leq \int_1^n \ln + \ln n$.

Rappelons que $x \mapsto x \ln x - x$ est la primitive de ln qui vaut -1 en 1. Cela donne l'encadrement suivant :

$$n \ln n - n - (-1) \leq \ln(n!) \leq n \ln n - n - (-1) + \ln n$$

Finalement : $\ln(n!) - (n \ln n - n)$ est compris entre 1 et $\ln n + 1$, ce qui donne l'asymptotique souhaitée : $\ln(n!) = n \ln n - n + O(\ln n)$.

N.B. : Cette estimation est souvent utilisée en informatique. En effet, si on veut par exemple trier dans l'ordre croissant une liste de n valeurs, on se rend compte que la liste de départ peut être n'importe laquelle de $n!$ permutations possibles de ces valeurs. De là, il est possible de monter que tout algorithme (qui procède par comparaisons) doit effectuer au moins $\ln(n!)$ comparaisons. Beaucoup d'autre exemples d'algorithmes peuvent se comprendre comme la "visite" d'un certain sous-ensemble des permutations, leur complexité est souvent minorée par $\ln(n!)$.

18.11 Intégration

Exercise 18.20. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ avec $\int_0^1 f = 0$. On pose $\alpha = \min f$ et $\beta = \max f$. Montrez que $\int_0^1 f^2 \leq -\alpha\beta$.

Exercise 18.21 (*Solution*)**.** Il y a plein de pistes possibles sur cette question. Toutes sont intéressantes à explorer mais peu donnent la solution.

Regardons l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 (f(t) - \alpha)(f(t) - \beta)\mathrm{d}t = \int_0^1 f^2 - (\alpha + \beta) \int_0^1 f + \alpha\beta = \int_0^1 f^2 + \alpha\beta$$

Or $\alpha \leq f(t) \leq \beta$, donc $(f(t) - \alpha)(f(t) - \beta) \leq 0$ par définition de α et β, donc $\int_0^1 f^2 \leq -\alpha\beta$.

18.12 Intégration

Exercise 18.22. Soit $\mathcal{E} = \{f \in \mathscr{C}^1([0,1])\ ;\ f(0) = 0, f(1) = 1\}$. Montrez que pour tout $f \in \mathcal{E}$, on a $\int_0^1 e^{-t}(f'(t) - f(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{e}$, puis $\int_0^1 |f' - f| \geq \frac{1}{e}$, et discutez le cas d'égalité. Soit $f_n : x \mapsto n(2x - nx^2)e^{x-1}$ si $x \in [0, {}^1\!/\!_n[$ et

e^{x-1} si $x \in [1/n, 1]$. Montrez que $f_n \in \mathcal{E}$. Montrez que $I_n = \int_0^1 |f_n' - f_n|$ vérifie $I_n = \frac{2}{e}\int_0^1 (1-x)e^{x/n}\mathrm{d}x$, et $\left|I_n - \frac{1}{e}\right| \leq \frac{1}{e}\left(e^{1/n} - 1\right)$. Conclure.

Exercise 18.23 (*Solution*)**.** La dérivé de $x \mapsto e^{-x}f(x)$ est $x \mapsto e^{-x}(f'(x) - f(x))$, donc, pour $f \in \mathcal{E}$:

$$\int_0^1 e^{-t}(f'(t) - f(t))\mathrm{d}t = \left[e^{-x}f(x)\right]_0^1 = e^{-1}$$

Ensuite, comme $e^{-t} \leq 1$ pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\frac{1}{e} = \left|\int_0^1 e^{-t}(f'(t) - f(t))\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 e^{-t}|f(t) - f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 |f(t) - f(t)|\mathrm{d}t$$

S'il y a égalité alors $\int_0^1 e^{-t}|f(t) - f(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 |f(t) - f(t)|\mathrm{d}t$. Cette égalité revient à $\int_0^1 (1 - e^{-t})\,|f(t) - f(t)|\mathrm{d}t = 0$. Or si $f' \neq f$, alors l'intégrande est positive sur $[0,1]$ et strictement positive en au moins un point, donc l'intégrale serait non nulle. Il s'ensuit que $f(x) = \lambda e^x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $f \in \mathcal{E}$, cela est impossible : il n'y a pas de cas d'égalité.

La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, 1/n[$ et sur $]1/n, 1]$, avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. En $1/n$, elle est continue car les limites à gauche et à droite coïncident (de valeur $e^{1/n-1}$). Sa dérivée sur $[0, 1/n[$ vaut $f_n'(x) = n\left((2-2x) + (2x - nx^2)\right)e^{x-1} = n\left(2 - nx^2\right)e^{x-1}$ et sur $[1/n, 1]$, elle vaut $f_n'(x) = e^{x-1}$. Là encore, les limites à droite et à gauche coïncident en $1/n$, donc f_n est bien $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$: $f_n \in \mathcal{E}$.

Reste à calculer $\int_0^1 |f_n' - f_n|$. Les fonctions f_n' et f_n sont égales sur $[1/n, 1]$, et leur différence vaut $2n(1-nx)e^{x-1}$ sur $[0, 1/n]$. Donc, en effectuant le changement de variable $u = nx$:

$$\int_0^1 |f'-f| = \int_0^{1/n} 2n(1-nt)e^{t-1}\mathrm{d}t = \frac{2n}{e}\int_0^1 (1-u)\,e^{\frac{u}{n}}\frac{\mathrm{d}u}{n} = \frac{2}{e}\int_0^1 (1-u)e^{u/n}\mathrm{d}u$$

Ensuite, $\frac{2}{e}\int_0^1 (1-x) = \frac{2}{e}\frac{1}{2} = \frac{1}{e}$. D'autre part, sur $[0,1]$, $x \mapsto e^{x/n}$ est majorée par $e^{1/n}$, donc on obtient :

$$\left|I_n - \frac{1}{e}\right| \leq \frac{2}{e}\int_0^1 (1-t)\left|e^{t/n} - 1\right|\mathrm{d}t \leq \frac{2}{e}\int_0^1 (1-t)\left|e^{1/n} - 1\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{e}\left(e^{1/n} - 1\right)$$

En particulier, quand $n \to +\infty$, on trouve $I_n \to \frac{1}{e}$, donc on a montré que $\frac{1}{e}$ est la borne inférieure $\inf_{f\in\mathcal{E}} \int_0^1 |f' - f'|$: la valeur $\frac{1}{e}$ minore $\int_0^1 |f' - f'|$ pour $f \in \mathcal{E}$, et il existe une suite d'élément de $\left\{\int_0^1 |f' - f'|\ ;\ f \in \mathcal{E}\right\}$ qui tend vers $\frac{1}{e}$.

18.13 Intégration, Cauchy-Schwarz

Exercise 18.24. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On connaît $A = \int_0^1 f$ et $B = \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t$. Montrez que $\int_0^1 f^2 \geq 4\left(A^2 - 3AB + 3B^2\right)$. Montrez que cette inégalité est optimale.

Exercise 18.25 (*Solution*)**.** Regardons ce que l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne sur $x \mapsto af(x) + bx$ et $x \mapsto 1$ pour des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 (af(x)+bx)\,\mathrm{d}x\right)^2 &\leq \int_0^1 (af(x)+bx)^2\,\mathrm{d}x \\ &\leq a^2\int_0^1 f^2 + 2ab\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t + b^2\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t \\ &\leq a^2\int_0^1 f^2 + 2abB + \frac{b^2}{3}\end{aligned}$$

En outre :

$$\int_0^1 (af(x)+bx)\,\mathrm{d}x = a\int_0^1 f + b\int_0^1 x\mathrm{d}x = aA + \frac{b}{2}$$

Ainsi :

$$\left(aA + \frac{b}{2}\right)^2 \leq a^2\int_0^1 f^2 + 2abB + \frac{b^2}{3}$$

On en déduis que pour tout $a \neq 0$ et b :

$$\int_0^1 f^2 \geq A^2 + (A-2B)\frac{b}{a} - \frac{b^2}{12a^2}$$

On peut maintenant chercher à optimiser. Supposons $a \neq 0$ fixé. On a alors un polynôme du second degré en b. Le maximum est atteint pour $b = \frac{-(A-2B)/a}{2\times -1/12a^2} = 6a(A-2B)$. La valeur atteinte est alors :

$$A^2+(A-2B)\frac{6a(A-2B)}{a} - \frac{36a^2(A-2B)^2}{12a^2} = A^2+3(A-2B)^2 = 4A^2-12AB+12B^2$$

Par exemple, pour $A = B = 1$, on trouve que si $\int_0^1 f = 1$ et $\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = 1$, alors $\int_0^1 f^2 \geq 4$.

Ensuite, cette inégalité est bien optimale. En effet, le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz revient à $x \mapsto af(x) + bx$ constante, c'est-à-dire f affine. Pour $f : x \mapsto 1$, on a $\int_0^1 f = 1$ et $\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} = B$, puis : $4A^2 - 12AB + 12B^2 = 1 = \int_0^1 f^2$. Cette égalité prouve bien que l'inégalité obtenue est optimale.

18.14 Intégration, Cauchy-Schwarz

Exercise 18.26 (Inégalité de Minkowski)**.** Soient $f, g \in \mathcal{C}_m^0([a,b])$, montrez que : $\left(\int_a^b (f+g)^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$, et discutez du cas d'égalité.

Exercise 18.27 (*Solution*)**.** On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)^2 &= \int_a^b f^2 + \int_a^b g^2 + 2\int_a^b fg \\ &\leq \int_a^b f^2 + \int_a^b g^2 + 2\left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\end{aligned}$$

On a bien l'inégalité souhaitée.

Le cas d'égalité équivaut à $\int_a^b fg = \left(\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Cela revient à avoir le cas d'égalité de Cauchy-Scharwz $\left(\int_a^b fg\right)^2 = \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$ et $\int_a^b fg \geq 0$. Cela revient finalement à $f=0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ g = \lambda f$.

<u>N.B. :</u> Cette inégalité se généralise via l'inégalité de Jensen (qu'on verra en Spé) pour donner pour $p \in [1,+\infty[$: $\left(\int_a^b (f+g)^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p\right)^{1/p}$. Cela signifie que l'ensemble des fonctions f telles que $\left(\int_a^b |f[^p\right)^{1/p} < +\infty$ est un espace vectoriel. Ces espaces sont un cadre de travail très important pour les espaces de Banach et plein de théorèmes d'analyse fonctionnelle plus poussés.

18.15 Intégration, Sommes de Riemann

Exercise 18.28. Déterminez $\lim_{+\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercise 18.29 (*Solution*)**.** Il y a plusieurs manières de faire, l'une d'entre elles avec Césaro.

Une autre solution passe par les sommes de Riemann :

$$\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n} \longrightarrow \int_0^1 \ln x \ \mathrm{d}x = [x\ln x - x]_0^1 = -1$$

Finalement, quand $n \to +\infty$, $\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} \to {}^1/_e$.

18.16 Intégration, Sommes de Riemann

Exercise 18.30. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, dérivable en 0 avec $f(0)=0$. Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+kp}\right)$. Montrez que u_n converge et donnez sa limite.

Exercise 18.31 (*Solution*)**.** Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ x \leq \eta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0)\right| \leq \varepsilon$.

Posons N tel que $\forall n \geq N,\ \frac{1}{n} \leq \eta$. Dès lors, $\forall n \geq N, k \in [\![0,n]\!],\ \frac{1}{n+pk} \leq \eta$. D'où :

$$\forall n \geq N, k \in [\![0,n]\!],\ \left| f\left(\frac{1}{n+kp}\right) - \frac{1}{n+kp} f'(0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+kp}$$

On peut maintenant sommer :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+kp}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp}\right) f'(0) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{1}{n+kp}\right) - \frac{1}{n+kp} f'(0) \right| \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp} \end{aligned}$$

Or, on peut évaluer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp}$ via une somme de Riemann :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}p} \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+xp} = \frac{\ln(1+p)}{p} \leq 1$$

À partir d'un certain rang N', on a donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp} \leq 1$. Ce qui conduit à :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+kp}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp}\right) f'(0) \right| \leq \varepsilon$$

Finalement les deux termes ont la même limite, et on connnaît la limtie du terme de droite ($f'(0)$ est indépendant de n) :

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+kp}\right) \to \frac{\ln(1+p)}{p} f'(0)$$

18.17 Intégration, Sommes de Riemann

Exercise 18.32 (Inégalité de Tchebychev pour les sommes)**.** Soient x_i et y_j deux familles croissantes de n réels. Montrez que $\frac{1}{n}\sum_k x_k y_k \geq \left(\frac{1}{n}\sum_i x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_j y_j\right)$. En déduire que si $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ sont croissantes, alors : $\int_0^1 fg \geq \int_0^1 f \int_0^1 g$. Que ce passe-t-il si f et g sont monotone en général ?

Exercise 18.33 (*Solution*)**.** Comme x_i et y_j sont croissantes, on a : $\forall i \neq j,\ (x_i - x_j)(y_i - y_j) \geq 0$. En sommant d'abord sur i à j fixé, on trouve :

$$\sum_i x_i y_i - x_j \sum_i y_i - y_j \sum_i x_i + n x_j y_j \geq 0$$

Ensuite en sommant sur j :

$$n \sum_i x_i y_i - \sum_j x_i \sum_i y_i - \sum_j y_j \sum_i x_i + n \sum_j x_j y_j \geq 0$$

En passant les deux termes centraux à droite de l'inégalité et en divisant par $2n^2$, on obtient l'inégalité souhaitée.

Maintenant, considérons deux fonctions f et g continues et croissantes sur $[0,1]$. Alors, soit n fixé et $x_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$ et $x_j = g\left(\frac{j}{n}\right)$. On sait que x_i et y_j sont croissantes. Donc l'inégalité précédente donne :

$$\frac{1}{n}\sum_k f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) \geq \left(\frac{1}{n}\sum_i f\left(\frac{i}{n}\right)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_j f\left(\frac{j}{n}\right)\right)$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, on obtient des sommes de Riemann et :

$$\int_0^1 fg \geq \int_0^1 f \int_0^1 g$$

Quitte à remplacer f par $-f$ et g par $-g$ le cas échéant, on en déduis que si f et g sont monotones de même monotonie, alors $\int_0^1 fg \geq \int_0^1 f \int_0^1 g$ et si elles sont monotones de monotonies différentes, alors $\int_0^1 fg \leq \int_0^1 f \int_0^1 g$.

18.18 Intégration, Polynômes

Exercise 18.34. Soit $P_n = \frac{1}{n!}X^n(bX-a)^n$ pour des entiers a, b, n. Prouvez que $I_n = \int_0^\pi P_n(x)\sin x \ \mathrm{d}x$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Montrez que P_n et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières en 0 et en a/b. Si on suppose que $\pi = a/b \in \mathbb{Q}$, montrez que I_n est un entier non nul. En déduire que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Exercise 18.35 (*Solution*)**.** Majorons $|P_n|$ sur $[0,\pi]$.

Sur $[0,\pi]$, on a $|X^n| \leq \pi^n$ et $|(bX-a)^n| \leq \max(|-a|^n, |b\pi - a|^n))$, ce que nous noterons m^n. Donc $|P_n| \leq \frac{(m\pi)^n}{n!} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Dès lors, pour n assez grand, $\forall x \in [0,\pi],\ |P_n(x)| \leq \varepsilon$. D'où, pour n assez grand :

$$|I_n| = \left|\int_0^\pi P_n(x)\sin x \ \mathrm{d}x\right| \leq \int_0^\pi |P_n(x)||\sin x|\mathrm{d}x \leq \varepsilon$$

Finalement, $I_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Attention, P_n est de degré $2n$, pas n. Les n premières dérivées de P_n sont nulles en 0 et en a/b car 0 et a/b sont des racines de P_n d'ordre n.

Ensuite, si on dérive P_n k fois, on obtient, par la formule de Leibnitz :

$$P_n^{(k)} = \frac{1}{n!}\sum_{i+j=k}\binom{k}{i} n(n-1)...(n-i+1)X^{n-i}n(n-1)...(n-j+1)b^j(bX-a)^{n-j}$$

Si on calcule $P_n^{(k)}(0)$, quels seront les termes non nuls dans la somme ci-dessus ? Tous ceux pour lesquels $i < n$ possèdent un X dedans (à une certaine puissance non nulle), donc sont nuls pour $X = 0$. Dès lors, les termes restants vérifient $i \geq n$, donc le préfacteur $n(n-1)...(n-i+1)$ contient tous les entiers de 1 à n et se simplifie avec $\frac{1}{n!}$ devant la somme. Ainsi, les termes non nuls sont des entiers et $P_n^{(k)}$ est entier.

Il en va exactement de même pour $P_n^{(k)}({}^a\!/\!{}_b)$ qui est aussi entier.

Supposons que $\pi = {}^a\!/\!{}_b$. En particulier, $P_n = \frac{b^n}{n!}X^n(X-\pi)^n$.

Notons qu'alors, $P_n > 0$ sur $]0, \pi[$ et $\sin x$ aussi, donc $I_n > 0$ (intégrale d'une fonction continue strictement positive).

Ensuite, on effectue $2n$ intégrations par partie sur I_n. Pour la première, on dérive P_n et on intègre sin : $I_n = [-P_n(x)\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi P_n'(x)\cos x \, \mathrm{d}x$. On poursuit en dérivant P_n' et intégrant cos, puis en dérivant P_n'' et en intégrant sin, etc. On obtient finalement une somme de crochets $\left[P_n^{(k)}(x)\sin x\right]_0^\pi$ et $\left[P_n^{(k)}(x)\cos x\right]_0^\pi$ ainsi qu'une intégrale résiduelle $\int_0^\pi P_n^{(2n)}(x)\sin x \, \mathrm{d}x$ ou bien $\int_0^\pi P_n^{(2n)}(x)\cos x \, \mathrm{d}x$.

Cette intégrale résiduelle est un entier car $P_n^{(2n)}$ est un polynôme constant entier, et $\int_0^\pi \sin = 2$, $\int_0^\pi \cos = 0$. Chaque crochet est un entier car sin et cos évalués en 0 et π sont des entiers et $P_n^{(k)}$ aussi (car $\pi = \frac{a}{b}$ et qu'on a montré cette propriété en deuxième question). Finalement, I_n est bien un entier comme somme d'entiers.

Mais si I_n est un entier non nul pour tout n, alors $I_n \to 0$ est impossible. On a une contradiction, ce qui montre que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

18.19 Intégration, Polynômes

Exercise 18.36 (Formule de Simpson)**.** Soit $h, k \in \mathbb{R}$. Montrez que $\int_{-h}^h (x+h)(x-h)(x-k)\mathrm{d}x = 0$ si et seulement si $k = 0$. En déduire que pour a, b, c trois réels, $\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{d}x = 0$ si et seulement si $c = \frac{a+b}{2}$. Établir que : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ \int_a^b P = \frac{b-a}{6}\left(P(a) + P(b) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$.

Exercise 18.37 (*Solution*)**.** Si $k = 0$, alors, $x \mapsto (x+h)(x-h)(x-k)$ est une fonction impaire : son intégrale sur un domaine symétrique, tel $[-h, +h]$, est nulle. Réciproquement, si $k \neq 0$, alors on peut écrire :

$$\int_{-h}^{+h}(x+h)(x-h)(x-k)\mathrm{d}x = \int_{-h}^{+h}(x+h)(x-h)x\mathrm{d}x - k\int_{-h}^{+h}(x+h)(x-h)\mathrm{d}x$$

La première intégrale est nulle (en vertu de l'argument précédent), la deuxième non : on intègre strictement négative. Comme $k \neq 0$, on a bien $\int_{-h}^{+h}(x+h)(x-h)(x-k)\mathrm{d}x \neq 0$.

Ensuite, pour trois réels a, b, c, en appliquant les changements de variable

$x \mapsto x - \frac{a+b}{2}$ puis $x \mapsto \frac{2}{b-a}x$ à l'intégrale $\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{d}x = \left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \int_{-1}^{+1} (x+1)(x-1)\left(x - \frac{2}{b-a}\left(c - \frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x$$

Ainsi, en utilisant le résultat précédent, on trouve que : $\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\mathrm{d}x = 0 \iff c = \frac{a+b}{2}$.

Oui, cette troisième question est bien une application des précédents !

Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ le polynôme qui interpole les points $(a, P(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ et $(b, P(b))$. Alors $P-Q$ admet a, b et $\frac{a+b}{2}$ comme racines. Or c'est un polynôme de degré au plus 3, donc $P - Q = \lambda(X-a)(X-b)\left(X - \frac{a+b}{2}\right)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Dès lors, en intégrant sur $[a, b]$, on se retrouve dans le cas précédent : $\int_a^b P - Q = 0$. De manière plus utile : $\int_a^b P = \int_a^b Q$. Reste à calculer Q et son intégrale. Cela se fait via l'interpolation de Lagrange. En notant $c = \frac{a+b}{2}$:

$$Q = P(a)\frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + P(b)\frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} + P(c)\frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Or $\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x = \frac{-1}{6}(b-a)^3$; $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(b-a)^3$ et $\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(b-a)^3$. Il s'ensuit, après quelques calculs rébarbatifs :

$$\int_a^b P = \int_a^b Q = \frac{b-a}{6}\left(P(a) + P(b) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

<u>N.B. :</u> Cette formule a une utilité ! Si on souhaite estimer l'intégrale d'une fonction quelconque entre a et b, l'idée de la méthode de Simpson est de poser Q, le polynôme interpolateurs de f aux points d'abscisses a, b et $\frac{a+b}{2}$, et d'estimer l'intégrale de f par celle de Q, c'est-à-dire par $\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. L'erreur commise est alors majorée par $\frac{(b-a)^5}{2880}\sup|f^{(4)}|$ et peut même être améliorer en $\frac{(b-a)^5}{6480}\sup|f^{(4)}|$ voire plus dans certains cas, en choisissant une subdivision légèrement plus intelligente. Cette méthode à l'avantage de donner de très bons résultats quand on connaît des valeurs de f à intervalles réguliers.

18.20 Intégration, Polynômes

Exercise 18.38. Calcul ombral.

Fonctions spéciales.

18.21 Intégration, Probabilité

Exercise 18.39. Calculez la probabilité de taper la fève en découpant la galette des rois.

18.22 Intégration, Taylor-Lagrange

Exercise 18.40. Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ avec $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrez qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Exercise 18.41 (*Solution*)**.** Il faut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange. Si on cherche à l'appliquer entre 0 et 1, on n'exploitera pas les deux informations $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 0$. L'idée est de l'appliquer au choix entre 0 et $1/2$ ou entre $1/2$ et 1, suivant la position de $f(1/2) - \frac{f'(1/2)}{2}$ par rapport à $1/2$. Précisément :

- Si $f(1/2) \leq 1/2$, alors on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[1/2, 1]$:

$$\left|f(1/2) - f(1) - \frac{1}{2!}f'(1)\right| \leq \frac{\sup_{[1/2,1]}|f''|}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

  Or $f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$, donc $\left|f(1/2) - f(1) - \frac{1}{2!}f'(1)\right| = 1 - f(1/2) \geq \frac{1}{2}$, puis $\sup_{[1/2,1]}|f''| \geq 4$.

- Si $f(1/2) \geq 1/2$, alors on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[0, 1/2]$:

$$\left|f(1/2) - f(0) - \frac{1}{2!}f'(0)\right| \leq \frac{\sup_{[0,1/2]}|f''|}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

  Or $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$, donc $\left|f(1/2) - f(0) - \frac{1}{2!}f'(0)\right| = f(1/2) \geq \frac{1}{2}$, puis $\sup_{[0,1/2]}|f''| \geq 4$.

Dès lors, on sait que f'' est une fonction continue dont le suprémum est supérieur à 4 : par continuité, il existe au moins un point $c \in [0,1]$ tel que $f''(c) \geq 4$.

Plus généralement, l'utilisation d'un "point de transfert" comme $1/2$ ci-dessus permet parfois d'améliorer les inégalités en utilisant des conditions sur deux bords en même temps, ici en 0 et en 1.

18.23 Intégration, Taylor-Lagrange

Exercise 18.42. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un polynôme P de degré impair vérifiant : $\forall n, x,\ |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$. Montrez que f est la fonction nulle. Que se passe-t-il si P est pair ?

Exercise 18.43 (*Solution*)**.** Comme P est de degré impair, il possède une racine réel, disons a. Alors, par la propriété de l'énoncé : $\forall n,\ |f^{(n)}(a)| \leq |P(a)| = 0$. Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}$, appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $[a,x]$ (ou $[x,a]$, c'est selon) :

$$|f(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n!}\sup_{[a,x]}|f^{(n)}| \leq \frac{(x-a)^n}{n!}\sup_{[a,x]}|P|$$

Le terme $\sup_{[a,x]}|P|$ ne dépend pas de n, donc quand $n \to +\infty$, le membre de droite tend vers 0, donc $f(x) = 0$. f est la fonction nulle.

Si P est autorisée à être pair, alors l'exemple $P = 1$ et $f = \sin$ montre qu'on peut trouver une fonction non nulle dont toutes les dérivées sont bornées par P.

N.B. : Par contre, on a montré quelque chose de plus puissant : si f a toutes ses dérivées nulles en un même point a, alors elle est nulle ou bien la suite $(f^{(n)}(x))_n$ doit croître au moins aussi vite que $\frac{n!}{(x-a)^n}$. L'exemple usuel $x \mapsto e^{-1/x^2}$, qui a toutes ses dérivées nulles en 0 est donc plutôt représentatif de ce type de fonctions (elles se construisent avec des exponentielles, typiquement).

19 Matrices

19.1 Matrices

Exercise 19.1 (Matrices vampires)**.** Commencer par calculer $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^2$. Prouver que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\llbracket 0, 9 \rrbracket)$ vérifie $M^2 = \begin{pmatrix} \overline{aa} & \overline{bb} \\ \overline{cc} & \overline{dd} \end{pmatrix}$ si et seulement si $ad - bc = 0$ et $a + d = 11$. Étudier la réciproque. Comment faire de même avec des entrées à 2 chiffres ?

Exercise 19.2 (*Solution*)**.**

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix}$$

On s'amuse comme on peut...

(Pour ceux qui connaissent la théorie du polynôme caractéristique (vue en Spé), on est simplement en train de dire que $\chi(M) = X^2 - 11X + 0$, donc que $M^2 = 11M$. Or $11x = \overline{xx}$. On pourrait procéder de même avec des entrées de M à deux chiffres et $M^2 = 101M$.)

On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

Regardons la première entrée :

$$a^2 + bc = a^2 + ad = a(a + d) = 11a$$

De même :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + ad & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a + d) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) \end{pmatrix} = 11M$$

Réciproquement, soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $M^2 = 11M$. On note $\Delta = ad - bc$ et $t = a + d$. On veut prouver que $\Delta = 0$ et que $\tau = 11$. Un rapide calcul donne que $bc = \Delta - ad$, puis :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\tau - \Delta & b\tau \\ c\tau & d\tau - \Delta \end{pmatrix}$$

Finalement, identifier les coefficients donne $\Delta = 0$ et $\tau = 11$.

Si on veut trouver une matrice $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{ab} & \overline{cd} \\ \overline{ef} & \overline{gh} \end{pmatrix}$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} \overline{abab} & \overline{cdcd} \\ \overline{efef} & \overline{ghgh} \end{pmatrix}$, il faut et il suffit que $\Delta = xt - zy = 0$ et que $\tau = x + t = 101$. Par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 66 & 55 \\ 42 & 35 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6666 & 5555 \\ 4242 & 3535 \end{pmatrix}$$

19.2 Matrices

Exercise 19.3. Quelles sont les matrices qui commutent avec toutes les autres ?

Exercise 19.4 (*Solution*)**.** On utilise la base des matrices $(E_{ij})_{i,j}$ où E_{ij} est la matrice qui vaut 1 en ligne i, colonne j et 0 ailleurs.

Soit M une matrice qui commute avec toutes les autres. Elle commute en particulier avec E_{ab} (à a et b fixés) : $E_{ab}M = ME_{ab}$. Or, en notant $M = [m_{ij}]_{i,j}$ et $E_{ab} = [\delta_{ia}\delta_{jb}]_{i,j}$ avec le symbole de Kronecker, on obtient :

$$E_{ab}M = \left[\sum_k \delta_{ia}\delta_{kb}m_{kj}\right]_{i,j} = [m_{bj}\delta_{ia}]_{i,j}$$

$$ME_{ab} = \left[\sum_k m_{ik}\delta_{ka}\delta_{jb}\right]_{i,j} = [m_{ia}\delta_{jb}]_{i,j}$$

Ainsi : $\forall i, j : m_{bj}\delta_{ia} = m_{ia}\delta_{jb}$; et on en déduit que : $m_{bb} = m_{aa}$ en appliquant avec $i = a$ et $j = b$; et $m_{bj} = 0$ pour tout $j \neq b$. Ces deux faits sont vrais pour tout a et b. En particulier, pour tout b, $m_{bb} = m_{11}$, tous les coefficients diagonaux sont égaux ; et $m_{bj} = 0$ pour tout couple $b \neq j$, tous les coefficients non-diagonaux sont nuls.

Finalement, M est une matrice diagonale avec tous ses coefficients égaux : c'est une matrice scalaire, $M = \lambda I_n$. Réciproquement, il est évident que les matrices scalaires commutent avec toutes les matrices, donc on a trouvé le centre multiplicatif de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

19.3 Matrices

Exercise 19.5. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Montrez que $Ax = b$ a une solution si et seulement si :

$$\forall y \in \mathbb{R}^m,\ y^T A = \vec{0}^T \Rightarrow y^T b = 0$$

Exercise 19.6 (*Solution*)**.** Si $Ax = b$ a une solution, alors pour y tel que $y^T A = \vec{0}^T$, on a :

$$0 = \vec{0}^T x = y^T Ax = y^T b$$

Réciproquement, si $Ax = b$ n'a pas de solution, soit r le rang de A. On sait que b n'est pas dans l'image des colonnes de A, donc la matrice de taille $n \times (m+1)$ définie par $(A|b)$ a rang $r+1$. De même, la matrice $\begin{pmatrix} A & | & b \\ \vec{0}^T & | & 1 \end{pmatrix}$ a rang $r+1$. De fait, $(\vec{0}^T|1)$ est dans l'image des lignes de $(A|b)$. Soit y le vecteur des coefficients de cette dépendance linéaire. Alors : $y^T A = \vec{0}^T$ et $y^T b = 1 \neq 0$, ce qui est bien la réciproque recherchée.

19.4 Matrices

Exercise 19.7 (Relation de mutation des algèbres amassées)**.** Soit $B = [b_{ij}]_{i,j} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ avec $m \geq n$ une matrice antisymétrique étendue (i.e. $[b_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ est antisymétrique). On définit $\mu_k(B) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ pour $k \leq n$ par coordonnées b'_{ij} :

$$\forall i \in [\![1,m]\!], j \in [\![1,n]\!],\ b'_{ij} = \begin{cases} b_{ij} + b_{ik}b_{kj} & \text{si } b_{ik} > 0 \text{ et } b_{kj} > 0 \\ b_{ij} - b_{ik}b_{kj} & \text{si } b_{ik} < 0 \text{ et } b_{kj} < 0 \\ -b_{ij} & \text{si } i = k \text{ ou } j = k\,; \quad b_{ij} \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrez que $\mu_k(B)$ est une matrice antisymétrique étendue. Montrez que $\mu_k(\mu_k(B)) = B$. Montrez que si $b_{kl} = 0$ (et $b_{lk} = 0$), alors μ_k et μ_l commutent.

Exercise 19.8 (*Solution*)**.** On doit commencer par montrer que $b'_{ji} = -b'_{ij}$ pour tout $1 \leq i,j \leq n$. Or, comme $k \leq n$, les seuls coefficients utilisés dans la mutation qui permet de calculer b'_{ij} sont des coefficients des n premières lignes, donc inverser les rôles de i et j transforme chaque $b_{\dots}$ en $-b_{\dots}$ et échange les cas, ce qui donne bien l'antisymétrie voulue. Exemple dans le où cas $b_{ik} < 0$ et $b_{kj} < 0$, alors $b_{ki} > 0$ et $b_{jk} > 0$, et on a :

$$b'_{ji} = b_{ji} + b_{jk}b_{ki} = -b_{ij} + (-b_{kj})(-b_{ik}) = -\left(b_{ij} + b_{kj}b_{ik}\right) = -b_{ij}$$

Ensuite, notons b''_{ij} les coefficients de $\mu_k(\mu_k(B))$. Si $i = k$ ou $j = k$, c'est évident : $b''_{ij} = -b'_{ij} = b_{ij}$. Mais dès lors, si $b_{ki} > 0$ et $b_{jk} > 0$, alors $b'_{ki} < 0$ et $b'_{jk} < 0$ et on a :

$$b''_{ij} = b'_{ij} - b'_{ik}b'_{kj} = (b_{ij} + b_{ik}b_{kj}) - b_{ik}b_{kj} = b_{ij}$$

Par antisymétrie, on traite ainsi le cas $b_{ki} < 0$ et $b_{jk} < 0$.

Enfin, si $k \neq l$ et $b_{kl} = b_{lk} = 0$, alors montrons que $\mu_k(\mu_l(B)) = \mu_l(\mu_k(B))$. Notons b^{lk}_{ij} et b^{kl}_{ij} leurs coefficients respectifs, et b^k_{ij} et b^l_{ij} les coefficients intermédiaires. Si i ou j est dans $\{k,l\}$, alors c'est évident (il suffit de l'écrire). Sinon, on remarque que : $b^k_{il} = b_{il} + 0$; $b^k_{lj} = b_{jl} + 0$ et $b^l_{ik} = b_{ik} + 0$; $b^l_{kj} = b_{kj} + 0$, donc on peut tester indépendamment b_{ik} et b_{kj} puis b_{il} et b_{lj} ou dans l'ordre inverse.

Par exemple, si $b_{ki} > 0$; $b_{jk} > 0$ et $b_{li} < 0$ et $b_{jl} < 0$, alors on a :

$$\begin{aligned}
b_{ij}^k &= b_{ij} + b_{ik}b_{kj} && \text{car } \ b_{ik} > 0,\ b_{kj} > 0\\
b_{ij}^{lk} &= b_{ij}^k - b_{il}^k b_{lj}^k && \text{car } \ b_{il}^k = b_{il} < 0,\ b_{lj}^k = b_{lj} < 0\\
&= (b_{ij} + b_{ik}b_{kj}) - b_{il}b_{lj}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{ij}^l &= b_{ij} - b_{il}b_{lj} && \text{car } \ b_{il} < 0,\ b_{lj} < 0\\
b_{ij}^{kl} &= b_{ij}^l + b_{ik}^l b_{kj}^l && \text{car } \ b_{ik}^l = b_{ik} > 0,\ b_{kj}^l = b_{kj} > 0\\
&= (b_{ij} - b_{il}b_{lj}) + b_{ik}b_{kj}
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien l'égalité $b_{ij}^{lk} = b_{ij}^{kl}$. Les autres cas fonctionnent pareillement et ainsi $\mu_k \circ \mu_l = \mu_l \circ \mu_k$ dans le cas où $b_{kl} = b_{lk} = 0$.

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, cet exercice est à la base d'une théorie très riche et bien plus visuelle que ci-dessus : les algèbres amassées.

19.5 Matrices

Exercise 19.9. Soit d fixé et deux familles de d complexes $(f_i)_i$ et $(h_j)_j$. Prouvez que ($\binom{b}{a}$ sont pris nuls si $a < b$) :

$$\forall i, f_i = \sum_{j=1}^{d} \binom{i}{j} h_j \iff \forall j, h_j = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i+j} \binom{i}{j} f_i$$

Exercise 19.10 (*Solution*)**.** On se rappelle de la formule classique ($i \leq j$) :

$$\binom{k}{i}\binom{j}{k} = \frac{1}{i!(k-i)!}\frac{j!}{(j-k)!} = \binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i}$$

L'équivalence proposée revient à dire que les matrices $A = \left[\binom{j}{i}\right]_{i,j}$ et $B = \left[(-1)^{i+j}\binom{j}{i}\right]_{i,j}$ sont inverses l'une de l'autre (attention on a exprimé h_j en fonction de f_i, il faut intervertir les indices i et j pour retrouver les expressions normales). Or on a le terme général de AB :

$$(-1)^j \sum_{k=i}^{j} (-1)^k \binom{k}{i}\binom{j}{k} = (-1)^j \sum_{k=i}^{j} (-1)^k \binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i} = (-1)^{i+j}\binom{j}{i}\sum_{k=0}^{j-i}(-1)^k\binom{j-i}{k}$$

Si $i \neq j$, la dernière somme est le binome de Newton pour $(1-1)^{j-i} = 0$, si $i = j$, il y a un seul terme dans la somme qui vaut 1. En terminant le calcul, on trouve bien $AB = I_d$, ce qui conclut.

19.6 Matrices

Exercise 19.11. Montrer que le centre du groupe des matrices unipotentes, c'est-à-dire $\mathbb{U}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est exactement le groupe $\{I_n + \lambda J; \lambda \in \mathbb{R}\}$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Exercise 19.12 (*Solution*)**.** Soit $C \in \mathbb{U}_n$ qui commute avec toute matrice de $\mathbb{U}_n$. En particulier, elle commute avec $I_n + E_{i,j}$ **à condition que** $i < j$ (sinon la diagonale ne serait pas constituée de 1). Or :

$$C(I_n + E_{i,j}) = C + \begin{pmatrix} & 0 & \\ c_{j,1} & \dots & c_{n,j} \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

$$(I_n + E_{i,j})C = C + \begin{pmatrix} & c_{1,i} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & c_{n,i} & \end{pmatrix}$$

On en déduit que (attention aux inégalités strictes) :

$$\begin{cases} \forall i < n, \forall k < i & c_{k,i} = 0 & \text{En regardant les } I_n + E_{i,n} \\ \forall j > 1, \forall k > j & c_{j,k} = 0 & \text{En regardant les } I_n + E_{1,j} \end{cases}$$

Reste les coefficients $c_{i,i}$ (qu'on sait être égaux à 1) et le coefficient $c_{1,n}$ auxquels aucun contrainte n'est induite par ces inégalités. On a donc montré que $Z(\mathbb{U}_n) \subset \{I_n + \lambda J; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $C = I_n + \lambda J$. On a bien $C \in \mathbb{U}_n$, et on va montrer qu'elle commute avec toute matrice de $\mathbb{U}_n$. Soit $M \in \mathbb{U}_n$, alors (avec $m_{1,1} = m_{n,n} = 1$) :

$$JM = \left[\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,1} \delta_{k,n} m_{k,j} \right]_{i,j} = [m_{n,j} \delta_{i,1} \delta_{j,n}]_{i,j} = J$$

$$MJ = \left[\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} \delta_{k,1} \delta_{j,n} \right]_{i,j} = [m_{i,1} \delta_{i,1} \delta_{j,n}]_{i,j} = J$$

(Le calcul avec un dessin est beaucoup plus facile à faire, mais qui voudrait se priver de la pleine laideur des δ à foison ?)

Ainsi, $(I_n + \lambda J)M = M + \lambda JM = M + \lambda MJ = M(I_n + \lambda J)$ et on a bien : $Z(\mathbb{U}_n) = \{I_n + \lambda J; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

19.7 Matrices

Exercise 19.13. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculez BA $(= I_2)$.

Exercise 19.14 (*Solution*)**.** Appelons $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ les applications linéaires associées à A et B respectivement. On sait que :

$$fg(e_2) = e_2 \quad \text{et} \quad fg(e_3) = e_3$$

Dès lors, $gf(g(e_2)) = g(e_2)$. De même, $gf(g(e_3)) = g(e_3)$. Donc, gf laisse la famille $(g(e_2), g(e_3))$ inchangée. Or cette famille est une base, en effet, si $ag(e_2) + bg(e_3) = \vec{0}$, alors, en appliquant f, on a $ae_2 + be_3 = \vec{0}$, donc $a = b = 0$ car (e_2, e_3) est libre.

Ainsi, l'endomorphisme gf laisse une base inchangée : c'est l'identité. Il s'ensuit que $BA = I_2$.

19.8 Matrices

Exercise 19.15. Soit E de dimension finie. On veut montrer que $\mathscr{L}(E)$ possède une base faite de projecteurs. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. À quelle condition l'endomorphisme associé à $M \in \mathcal{M}_n$ est-il un projecteur ? Montrez que les $E_{i,i}$ et les $E_{i,i} + E_{i,j}$ sont associées à des projecteurs. Conclure.

Exercise 19.16 (*Solution*)**.** $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur si $p^2 = p$, donc $M \in \mathcal{M}_n$ est une matrice associée à un projecteur si $M^2 = M$.

Il est immédiat que $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ car c'est une matrice diagonale. Ensuite, on a :

$$(E_{i,i} + E_{i,j})^2 = E_{i,i}^2 + E_{i,i}E_{i,j} + E_{i,j}E_{i,i} + E_{i,j}^2 = E_{i,i} + E_{i,j} + 0_n + 0_n$$

On a bien un projecteur. Enfin, remarquons que pour $i \neq j$: $E_{i,j} = (E_{i,i} + E_{i,j}) - E_{i,i}$. De fait, la famille des $(E_{i,i})_i \cup (E_{i,i} + E_{i,j})_{i \neq j}$ est une base de $\mathcal{M}_n$ (elle est génératrice et de bon cardinal). Comme cette famille est constituée de projecteurs, on a bien trouvé une base de projecteurs de $\mathscr{L}(E) \simeq \mathcal{M}_n$.

19.9 Matrices

Exercise 19.17 (Carrés magiques)**.** Soit MG_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que les sommes sur toutes les lignes, les colonnes et les deux diagonales sont égales. Montrez que MG_n est un espace vectoriel. Calculez la dimension de MG_n, en utilisant $\phi : MG_n \to \mathcal{M}_{n-2,n-1} \times \mathbb{R}^{n-2}$, l'application qui a M associe $(M_1, m_{1,n}, m_{n-1,1}, m_{n-1,3}, ..., m_{n-1,n-2})$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} & & M_1 & & \begin{matrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n-2,n} \end{matrix} \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n-1} & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exercise 19.18 (*Solution*)**.** On peut démontrer à la main que MG_n est un espace vectoriel, mais on peut aussi le faire efficacement : soit φ_i la forme linéaire qui a $M \in \mathcal{M}_n$ associe la somme de sa i-ième ligne, ψ_j la somme de sa j-ième colonne et δ et d pour ses deux diagonales. Les Ker $(\varphi_i - \varphi_1)$ sont des hyperplans, et on a :

$$MG_n = \bigcap_{i=2}^{n} \text{Ker } (\varphi_i - \varphi_1) \cap \bigcap_{j=1}^{n} \text{Ker } (\psi_j - \varphi_1) \cap \text{Ker } (\delta - \varphi_1) \cap \text{Ker } (d - \varphi_1)$$

Non seulement MG_n est un espace vectoriel (comme intersection d'espaces vectoriels), mais on sait qu'en tant d'intersections d'hyperplans, sa dimension est au moins $n^2 - (n-1) - n - 2 = n(n-2) - 2$. On va voir qu'en réalité, cette construction est maladroite dans le sens où la dimension de MG_n est $n(n-2)$.

On ne connaît pas la dimension de l'espace de départ, donc on va montrer que ϕ est un isomorphisme sans se servir des dimensions. D'une part, ϕ est linéaire. Ensuite, montrons la surjectivité. Soit $(A, a_1, ..., a_{n-2}) \in \mathcal{M}_{n-2,n-1} \times \mathbb{R}^{n-2}$. On sait déjà ce que vaut $m_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n-2$ et $1 \leq j \leq n-1$. On sait aussi ce que doit valoir $m_{1,n}$ ainsi que $m_{n-1,1}, m_{n-1,3}, ..., m_{n-1,n-2}$. Cherchons les autres coefficients, et notons $S = \sum_{i=1}^{n} m_{1,i}$ (valeur déjà déterminée par la première ligne). Puisqu'on connaît tous les coefficients de la j-ième ligne, avec $j \leq n-2$, sauf $m_{j,n}$, et que la somme des coefficients de la ligne doit valoir S, on détermine uniquement $m_{j,n}$ (qui vaut $S - \sum_{i<n} m_{j,i}$). On connaît aussi tous les coefficients de la première colonne, sauf $m_{n,1}$, et on sait que la somme fait S : ceci détermine uniquement $m_{n,1}$. On connaît ensuite tous les coefficient de la diagonale en bas à gauche vers en haut à droite sauf $m_{n-1,2}$. Ceci détermine uniquement ce coefficient (puisque la somme doit valoir S). On peut alors répéter le processus pour toutes les colonnes de la 2-ème à la $n-2$-ème : ceci détermine uniquement $m_{n,i}$ pour $i \leq n-2$. Reste à déterminer les quatre derniers coefficients, $m_{n-1,n-1}$, $m_{n-1,n}$, $m_{n,n-1}$ et $m_{n,n}$. Notons S_1 et S_2 la somme des coefficients déjà connus sur la colonne $n-1$ et sur la colonne n, S_3 et S_4 les sommes des coefficients déjà connus sur les lignes $n-1$ et n et S_5 la somme des coefficients déjà connus sur la diagonale principale. Une matrice

magique solution doit vérifier le système d'équation :

$$\begin{cases} m_{n-1,n-1} & +m_{n,n-1} & & & = & S-S_1 \\ & & m_{n-1,n} & +m_{n,n} & = & S-S_2 \\ m_{n-1,n-1} & & +m_{n-1,n} & & = & S-S_3 \\ & m_{n,n-1} & & +m_{n,n} & = & S-S_4 \\ m_{n-1,n-1} & & & +m_{n,n} & = & S-S_5 \end{cases}$$

Dans ce système, une équation est redondante. En effet, si on fait $L_1+L_2-L_3$, on trouve à gauche $m_{n-1,n}+m_{n,n}$, comme dans le membre de gauche de L_4. Pour la partie droite, on trouve bien S_4 après quelques manipulations de sommes. Finalement, la bijectivité de ϕ se ramène à l'inversibilité de la matrice des quatre lignes L_1, L_2, L_3, L_5 du système ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{l'inverse étant} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, ϕ est bijective, et $MG_n \simeq \mathcal{M}_{n-2,n-1} \times \mathbb{R}^{n-2}$, donc $\dim MG_n = (n-1)(n-2) + n - 2 = n(n-2)$.

19.10 Matrices

Exercise 19.19. Pour $n \geq 2$, montrez que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ intersecte $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercise 19.20 (*Solution*)**.** Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. Notons-là grâce aux morphismes coordonnées : $f(A) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} a_{i,j}$. On veut trouver A inversible telle que $f(A) = 0$.

- S'il existe $i \neq j$ tel que $\alpha_{i,j} \neq 0$, alors on peut poser $S = \sum_j \alpha_{j,j}$ puis $A = I_n - \frac{S}{\alpha_{i,j}} E_{i,j}$. A est triangulaire avec des 1 sur sa diagonale (car $i \neq j$), donc inversible. Par ailleurs, $f(A) = \sum_k \alpha_k - \frac{S}{\alpha_{i,j}} \alpha_{i,j} = 0$.
- Si pour tout $i \neq j$, on a $\alpha_{i,j} = 0$, alors f est la trace, et on cherche une matrice inversible de trace nulle. Il y en a plein, la matrice de passage de la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ à $(e_n, e_1, ..., e_{n-1})$ convient par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour n'importe quel hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a bien construit dans tout les cas une matrice (explicite pour une forme linéaire donnée) qui est inversible.

19.11 Matrices

Exercise 19.21 (Théorème de Hadamard)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrez que si $\forall i,\ |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$, alors A est inversible.

Exercise 19.22 (*Solution*)**.** Supposons qu'il existe un vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in$ Ker A. Si on suppose x non nul, alors on peut prendre i_0 un indice tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|\ ;\ i \in [\![1,n]\!]\}$. Ensuite, on sait que $Ax = \vec{0}$, donc : $\forall i,\ \sum_k a_{i,k}x_k = 0$, puis en particulier $a_{i_0,i_0}x_{i_0} = -\sum_{k\neq i_0} a_{i_0,k}x_k$. Il s'ensuit que :

$$|a_{i_0,i_0}|\,|x_{i_0}| = \left|-\sum_{k\neq i_0} a_{i_0,k}x_k\right| \leq \sum_{k\neq i_0} |a_{i_0,k}|\,|x_k| \leq |x_{i_0}| \sum_{k\neq i_0} |a_{i_0,k}|$$

Finallement, si $|x_{i_0}| \neq 0$, alors on peut diviser, et on obtient que $|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{k\neq i_0} |a_{i_0,k}|$. Ainsi, la supposions que la condition précédente est fausse pour tout i assure que tous les $|x_i|$ valent 0 : $x = \vec{0}$.

Cela revient à dire que si $\forall i,\ |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$, alors A est inversible.

19.12 Matrices

Exercise 19.23. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

Exercise 19.24 (*Solution*)**.** Soit $M \notin GL_n(\mathbb{K})$. Comme Ker M n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$, construisons $\mathcal{B}_1$ une base de Ker M, puis S un supplémentaire de Ker (M) muni de sa base $\mathcal{B}_2 = (e_1, ..., e_r)$. On construit ainsi la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ Comme S est isomorphe à Im M par le théorème du rang, on peut construire $\mathcal{C}_2 = (f(e_1), ..., f(e_r))$ qui est une base de Im M. On complète cette base via le théorème de la base incomplète pour obtenir un base $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

On peut finalement écrire (par bloc) la matrice M dans la base de départ $\mathcal{B}$ et la base d'arrivée $\mathcal{C}$:

$$M \sim \left(\begin{array}{c|c} 0_{r,n-r} & I_r \\ \hline 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{array}\right)$$

Cette matrice étant triangulaire stricte, elle est bien nilpotente.

19.13 Matrices

Exercise 19.25. Soit E de dimension finie et de base $\mathcal{B}$. Soit $u \in E$ et $\alpha \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Donnez la matrice de $f : x \mapsto \alpha(x)u$ dans $\mathcal{B}$.

Exercise 19.26 (*Solution*)**.** Notons $U \in \mathcal{M}_{n,1}$ la colonne donnant les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$. Notons $A \in \mathcal{M}_{1,n}$ la ligne des coefficients $\alpha(\mathcal{B})$. Alors, on constate que U est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'application $t \mapsto tu$ qui est

$\mathbb{K} \to E$. De la même manière, A est la matrice de $\alpha : E \to \mathbb{K}$ dans la base $\mathcal{B}$. Or f est la composée des deux application précédentes, donc M, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $M = UA$.

On vérifie que M est bien de rang 1 si A est non nul (le rang d'un produit est majoré par le rang de ses facteurs), et en effet, Im f = Vect$u$ qui est de dimension 1.

N.B. : Toute matrice de rang 1 peut s'écrire comme le produit d'une colonne par une ligne. Dès lors, pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1, on peut trouver $\alpha \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et $u \in E$ tels que $f : x \mapsto \alpha(x)u$.

19.14 Matrices

Exercise 19.27. Montrez que $\Phi : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n^*$, $A \mapsto (\varphi_A : M \mapsto tr(AM))$ est un isomorphisme. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n$, en déduire que $\exists A \in \mathcal{M}_n,\ \mathcal{H} =$ Ker φ_A. On suppose que $\mathcal{H}$ est stable par multiplication. Montrez que si $B \in \mathcal{H}$, alors BA est colinéaire à A. Montrez que Im A est non nul. On construit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{C}$ une base dont le premier vecteur est dans Im A, avec $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Pour $B \in \mathcal{H}$, donnez la première colonne de $P^{-1}BP$. Montrez que $M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n$. En déduire finalement que $n = 2$ et que $\mathcal{H} \simeq T_2$.

Exercise 19.28 (*Solution*)**.** On sait que $\dim \mathcal{M}_n^* = \dim \mathcal{M}_n = n^2$. En outre, $\varphi_{E_{i,j}}(M) = tr(E_{i,j}M) = m_{i,j}$ car $E_{i,j}M$ est la matrice dont la i-ième ligne est la j-ième ligne de M. On a donc bien toutes les formes linéaires coordonnées, qui forment une base de $\mathcal{M}_n^*$. On aurait aussi pu constater que si $tr(AM) = 0$ pour tout M, alors $tr(AE_{i,j}) = a_{i,j} = 0$, donc $A = 0_n$, ce qui montre que Phi est injective car son noyau est nul.

Dès lors, comme tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire, et que toute forme linéaire peut être décrite comme φ_A pour une certaine matrice A, il existe bien $A \in \mathcal{M}_n$ tel que $\mathcal{H} =$ Ker φ_A (on notera d'ailleurs que A est unique pour $\mathcal{H}$ donné).

Soit $B \in \mathcal{H}$ et $C \in \mathcal{M}_n$ tel que $\mathcal{H} \oplus C\mathbb{K} = \mathcal{M}_n$. On a alors $\varphi_A(C) \neq 0$, disons $\frac{\varphi_A(CB)}{\varphi_A(C)} = \lambda$. Regardons la forme linéaire $\psi : M \mapsto \varphi_A(MB) - \lambda\varphi_A(M)$. Si $M \in \mathcal{H}$, alors $MB \in \mathcal{H}$ car $\mathcal{H}$ est stable par produit, donc $\varphi_A(MB) = 0$, en outre $\varphi_A(M) = 0$, donc $\psi(M) = 0$. De plus, $\psi(C) = 0$ par construction de λ. Donc ψ est la forme nulle : $\forall M,\ \lambda\varphi_A(M) = tr(\lambda AM) = tr(AMB) = tr(BAM)$. Or Φ est injective, donc $\lambda A = BA$.

Si Im $A = \{\vec{0}\}$, alors $A = 0_n$, donc φ_A est la forme nulle, ce qui n'est pas le cas car Ker φ_A est un hyperplan. Donc les constructions de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont valides. Comme P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, la matrice $B' = P^{-1}BP$ est la matrice de B dans la base $\mathcal{C}$. Soit y_1 le premier vecteur de $\mathcal{C}$, qui dans l'image de A par construction, disons $y_1 = Ax_1$. Alors, comme $BA = \lambda A$, on a $By_1 = BAx_1 = \lambda Ax_1 = \lambda y_1$. Cela signifie que le premier vecteur de la base $\mathcal{C}$ est envoyé par B sur un multiple de lui-même : la première colonne de $P^{-1}BP$

est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. En particulier, on vient de montrer que l'image de $\mathcal{H}$ par l'application linéaire $M \mapsto P^{-1}MP$ a une dimension au plus de $n^2 - (n-1)$.

Or cette application est un isomorphisme. En effet, elle est linéaire et son inverse est $N \mapsto PNP^{-1}$. Il s'ensuit que l'image de $\mathcal{H}$ par $M \mapsto P^{-1}MP$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n$ et a de fait dimension n^2-1. D'où : $n^2-(n-1) \geq n^2-1$ puis $n=2$ (pour $n=1$, il n'y a pas d'hyperplan non nul). $\mathcal{H}$ est alors de dimension $2^2-1=3$ et l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ envoie $\mathcal{H}$ dans T_2 qui est lui-même de dimension 3 : $\mathcal{H} \simeq T_2$.

19.15 Matrices

Exercise 19.29. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouvez les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $A - \lambda I_4 \notin GL_4$ et résoudre alors $AX = \lambda X$. En déduire $P \in GL_4(\mathbb{R})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale.

Exercise 19.30 (*Solution*)**.** Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, notons $A_\lambda = A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$. On effectue ensuite un pivot de Gauss (sans se préoccuper de l'inverse) :

$$\begin{aligned}
A_\lambda &\sim \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} && \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 1 & -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & -1 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -1+\lambda \\ 0 & -\lambda+1 & 0 & -1+\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} && \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda+1 & 0 & -1+\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -1+\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda+1 & 0 & -1+\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -1+\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2-\lambda^2-\lambda \end{pmatrix} && \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda+1 & 0 & -1+\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda+1 & -1+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Les racines évidentes de $3 - X^2 - 2X$ étant 1 et -3 et $-X+1$ s'annulant pour 1, on en déduit que A_λ n'est pas inversible pour $\lambda \in \{1, -3\}$.

<u>**Pour $\lambda = -3$:**</u>, on a $A_{-3} = A + 3I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. On remarque que $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de A_{-3}, et que la matrice est de rang 3 car on a montré au dessus qu'elle est équivalente à une matrice triangulaire supérieure de diagonale $(1,4,4,0)$. Donc $AX = -3X \iff X \in \mathrm{Vect}((-1,1,1,1)^T)$.

<u>**Pour $\lambda = 1$:**</u>, on a $A_1 = A - I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. On remarque que

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ sont dans le noyau de A_1 et sont libre. En outre, A_1 est de rang au moins 1 car elle a une colonne non nulle. Donc $AX = X \iff X \in \mathrm{Vect}((1,1,0,0)^T, (1,0,1,0)^T, (1,0,0,1)^T)$.

Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, on a $AP = PD$ où $D = \begin{pmatrix}3 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$, ce qui donne bien le $A = PDP^{-1}$ souhaité. On retrouvera ce genre de calculs (et plus encore) dans le chapitre de diagonalisation de Spé.

19.16 Matrices

Exercise 19.31 (Lemme de Schur)**.** Soit G un sous-groupe de GL_n. Pour $B \in G$, on note $i(B) : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n,\ M \mapsto BMB^{-1}$. Montrez que $i : B \mapsto i(B)$ est un morphisme de groupe de $G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M}_n)$. Montrez que i est injectif si et seulement si G ne contient pas d'autre homothétie que l'identité. Soit $\mathcal{M}_n^G = \{M\ ;\ \forall B \in G,\ i(B)(M) = M\}$. Montrez que pour $M \in \mathcal{M}_n^G$, Ker M et Im M sont stables par G ($x \in V, B \in G \Rightarrow Bx \in V$). Si E n'a pas de sous-espace non trivial stable par G, montrez que $\mathcal{M}_n^G \subseteq \{0_n\} \cup GL_n$ et donnez $\dim \mathcal{M}_n^G$.

Exercise 19.32 (*Solution*)**.** Premièrement, pour $B \in G$, comme B est inversible, $i(B)$ est correctement définie et est un automorphisme de $\mathcal{M}_n$ car c'est une application linéaire et si $i(B)(M) = N$, alors $M = BNB^{-1}$ puis $N = B^{-1}MB$, donc Im $i(B) = \mathcal{M}_n$. Ensuite, si $A, B \in G$, alors $i(AB)(M) = (AB)M(AB)^{-1} = A(BMB^{-1})A^{-1} = i(A)\circ i(B)(M)$ et $i(B^{-1})(M) = B^{-1}MB = i(B)^{-1}(M)$ par le raisonnement précédent. De fait, i est un morphisme de groupe de $G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M}_n)$.

Attention à ne pas confondre l'injectivité de i avec l'injectivité de $i(B)$: celle de i revient à Ker $i = \{I_n\}$ car I_n est l'élément neutre du groupe G (le noyau est ici le noyau d'un morphisme de groupe). Cependant, si $\lambda I_n \in G$ pour $\lambda \neq 0$, alors $i(\lambda I_n)(M) = \lambda I_n M \frac{1}{\lambda} I_n = M$, donc $i(\lambda I_n) = id_{\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_n)}$. Ainsi, s'il existe $\lambda \notin \{0,1\},\ \lambda I_n \in G$, alors i n'est pas injective.

Réciproquement, si $i(B) = id_{\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_n)}$, alors B commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n$ car $i(B)(M) = M$ revient à $BM = MB$. Donc B est une homothétie. Si la seule homothétie de G est l'identité, alors i est bien injective car sont noyau (de morphisme de groupe) est réduit à $\{I_n\}$.

Si $M \in \mathcal{M}_n^G$, alors, soit $x \in$ Ker M, on a $Mx = \vec{0}$, et on voudrait savoir si, pour $B \in G$, $M(Bx) = \vec{0}$. On sait que $B^{-1}MBx = Mx = \vec{0}$, or B^{-1} est injective, donc MBx est l'unique antécédant de $\vec{0}$: $MBx = \vec{0}$. Ainsi, Ker M est bien stable par G.

De la même manière, si $y \in$ Im M, On veut savoir si $By \in$ Im M pour $B \in G$. Soit $x \in E$ tel que $Mx = y$. Dès lors : $B^{-1}MBx = Mx = y$ puis $M(Bx) = By$, donc $By \in$ Im M. Im M est bien stable par G.

Maintenant, si E est irréductible pour G, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de sous-espace de E non trivial et stable par G, alors si $M \in \mathcal{M}_n^G$, alors Ker M et Im M sont des sous-espaces triviaux de E : M est nulle (Ker $M = E$) ou inversible (Ker $M = \{\vec{0}\}$). Dès lors : $\mathcal{M}_n^G \subseteq \{0_n\} \cup GL_n$.

Cependant, $\mathcal{M}_n^G$ est aussi un espace vectoriel (en tant qu'intersection des Ker $(Id - i(B))$ pour $b \in G$), et $I_n \in \mathcal{M}_n^G$ par un calcul évident. Donc $\dim \mathcal{M}_n^G$. Si on suppose que $\dim \mathcal{M}_n^G \geq 2$, alors $(M, N) \in \mathcal{M}_n^G$ une famille libre. Dans ce cas, la méthode du pivot de Gauss permet de triangulariser $N + \mu N$ pour $\mu \in \mathbb{K}$, et le choix d'un bon μ permet d'annuler l'un des coefficients diagonaux. Cela signifie que GL_n ne content pas de plan afin (un meilleur argument sera donné en Spé), donc la dimension de $\mathcal{M}_n^G$ ne peut pas être 2 ni plus : $\dim \mathcal{M}_n^G = 1$.

19.17 Matrices

Exercise 19.33. Déterminez le centre de $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercise 19.34 (*Solution*)**.** On a envie de dire que les matrices de GL_n qui commutent avec toutes les matrices de GL_n sont les homothétie, de la même manière que les matrices de $\mathcal{M}_n$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n$ sont les homothétie, mais attention, ça n'est pas évident, car pour montrer la propriété pour $\mathcal{M}_n$, on utilise les $E_{i,j}$, qui ne sont pas dans GL_n.

Il reste cependant clair que les homothéties sont dans GL_n et commutent avec toutes les matrices de GL_n. Étudions la réciproque. Soit $A \in GL_n$ qui commute avec toutes les matrices de GL_n. En particulier, A commute avec les matrices de transvections $T_{i,j} = I_n + E_{i,j}$ pour $i \neq j$ car $T_{i,j} \in GL_n$, donc $AT_{i,j} = T_{i,j}A$. Or : $T_{i,j}A = A+$une matrice avec sur la i-ième ligne la j-ième ligne de A ; et $AT_{i,j} = A+$une matrice avec sur la j-ième colonne la i-ième colonne de A. On en déduis que $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$: A est diagonale. Reste à montrer que les $a_{i,i}$ ont tous la même valeur. Or, $AT_{1,i} = T_{1,i}A$, donc, en regardant le coefficient en $1, i$: $a_{1,1} = a_{i,i}$: A est une homothétie (non nulle car $A \in GL_n$).

19.18 Matrices

Exercise 19.35 (Relation de Steinberg, Lemme de Whitehead)**.** (Rappel : dans un groupe, $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$)

Pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $e_{i,j}(\lambda)$ la matrice de transvection ($e_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$) et E_n le sous-groupe de GL_n engendré par les matrices de transvection. Montrez que : $e_{i,j}(\lambda)e_{i,j}(\mu) = e_{i,j}(\lambda+\mu)$, puis $[e_{i,j}(\lambda), e_{j,\ell}(\mu)] = e_{i,\ell}(\lambda\mu)$ si $i \neq \ell$ et $[e_{i,j}(\lambda), e_{k,\ell}(\lambda)] = I_n$ pour $i \neq \ell$ et $j \neq k$. En déduire que $[E_n, E_n] = E_n$.

Soit $a \in \mathbb{K}^*$. Montrez que $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ peut s'écrire comme le produit de 4 matrices de transvection. Montrez que toute matrice par bloc de la forme $\left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ avec $A \in \mathcal{M}_n$ peut s'écrire comme le produit de n^2 matrices de transvection. En déduire que $\left(\begin{array}{c|c} B & 0_n \\ \hline 0_n & B^{-1} \end{array}\right) \in E_{2n}$ pour tout $B \in GL_n$. Montrer que $M \mapsto \left(\begin{array}{c|c} M & 0_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ est un morphisme de $GL_n \to GL_{2n}$ et en déduire que le groupe engendré par les $[GL_n, GL_n]$ est isomorphe à un sous-groupe de E_{2n}.

Exercise 19.36 (*Solution*)**.** Multiplier A à gauche par $e_{i,k}(\lambda)$ revient à ajouter à la i-ième ligne de A sa j-ième ligne multipliée par λ, donc $e_{i,j}(\lambda)e_{i,j}(\mu) = e_{i,j}(\mu) + \lambda\,(\text{en ligne } i \text{ une ligne avec un seul 1 en colonne } j) = e_{i,j}(\lambda+\mu)$. En outre, $e_{i,j}(\lambda)e_{k,\ell}(\mu) = I_n + \mu E_{k,\ell} + \lambda E_{i,j}$ si $i \neq \ell$ et $j \neq k$. En particulier, $e_{i,j}(\lambda)$ et $e_{k,\ell}(\mu)$ commutent si $i \neq \ell$ et $j \neq k$, donc $[e_{i,j}(\lambda), e_{k,\ell}(\mu)] = I_n$. Ensuite, si $j = k$ mais $i \neq \ell$, alors $e_{i,j}(\lambda)e_{j,\ell}(\mu) = I_n + \lambda E_{i,j} + \mu E_{j,\ell} + \lambda\mu E_{i,\ell}$, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
[e_{i,j}(\lambda), e_{i,j}(\mu)] &= e_{i,j}(\lambda)e_{j,k}(\mu)e_{i,j}(-\lambda)e_{j,k}(-\mu) \\
&= (I_n + \lambda E_{i,j} + \mu E_{j,\ell} + \lambda\mu E_{i,\ell})\,(I_n - \lambda E_{i,j} - \mu E_{j,\ell} + \lambda\mu E_{i,\ell}) \\
&= I_n + \lambda\mu E_{i,\ell} = e_{i,\ell}(\lambda)
\end{aligned}$$

Notons enfin que $e_{i,j}(\lambda)$ et $e_{i,j}(\mu)$ commutent, donc $[e_{i,j}(\lambda), e_{i,j}(\mu)] = I_n$. Finalement, on a bien montré que tous les commutateurs des générateurs de E_n sont dans E_n, d'où $[E_n, E_n] = E_n$ (cette relation fait de E_n un groupe parfait).

Un rapide calcul donne :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = e_{2,1}(a^{-1})e_{1,2}(1-a)e_{2,1}(-1)e_{1,2}(1-a^{-1})$$

Ensuite, soit $A = [a_{i,j}]_{i,j}$. Dès lors, la matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ s'écrit comme $\prod_{i,j} e_{i,n+j}(a_{i,j})$. On peut décortiquer cela en se rendant compte que, d'une part, toutes ces matrices de transvection commutent (par les relations de Steinberg), et d'autre part, multiplier $\left(\begin{array}{c|c} I_n & * \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ par $e_{i,n+j}(a_{i,j})$ à gauche ajoute le coefficient $a_{i,j}$ dans la cellule $(i, n+j)$.

Il s'ensuit que, si $B \in GL_n$, alors $\left(\begin{array}{c|c} B & 0_n \\ \hline 0_n & B^{-1} \end{array}\right) \in E_{2n}$ car on peut écrire les transvections par blocs $\tilde{e}_{1,2}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$ et $\tilde{e}_{2,1}(A) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_n \\ \hline A & I_n \end{array}\right)$ et s'en servir dans le calcul :

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0_n \\ \hline 0_n & B^{-1} \end{array}\right) = \tilde{e}_{2,1}(B^{-1})\tilde{e}_{1,2}(I_n - B)\tilde{e}_{2,1}(-I_n)\tilde{e}_{1,2}(I_n - B^{-1})$$

Enfin, si $A, B \in GL_n$, alors :

$$\left(\begin{array}{c|c} [A,B] & 0_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_n \\ \hline 0_n & A^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B & 0_n \\ \hline 0_n & B^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} (BA)^{-1} & 0_n \\ \hline 0_n & BA \end{array}\right)$$

Donc avec le morphisme (évident) $M \mapsto \left(\begin{array}{c|c} M & 0_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right)$, on a que $[GL_n, GL_n] \simeq \left\{\left(\begin{array}{c|c} [A,B] & 0_n \\ \hline 0_n & I_n \end{array}\right) \;;\; A, B \in GL_n\right\} \subseteq E_{2n}$. Ainsi, le groupe dérivé de GL_n (le groupe engendré par les $[GL_n, GL_n]$) est isomorphe à un sous-groupe de E_{2n}.

N.B. : Il existe un moyen de rendre les choses plus jolies. En considérant GL_∞, le groupe général linéaire, dont les éléments sont les matrices infinies inversibles qui ne diffèrent de la matrice identité (infinie) que par un nombre fini de leurs coefficients, et E_∞ son pendant pour les transvections, on a : $[GL_\infty, GL_\infty] = [E_\infty, E_\infty] = E_\infty$. Cette notion est liée à la **K**-théorie.

19.19 Matrices, Déterminants

Exercise 19.37 (Zagier)**.** Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4. Soit $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3; x^2 + 4yz = p\}$. En supposant que $\#\mathcal{S}$ est impair, en déduire que $f : (x, y, z) \mapsto (x, z, y)$ a au moins un point fixe et donc que p s'écrit comme la somme de deux carrés.

Compter le nombre de point fixes de l'application suivante et conclure :

$$g : (x, y, z) \longmapsto \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z) & \text{si } x < y - z \\ (2y - x, y, x - y + z) & \text{si } y - z < x < 2y \\ (x - 2y, x - y + z, y) & \text{si } x > 2y \end{cases}$$

Exercise 19.38 (*Solution*)**.** Pour une explication visuelle, on pourra regarder cette vidéo.

Premièrement, l'ensemble $\mathcal{S}$ est fini car il est inclus dans $[1, p]^3$.

Comme f est une involution de $\mathcal{S}$ (on fera attention à vérifier que son image est dans $\mathcal{S}$), on peut écrire $\mathcal{S}$ comme la réunion disjointe des $\{\alpha, f(\alpha)\}$ pour α dans une certaine partie de $\mathcal{S}$. Si f n'a pas de point fixe, alors tous les $\{\alpha, f(\alpha)\}$ sont de cardinal 2 et le cardinal de $\mathcal{S}$ est alors pair. Ainsi, la supposition $\#\mathcal{S}$ impair assure que l'application a un point fixe, c'est-à-dire qu'il y a un élément de la forme (a, b, b) dans $\mathcal{S}$. On a alors $p = a^2 + (2b)^2$, une écriture comme somme de deux carrés, comme souhaitée.

Reste à montrer que $\#\mathcal{S}$ est impair, et pour ce faire, on va juste montrer que g est une involution de $\mathcal{S}$ avec 1 seul et unique point fixe. Soit $(x, y, z) \in \mathcal{S}$, alors on peut regarder le problème matriciellement : $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où M est l'une des trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On cherche un point fixe de g, c'est-à-dire un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui revient à dire que $(M - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$, donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } (M - I_3)$.

On calcul les trois déterminants de $M - I_3$ pour les matrices ci-dessus : 2, 0 et 2. Ainsi, seule la deuxième a un noyau non nul. En vérifiant que $(0, 0, 0) \notin \mathcal{S}$, on obtient donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Un rapide calcul donne que ce noyau est de dimension 2 et a pour base $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. De fait, $x = y$ et z peut être choisi indépendamment. Les conditions pour que g ait cette formule impose que $-z < 0 < y$, ce qui ne pose aucun problème. Cependant, on doit aussi avoir $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{S}$, donc $x^2 + 4yz = p$, ce qui induit, avec $x = y$, que $x|p$. Comme $x = p$ contredit l'égalité, on a $x = y = 1$, puis $z = \frac{p-1}{4}$ (ce qui est possible car on a justement supposé que $p = 1$ [4]). Il y a un seul point fixe : $(1, 1, \frac{p-1}{4})$.

Reste à montrer que g est une involution. On constate que si $x < y - z$, alors $g(x, y, z) = (a, b, c)$ vérifie $a > 2b$, ainsi :

$$g \circ g \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

De la même manière, si $x > 2y$, alors $g(x, y, z) = (a, b, c)$ vérifie $a < c - b$ et l'inverse du calcul précédent permet de conclure. Enfin, le cas central est stabilisé par g et on a $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Finalement, le seul point fixe de l'involution g est $(1, 1, \frac{p-1}{4})$, et on en déduit que $\#\mathcal{S}$ est impair, comme désiré tout nombre premier $p = 1$ [4] s'écrit comme la somme de deux carrés.

19.20 Matrices, Déterminants

Exercise 19.39 (Déterminants de Hankel)**.** Soit $(b_n)_n$ une suite de réels. On construit sa transformée de Hankel $(h_n)_n$ par :

$$h_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n+1} \\ b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_{n+1} & b_{n+2} & \dots & b_{2n} \end{vmatrix}$$

Montrez qu'une suite est nulle si et seulement si sa transformée de Hankel est nulle.

Montrez qu'une suite vérifie une relation de récurrence si et seulement si sa transformée de Hankel est nulle à partir d'un certain rang.

Montrez que la transformée de Hankel est invariante par la transformation d'Euler, c'est-à-dire que la transformée de Hankel de $(c_n)_n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$, est la même que celle de $(b_n)_n$ (on pourra utiliser la matrice $B = \left[\binom{j-1}{i-1}\right]_{i,j}$).

Exercise 19.40 (*Solution*)**.** Si $(b_n)_n$ est nulle à partir d'un certain rang p, alors le déterminant de h_n, pour $n \geq p$, contient une colonne nulle $\begin{pmatrix} b_p \\ \vdots \\ b_{n+p} \end{pmatrix} = \vec{0}$.
Réciproquement, si h_n est **entièrement** nulle, alors on a $b_0 = h_0 = 0$, puis, par récurrence, si $b_k = 0$ pour tout $k \leq n-1$, alors on a (regarder les permutations dont le produit ne donne pas 0) :

$$0 = h_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & b_n \\ 0 & 0 & ... & b_n & b_{n+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & b_n & ... & b_{2n-2} & b_{2n-1} \\ b_n & b_{n+1} & ... & b_{2n-1} & b_{2n} \end{vmatrix} = b_n^n$$

Ainsi, par récurrence, on a $b_n = 0$ pour tout n.

Si $(b_n)_n$ respecte une relation de récurrence, disons $b_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k b_{n+k}$ pour tout n, alors, à partir de $n = p$, la p-ième colonne du déterminant de h_n peut s'écrire comme une combinaison linéaire des colonnes précédentes, donc le déterminant est nul :

$$\begin{pmatrix} b_p \\ \vdots \\ b_{n+p} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k \begin{pmatrix} b_k \\ \vdots \\ b_{k+p} \end{pmatrix}$$

Réciproquement, si $(h_n)_n$ est nul à partir d'un certain rang p, cela signifie en particulier que les colonnes de h_p sont liées. Comme celle de h_{p-1} ne le sont pas on peut trouver $(\alpha_k)_k$ tels que $b_{p+n} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k b_{n+k}$ pour $n \leq p$. on va montrer que cette égalité est vraie pour tout n. Supposons que cette égalité est vrai pour tout $n \leq N+p-1$, alors on regarde h_N. La dernière colonne, C_N, est combinaison linéaire des précédentes, disons $C_N = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k C_k$. En particulier, on a l'expression :

$$b_{N+p} = \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k b_{k+p} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\beta_k \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j b_{k+j} \right) = \sum_{j=0}^{p-1} \left(\alpha_j \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k b_{k+j} \right) = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j b_{N+j}$$

On a bien la relation de récurrence pour à tous les rangs.

Posons $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$. Pour n fixé, on note H_b la matrice de Hankel pour $(b_k)_k$ au rang n, i.e. $h_n = \det H_b$, et pareillement pour H_c. On pose $B = \left[\binom{j-1}{i-1} \right]_{i,j}$ la matrice triangulaire supérieure du triangle de Pascal (on adopte la convention usuelle : $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$). On notera que $\det B = 1$ car les coefficients diagonaux valent tous 1. On va montrer que : $H_c = B H_b B^T$. Commençons par remarquer que : $\binom{i+j}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{i}{l} \binom{j}{k-l}$ car choisir k éléments parmi $i+j$ revient à choisir l éléments parmi les i premiers, puis $k-l$ parmi les j derniers pour n'importe quel valeur de l possible. Dès lors, on a :

$$\begin{aligned} BH_bB^T &= \left[\sum_{k,l=1}^{n+1}\binom{i-1}{k-1}b_{k+l-2}\binom{j-1}{l-1}\right]_{1\leq i,j\leq n+1} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{2n}b_k\sum_{l=1}^{n+1}\binom{j-1}{l-1}\binom{i-1}{k-l+1}\right]_{1\leq i,j\leq n+1} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{2n}b_k\binom{i+j-2}{k}\right]_{1\leq i,j\leq n+1} \\ &= [c_{i+j-2}]_{1\leq i,j\leq n+1} = H_c \end{aligned}$$

Finalement, en passant au déterminant des deux côtés, en utilisant le fait que le déterminant est multiplicatif, puis que $\det B = \det B^T = 1$, on a que la transformée de Hankel est invariante par la transformation d'Euler.

19.21 Matrices, Déterminants

Exercise 19.41. Soit A une matrice de taille $m\times n$ et B de taille $n\times m$. On note $A_{I,J}$ la matrice constitué des lignes de A dont les indices sont dans I et des colonnes dont les indices sont dans J. Montrez que :

$$\det(AB) = \sum_{\#S=m}\det(A_{[1,m],S})\det(B_{S,[1,m]})$$

19.22 Matrices, Déterminants

Exercise 19.42. Déterminant de Sylvester.
Déterminant de Cauchy / de Hilbert.
Déterminant circulant.

19.23 Matrices, Déterminants

Exercise 19.43 (Coordonnées et relation de Plücker)**.** Pour $M\in\mathcal{M}_{2,k}(\mathbb{R})$, on définit la coordonnée $p_{i,j}$ de Plücker, par $p_{i,j} = \begin{vmatrix} m_{1i} & m_{1j} \\ m_{2i} & m_{2j}\end{vmatrix}$ ($p_{i,i} = m_{1i}$). Montrez que ces coordonnées introduisent une injection des plans de $\mathbb{R}^k$ dans les droites de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$. Pour $i<j<k<l$, montrez que : $p_{i,k}p_{j,l}+p_{i,l}p_{j,k} = -p_{i,j}p_{j,k}$. En déduire que ce n'est pas une bijection.

Exercise 19.44 (*Solution*)**.** Un plan de $\mathbb{R}^k$ est défini par la donnée de deux vecteurs non-colinéaires, disons $\vec{u}$, $\vec{v}$. On peut construire la matrice M dont la première ligne est les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base canonique, et la deuxième ligne de M est les coordonnées de $\vec{v}$. On calcule les coordonnées de Plücker $(p_{i,j})_{1\leq i<j\leq k}$. Il y a $\frac{k(k-1)}{2}$ coordonnées de Plücker, notons $\mathbf{p}(\vec{u},\vec{v})$ ce vecteur de

$\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$. Maintenant, si on prend une autre base du même plan, disons $(\vec{u'}, \vec{v'})$, il existe une matrice de transition $A \in \mathcal{M}_{2,2}$ inversible telle que $\begin{pmatrix} \vec{u'} \\ \vec{v'} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$. Donc la nouvelle matrice de cette base est $M' = AM$. Les coordonnées de Plücker issues de cette nouvelle matrice valent $p'_{i,j} = \det \left(A \times \begin{bmatrix} m_{1,i} & m_{1,j} \\ m_{2,i} & m_{2,j} \end{bmatrix} \right) = \det A \times p_{i,j}$. Donc tous paramétrage d'un même plan donnent les mêmes coordonnées de Plücker à une constante (multiplicative) près.

En outre, pour un plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^k$, et une base $(\vec{u}, \vec{v})$, il n'est pas possible que tous les $p_{i,j}(\vec{u}, \vec{v})$ soient nuls. En effet, dans le cas contraire, pour tout $i < j$, les vecteurs (de $\mathbb{R}^2$) (u_i, v_i) et (u_j, v_j) seraient colinéaires car $0 = p_{i,j}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}$. En particulier, au moins l'un des (u_i, v_i) est non nul (sinon $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$), disons $v_1 \neq 0$. Alors, $\forall i$, $\frac{u_i}{v_i} = \frac{u_1}{v_1}$, ce qui est exactement la condition pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires : c'est impossible car $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathcal{P}$ est un plan.

Ainsi, pour un plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^k$, on peut construire l'ensemble de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$: $\mathbf{p}(\mathcal{P}) = \{\mathbf{p}(\vec{u}, \vec{v}) \; ; \; \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \mathcal{P}\}$. Le raisonnement précédent montre que $\mathbf{p}(\mathcal{P})$ est une droite de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

On va montrer que cette application est injective. Pour ce faire, soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^k$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathcal{P}$. Supposons qu'on connaît $\mathbf{p}(\vec{u}, \vec{v})$, on va prouver qu'on peut retrouver $\mathcal{P}$. Par le raisonnement précédent, on sait qu'au moins l'un des $p_{i,j}(\vec{u}, \vec{v})$ est non nul, disons $p_{I,J}(\vec{u}, \vec{v})$. La matrice $A = \begin{bmatrix} u_I & u_J \\ v_I & v_J \end{bmatrix}$ est inversible (sont déterminant est $p_{I,J}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$). Par suite, la matrice $AM = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}$ donne à nouveau une base $(\vec{x}, \vec{y})$ de $\mathcal{P}$, mais cette fois la colonne I de AM est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et sa colonne J est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dès lors, $p_{I,j}(\vec{x}, \vec{y}) = 1 \times y_j - 0 \times x_j = y_j$, et $p_{i,J}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \times y_i - 1 \times x_i = -x_i$, donc, comme on connaît toutes les coordonnées de Plücker $\mathbf{p}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathbf{p}(\vec{u}, \vec{v})$, on connaît toute la matrice AM, donc on connaît une base de $\mathcal{P}$: on connaît $\mathcal{P}$. Ainsi, l'application $\mathcal{P} \mapsto \mathbf{p}(\mathcal{P})$ est une application injective de l'ensemble des plans de $\mathbb{R}^k$ vers l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$. Notons que si on dispose de $\mathbf{p}(\mathcal{P})$, on peut construire une base "canonique" de $\mathcal{P}$. On prends le plus petit J tel que $p_{1,J}(\mathcal{P}) \neq 0$, et les deux lignes de la matrice suivante donne une base de $\mathcal{P}$ (attention à l'ordre dans les indices) :

$$\frac{1}{p_{1,J}} \begin{pmatrix} p_{1,J} & p_{2,J} & p_{3,J} & \ldots & p_{J-1,J} & 0 & -p_{J+1,J} & -p_{J+2,J} & \ldots & -p_{k,J} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & p_{1,J} & p_{1,J+1} & p_{1,J+2} & \ldots & p_{1,k} \end{pmatrix}$$

Prenons 4 indices différents : $i < j < k < l$. Alors on peut regarder la matrice suivante :

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} m_{1,i} & m_{1,k} & m_{1,k} & m_{1,j} \\ m_{2,i} & m_{2,k} & m_{2,k} & m_{2,j} \\ \hline m_{1,i} & m_{1,l} & m_{1,j} & m_{1,l} \\ m_{2,i} & m_{2,l} & m_{2,j} & m_{2,l} \end{array} \right)$$

On peut calculer le déterminant de M par blocs :

$$\begin{aligned}
\det M &= \begin{vmatrix} m_{1,i} & m_{1,k} \\ m_{2,i} & m_{2,k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{1,j} & m_{1,l} \\ m_{2,j} & m_{2,l} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m_{1,k} & m_{1,j} \\ m_{2,k} & m_{2,j} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{1,i} & m_{1,l} \\ m_{2,i} & m_{2,l} \end{vmatrix} \\
&= p_{i,k} \qquad p_{j,l} + \begin{vmatrix} m_{1,j} & m_{1,k} \\ m_{2,j} & m_{2,k} \end{vmatrix} \qquad p_{i,l} \\
&= p_{i,k} \qquad p_{j,l} + p_{j,k} \qquad p_{i,l}
\end{aligned}$$

D'autre part, si on échange les deux colonnes centrales de M, le déterminant de cette nouvelle matrice est $-\det M$, et on a ainsi, toujours avec un déterminant par blocs :

$$-\det M = \left| \begin{array}{cc|cc} m_{1,i} & m_{1,k} & m_{1,k} & m_{1,j} \\ m_{2,i} & m_{2,k} & m_{2,k} & m_{2,j} \\ \hline m_{1,i} & m_{1,j} & m_{1,l} & m_{1,l} \\ m_{2,i} & m_{2,j} & m_{2,l} & m_{2,l} \end{array} \right| = p_{i,k} \times 0 - p_{i,j}(-p_{j,k}) = p_{i,j}p_{j,k}$$

On obtient la relation souhaitée.

Il s'ensuit que si le vecteur directeur d'une droite de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$ ne respecte pas ces égalités (il y a autant d'égalités que de quadruplets), alors il ne peut pas s'agir des coordonnées de Plücker d'un plan de $\mathbb{R}^k$: l'application $\mathcal{P} \mapsto \mathbf{p}(\mathcal{P})$ n'est pas une bijection.

<u>**N.B. :**</u> Par contre, ce qui est vrai, est bien plus difficile à montrer, c'est que toute droite de $\mathbb{R}^{\frac{k(k-1)}{2}}$ qui respecte les relations de Plücker ci-dessus est bien de la forme $\mathbf{p}(\mathcal{P})$. L'application de Plücker $\mathcal{P} \mapsto \mathbf{p}(\mathcal{P})$ donne plein d'informations très importantes sur la grassmannienne $\mathbf{Gr}(2,k)$, l'ensemble des plans de $\mathbb{R}^k$, et se généralise pour l'étude de la grassmannienne $\mathbf{Gr}(n,k)$, l'ensemble des sous-espaces de dimension n de $\mathbb{R}^k$.

19.24 Matrices, Déterminants

Exercise 19.45. Soit $n+1$ "rayons" $\vec{r}_0, ..., \vec{r}_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $(\vec{r}_0, ..., \vec{r}_{n-1})$ soit libre et $\vec{r}_n \neq \vec{0}$. On choisit des "hauteurs" $h_0, ..., h_{n-1} \in \mathbb{R}_+^*$ et on construit l'hyperplan affine $H_{\mathbf{r}}$ qui passe par les points $h_0\vec{r}_0, ..., h_{n-1}\vec{r}_{n-1}$. Déterminez h_n tel que le point $h_n\vec{r}_n$ soit dans $H_{\mathbf{r}}$.

Exercise 19.46 (*Solution*)**.** Premièrement, comme $(\vec{r}_0, ..., \vec{r}_{n-1})$ est libre, c'est une base de $\mathbb{R}^n$, donc on peut trouver des coordonnées $x_0, ..., x_{n-1}$ telles que $\vec{r}_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\vec{r}_k$. Ensuite, l'hyperplan $H_{\mathbf{r}}$ est l'hyperplan affine contenant le point $r_0\vec{r}_0$ et les vecteurs $h_i\vec{r}_i - h_0\vec{r}_0$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$. Ces derniers forment une famille libre car la famille des $(h_i\vec{r}_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]}$ est libre (les h_i étant non nuls) et ajouter $-h_0\vec{r}_0$ revient à faire une translation (qui n'envoie aucun des vecteurs sur $\vec{0}$), donc préserve la liberté. Ainsi :

$$H_{\mathbf{r}} = h_0\vec{r}_0 + \mathrm{Vect}\left(h_i\vec{r}_i - h_0\vec{r}_0\right)_{i\in[\![1,n-1]\!]}$$

Dès lors, chercher h_n tel que $h_n\vec{r}_n \in H_\diagdown$ revient à cherche h_n et $(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$ tels que :

$$h_n\vec{r}_n - h_0\vec{r}_0 = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \left(h_k\vec{r}_k - h_0\vec{r}_0\right)$$

En utilisant $\vec{r}_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k\vec{r}_k$, on peut écrire le système sous forme matriciel dans la base $(\vec{r}_0, ..., \vec{r}_{n-1})$.

Sur $\vec{r}_i$, $i \neq 0$, on a l'équation :

$$h_n x_i = \alpha_i h_i \qquad \text{soit} \qquad -\alpha_i h_i + h_n x_i = 0$$

Sur $\vec{r}_0$, on a l'équation :

$$h_n x_0 - h_0 = -h_0 \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \qquad \text{soit} \qquad h_0 \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k + h_n x_0 = h_0$$

On peut donc représenter le système par l'équation matricielle (rappel : h_n et α_i sont les variables, h_i et x_i sont les paramètres) :

$$\begin{pmatrix} -h_1 & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -h_{n-1} & x_{n-1} \\ h_0 & ... & h_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_0 \end{pmatrix}$$

On cherche seulement h_n. Nul besoin d'inverser toute la matrice du système.

Notons $M = \begin{pmatrix} -h_1 & & & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & -h_{n-1} & x_{n-1} \\ h_0 & ... & h_0 & x_0 \end{pmatrix}$. Alors on veut la dernière ligne de $\frac{1}{\det M}\left(\mathrm{com} M\right)^T \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_0 \end{pmatrix}$. Pour ce faire, on a seulement besoin du déterminant de M et de la cellule en bas à droite de com$M$ (qui est la même que se transposée). Or la cellule en bas à droite de la comatrice vaut $+\begin{vmatrix} -h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -h_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} h_i$. Reste à calculer le déterminant. Regardons les permutations qui ne donnent pas 0 dans la somme qui définit ce déterminant. Il y a la permutation identité qui donne $+(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} h_i \times x_0$, et les seules autres sont les transposition (jn) pour $j \neq n$ qui donnent $-(-1)^{n-2}\prod_{i\neq j}^{1\leq i\leq n-1} h_i \times h_0 x_j$. Le déterminant $\det M$ vaut donc la somme de ces n termes.

Effectuons le calcul final :

$$h_n = \frac{1}{\det M}(-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1} h_i \times h_0 = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} h_i}{x_0 \prod_{i=1}^{n-1} h_i + \sum_{j=1}^{n-1} x_j \prod_{i\neq j} h_i} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} x_j/h_j}$$

On préférera bien sûr écrire : $\frac{1}{h_n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j}{h_j}$.

N.B. : Cette relation suggère qu'il existe un autre point de vu plus adapté dans lequel les $\frac{1}{h_i}$ sont des nombres qui font sens. C'est en effet le cas, il s'agit du "point de vue dual" : au lieu de considérer les points $h_i\vec{r_i}$ et l'hyperplan qu'ils induisent, on construit les hyperplans affines $H_i = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \langle \vec{x} | \vec{r_i} \rangle = h_i\}$, l'intersection $\bigcap_{i=0}^{n-1} H_i$ est un unique point $P \in \mathbb{R}^n$, et on se demande ce que doit valoir h_n pour que $P \in H_n$.

19.25 Matrices, Théorie des groupes

Exercise 19.47 (Groupe d'Heisenberg)**.** Pour un anneau A, on construit $H_3(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ a, b, c \in A \right\}$. On notera $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par (a, b, c). En supposant $(A, +)$ commutatif, montrez que $H_3(A)$ est un groupe multiplicatif avec $(a, b, c) * (a', b,', c') = (a + a', b + b', c + c' + ab')$, puis déterminez $(a, b, c)^{-1}$ et $(a, b, c)^n$. Pour $x, y \in H_3(A)$, calculez $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

En déduire le centre $Z(H_3(A)) = \{x \in H_3(A) \ ; \ \forall y \in H_3(A), \ xy = yx\}$, et le groupe dérivé $DG(H_3(A)) = \langle \ [x, y] \ ; \ x, y \in H_3(A) \ \rangle$. À quelle condition $H_3(A)$ est-il abélien ?

Montrez que $H_3(\mathbb{Z})$ est engendré par $(1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Exercise 19.48 (*Solution*)**.** $H_3(A)$ est un sous-groupe du groupe $GL_3(A)$ car le produit de matrice triangulaires est triangulaire, l'inverse aussi, et la diagonale du produit vaut le produit des diagonales (donc la diagonale du produit est faite de 1, tout comme celle de l'inverse).

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a' & c' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + a' & c + c' + ab' \\ 0 & 1 & b + b' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a+a', b+', c+c'+ab')$$

Ensuite, $(a, b, c)(-a, -b, - + ab) = (0, 0, 0) = I_3$, et, par récurrence immédiate $(a, b, c)^n = (na, nb, nc + \frac{n(n-1)}{2}ab)$.

Ensuite, en notant $x = (a, b, c)$ et $y = (a', b', c')$, on trouve :

$$\begin{aligned}
[x, y] &= (a, b, c)(a', b', c')(-a, -b, -c + ab)(-a', -b', -c' + a'b') \\
&= (a + a', b + b', c + c' + ab')(-a - a', -b - b', -c - c' + ab + a'b' + ab') \\
&= (0, 0, ab + a'b' + 2ab' - (a + a')(b + b')) \\
&= (0, 0, ab' - a'b)
\end{aligned}$$

Le centre $Z(H_3(A))$ correspond aux éléments $x \in H_3(A)$ tel que $\forall y \in H_3(A), \ [x, y] = (0, 0, 0)$. En particulier, si $x = (a, b, c)$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 = [x, (0, 1, 0)] & = a \\ 0 = [x, (-1, 0, 0)] & = b \end{array} \right.$$

Donc $x = (0,0,c)$. Réciproquement, si $x = (0,0,c)$, alors pour tout $y \in H_3(A)$, on a bien $[x,y] = (0,0,0)$. Finalement $Z(H_3(A)) = 0 \times 0 \times A \simeq A$ (attention, pour dire que cela est isomorphe à A, il faut vérifier que la loi est la bonne).

D'autre part, si $x, y \in H_3(A)$, alors $[x,y] \in 0 \times 0 \times A$, donc $DG(H_3(A)) \subseteq 0 \times 0 \times A$. Réciproquement, pour $c \in A$, on a $[(c,0,0),(0,1,0)] = (0,0,c)$, donc $DG(H_3(A)) = 0 \times 0 \times A \simeq A$.

Un groupe G est abélien si et seulement si $Z(G) = G$ si et seulement si $DG(G) = 0$. Donc $H_3(A)$ est abélien si et seulement si $A = 0$ (l'anneau trivial).

Dans $H_3(\mathbb{Z})$, remarquons que $[(1,0,0),(0,1,0)] = (0,0,1)$, que $(1,0,0)^{-1} = (-1,0,0)$ et que $(0,1,0)^{-1} = (0,-1,0)$. De fait, pour $a, b, c \in \mathbb{Z}$, on a : $(1,0,0)^a(0,1,0)^b = (a,0,0)(0,b,0) = (a,b,ab)$. Dès lors (rappel : $H_3(\mathbb{Z})$ n'est pas commutatif) :

$$\begin{aligned}
(a,b,c) &= (1,0,0)^a(0,1,0)^b(0,0,1)^{-ab}\\
&= (1,0,0)^a(0,1,0)^b[(1,0,0),(0,1,0)]^{-ab}\\
&= (1,0,0)^a(0,1,0)^b\left((0,1,0)(1,0,0)(0,1,0)^{-1}(1,0,0)^{-1}\right)^{ab}
\end{aligned}$$

Finalement, $H_3(\mathbb{Z}) = \left\langle \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \right\rangle$, engendré comme groupe.

20 Polynômes

20.1 Polynômes

Exercise 20.1. Résoudre $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

On commencera par trouver des solutions évidentes, ainsi qu'une structure sur l'ensemble des solutions. Ensuite, on résoudra en supposant que toute solution (de degré > 0) s'annule en 0. Enfin, on montrera que $P(0) = 0$ en s'intéressant à $X^nP(X)\overline{P}(\frac{1}{X})$.

Résoudre $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$

Exercise 20.2 (*Solution*)**.** Les polynômes de la forme $P = \lambda X^n$ avec $\lambda \in \mathbb{U}$ sont des solutions évidentes au problème. On va montrer que ce sont les seules.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynômes qui vérifient $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. $\mathcal{S}$ est stable par composition car c'est un sous-ensemble des applications de $\mathbb{U}$ sur lui-même. Il est aussi stable par multiplication des polynômes.

Si on suppose que tous les éléments de $\mathcal{S}$ s'annulent en 0, alors on peut raisonner par récurrence. Soit $P \in \mathcal{S}$ de degré non nul, alors P s'annule en 0 par hypothèse. Soit Q tel que $P = XQ$. Soit $\lambda \in \mathbb{U}$, alors $Q(\lambda) = {}^{P(\lambda)}/_{\lambda} \in \mathbb{U}$, donc $Q \in \mathcal{S}$ avec $\deg Q = \deg P - 1$. Il suffit maintenant de trouver les polynômes constants de $\mathcal{S}$. Il est évident que si $P \in \mathcal{S}$ est constant, alors cette constante est un λ de $\mathbb{U}$. Ainsi, si tous les polynômes non constants de $\mathcal{S}$ s'annulent en 0, alors :

$$\mathcal{S} = \{\lambda X^n ; \lambda \in \mathbb{U}, n \in \mathbb{N}\}$$

Montrons maintenant que tous les polynômes non constants de $\mathcal{S}$ s'annulent en 0. Soit $P \in \mathcal{S}$ de degré n. On pose $Q = X^n P(X)\overline{P}(\frac{1}{X})$. Contrairement à ce qu'il semble, Q est un polynôme (le X^n contrebalance le $\overline{P}(\frac{1}{X})$). Or si $z \in \mathbb{U}$, on a : $\overline{P}(\frac{1}{z}) = \overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$, donc $P(z)\overline{P}(\frac{1}{z}) = P(z)\overline{P(z)} = |P(z)|^2 = 1$ car $P(z) \in \mathbb{U}$. Finalement, $Q(z) = z^n \times 1$, et Q coïncide avec X^n sur $\mathbb{U}$. De fait (comme $\mathbb{U}$ est infini), $Q = X^n$ sur $\mathbb{C}$, et on a $\forall z \in \mathbb{C}, P(z)\overline{P}(\frac{1}{z}) = 1$. On va utiliser cette égalité sur $\mathbb{R}$. Comme P est continue et diverge en $+\infty$, en faisant tendre $z \to 0$ (dans $\mathbb{R}$), on obtient que $P(0) = 0$ (sans quoi on aurait $\pm\infty \times P(0) = 1$). On a bien montré ce qu'on voulait.

Si $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$, on a en particulier l'inclusion, donc $P \in \mathcal{S}$. Or toutes les fonctions **non constantes** de $\mathcal{S}$ sont bijectives sur $\mathbb{U}$, donc :

$$P(\mathbb{U}) = \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{U}, \underline{n \in \mathbb{N}^*}, P = \lambda X^n$$

20.2 Polynômes

Exercise 20.3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système : $x + y + z = a$ et $xyz = b$ et $|x| = |y| = |z|$. Appliquez avec $a = b = 1$.

Exercise 20.4 (*Solution*)**.** On va résoudre le système plus général :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xyz = b \\ |x| = |y| = |z| \end{cases}$$

Avec $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Commençons par remarquer que la deuxième ligne donne $|xyz| = |b|$, d'après la troisième ligne, on obtient $|x|^3 = |b|$. On note $d = \sqrt[3]{|b|}$ pour plus de commodité, et on a : $|x| = |y| = |z| = d$. On cherche à exprimer $xy + yz + zx$ afin d'avoir toutes les fonctions symétriques élémentaires et de pouvoir dire de quel polynôme (de degré 3) x, y et z sont les racines.

On a : $xy + yz + zx = xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$. On peut noter $x = d\lambda$, $y = d\mu$ et $z = d\nu$ avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{U}$. On obtient :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{d}\left(\overline{\lambda} + \overline{\mu} + \overline{\nu}\right) = \frac{1}{d^2}(\overline{x + y + z}) = \frac{\overline{a}}{d^2}$$

Finalement, on trouve : $xy + yz + zx = \frac{\overline{a}b}{d^2}$, et x, y et z sont les 3 racines de $X^3 - aX^2 + \frac{\overline{a}b}{d^2}X - b$. Il est possible de résoudre cette équation en toute généralité, cependant, on se limitera à $a = b = 1$. Dans ce cas, on cherche les racines de : $P = X^3 - X^2 + X - 1$.

1 est racine évidente de P. On en déduit la factorisation : $P = (X-1)(X^2 + 1)$. Finalement : $\{x, y, z\} = \{1, i, -i\}$ (on prendra le temps de vérifier que cette solution fonctionne).

20.3 Polynômes

Exercise 20.5 (Lemme de Thom)**.** Soit $\mathcal{F}$ une famille de polynômes réels stable par dérivation et $(\varepsilon_P)_{P\in\mathcal{F}} \in \{-1, 0, +1\}^{\mathcal{F}}$ fixé. On note $E_P = \{x \in \mathbb{R}; P(x)$ est du signe de $\varepsilon_P\}$. Montrez que $E_{\mathcal{F}} = \bigcap_{P\in\mathcal{F}} E_P$ est un intervalle.

Exercise 20.6 (*Solution*)**.** On peut raisonner par récurrence sur le degré maximal des polynômes dans $\mathcal{F}$. Supposons que $E_{\mathcal{F}}$ est in intervalle pour toute famille $\mathcal{F}$ telle que $\forall P \in \mathcal{F},\ \deg P \leq n$ (n fixé).

Soit $\mathcal{F}$ une famille telle que $\forall P \in \mathcal{F},\ \deg P \leq n+1$. On pose $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ la sous-famille des polynômes de degré exactement $n+1$. Par hypothèse de récurrence, $E_{\mathcal{F}\backslash\mathcal{G}}$ est un intervalle. Soient $x, y \in E_{\mathcal{F}\backslash\mathcal{G}}$ $(x \neq y)$. Soit $z \in]x, y[$ et $P \in \mathcal{G}$. Si $P(z)$ n'est pas du signe de ε_P (qui est le signe de $P(x)$ et de $P(y)$), alors P n'est pas monotone sur $[x, y]$: **faire un dessin**. Dès lors, en dérivant, P' n'est pas de signe constant sur $[x, y]$. Cependant, $P' \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{G}$ car la famille est stable par dérivation, mais comme $[x, y] \subset E_{\mathcal{F}\backslash\mathcal{G}}$ qui est un intervalle, P' ne change pas de signe sur $[x, y]$. Cette contradiction montre que $E_P \cap E_{\mathcal{F}\backslash\mathcal{G}}$ est un intervalle, et on a :

$$E_{\mathcal{F}} = \bigcap_{P\in\mathcal{G}} E_{\{P\}\cup(\mathcal{F}\backslash\mathcal{G})} = \bigcap_{P\in\mathcal{G}} \left(E_P \cap E_{\mathcal{F}\backslash\mathcal{G}}\right)$$

Finalement, $E_{\mathcal{F}}$ est bien un intervalle.

Par récurrence, pour toute famille $\mathcal{F}$ (même infinie) de polynômes, et tout ensemble de signes $(\varepsilon_P)_{P\in\mathcal{F}}$, l'ensemble $E_{\mathcal{F}}$ est un intervalle.

20.4 Polynômes

Exercise 20.7 (Croisement de Ghys)**.** Soit P un polynôme qui s'annule en 0. Montrez que si $val(P)$ est paire, alors P est du même signe à gauche et à droite de 0. Trouvez deux polynômes P et Q tels que $P < Q$ avant 0 et $P < Q$ après 0. Idem avec $P < Q$ avant et $P > Q$ après. Même question avec les 6 possibilités pour 3 polynômes. Pour 4 polynômes, montrez qu'il n'est pas possible que $P_4 < P_3 < P_2 < P_1$ avant 0 et $P_3 < P_1 < P_4 < P_2$ après.

Exercise 20.8 (*Solution*)**.** On trouvera la solution ici.

20.5 Polynômes

Exercise 20.9. Soit d fixé et deux familles de $d+1$ complexes $(f_i)_i$ et $(h_j)_j$. On pose $f(X) = \sum_i f_i X^i$ et $h(X) = \sum_j h_j X^j$. Montrez que ($\binom{b}{a}$ sont pris nuls si $a > b$) : $\forall i, f_i = \sum_{j=0}^{d} \binom{i}{j} h_j \iff f(X) = h(X+1)$

En déduire l'expression des h_j en fonction des f_i quand $\forall i, f_i = \sum_{j=0}^{d} \binom{i}{j} h_j$.

Exercise 20.10 (*Solution*)**.** Supposons le membre de gauche vérifié, alors :

$$f(X) = \sum_i \sum_j \binom{j}{i} h_j X^i = \sum_j h_j \sum_i \binom{j}{i} X^i = \sum_j h_j (X+1)^j = h(X+1)$$

Réciproquement, si $f(X)=h(X+1)$, alors on a $f(X)=\sum_i\left(\sum_j\binom{j}{i}h_j\right)X^i$, donc en identifiant les coefficients, on retrouve l'égalité souhaitée.

Si on a l'égalité de gauche, alors on a $f(X)=h(X+1)$, donc $h(X)=f(X-1)$, puis en développant :

$$h(X)=\sum_i f_i(X-1)^i=\sum_i\sum_j(-1)^j\binom{i}{j}f_i(-X)^j=\sum_j\left(\sum_i(-1)^{i+j}\binom{i}{j}f_i\right)X^j$$

En identifiant les coefficients, on trouve que $\forall i, h_i=\sum_i(-1)^{i+j}\binom{i}{j}f_i$.

20.6 Polynômes

Exercise 20.11 (Polynômes de Laguerre)**.** On se donne l'équation différentielle non-linéaire $(E_n): xy''+(1-x)y'+ny=0$. Soit la suite de polynômes définie par $L_n(0)=1$, $L_0=1$ et $XL_n'-n(L_n-L_{n-1})=0$. Montrez que $L_n(X)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}X^k$, puis que L_n est solution de (E_n).

Donnez le coefficient dominant de L_n, son degré et son terme constant.

Montrez que $(E_n): -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xe^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=ne^{-x}y$. Montrez que $L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^n\right)$.

Exercise 20.12 (*Solution*)**.** Posons $a_k^{(n)}=\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}$ et montrons que les coefficients de $XL_n'+nL_n$ et $-nL_{n-1}$ sont les mêmes. On a :

$$\begin{aligned}ka_k^{(n)}+na_k^{(n)}&=\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}(k-n)\\&=\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n-1}{k}\times\frac{n}{n-k}\times(k-n)\\&=a_k^{(n-1)}\end{aligned}$$

Donc on a bien : $L_n=\sum_{k=0}^n a_k^{(n)}X^k$.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}nL_n&=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}nX^k\\(1-X)L_n'&=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\frac{-(-1)^k}{k!}X^k-\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}X^k\\XL_n''&=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k+1}\frac{-(-1)^k}{(k-1)!}X^k\end{aligned}$$

Puis, en sommant, on obtient le coefficient sur X^k :

$$\begin{cases}k\notin\{0,n\}, & \binom{n}{k+1}\frac{-(-1)^k}{k!}(k+1)+\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}(n-k) & =0\\ k=0, & \binom{n}{0}\frac{(-1)^0}{0!}n-\binom{n}{1}\frac{(-1)^0}{0!} & =0\\ k=n, & \binom{n}{n}\frac{(-1)^n}{n!}n-\binom{n}{n}\frac{(-1)^n}{(n-1)!} & =0\end{cases}$$

Ainsi, L_n vérifie bien l'équation (E_n). Le degré de L_n est donc n, son coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!}$ et son terme constant 1.

On note que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xe^{-x}\right) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$. De fait, si y est solution de (E_n), alors :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xe^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = -e^{-x}(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xe^{-x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = +e^{-x}ny$$

Réciproquement, si y vérifie l'égalité, alors en divisant par $e^{-x} \neq 0$, on trouve que y est solution de (E_n).

Ensuite, si on applique la formule de Leibniz, on obtient :

$$\frac{e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^n\right) = \frac{e^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k\left(e^{-x}\right)}{\mathrm{d}x^k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}\left(x^n\right)}{\mathrm{d}x^{n-k}} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\frac{n!}{k!}x^k = L_n(x)$$

20.7 Polynômes

Exercise 20.13 (Polynômes de Bernoulli)**.** On définit $(B_p)_p \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ par : $\sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)\right)$; $B_{2p+1}(0) = 0$ (sauf $B_1(0) \neq 0$).

Montrez que $\forall p, B_p(0) = B_p(1)$ et $\forall p, \forall x \in \mathbb{C}, B_p(1-x) = (-1)^p B_p(x)$.

Exercise 20.14 (*Solution*)**.** Premièrement, on a, pour $n = 0$: $B_p(0+1) - B_p(0) = \sum_{k=0}^{0} k^{p-1} = 0$. D'où $B_p(0) = B_p(1)$.

Ensuite, comme les polynômes $B_p(X+1) - B_p(X)$ et pX^{p-1} coïncident sur un ensemble infini, $\mathbb{N}$, ils sont égaux, et on a en particulier :

$$B_p(n+1) - B_p(-n) = \sum_{k=-n}^{n} B_p(k+1) - B_p(k) = \sum_{k=-n}^{n} pk^{p-1}$$

Si p est pair, alors $p-1$ est impair et la somme de droite et nulle, donc : $\forall n, B_p(n+1) = B_p(-n)$.

Si p est impair, $p-1$ est pair, et on a : $p\sum_{k=-n}^{n} k^{p-1} = 2p\sum_{k=-n}^{0} k^{p-1} = 2(B_p(0) - B_p(-n))$.

Finalement, **si** $B_{2p+1}(0) = 0$**, alors** $B_p(n+1) = (-1)^p B_p(-n)$, et on a l'égalité des polynômes $B_p(1-X)$ et $(-1)^p B_p(X)$ sur un ensemble infini. ce qui induit :

$$\forall x, B_p(1-x) = (-1)^p B_p(x)$$

N.B. : On notera qu'alors : $B_{2p+1}(1/2) = 0$.

20.8 Polynômes

Exercise 20.15 (Polynômes de Bernoulli)**.** On définit $(B_p)_p \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ par : $B_p' = pB_{p-1}$ et $\int_0^1 B_p = 0$ sauf pour $B_0 = 1$.

Montrez qu'il existe une suite $(b_n)_n$ telle que $\forall p, B_p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} b_{p-k} X^k$.

Exercise 20.16 (*Solution*)**.** On pose $b_0 = 1$.

Supposons construits $b_0, ..., b_n$ tels que $\forall p \leq n, B_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_{p-k} X^k$. Le degré de B_{n+1} est $\deg B_n + 1$ car $B'_{n+1} = (n+1)B_n$, on note donc $a_0, ..., a_{n+1}$ ses coefficients : $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k$. Grâce à la formule de récurrence, on obtient ($\neq 0$) :

$$a_k = \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1} b_{n-(k-1)} = \binom{n+1}{k} b_{n+1-k}$$

Ainsi : $B_{n+1} = b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} X^k$. Avec l'égalité intégrale, on trouve :

$$(n+1)b_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k$$

De fait, si une suite $(b_n)_n$ vérifie $\forall p, B_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_{p-k} X^k$, alors elle vérifie $b_0 = 1$ et la récurrence ci-dessus.

Réciproquement, si la suite $(b_n)_n$ vérifie $b_0 = 1$ et la récurrence ci-dessus, alors on a bien $\forall p, B_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_{p-k} X^k$.

20.9 Polynômes

Exercise 20.17 (Polynômes de Bernoulli)**.** On définit $(B_p)_p \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ par : $\sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)\right)$.

Montrez que $B_p(0) = B_p(1)$, ce sont les nombres de Bernoulli, $b_p \in \mathbb{C}$. Montrez que $b_p \in \mathbb{Q}$.

Exercise 20.18 (*Solution*)**.** En évaluant en $n = 0$, on obtient que $B_p(1) = B_p(0)$.

b_p est le coefficient constant de B_p, or en évaluant B_p en 1, 2,..., $N+1$, on obtient un système de $N+1$ équations à coefficients rationnels, dont les inconnues sont les coefficients de B_p. En prenant $N = \deg B_p$, puis en inversant le système, on trouve bien que tous les coefficients de B_p sont rationnels, en et particulier $b_p \in \mathbb{Q}$.

20.10 Polynômes

Exercise 20.19 (Polynômes de Bernoulli)**.** On définit $(B_p)_p \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ par : $\sum_{k=0}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)\right)$; $B'_p(0) = pB_{p-1}(0)$.

Montrez que $\forall p, B'_{p+1} = (p+1)B_p$, puis $\int_0^1 B_p(t)\mathrm{d}t = 0$. Calculez $\sum_{k=0}^{n} k^6$.

Exercise 20.20 (*Solution*)**.** On remarque que $B_p(n+1) - B_p(n) = pn^{n-1}$ pour tout n, donc l'égalité est vraie pour tout x : $B_p(x+1) - B_p(x) = px^{p-1}$. En dérivant, on obtient que :

$$B'_p(x+1) - B'_p(x) = p(p-1)x^{p-2} = p(B_{p-1}(x+1) - B_{p-1}(x))$$

Donc, en effectuant une somme télescopique, on obtient que, pour tout n :

$$B'_p(n+1) - B'_p(0) = p(B_{p-1}(n+1) - B_{p-1}(0))$$

Ce qui donne bien l'égalité des polynômes $B_p = pB_{p-1}$ car on a l'égalité sur un ensemble infini.

Ensuite, $\int_0^1 B_p'(t)\mathrm{d}t = B_p(0+1) - B_p(0) = p \times 0^{p-1} = 0$, donc : $\int_0^1 B_p = 0$.

Enfin, on peut déterminer B_7 par récurrence car on a le coefficient sur X^k dans B_p qui vaut ${}^p/_k$ fois le coefficient de X^{k-1} dans B_{p-1} et l'intégrale qui vaut 0 (donc si $B_p = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k$, alors $\alpha_0 = -\sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k}{k+1}$) :

$$\begin{aligned}
&B_0 = 1\\
&B_1 = X - {}^1/_2\\
&B_2 = X^2 - X + {}^1/_6\\
&B_3 = X^3 - {}^3/_2X^2 + {}^1/_2X\\
&B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - {}^1/_{30}\\
&B_5 = X^5 - {}^5/_2X^4 + {}^5/_3X^3 - {}^1/_6X\\
&B_6 = X^6 - 3X^5 + {}^5/_2X^4 - {}^1/_2X^2 + {}^1/_{42}\\
&B_7 = X^7 - {}^7/_2X^6 + {}^7/_2X^5 - {}^7/_6X^3 + {}^1/_6X
\end{aligned}$$

Ainsi, il s'ensuit que (on peut développer toutes les parenthèse via le binôme de Newton, mais ce n'est pas nécessaire) :

$$\sum_{k=0}^n k^6 = \frac{1}{8}(n+1)^7 - \frac{7}{16}(n+1)^6 + \frac{7}{16}(n+1)^5 - \frac{7}{48}(n+1)^3 + \frac{1}{48}(n+1) \sim \frac{n^7}{8}$$

20.11 Polynômes

Exercise 20.21 (Polynômes de Bernoulli)**.** On définit $(B_p)_p \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}}$ par : $\sum_{k=0}^n k^p = \frac{1}{p+1}\left(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)\right)$ avec $B_0 = 1$ et $B_p(0) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B_k(0)$.

Montrez que $\forall p \in \mathbb{N}, B_p(x+y) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B_k(x) y^{p-k}$.

Exercise 20.22 (*Solution*)**.** Vérifions l'égalité pour $x, y \in \mathbb{N}^2$. Soient $n, m \in \mathbb{N}^2$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
B_p(n+m) &= p\sum_{k=0}^{n+m} k^{p-1} + B_p(0) \\
\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}B_k(n)m^{p-k} &= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\left(k\sum_{j=0}^{n} j^{k-1} + B_k(0)\right)m^{p-k} \\
&= m^p + \sum_{j=0}^{n} p\sum_{k=1}^{p}\binom{p-1}{k-1} j^{k-1}m^{p-k} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}B_k(0)m^{p-k} \\
&= p\sum_{j=0}^{n}(j+m)^{p-1} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}B_k(0)m^{p-k} \\
&= B_p(n+m) - B_p(m) + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}B_k(0)m^{p-k}
\end{aligned}$$

On doit donc montrer la relation pour $n = 0$ (et elle induit la relation pour tous $n \in \mathbb{N}$ et donc pour tout $x \in \mathbb{C}$ car on a l'égalité de deux polynômes sur un ensemble infini) et on aurait terminé. Prouvons cela par récurrence sur m. Cela est vrai pour $m = 0$. Ensuite, posons $Q(m) = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}B_k(0)m^{p-k}$:

$$\begin{aligned}
Q(m+1) - Q(m) &= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}B_k(0)\left((m+1)^{p-k} - m^{p-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}B_k(0)\sum_{j=0}^{p-k-1}\binom{p-k}{j}m^j \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} m^j \sum_{k=0}^{p-j-1}\binom{p}{k}\binom{p-k}{j}B_k(0) \\
&= \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}m^j \sum_{k=0}^{p-j-1}\binom{p-j}{k}B_k(0) \\
&= \binom{p}{p-1}m^{p-1} = pm^{p-1} \\
&= B_p(m+1) - B_p(m)
\end{aligned}$$

On a utilisé la connaissance donné par l'énoncé pour les valeurs en 0. Ainsi, par récurrence, on a bien l'égalité des polynômes Q et B_p. Ainsi, on a l'égalité montré que $\forall n, m, B_p(n+m) = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}B_k(n)m^{p-k}$. Comme on a l'égalité sur un nombre infini de valeurs, les polynômes $B_p(X+m)$ et $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}B_k(X)m^{p-k}$ sont égaux (quel que soit m entier). Donc les polynômes $B_p(x+Y)$ et $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}B_k(n)Y^{p-k}$ sont égaux (quel que soit $x \in \mathbb{C}$). Finalement, on a bien montré l'égalité :

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^2, B_p(x+y) = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}B_k(x)y^{p-k}$$

20.12 Polynômes

Exercise 20.23. Sachant que deux des racines complexes sont inverses l'une de l'autre, factoriser dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ le polynôme $Z^4 - 21Z + 8$.

Exercise 20.24 (*Solution*)**.** D'après le théorème d'Alembert-Gauss, on peut écrire $P = Z^4 - 21Z + 8 = (Z - z_1)(Z - z_2)(Z - z_3)(Z - z_4)$. La condition de l'énoncé donne, disons, $z_1 = \frac{1}{z_2}$. Il en découle que $(Z-z_1)(Z-z_2) = Z^2+aZ+1$ pour un certain $a \in \mathbb{C}$. Dès lors, $z_3z_4 = 8$ car $z_1z_2z_3z_4 = 8$ (le terme constant). D'où $(Z - z_3)(Z - z_4) = Z^2 + bZ + 8$ pour un certain $b \in \mathbb{C}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} Z^4 - 21Z + 8 &= (Z^2 + aZ + 1)(Z^2 + bZ + 8) \\ &= Z^4 + (a + b)Z^3 + (9 + ab)Z^2 + (8a + b)Z + 8 \end{aligned}$$

Identifions les coefficients :

$$\begin{cases} a + b & = 0 \\ 9 + ab & = 0 \\ 8a + b & = -21 \end{cases}$$

Finalement, on trouve $a = -3$ et $b = 3$ (d'ailleurs, l'existence de solutions à ce système prouve que notre polynôme a bien deux racines inverses l'une de l'autre).

Reste à factoriser Z^2-3Z+1 et Z^2+3+8. Avec la méthode du discriminant, on trouve :

$$P = \left(Z - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(Z - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(Z - \frac{-3-i\sqrt{23}}{2}\right)\left(Z - \frac{-3+i\sqrt{23}}{2}\right)$$

L'écriture ci-dessus constitue la factorisation sur $\mathbb{C}$ de $Z^4 - 21Z + 8$, celle sur $\mathbb{R}$ étant donnée par :

$$P = \left(Z - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(Z - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(Z^2 + 3Z + 8\right)$$

20.13 Polynômes

Exercise 20.25. Soit P un polynôme complexe de degré 4. Montrez que les racines de P sont les sommets d'un parallélogramme si et seulement si P' et P''' ont une racine commune.

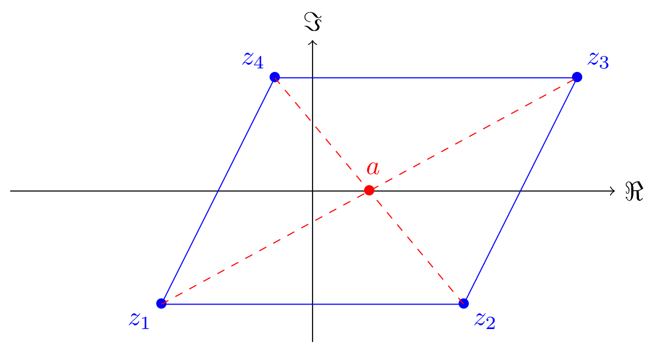
Exercise 20.26 (*Solution*)**.** On peut supposer P unitaire sans perte de généralité (cela ne modifie en rien les racines).

Si les racines z_1, z_2, z_3 et z_4 de P forment un parallélogramme, considérons a, le centre de celui-ci. Posons $Q = P(X+a)$. Via les symétries du parallélogramme, on a, disons, $z_3 = 2a - z_1$ et $z_4 = 2a - z_2$. Dès lors, $Q(-a + z_1) = Q(a - z_1) = Q(-a + z_2) = Q(a - z_2) = 0$. Donc :

$$Q = (X - a + z_1)(X - z_1 + a)(X - a + z_2)(X - z_2 + a)$$

En multipliant deux à deux les parenthèses, on se rend compte que Q est bicarré, donc $P = (X-a)^4 + \alpha(X-a)^2 + \beta$. Il s'ensuit que $P' = 4(X-a)^3 + 2\alpha(X-a)$ et $P''' = 24(X-a)$. a est bien une racine commune de ces deux polynômes.

Réciproquement, si a est une racine commune de P' et P''' (avec P un polynôme unitaire), alors on peut commencer par écrire $P''' = 24(X-a)$. En intégrant deux fois, on a $P' = 4(X-a)^3 + 2\lambda(X-a) + \mu$ pour quelque λ et μ. Ensuite, comme $P'(a) = 0$ par hypothèse, on a $\mu = 0$. Puis $P = (X-a)^4 + \lambda(X-a)^2 + \nu$ pour un certain ν. Le polynôme $Q = P(X+a)$ est bien bicarré : ses racines sont deux à deux opposées, disons que qu'il s'agit de $z_1 - a$, $a - z_1$, $z_2 - a$ et $a - z_2$. Elles forment bien un parallélogramme car on a l'identité : $(z_1 - a) - (z_2 - a) = (a - z_2) - (a - z_1)$ (le fameux $\vec{AB} = \vec{DC}$ de 2nde).



20.14 Polynômes

Exercise 20.27. Trouvez un polynôme de degré 6 à coefficients entiers dont les $\sin\frac{k\pi}{7}$ sont racines pour $k \in \{-3,-2,-1,1,2,3\}$ et en déduire que ces $\sin\frac{k\pi}{7}$ sont tous irrationnels ($\sin 0 = 0$ est rationnel par contre).

Exercise 20.28 (*Solution*)**.** Comme $\sin\frac{-k\pi}{7} = -\sin\frac{k\pi}{7}$, on a :

$$\begin{aligned}
P &= \left(X - \sin\frac{-3\pi}{7}\right)\left(X - \sin\frac{3\pi}{7}\right)\left(X - \sin\frac{-2\pi}{7}\right)\left(X - \sin\frac{2\pi}{7}\right)\left(X - \sin\frac{-\pi}{7}\right)\left(X - \sin\frac{+\pi}{7}\right)\\
&= \left(X^2 - \sin^2\frac{3\pi}{7}\right)\left(X^2 - \sin^2\frac{2\pi}{7}\right)\left(X^2 - \sin^2\frac{1\pi}{7}\right)\\
&= \left(X^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{6\pi}{7}\right)\right)\left(X^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi}{7}\right)\right)\left(X^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{7}\right)\right)\\
&= \frac{1}{8}Q(-2X^2+1)
\end{aligned}$$

Avec $Q = \left(\cos\frac{6\pi}{7} - Y\right)\left(\cos\frac{4\pi}{7} - Y\right)\left(\cos\frac{2\pi}{7} - Y\right)$. Reste à estimer les coefficients $\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}$. Cela se fait via $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ (rappel $\omega^7 = 1$, donc $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -\omega^0 = -1$) :

$$\begin{aligned}\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} &= \frac{1}{8}(\omega+\omega^6)(\omega^3+\omega^4)(\omega^5+\omega^2)\\ &= \frac{1}{8}(\omega^2+\omega^6+\omega^3+1+1+\omega^4+\omega+\omega^5)\\ &= \frac{1}{8}(2-1) = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} &= \frac{1}{4}\left((\omega+\omega^6)(\omega^3+\omega^4)+(\omega+\omega^6)(\omega^5+\omega^2)+(\omega^3+\omega^4)(\omega^5+\omega^2)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(2\omega^4+2\omega^5+2\omega^2+2\omega^3+2\omega^6+2\omega\right) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2}\left((\omega+\omega^6)+(\omega^3+\omega^4)+(\omega^5+\omega^2)\right) = -\frac{1}{2}$$

Finalement :

$$Q = \frac{1}{8}\left(-8Y^3-4Y^2+4Y+1\right)$$

En utilisant $P = \frac{1}{8}Q(-2X+1)$, on trouve (après quelques lignes de calcul) :

$$P = \frac{1}{64}\left(64X^6-112X^4+56X^2-7\right)$$

Finalement, les $\sin\frac{k\pi}{7}$ pour $k \in \{-3,-2,-1,1,2,3\}$ sont les 6 solutions de l'équation (E) $64x^6-112x^4+56x^2-7=0$. Cependant, si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ est solution de cette équation, alors, en multipliant par q^6 :

$$64p^6-112p^4q^2+56p^2q^4-7q^6=0$$

Donc, $p|(-64p^6-112p^4q^2+56p^2q^4) = -7q^6$. En supposant que p et q sont premiers entre eux, on trouve $p|7$, donc $p \in \{\pm1,\pm7\}$. De la même manière, $q|64$, donc $q \in \{1,2,4,8,16,32,64\}$. On sait en outre que $\frac{p}{q} \in]-1,1[$ car on connaît les racines de P : ce sont les $\sin\frac{k\pi}{7}$. Il faut donc tester si les rationnels suivants sont solutions, s'ils ne le sont pas, alors aucune racine de P n'est rationnelle, donc aucun $\sin\frac{k\pi}{7}$ n'est rationnel (sauf $\sin 0 = 0$) :

$$\left\{\frac{\pm1}{2},\frac{\pm1}{4},\frac{\pm1}{8},\frac{\pm1}{16},\frac{\pm1}{32},\frac{\pm1}{64},\frac{\pm7}{8},\frac{\pm7}{16},\frac{\pm7}{32},\frac{\pm7}{64}\right\}$$

Comme P est pair, il suffit de tester simplement les fractions positives ci-dessus. En outre, notons que $112 = 8\times3\times5$ et $56 = 8\times7$, donc si $4|q$, alors $128|(112p^2q^2+56p2q^4-7q^6) = 64p^6$, ce qui n'est pas possible (p est impair), donc $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ est le seul cas qu'il faut véritablement tester numériquement. Une calculatrice donne : $64\times1^6-112\times1^4\times2^2+56\times1^2\times2^4-7\times2^6 = 64 \neq 0$.

P n'ayant pas de racine rationnelle, aucun des $\sin\frac{k\pi}{7}$ n'est rationnel ($k \neq 0$).

20.15 Polynômes

Exercise 20.29. Soit $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Étudiez le polynôme $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\omega_n^k\right)$, en déduire les valeurs de $\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{2}{2-\omega_n^k}\right)$ et, pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque, de $\prod_{k=0}^{n-1}\left(\omega_n^{2k}-2\omega_n^k\cos a+1\right)$.

Exercise 20.30 (*Solution*)**.** Les ω_n^k vérifiant tous $\left(\omega_n^k\right)^n = 1$, et étant au nombre de n, les racines du polynôme X^n-1 sont exactement les ω_n^k : $P = X^n - 1$.

Il s'ensuit, pour $n \neq 1$:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{2}{2-\omega_n^k}\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{4-\omega_n^k}{2-\omega_n^k} = \frac{P(4)}{P(2)} = \frac{4^n-1}{2^n-1} = 2^n+1$$

D'autre part, pour $n \neq 1$ et $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\omega_n^{2k}-2\omega_n^k\cos a+1\right) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{ia}-\omega_n^k\right)\left(e^{-ia}-\omega_n^k\right)\\ &= P\left(e^{ia}\right)P\left(e^{-ia}\right) = \left(e^{ina}-1\right)\left(e^{-ina}-1\right)\\ &= 2-\left(e^{ina}+e^{-ina}\right) = 2\left(1-\cos na\right)\end{aligned}$$

20.16 Polynômes

Exercise 20.31 (Critère d'Eisenstein)**.** On admet le lemme de Gauss : si $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors il l'est dans $\mathbb{Z}[X]$.

Soit p premier et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $a_n = 1$, p^2 ne divise pas a_0, mais $p|a_k$ pour $k \neq n$. Montrez que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. En déduire que $X^2+15X+10$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, puis que $H = X^2+X+2$ aussi (regarder $H(X+3)$), puis que $F = \frac{X^p-1}{X-1}$ aussi (regardez $F(X+1)$) pour p premier.

Exercise 20.32 (*Solution*)**.** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, donc les coefficients sont divisibles par p mais dont le terme constant n'est pas divisible par p^2. Supposons que $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$. D'après le lemme de Gauss, on peut prendre $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$, unitaires. Notons $P = X^n + \sum_k a_k X^k$, $Q = X^m + \sum_k q_k X^k$ et $R = X^l + \sum_k r_k X^k$, on a $a_k = \sum_{i+j=k} q_i r_j$ et $n = m + l$ ($a_n = q_m = r_l = 1$). Comme p^2 ne divise pas $a_0 = q_0 r_0$, alors l'un des deux parmi q_0 et r_0 n'est pas divisible par p (et l'autre l'est), disons $p|q_0$ mais p ne divise pas r_0. Ensuite $a_1 = q_0 r_1 + q_1 r_0$, donc $p|q_1 r_0 = a_1 - q_0 r_1$, puis $p|q_1$. Ensuite $a_2 = q_0 r_2 + q_1 r_1 + q_2 r_0$, donc $p|q_2$, et ainsi de suite : $p|q_i$ pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$.

Sauf que $a_m = q_0 r_m + q_1 r_{m-1} + ... + q_{m-1} r_1 + 1 \times r_0$. Donc $p|1$ par le même argument, c'est une contradiction. Finalement, P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Pour $P = X^2 + 15X + 10$, prenons $p = 5$, on a bien un polynôme unitaire avec p qui divise tous les coefficients sauf le coefficient dominant, et p^2 qui ne divise pas le terme constant : P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Pour $H = X^2+X+2$, on a : $H(X+3) = (X^2+6X+9)+(X+3)+2 = X^2+7X+14$. Donc $p = 7$ garantit que $H(X+3)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Mais si H lui-même était réductible, disons $H = QR$, alors $H(X+3) = Q(X+3)R(X+3)$ est réductible. Donc H est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Pour $F = \frac{X^p-1}{X-1}$ (qui est un polynôme car 1 est racine de $X^p - 1$), on a :

$$F(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} X^k$$

Donc le polynôme est bien unitaire, son terme constant est $\binom{p}{1} = p$ (non-divisible par p^2), et tous ses coefficients sont divisibles par p (c'est un exercice classique) : $F(X+1)$ puis F sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.

20.17 Polynômes

Exercise 20.33. Déterminez les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$ (aucun). Puis ceux tels que $P(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}[X]$). Puis ceux tels que $P(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}[X]$).

Exercise 20.34 (*Solution*)**.** Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est constant, alors il envoie $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si cette constante est réelle. Si P est non constant, alors $P - i$ s'annule sur $\mathbb{C}$ d'après le théorème d'Alembert-Gauss, donc P admet i dans son image : $P(\mathbb{C}) \not\subseteq \mathbb{R}$ (même, $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$).

Tous les polynômes à coefficients réels envoient $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Réciproquement, si P envoie $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(x) = \overline{P(x)} = \overline{P}(x)$$

Donc $P - \overline{P}$ a une infinité de racines : c'est le polynôme nul, $P = \overline{P}$, d'où $P \in \mathbb{R}[X]$.

Si $P \in \mathbb{Q}[X]$, alors $P(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$. Réciproquement, on remarque que les polynômes de Lagrange sont à coefficient rationnels s'ils sont associés à des points rationnels. Fixons $d = \deg P$ et prenons les L_k pour les abscisses $x_k = i$, pour $k \in [\![0, d]\!]$. Alors :

$$P = \sum_{k=0}^{d} P(k) L_k$$

Ce polynôme est bien dans $\mathbb{Q}[X]$ car c'est une somme à coefficients rationnels de polynômes rationnels.

20.18 Polynômes

Exercise 20.35. Posons $P = X^8 + X^7 - X + 3$ de racines $x_1, ..., x_8$. Comptez le nombre de termes dans la somme puis calculer :

$$\sum_{\substack{i,j,k \text{ distincts} \\ j<k}} \frac{x_i}{x_j x_k}$$

Exercise 20.36 (*Solution*)**.** Comme i, j et k doivent être choisis différents, on choisit d'abord i parmi 8 possibilités, puis j et k parmi les 7 restantes, soit $\binom{7}{2} = 21$ choix possibles. En tout, il y a donc $21 \times 8 = 168$ termes dans cette somme.

Posons $\sigma_8 = \prod_{i=1}^{8} x_i$ la fonction symétrique élémentaire du terme constant. Prenons le terme $\frac{x_1}{x_2 x_3}$, il vaut :

$$\frac{x_1}{x_2 x_3} = \frac{x_1^2 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8}{x_1 x_2 ... x_8} = \frac{1}{\sigma_8} x_1^2 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8$$

Ainsi, comme notre somme porte sur tous les i et $j < k$ différents, on peut changer l'indice pour la faire porter sur les i et $a < b < c < d < e$ différents en s'assurant que $\{i, j, k, a, b, c, d, e\} = [\![1, 8]\!]$:

$$S = \sum_{\substack{i,j,k \text{ distincts} \\ j<k}} \frac{x_i}{x_j x_k} = \frac{1}{\sigma_8} \sum_{\substack{i,a,...,e \text{ distincts} \\ a<...<e}} x_i^2 x_a x_b x_c x_d x_e$$

Les produits utilisés ont 7 facteurs, mais notre somme n'est pas σ_7. Cependant, on remarque que ces produits s'obtiennent en multipliant un produit à 6 facteurs par un produit à 1 facteur. Essayons alors de regarder $\sigma_1 \sigma_6$: $\sigma_1 \sigma_6 = (\sum_i x_i) \left(\sum_{a<...<f} x_a x_b x_c x_d x_e x_f \right)$.

Fixons un terme de σ_6, disons $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ et multiplions-le par σ_1. On obtient :

$$\left(x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 + ... + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6^2\right) + \left(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_8\right)$$

On voit apparaître 6 termes de notre somme, mais aussi 2 termes de σ_7.

Si on fait varier le terme de σ_6 choisi, on va récupérer tous les termes de notre somme, ainsi que tous les termes de σ_7. Cependant, on récupère peut-être plusieurs fois les mêmes termes, comptons-les. σ_6 contient $\binom{8}{6} = 28$ termes. Donc on récupère $6 \times 28 = 168$ termes de notre somme (c'est bon), et $2 \times 28 = 56$ termes de σ_7, soit 7 fois trop : chaque terme est récupéré 7 fois (par exemple, $x_1 ... x_7$ est récupéré via $x_1 ... x_6 \times x_7$, mais aussi via $x_1 ... x_5 x_7 \times x_6$, via $x_1 ... x_4 x_6 x_7 \times x_5$, etc). De fait :

$$
\begin{aligned}
\sigma_1\sigma_6 &= \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_{a<\ldots<f} x_a x_b x_c x_d x_e x_f\right) \\
&= \sum_{\substack{i,a,\ldots,e \text{ distincts} \\ a<\ldots<e}} x_i^2 x_a x_b x_c x_d x_e + \sum_{\substack{i,a,\ldots,f \text{ distincts} \\ a<\ldots<f}} x_a x_b x_c x_d x_e x_f x_i \\
&= \sigma_8 S - 7\sigma_7
\end{aligned}
$$

Finalement :

$$
S = \frac{\sigma_1\sigma_6 + 7\sigma_7}{\sigma_8} = \frac{1 \times 0 + 7 \times (-1)}{3} = \frac{-7}{3}
$$

21 Probabilité

21.1 Probabilité, Loi de Bayes

Exercise 21.1. Montrer qu'être *quasi*-certain d'une implication ne donne pas une quasi-certitude sur sa contraposée.

21.2 Probabilité, Loi de Bayes

Exercise 21.2. Curseur de Turing ("à quoi ressemble un musulman ?").

21.3 Probabilité, Loi de Bayes

Exercise 21.3 (Sophisme du procureur)**.** En 1998, Sally Clark (Royaume-Uni) fut accusée d'avoir tué ses deux enfants (de 11 et 8 semaines). Le pédiatre Roy Meadow, appelé à témoin, déclara que la probabilité que les deux enfants aient été tous deux victimes de mort subite était d'une chance sur 73 millions. Sally Clark fut déclarée coupable sur la base de cet argument, puis libérée de prison 3 ans plus tard suite à l'intervention de la Royal Statistical Society : quel a été leur argument ?

Exercise 21.4 (*Solution*)**.** On peut tout d'abord critiquer le chiffre de 1 sur 73 millions avancé par Meadow, en remettant en cause l'hypothèse d'indépendance des morts subites du nourrisson. Ainsi certaines familles sont plus susceptibles que d'autres d'êtres frappées par ce syndrome, en raison par exemple de prédispositions génétiques.

Mais l'argument le plus important, même si ce chiffre était correct, c'est que le tribunal a succombé au sophisme du procureur en ignorant les probabilités a priori des autres possibilités, qui sont toutes très improbables. En effet, si la mort successive des deux nourrissons de causes naturelles est extrêmement improbable, leur double assassinat par leur propre mère l'est également. Il semble que personne n'ait songé à estimer cette probabilité durant le procès et a comparer la vraisemblance de ces deux événements hautement improbables. En 2004, Ray Hill, un professeur de mathématiques de l'Université de Salford publia un article estimant les probabilités de chacune des hypothèses, concluant que l'hypothèse du double accident était entre 4,5 et 9 fois plus probable que celle du double meurtre.

On peut considérer la décision de déclarer l'accusé innocent ou coupable comme un problème de probabilité. Si on note E l'événement correspondant à l'observation d'un indice mettant en cause l'accusé (par exemple une concordance du test ADN) et I l'événement correspondant à l'innocence du suspect, on peut considérer les probabilités conditionnelles suivantes :

- $P(E|I)$ est la probabilité que l'indice à charge soit observé bien que l'accusé soit innocent (le test est un faux positif).
- $P(I|E)$ est la probabilité que l'accusé soit innocent (I), sachant que l'on a observé la présence de l'indice (E).

C'est cette deuxième probabilité que le jury devrait prendre en compte pour prendre sa décision. En général, avec les techniques d'expertises policières modernes (par exemple un test ADN), la probabilité $P(E|I)$ est très faible. Le sophisme du procureur consiste à affirmer que, **par conséquent**, $P(I|E)$ est elle aussi très faible. Or le théorème de Bayes nous montre que ces probabilités sont différentes :

$$P(I|E) = P(E|I)\frac{P(I)}{P(E)}$$

où $P(I)$ est la probabilité de l'innocence de l'accusé a priori, indépendamment des indices récoltés, et $P(E)$ est la probabilité d'observer l'indice sur une personne quelconque, qu'elle soit coupable ou innocente. Le rapport de ces probabilités est donc susceptible de modifier la probabilité de l'innocence de l'accusé. Le sophisme du procureur ignore l'effet de ce terme, qui peut drastiquement changer la probabilité de l'innocence, par exemple si la culpabilité est a priori très peu probable ou si la probabilité d'observer un test positif est élevée (par exemple, une recherche dans une base de données contenant de nombreuses entrées d'ADN).

21.4 Probabilité, Loi de Bayes

Exercise 21.5. Vous croisez un ami mathématicien. Vous savez qu'il a exactement 2 enfants et vous lui demandez "As-tu un garçon ?", ce à quoi il vous répond "Oui.". Quelle est la probabilité que l'autre enfant de votre ami soit un garçon ?

Vous croisez maintenant un second ami (qui a aussi exactement 2 enfants) et, taquin, vous lui demandez "As-tu un garçon né un mardi ?", ce à quoi il répond "Oui.". Quelle est la probabilité que l'autre enfant de votre ami soit un garçon ?

Exercise 21.6 (*Solution*)**.** On se place dans l'univers $\Omega = \{\text{Fille-fille}; \text{Garçon-fille}; \text{Fille-garçon}; \text{Garçon-garçon}\}$ (par convention, on notera l'aîné avec une majuscule et le cadet avec une minuscule). Chaque cas est équiprobable dans la population française. On veut utiliser la formule de Bayes, en notant "$G \geq 1$" l'événement "Avoir au moins un garçon" :

$$\mathbb{P}_{G\geq 1}(\text{Garçon-garçon}) = \mathbb{P}_{\text{Garçon-garçon}}(G \geq 1)\frac{\mathbb{P}(\text{Garçon-garçon})}{\mathbb{P}(G \geq 1)}$$

En effet, notre ami mathématicien nous a dit qu'il avait "un garçon" (pas exactement un garçon, mais au moins un garçon), on ignore si c'est l'aîné ou le cadet. Dans 3 cas sur 4 de Ω, il y a un garçon, donc $\mathbb{P}(G \geq 1) = 3/4$. Par équiprobabilité, on a aussi : $\mathbb{P}(\text{Garçon-garçon}) = 1/4$. Enfin, on a évidemment : $\mathbb{P}_{\text{Garçon-garçon}}(G \geq 1) = 1$. Finalement :

$$\mathbb{P}_{G\geq 1}(\text{Garçon-garçon}) = \frac{1}{3}$$

On peut d'ailleurs vérifier que dans le sous-univers de Ω où on sait qu'on a au moins un garçon, on a la loi de probabilité :

A	Fille-fille	Garçon-fille	Fille-garçon	Garçon-garçon	Total
$\mathbb{P}_{G\geq 1}(A)$	0	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

Maintenant, on ne peut plus résonner dans le même univers car il faut prendre en compte les jours de la semaine, on fixe donc le nouvel univers $\Omega' = \{\text{Fille}_{\text{Lundi}}-\text{fille}_{\text{Lundi}}; \text{Fille}_{\text{Lundi}}-\text{fille}_{\text{Mardi}}; ...; \text{Fille}_{\text{Lundi}}-\text{fille}_{\text{Dimanche}}; \text{Fille}_{\text{Mardi}}-\text{fille}_{\text{Lundi}}; ...; \text{Fille}_{\text{Dimanche}}-\text{fille}_{\text{Dimanche}}; \text{Garçon}_{\text{Lundi}}-\text{fille}_{\text{Lundi}}; ...; \text{Garçon}_{\text{Dimanche}}-\text{garçon}_{\text{Dimanche}}\}$ (en notant évidement les jours de la semaine de naissance en indice). Il y a 4×49 évènement élémentaires équiprobables dans Ω'. On note "$G_{\text{Mardi}} \geq 1$" l'évènement "Avoir au moins un garçon né un mardi" et "Garçon-garçon" l'évènement "Avoir 2 garçons", qui correspond, dans notre nouvel univers, à la réunion d'évènements :

$$\text{Garçon-garçon} = \bigcup_{i,j\text{ : Jours de la semaine}} (\text{Garçon}_{\text{i}} - \text{garçon}_{\text{j}})$$

La probabilité de cet évènement est donc de $49 \times \frac{1}{4\times 49} = 1/4$ (ce qui ne nous surprend pas).

On veut appliquer la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{G_{\text{Mardi}}\geq 1}(\text{Garçon-garçon}) = \mathbb{P}_{\text{Garçon-garçon}}(G_{\text{Mardi}} \geq 1)\frac{\mathbb{P}(\text{Garçon-garçon})}{\mathbb{P}(G_{\text{Mardi}} \geq 1)}$$

Or $\mathbb{P}_{\text{Garçon-garçon}}(G_{\text{Mardi}} \geq 1)$ peut s'exprimer en comptant les cas : il y a 13 cas favorables sur 49 cas en tout. En effet, on a les cas $\text{Garçon}_{\text{Mardi}} - \text{garçon}_{\textbf{pas Mardi}}$, soit 6 cas ; $\text{Garçon}_{\textbf{pas Mardi}} - \text{garçon}_{\text{Mardi}}$, encore 6 cas ; et $\text{Garçon}_{\text{Mardi}} - \text{garçon}_{\text{Mardi}}$, 1 cas (qu'il ne faut pas compter deux fois). De la même manière, $\mathbb{P}(G_{\text{Mardi}}) = \frac{7+7+13}{4\times 49}$ en comptant les cas favorables. Finalement :

$$\mathbb{P}_{G_{\text{Mardi}}\geq 1}(\text{Garçon-garçon}) = \frac{13}{27}$$

On remarque un phénomène très intéressant : cette probabilité est très proche de $1/2$. La probabilité de $1/2$ correspond au cas où on aurait demandé "Est-ce que ton aîné est un garçon ?", par exemple, c'est-à-dire qu'on pose une question qui nous permet de rendre indépendant (la variable aléatoire désignant) le sexe de l'aîné de (la variable aléatoire désignant) celui du cadet. Dans ce cas, comme les évènements "Garçon" et "garçon" sont indépendants, on a bien :

$$\mathbb{P}_{\text{Garçon}}(\text{Garçon-garçon}) = \mathbb{P}(\text{garçon}) = \frac{1}{2}$$

Dans notre cas du garçon né un mardi, l'information "né un mardi" ne rend pas les évènements indépendants, mais en imposant des précisions sur l'enfant qu'on considère, on diminue le nombre de cas favorables pour "$\text{Garçon}_{\text{Mardi}} - \text{garçon}_{\text{Mardi}}$" qui est le *défaut d'indépendance* entre "Garçon" et "garçon". Ainsi, pour une information complémentaire I (par exemple "être né un mardi" où "être roux" ou "aimer la vanille", etc), plus l'information est précise au sens où "$\text{Garçon}_I - \text{garçon}_I$" a peu de cas favorables, plus la réponse "Oui" à la question "As-tu un garçon tel que I" induit une probabilité que le deuxième enfant soit un garçon proche du cas d'indépendance $1/2$.

Pour plus de plus ample recherche sur la question, se renseigner sur le bayésianisme sur les excellentes chaînes Youtube de Hygiène Mentale et Science4All.

21.5 Probabilité, Loi de Bayes

Exercise 21.7.

1. Paradoxe des boîtes de Bertrand.
2. Paradoxe des trois prisonniers.
3. Paradoxe du Monty-Hall.
4. Oreiller de Lewis Carol. (à faire avec plusieurs tirages, avec plusieurs boules dans le sac, avec plusieurs boules ajoutées)

Exercise 21.8 (*Solution*)**.** Voici les liens (à défaut d'une rédaction)

1. Paradoxe des boîtes de Bertrand.
2. Paradoxe des prisonniers.
3. Paradoxe du Monty-Hall.
4. Oreiller de Lewis Carol.

21.6 Probabilité, Modélisation

Exercise 21.9. Vous vous souvenez de la scène du baiser autour du plat de spaghettis dans *La Belle et le Clochard* ? Quelle était le probabilité qu'ils s'embrassent (sachant qu'il y a n spaghettis dans l'assiette) ?

Exercise 21.10 (*Solution*)**.** La solution est ici.

21.7 Probabilité, Modélisation

Exercise 21.11. S'échapper des Enfers.

21.8 Probabilité, Modélisation

Exercise 21.12. Federer joue contre Nadal. Indépendamment à chaque point, Federer a une probabilité p de gagner (et Nadal une probabilité $q = 1 - p$). Sachant qu'il y a actuellement égalité à 40-40, quelle est la probabilité que Federer gagne le jeu ?

Exercise 21.13 (*Solution*)**.** Notons les évènements :

- E_{40} : "égalité à 40-40"
- F : "Federer gagne le jeu"
- F_1 : "Federer gagne le prochain point"
- F_2 : "Federer gagne le second prochain point"
- N_1 : "Nadal gagne le prochain point"
- N_2 : "Nadal gagne le second prochain point"

Après deux points, ou bien l'un des joueurs à gagné le jeu, ou bien il y a de nouveau égalité à 40-40.

On utilise donc la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|E) &= \mathbb{P}(F|E \cap F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(F|E \cap N_1)\mathbb{P}(N_1)\\ &= \mathbb{P}(F|E \cap F_1)p + \mathbb{P}(F|E \cap N_1)q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|E \cap F_1) &= \mathbb{P}(F|E \cap F_1 \cap F_2)\mathbb{P}(F_2|F_1) + \mathbb{P}(F|E \cap F_1 \cap N_2)\mathbb{P}(N_2|F_1)\\ &= 1 \times p + \mathbb{P}(F|E)q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|E \cap N_1) &= \mathbb{P}(F|E \cap N_1 \cap F_2)\mathbb{P}(F_2|N_1) + \mathbb{P}(F|E \cap N_1 \cap N_2)\mathbb{P}(N_2|N_1)\\ &= \mathbb{P}(F|E)p + 0 \times q\end{aligned}$$

On a donc l'équation d'inconnue $x = \mathbb{P}(F|E)$:

$$x = p(p + xq) + q(xp)$$

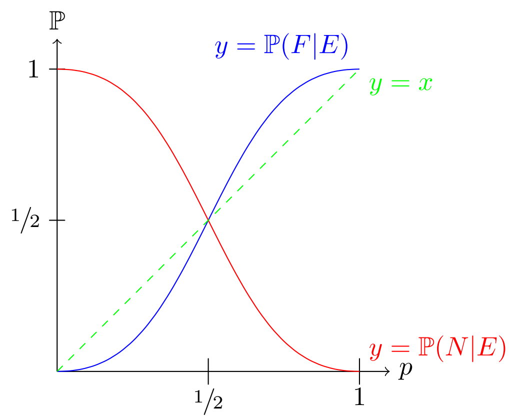
Donc, finalement, en utilisant $p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2 = 1^2 = 1$:

$$\mathbb{P}(F|E) = x = \frac{p^2}{p^2 + q^2}$$

La probabilité pour Nadal de gagner est donc :

$$\mathbb{P}(N|E) = 1 - x = \frac{q^2}{p^2 + q^2}$$

On remarque, en traçant les probabilité l'une contre l'autre en fonction de p que la situation d'égalité exagère légèrement l'avantage du joueur le plus fort (la courbe bleue est au-dessus de la bissectrice verte).



21.9 Probabilité, Modélisation

Exercise 21.14. Vous jouez à un jeu dans lequel vous souhaitez gagner N récompense. Pour ce faire, vous pouvez miser des euros. Si vous avez déjà gagné k récompenses et que vous misez $n \geq 1$ euros, alors vous avez un probabilité $p(k, n)$ de gagner un nouvelle récompense (typiquement $p(k, n)$ décroît en k et croît en n). Trouver une stratégie qui minimise la mise totale moyenne à engager pour gagner les N récompenses. On pourra supposer que, dans une stratégie optimale, la mise dépend uniquement du nombre k de récompenses déjà obtenues.

Vous observez que $p(k, n) = \frac{99}{100} - \frac{10}{100}k + \frac{1}{100}n$ pour n tel que $p(k, n) \in]0, 1]$: quelle est la stratégie optimale.

Exercise 21.15 (*Solution*)**.** Supposons qu'on mise toujours le même nombre d'euro pour toutes les tentatives visant à gagner la $k + 1$-ième récompense, appelons ce nombre d'euros misés n_k. Alors, on est en train de s'interroger sur le temps de premier succès d'un test indépendamment répété de probabilité de succès $p(k, n_k)$: l'espérance du nombre de tentatives est $1/p(k,n_k)$, donc l'espérance de la mise est $n_k/p(k,n_k)$. Ainsi, l'espérance de la mise totale est :

$$M_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{n_k}{p(k, n_k)}$$

Une stratégie optimale consiste à trouver les $(n_k)_k$ qui minimise M_N. En particulier, on se rend compte qu'on peut optimiser chaque n_k indépendamment de sorte à minimiser $\frac{x}{p(k,x)}$ en fonction de x.

Dans le cas particulier de $p(k, n) = \frac{99}{100} - \frac{10}{100}k + \frac{1}{100}n$, que nous noterons $p(k, n) = p_0 - \mu k + \lambda n$ (avec $\lambda, \mu > 0$), on a :

$$\frac{x}{p(k, x)} = \frac{x}{p_0 - \mu k + \lambda x} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{p_0 - \mu k}{p_0 - \mu k + \lambda x}\right)$$

Donc $x \mapsto \frac{x}{p(k,x)}$ est strictement décroissante tant que $k < {}^{p_0}/_{\mu}$, constante pour $k = {}^{p_0}/_{\mu}$ et strictement croissante ensuite. De fait, la mise optimale pour $k \leq {}^{p_0}/_{\mu}$ est $n_k = 1$, soit une mise moyenne pour gagner la k-ième récompense de $\frac{1}{\lambda + p_0 - \mu k}$. Ensuite, pour $k > \frac{p_0}{\mu}$, la mise optimale est celle qui donne une probabilité de $p(k, n_k) = 1$, c'est-à-dire $n_k = \frac{1 - p_0 + \mu k}{\lambda}$, et une mise moyenne pour la k-ième récompense de $\frac{1 - p_0 + \mu k}{\lambda}$. Finalement, la mise totale moyenne est :

$$M_N = \sum_{k=0}^{\lfloor p_0/\mu \rfloor} \frac{1}{\lambda + p_0 - \mu k} + \sum_{k=\lfloor p_0/\mu \rfloor + 1}^{N} \frac{1 - p_0 + \mu k}{\lambda}$$

Pour $p_0 = \frac{99}{100}$, $\lambda = \frac{1}{100}$ et $\mu = \frac{10}{100}$, on obtient $\lfloor p_0/\mu \rfloor = 9$ et $\sum_{k=0}^{\lfloor p_0/\mu \rfloor} \frac{1}{\lambda + p_0 - \mu k} = \frac{7381}{252} \approx 29.92$. Donc, pour cette fonction de probabilité bien particulière et $N \geq 10$ (pour $N \leq 9$, les M_N se calculent à la main) :

$$M_N = \frac{7381}{252} + \left(5N^2 + 6N - 459\right)$$

21.10 Probabilité, Variables aléatoires

Exercise 21.16. Je dispose d'un dé à $n = 6$ faces. J'effectue des lancers (indépendants), jusqu'à ce que tous les nombres soient apparues au moins une fois. En moyenne, combien de fois vais-je lancer le dé ?

Exercise 21.17 (*Solution*)**. Pas trouvé de solution simple à ce problème. Passer par le nombre de surjections donne une solution exacte et difficile à calculer.**

21.11 Probabilité, Variables aléatoires

Exercise 21.18. Chaque jour, vous avez une chance sur 10 que soit proposé un éclair au chocolat à la cantine ce midi. En moyenne, il vous faudra attendre combien de jours pour avoir l'occasion d'en mange un ? En médiane ? Quel jour où il est le plus probable que j'en ait un ? (Bien sûr, on prendra une probabilité p quelconque pour faire les calculs et on appliquera avec $p = {}^1/_{10}$.)

Exercise 21.19 (*Solution*)**.** La question est de calculer les principales caractéristiques d'une loi géométrique. En effet, avec S le succès *"manger un éclair au chocolat"* (grand succès s'il en est), de probabilité $p = {}^1/_{10}$ à chaque étape indépendante, on s'intéresse au temps de premier succès. On note $q = 1 - p$ et on pose X la variable aléatoire qui donne ce temps de premier succès et on obtient : $\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

On veut la "moyenne", ou plutôt l'espérance de X ($\mathbb{E}[X] = \sum_k k\mathbb{P}(X = k)$), sa médiane m (telle que $\mathbb{P}(X \leq m) = {}^1/_2$) et son mode M (tel que $\mathbb{P}(X = M)$ soit maximale parmi les $\mathbb{P}(X = k)$).

- Espérance : $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \geq 1} k\mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k \geq 1} kq^k = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$.

- Médiane : Il est plus facile de regarder $\mathbb{P}(X > k) = q^k$ (réussir à une étape $> k$, c'est exactement échouer k fois). De fait, $q^m = 1/2$ puis $m = \frac{-\ln 2}{\ln q}$ (ce qui est positif car $q < 1$). Comme la loi géométrique est à valeur discrète, on prendre $m = \lfloor \frac{-\ln 2}{\ln q} \rfloor$ où $m = \lceil \frac{-\ln 2}{\ln q} \rceil$ selon la convention adoptée.
- Mode : On veut trouver k tel que $\mathbb{P}(X = k) = pq^k$ est maximal, or pq^k décroît avec k, donc $M = 1$ et $\mathbb{P}(X = M) = p$.

On peut faire l'application pour $p = 1/10$, on trouve qu'on attendra en moyenne 10 jours, en médiane 7 (ce qui est bien plus intéressant à savoir) et que le jour où on a le plus de chance de manger un éclair au chocolat est aujourd'hui !

21.12 Probabilité, Variables aléatoires

Exercise 21.20. Vous jouez à un jeu avec votre ami. À chaque manche, vous avez un probabilité p de gagner. Gagne le jeu celui qui remporte le plus de manche. Vous jouez n manches, quelle est la probabilité que vous gagniez ? Appliquez pour $p = 1/2$, puis donner une estimation de la probabilité pour p quelconque via l'inégalité de Markov.

Vous jouez au même jeu, mais cette fois, le premier à N victoires gagne. Quelle est la probabilité que vous gagniez ? Discutez ce qui se passe pour $p = 1/2$ puis quand $p \to 0$.

Exercise 21.21 (*Solution*)**.** Si on fait n parties, gagner le jeu revient à remporter au moins $n/2$ victoires. Notons X la variable aléatoire du nombre de victoires en n manches. X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. On remporte la victoire si on gagne plus de la moitié des manches, en notant $P(n, p)$ la probabilité de victoire, on a donc $P(n, p) = \mathbb{P}(X > \lfloor n/2 \rfloor) = \mathbb{P}(X \geq k + 1)$. On obtient, avec $q = 1 - p$ et $k = \lfloor n/2 \rfloor$:

$$P(n, p) = \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} = q^n \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{p}{q}\right)^j$$

En particulier, si $p = 1/2$, alors $q = 1/2$, et on remarque que la probabilité de victoire est égale à la probabilité de défaite : reste à estimer la probabilité d'une égalité. Or l'égalité est impossible pour n impair, donc $P(2k + 1, 1/2) = 1/2$, et pour n pair, la probabilité d'égalité vaut $\mathbb{P}\left(X = \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} \sim \frac{1}{2^n}\frac{2^{2\times n/2}}{\sqrt{\pi n/2}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$. Finalement :

$$P\left(2k + 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P\left(2k, \frac{1}{2}\right) \sim \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\right)$$

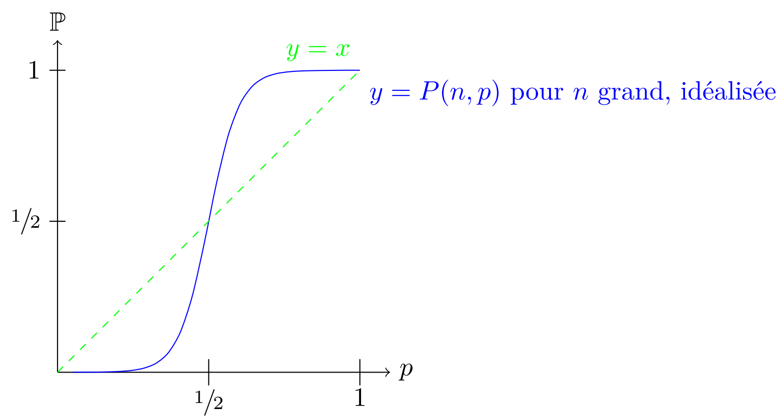
Avec l'inégalité de Markov, on a :

$$P(n, p) = \mathbb{P}(X > n/2) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{n/2} = \frac{np}{n/2} = 2p$$

En appliquant le même raisonnement pour la probabilité de défaite (donc pour $q = 1 - p$), on trouve que $P(n,p) \geq 1 - 2q = 2p - 1$.

On a donc un encadrement dont chaque côté est toujours vrai, l'un intéressant pour p proche de 0 et l'autre pour p proche de 1 : $2p - 1 \leq P(n,p) \leq 2p$.

En traçant $P(n,p)$ comme une fonction de p pour différente valeur de n de plus en plus grandes, on observe que la courbe se rapproche du comportement attendu (on se rapproche d'une sigmoïde qui vaut 0 avant $p = 1/2$ et 1 après). Le tracé est idéalisé, il ne s'agit pas des vraies valeurs (taper la fonction dans WolframAlpha avec $n = 50$ ou $n = 100$ pour voir un vrai graphe). Dans la vraie vie, $n = 10$ suffit à avoir une situation qui donne fermement l'avantage au meilleur joueur.



Pour cette deuxième manière de définir la victoire, notons $V(N,p)$ la probabilité de victoire. Notons Y le nombre de manches nécessaires pour remporter N succès (dans le cas où on suppose qu'on joue une infinité de manches). La variable Y suit ce qu'on appelle une "loi binomiale négative" (dans sa version loi de Pascal), qui n'est pas au programme mais qu'on va étudier ici.

Remporter la victoire revient à remporter N succès plus vite que son adversaire, soit en moins de $2N$ manches : $V(N,p) = \mathbb{P}(Y \leq 2N - 1)$. Or remporter le N-ième succès à la manche k, c'est remporter un succès à manche k (probabilité p) et remporter $N - 1$ succès parmi les $k - 1$ premières manches (donc $k - N$ échecs) :

$$\mathbb{P}(Y = k) = p \times \binom{k-1}{N-1} p^{N-1} q^{k-N} = \left(\frac{p}{q}\right)^N \binom{k-1}{N-1} q^k$$

Dès lors, la probabilité de victoire est données par :

$$V(N,p) = \sum_{k=N}^{2N-1} \mathbb{P}(Y = k) = \frac{p^N}{q^N} \sum_{k=N}^{2N-1} \binom{k-1}{N-1} q^k = \frac{p^N}{q^{N-1}} \sum_{k=N-1}^{2(N-1)} \binom{k}{N-1} q^k$$

On constate que cette probabilité est différente (en général) de la première manière de définir la victoire.

Pour $p = q = 1/2$, on a $V(N, 1/2) = \frac{1}{2}\sum_{k=N-1}^{2(N-1)} \binom{k}{N-1}\frac{1}{2^k}$. Or le jeu est symétrique (personne n'a d'avantage), donc on sait que $V(N, 1/2) = 1/2$, d'où :

$$\sum_{k=N-1}^{2(N-1)} \binom{k}{N-1}\frac{1}{2^k} = 1 \quad \text{plus proprement} \quad \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n}\frac{1}{2^k} = 1$$

C'est une formule assez inattendue. Elle est juste, et il n'est pas si évident que ça de la démontrer *ex nihilo*.

Pour p proche de 0, posons $p = x + o(x)$ (alors $q = 1 - x + o(x)$) et estimons $V(N, p)$:

$$\begin{aligned}
V(N,p) &= \frac{p^N}{q^{N-1}} \sum_{k=N-1}^{2(N-1)} \binom{k}{N-1} q^k \\
&= x^N (1-x)^{-(N-1)} \sum_{k=N-1}^{2(N-1)} \binom{k}{N-1} (1-x)^k + o\left(x^N\right) \\
&= x^N (1 + (N-1)x) \sum_{k=N-1}^{2(N-1)} \binom{k}{N-1} (1-kx) + o\left(x^N\right) \\
&= x^N \times 1 \times \sum_{k=N-1}^{2(N-1)} \binom{k}{N-1} 1 + o\left(x^N\right) = x^N \binom{2N-1}{N} + o\left(x^N\right)
\end{aligned}$$

On a utilisé la formule de la "crosse de hockey" : $\sum_{k=n}^{r} \binom{k}{n} = \binom{r+1}{n+1}$ (démonstration par récurrence ou par un dessin du triangle de Pascal).

Ainsi, pour p petit, on a $V(N,p) \approx \binom{2N-1}{N} p^N$. Rappelons que $\binom{2N-1}{N} = \frac{N}{2N}\binom{2N}{N} \sim \frac{4^N}{2\sqrt{N\pi}}$, donc pour $p < 1/4$, on a bien $\binom{2N-1}{N} p^N \to 0$ quand $N \to +\infty$.

Pour ce qui est du tracé $V(N,p)$ en fonction de p à N fixé, on obtient sensiblement la même discussion que pour $P(n,p)$ plus haut et $N = 10$ est déjà utilisable dans la réalité pour bien identifier le meilleur des deux joueurs dès que la différence est un peu marquée ($p \not\approx 1/2$). L'avantage de ce modèle est de ne pas avoir de cas d'égalité et donner plus fortement l'ascendant aux joueurs forts (quand $p \to 1$, $V(N,p) \to 1$ converge plus rapidement que $P(n,p) \to 1$ pour $N \approx n$).

21.13 Probabilité, Variables aléatoires

Exercise 21.22. Vous et un adversaire jouez à un jeu (vidéo) : à chaque manche, vous avez une probabilité p_1 de gagner, et votre adversaire une probabilité p_2 (indépendante de vous). Le premier qui gagne une manche remporte la mise. Quelle est la probabilité que vous gagniez ? Quelle est la probabilité que vous fassiez égalité ?

Que ce passe-t-il lorsque les deux joueurs sont aussi bons l'un que l'autre au jeu ($p_1 = p_2$) ?

Exercise 21.23 (*Solution*)**.** Notons $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$. Posons X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de manche que vous devez faire avant de gagner et X_2 celle pour votre adversaire. X_1 suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p_1)$ et X_2 suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p_2)$. Les deux variables sont indépendantes. Rappelons que si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors $\mathbb{P}(X \geq k) = q^{k-1}$. Cela peut se voir de deux manières : ou bien on constate que gagner après k manches est équivalent à échouer aux $k-1$ premières, ou bien on calcule $\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=k}^{+\infty} pq^{j-1} = pq^{k-1} \sum_{j=0}^{+\infty} q^j q^{k-1} \frac{p}{1-q} = q^{k-1}$.

Dès lors, remporter la partie revient à effectuer moins d'essais que son adversaire, c'est-à-dire à ce que $X_1 < X_2$. Or on a, grâce à l'indépendance de X_1 et X_2 :

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 \geq k+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_1 q_1^{k-1} q_2^k = p_1 q_2 \sum_{j=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^j = \frac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2}$$

Il y a deux manières de calculer la probabilité de l'égalité. Ou bien on calcule directement $\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \sum_k \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = k)$, ou alors on sait qu'il y a égalité quand ni l'un ni l'autre n'a gagné, donc la probabilité d'égalité vaut :

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_1 q_1^{k-1} p_2 q_2^{k-1} = p_1 p_2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q_1 q_2)^k = \frac{p_1 p_2}{1 - q_1 q_2}$$

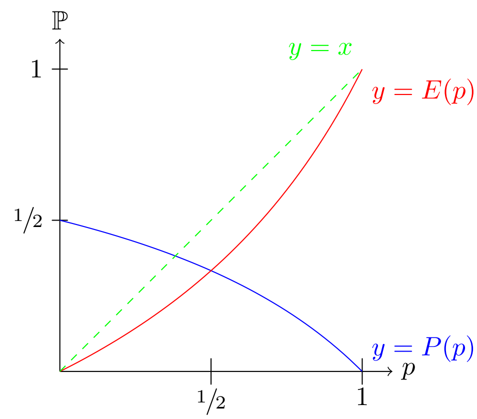
ou

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) = 1 - \mathbb{P}(X_1 < X_2) - \mathbb{P}(X_1 > X_2) = 1 - \frac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2} - \frac{p_2 q_1}{1 - q_1 q_2} = \frac{p_1 p_2}{1 - q_1 q_2}$$

Si les deux joueurs sont de même niveau, notons $p = p_1 = p_2$. Alors, la probabilité d'égalité $E(p)$ devient $\frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{p(2-p)} = \frac{p}{2-p}$. Comme la probabilité que le premier joueur gagne est la même que celle que le deuxième joueur gagne, notons $P(p)$ cette probabilité. On a alors les probabilités totales (probabilité que le joueur 1 gagne + probabilité que le joueur 2 gagne + probabilité d'égalité = 1) : $P(p) + P(p) + E(p) = 1$. Donc :

$$P(p) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{2-p}\right) = \frac{1-p}{2-p}$$

Le jeu est fortement égalitaire quand les joueurs sont tous les deux aussi mauvais ($P(p) \approx 1/2$ pour $p \approx 0$), et très propice à l'égalité quand les deux joueurs sont également fort ($E(p) = 1$ pour $p \approx 1$). Cette phrase est à relire plusieurs fois pour comprendre la différence entre les deux situations !



Taper "x*y/(1-(1-x)*(1-y))" sur Google ou WolframAlpha et régler le graphe sur $[0, 1]$ pour les trois axes pour voir à quoi ressemble la probabilité d'égalité en général.

21.14 Probabilité, Variables aléatoires

Exercise 21.24 (Problème du collectionneur de coupons)**.** Vous collectionner des cartes (Pokemon). Vous les achetez une par une mais vous ignorez quelle carte vous achetez au moment de l'achat (elles sont sous blister). Il y a n cartes en tout, chaque achat coûte 1 euro : montrez qu'en moyenne, votre collection vous coûtera $M_n \sim n \ln n$ euros ? Montrez que la probabilité que le coût final soit à loin de la moyenne à εn près est moins que $^2/_{\varepsilon^2}$. Montrez que la probabilité de payer plus que $\beta n \ln n$ euros (pour $\beta > 0$) est moins que $n^{-\beta+1}$.

Exercise 21.25 (*Solution*)**.** Notons T_n le "temps", c'est-à-dire le nombre de carte sous blister à acheter, avant d'obtenir les n cartes de la collection.

Mettons qu'on a déjà obtenues $i-1$ cartes. Soit alors t_i le temps supplémentaire pour obtenir la i-ième carte. On a $T_n = \sum_{i=1}^n t_i$. La variable aléatoire t_i suit une loi géométrique de paramètre $p_i = \frac{n-(i-1)}{n}$. En effet, t_i est le temps de premier succès alors que la probabilité de succès est p_i, la probabilité de trouver l'une des $n - (i - 1)$ cartes qu'on n'a pas encore trouvée parmi les n cartes possibles.

Ainsi, $t_i \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$, donc $\mathbb{E}(t_i) = \frac{n}{n-i+1}$. Comme $T_n = \sum_{i=1}^n t_i$, on a $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} t_i = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-i+1} = nH_n$ où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est le n-ième nombre harmonique. Or il est bien connu que $H_n \sim \ln n$. Finalement :

$$M_n = \mathbb{E}(T_n) = nH_n \sim n \ln n$$

Ensuite, la seconde partie de l'énoncé s'interprète comme le fait de devoir montrez que $\mathbb{P}\left(|T_n - M_n| \geq \varepsilon n\right) \leq {}^2/_{\varepsilon^2}$ Comme $M_n = \mathbb{E}(T_n)$, on reconnaît une instance de l'inégalité de Tchebychev. Reste à calculer $\mathbb{V}(T_n)$. Comme les t_i sont indépendants (il s'agit de temps d'attente sans rapport entre eux, seulement en rapport avec le nombre de cartes possédée), on a $\mathbb{V}(T_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(t_i) =$

$n^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n-i+1)^2}$. Comme on sait que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et que chaque somme partielle est inférieure à la somme totale (les termes de la série sont positifs), on obtient que $\mathbb{V}(T_n) \leq n^2 \frac{\pi^2}{6} \leq 2n^2$. Ainsi, en appliquant l'inégalité de Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(|T_n - nH_n| \geq \varepsilon n\right) \leq \frac{\mathbb{V}(T_n)}{(\varepsilon n)^2} \leq \frac{\pi^2}{6\varepsilon^2} \leq \frac{2}{\varepsilon^2}$$

Enfin, on voudrait prouver que $\mathbb{P}(T_n > \beta n \ln n) \leq n^{-\beta+1}$. Pour ce faire, regardons l'évènement Z_i^r : ne pas avoir obtenu la i-ième carte au temps r, ou autrement dit $Z_i^r = (t_i > r)$. Il est évident que $t_i > r$ implique $T_n > r$ (si on n'a pas obtenu la i-ième carte au temps r, alors, en particulier, on n'a pas obtenu toutes les cartes au temps r). Ainsi, la probabilité que $T_n > r$ est plus petite que celle que **n'importe le quel** des $t_i > r$, ce qui est inférieur à la somme des probabilités individuelles $\mathbb{P}(t_i > r)$. Plus proprement : $(T_n > r) = \cup_{i=1}^{n}(t_i > r)$, donc $\mathbb{P}(T_n > r) = \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} t_i > r\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(t_i > r)$. Reste à estimer $\mathbb{P}(t_i > r)$ pour $r = \beta n \ln n$. Ne pas avoir récupérer la i-ième carte au temps r avoir échoué r fois. Or la probabilité d'échec est au plus de $\frac{n-1}{n}$ (quelque soit i, il reste au moins 1 carte à trouver). Ainsi :

$$\mathbb{P}(t_i > r) \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^r \leq e^{-r/n}$$

Comme on a une borne indépendante de i, elle va être plus facile à utiliser :

$$\mathbb{P}(T_n > \beta n \ln n) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(t_i > \beta n \ln n) \leq n \times n^{-\beta n \ln n/n} = n^{-\beta+1}$$

21.15 Probabilité, Variables aléatoires

Exercise 21.26. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_2)$ indépendantes. Estimez $\mathbb{P}(X < Y)$ ou $\mathbb{P}(X = Y)$.

Idem pour d'autres lois (géométriques déjà fait).

21.16 Probabilité, Variables aléatoires

Exercise 21.27 (Inégalité de Hoeffding)**.** On admet le lemme de Hoffding : si Y est une variable aléatoire bornée entre $-M$ et M, alors pour tout $t > 0$, on a : $\mathbb{E}\left(e^{tY}\right) \leq e^{t^2 M^2/2}$

Soit $(X_i)_i$ des variables aléatoires indépendantes, bornées entre $-M$ et M (i.e. $\forall i,\ \mathbb{P}(-M \leq X_i \leq M) = 1$). Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On suppose pour simplifier que $\forall n,\ \mathbb{E}(S_n) = 0$. En appliquant l'inégalité de Markov sur $\mathbb{P}\left(e^{tS_n} \geq e^{\lambda t}\right)$, montrez que $\mathbb{P}\left(S_n \geq \lambda\right) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2nM^2}}$ pour tout $\lambda > 0$.

Exercise 21.28 (*Solution*)**.** Comme l'exponentielle est une fonction croissante, les inégalités $tS_n \geq \lambda t$ et $e^{tS_n} \geq e^{\lambda t}$ sont équivalentes. Il s'ensuit qu'on peut appliquer l'inégalité de Markov car la variable e^{tS_n} est positive :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_n \geq \lambda\right) &= \mathbb{P}\left(e^{tS_n} \geq e^{\lambda t}\right) \\
&\leq \frac{1}{e^{\lambda t}}\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) \\
&\leq e^{-\lambda t}\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}\right) \\
&\leq e^{-\lambda t}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(e^{tX_k}\right) \qquad \text{par indépendance} \\
&\leq e^{-\lambda t}\left(e^{\frac{t^2M^2}{2}}\right)^n \qquad \text{par le lemme de Hoeffding} \\
&\leq \exp\left(-\lambda t + \frac{nM^2}{2}t^2\right)
\end{aligned}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $t > 0$, on peut optimiser en t pour trouver la meilleure borne. $t = \frac{\lambda}{nM^2} > 0$ est optimal et donne l'inégalité souhaitée pour tout $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}\left(S_n \geq \lambda\right) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2nM^2}\right)$$

N.B. : Cette inégalité est vraie dans une plus large mesure : si $\mathbb{P}(X_i \in [a_i, b_i]) = 1$, alors $\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq \lambda) \leq \exp\left(-\frac{2\lambda^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right)$ et $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{2\lambda^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right)$. Cette inégalité est beaucoup beaucoup plus puissante que les inégalités de Markov ou Tchebychev ! C'est l'une des raisons pour lesquelles on aime bien décomposer des variables aléatoires en sommes de variables élémentaires.

21.17 Probabilité, Variables aléatoires

Exercise 21.29 (Inégalité de Cantelli)**.** Soit Y une variable aléatoire avec $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{V}(Y) = \sigma^2$ finie. Soit λ et u des réels positifs. Montrez que $\mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \mathbb{P}\left((Y+u)^2 \geq (\lambda+u)^2\right)$. En déduire que $\forall u > 0,\ \mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2+u^2}{(\lambda+u)^2}$ (via l'inégalité de Markov). Prouvez que, pour $\lambda > 0$: $\mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\lambda^2}$. De la même manière, prouvez que, pour $\lambda < 0$ $\mathbb{P}(Y \leq \lambda) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\lambda^2}$.

Exercise 21.30 (*Solution*)**.** Comme λ et u sont positifs, on constate que $(Y+u)^2 \geq (\lambda+u)^2$ est impliqué par $Y + u \geq \lambda + u$, donc la probabilité du second évènement est plus petite que celle du premier. Ainsi (rappel $\mathbb{E}(Y)=0$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \geq \lambda) &= \mathbb{P}(Y+u \geq \lambda+u) \\
&\leq \mathbb{P}\left((Y+u)^2 \geq (\lambda+u)^2\right) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\left[(Y+u)^2\right]}{(\lambda+u)^2} \\
&\leq \frac{\mathbb{E}(Y^2)+2u\mathbb{E}(Y)+u^2}{(\lambda+u)^2} = \frac{\sigma^2+u^2}{(\lambda+u)^2}
\end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $u>0$, donc on peut optimiser en dérivant $f : u \mapsto \frac{\sigma^2+u^2}{(\lambda+u)^2}$, qui donne $(\lambda+u)^4 \times f'(u) = 2u(\lambda+u)^2 - (2u+2\lambda)(\sigma^2+u^2) = 2\lambda u^2 + 2(\lambda-\sigma^2)u - 2\lambda\sigma^2$. En particulier, $f'\left(\frac{\sigma^2}{\lambda}\right)=0$. Dès lors, en appliquant pour $u=\frac{\sigma^2}{\lambda}$, on trouve :

$$\mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \frac{(\lambda^2\sigma^2+\sigma^4)/\lambda^2}{\left((\lambda^2+\sigma^2)/\lambda\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\lambda^2+\sigma^2}$$

On a bien démontré l'inégalité de Cantelli pour $\lambda>0$.

Ensuite, on constate que $\mathbb{P}(Y \leq \lambda) = 1-\mathbb{P}(Y \geq \lambda) = 1-\mathbb{P}(-Y \leq -\lambda)$. Donc si $\lambda<0$, comme $-Y$ a même espérance et même variance que Y, on trouve :

$$\mathbb{P}(Y \leq \lambda) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\lambda^2+\sigma^2}$$

N.B. : Pour X une variable aléatoire avec une espérance non nulle (mais finie) et une variance σ^2, on peut remplacer Y par $X-\mathbb{E}(X)$ partout. En réunissant les deux inégalités, on trouve que $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{2\sigma^2}{\lambda^2+\sigma^2}$. Cela est légèrement moins bien que l'inégalité de Tchebychev (asymptotiquement), mais utile dans certains cas. En particulier, les inégalités de Cantelli sont fonctionnent sans valeurs absolues (tout comme l'inégalité de Hoeffding ou de Chernoff) !

21.18 Probabilité, Variables aléatoires

Exercise 21.31 (Inégalité de Chernoff)**.** Soit X une variable aléatoire et $t>0$ tel que $\mathbb{E}(e^{tX})$ soit finie. Montrez que $\forall a \geq 0$, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-ta}\mathbb{E}(e^{tX})$ et $\mathbb{P}(X \leq -a) \leq e^{-ta}\mathbb{E}(e^{tX})$.

Soit $X_1, ..., X_n$ des variables indépendantes identiquement distribuées qui suivent un $\mathscr{B}(p)$. On pose $S=\sum_i X_i$. Montrez que, pour $k \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(S \geq knp) \leq \frac{1}{e^{np}}\left(\frac{e}{k}\right)^{knp}$.

Exercise 21.32 (*Solution*)**.** On remarque que $\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq ta)$ pour tout $t>0$ (car $x \mapsto e^{tx}$ est croissante). Dès lors, comme e^{tX} est une variable aléatoire positive, on peut appliquer l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq ta) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{ta}} = e^{-ta}\mathbb{E}(e^{tX})$$

Cette inégalité est vraie pour tout $t > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{tX})$ est finie.

Pour $S = \sum_i X_i$, on a $\mathbb{E}(S) = \sum_i \mathbb{E}(X_i) = np$ et surtout $\mathbb{E}(e^{tS}) = \mathbb{E}(\prod_i e^{tX_i}) = \prod_i \mathbb{E}(e^{tX_i})$. Or $e^{tX_i} \in \{1, e^t\}$ car $|X_i| \in \{0,1\}$, donc $\mathbb{E}(e^{tS})$ est finie (comme produit d'espérances finies). En l'occurrence, $\mathbb{E}(e^{tX_i}) = (1-p)e^0 + pe^t = 1 + p(e^t - 1) \le e^{p(e^t-1)}$. Il s'en suit :

$$\mathbb{P}(S \ge a) \le e^{-ta}\mathbb{E}(e^{tS}) \le e^{-ta}\prod_i e^{p(e^t-1)} \le e^{-ta}e^{np(e^t-1)}$$

En particulier, pour $a = k\mathbb{E}(S) = knp$, on a $\mathbb{P}(S \ge knp) \le e^{np(e^t-kt-1)}$. Comme cette formule est vraie pour tout $t > 0$, on peut prendre t tel que $e^t = k$ (c'est le point d'annulation de la dérivée de $t \mapsto e^t - kt - 1$), et on a $e^t - kt - 1 = k(1 - \ln k) - 1$ et finalement :

$$\mathbb{P}(S \ge knp) \le \frac{e^{(k-1)np}}{k^{knp}} = \frac{1}{e^{np}}\left(\frac{e}{k}\right)^{knp}$$

21.19 Probabilité, Variables aléatoires

Exercise 21.33. Prouvez qu'en moyenne, vous avez moins d'amis que vos amis (sur Facebook, ou ailleurs).

21.20 Probabilité, Variables aléatoires

Exercise 21.34. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrez que : $\mathbb{E}|X|^p = \int_0^{+\infty} pt^{p-1}\mathbb{P}(|X| \ge t)\mathrm{d}t$.

Pas faisable en Sup ?

Exercise 21.35 (*Solution*)**.** Soit $x \ge 0$, alors : $x = \int_0^x \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{x \ge t}\mathrm{d}t$.

Ainsi, par le théorème de Fubini, on trouve pour un variable Y positive :

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{Y \ge t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}\mathbb{1}_{Y \ge t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y \ge t)\mathrm{d}t$$

En particulier, pour la variable $|X|^p$ qui est positive, on a :

$$\mathbb{E}|X|^p = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X|^p \ge t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X| \ge t^{\frac{1}{p}})\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} pu^{p-1}\mathbb{P}(|X| \ge u)\mathrm{d}u$$

On a effectué le changement de variable $u^p = t$, donc $pu^{p-1}\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$.

21.21 Probabilité, Variables aléatoires (Tchebychev)

Exercise 21.36. Rappelez la loi de probabilité, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre $4n$ et $1/2$. Montrez que $\sum_{k=n+1}^{3n-1} \binom{4n}{k} \ge \frac{n-1}{n}2^{4n}$.

Exercise 21.37 (*Solution*)**.** Si $X \sim \mathscr{B}(4n, {}^1\!/\!{}_2)$, alors $\mathbb{P}(X = k) = \binom{4n}{k}\frac{1}{2^{4n}}$, $\mathbb{E}X = 2n$ et $\mathbb{V}X = n$.

On peut appliquer l'inégalité de Tchebychev :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{3n-1}\binom{4n}{k} &= 2^{4n}\mathbb{P}(X \in [n+1, 3n-1]) \\ &= 2^{4n}\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| < n) \\ &= 2^{4n}\left(1 - \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq n)\right) \\ &\geq 2^{4n}\left(1 - \frac{\mathbb{V}X}{n^2}\right) \\ &\geq \frac{n-1}{n}2^{4n}\end{aligned}$$

21.22 Probabilité, Variables aléatoires (Tchebychev)

Exercise 21.38 (Tchebychev optimal)**.** Soient $(X_i)_{i \in [1,d]}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon une loi de Rademacher : $\mathbb{P}(X_i = -1) = {}^1\!/\!{}_2 = \mathbb{P}(X_i = +1)$. Pour $S \subset [1, d]$, on pose $Y_S = \prod_{i \in S} X_i$. Montrez que les $(Y_S)_S$ sont **deux à deux indépendantes**. On pose $Z = \sum_{S \subset [1,d]} Y_S$. Montrez que l'inégalité de Tchebychev est en fait une égalité pour Z (avec $a = 2^d$). On adoptera la convention $Y_\emptyset = 1$.

Exercise 21.39 (*Solution*)**.** Fixons $S \subset [1, d]$. On a $Y_S \in \{-1, +1\}$. Plus encore, Y_S est symétrique car les $(X_i)_{i \in S}$ le sont sont : $\mathbb{P}(Y_S = -1) = \mathbb{P}(Y_S = +1) = {}^1\!/\!{}_2$.

On remarque que si $S \cap T = \emptyset$, alors on Y_S et Y_T sont indépendantes car elles sont construites à partir de variables indépendantes (les variables utilisées pour Y_S n'ont rien a voir avec celle utilisées pour Y_T), c'est-à-dire pour tout $(\epsilon, \varepsilon) \in \{-1, +1\}^2$:

$$\mathbb{P}_{(Y_T = \epsilon)}(Y_S = \varepsilon) = \mathbb{P}_{\left(\prod_{j \in T} X_j = \epsilon\right)}\left(\prod_{i \in S} X_i = \varepsilon\right) = \mathbb{P}(Y_S = \varepsilon) = {}^1\!/\!{}_2$$

Supposons qu'on ait prouvé que si $\#S \cap T = k$, alors Y_S et Y_T sont indépendant quelque soient $S, T \subset [1, d]$. Soient maintenant $S, T \subset [1, d]$ tels que $\#S \cap T = k + 1$ et $j \in S \cap T$. On a $Y_S = X_j Y_{S \setminus \{j\}}$ et $Y_T = X_j Y_{T \setminus \{j\}}$, d'après la formule des probabilités totales et l'hypothèse de récurrence (i.e. $Y_{S \setminus \{j\}}$ et $Y_{T \setminus \{j\}}$ sont indépendantes), on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_S = 1 \wedge Y_T = 1) &= \mathbb{P}(X_j = 1)\mathbb{P}_{X_j = 1}(Y_{S \setminus \{j\}} = 1 \wedge Y_{T \setminus \{j\}} = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_j = -1)\mathbb{P}_{X_j = -1}(Y_{S \setminus \{j\}} = -1 \wedge Y_{T \setminus \{j\}} = -1) \\ &= {}^1\!/\!{}_2\mathbb{P}(Y_{S \setminus \{j\}} = 1)\mathbb{P}(Y_{T \setminus \{j\}} = 1) \\ &\quad + {}^1\!/\!{}_2\mathbb{P}(Y_{S \setminus \{j\}} = -1)\mathbb{P}(Y_{T \setminus \{j\}} = -1) \\ &= {}^1\!/\!{}_8 + {}^1\!/\!{}_8 = {}^1\!/\!{}_4 \\ &= \mathbb{P}(Y_S = 1)\mathbb{P}(Y_T = 1)\end{aligned}$$

Ainsi, les $(Y_S)_{S\subset[1,d]}$ sont deux à deux indépendantes car le même calcul fonctionne pour montrer que $\mathbb{P}(Y_S=\epsilon\wedge Y_T=\varepsilon)=\mathbb{P}(Y_S=\epsilon)\mathbb{P}(Y_T=\varepsilon)$ pour toutes les valeurs de $(\epsilon,\varepsilon)\in\{-1,+1\}^2$. On détermine : $\forall S, \mathbb{E}Y_S=0, \mathbb{V}Y_S=1$.

<u>NB :</u> La variable $Y_\emptyset$ est bien indépendante de toutes les autres.

Pour Z, on commence par remarquer que, d'après la formule du crible :

$$Z=\sum_{S\subset[1,d]}Y_S=\sum_{S\subset[1,d]}\prod_{i\in S}X_i=\prod_{i\in[1,d]}(1+X_i)$$

De fait, à partir du moment où l'un des X_i vaut -1, on a $Z=0$, et inversement, si tous les X_i valent $+1$, alors $Z=2^d$, soit avec probabilité $\mathbb{P}(\forall i, X_i=+1)=\prod_i\mathbb{P}(X_i=+1)=({}^1\!/\!_2)^d$. On calcule la loi de Z :

x	-1	$+1$	0	2^d	$\mathbb{E}$	$\mathbb{V}$
$\mathbb{P}(X_i=x)$	$1/2$	$1/2$			0	1
$\mathbb{P}(Y_\emptyset=x)$	0	1			1	0
$\mathbb{P}(Y_S=x)$	$1/2$	$1/2$			0	1
$\mathbb{P}(Z=x)$			$1-1/2^d$	$1/2^d$	1	2^d-1

On prendra le temps de vérifier qu'on a : $\mathbb{E}Z=\sum_S\mathbb{E}Y_S$ et $\mathbb{V}Z=\sum_S\mathbb{V}Y_S$.

Finalement, on a $\mathbb{P}(Z\geq 2^d)=1/2^d$. On peut aussi appliquer la formule de Tchebychev :

$$\mathbb{P}(Z\geq t)=\mathbb{P}\left(\left|\sum_{S\subset[1,d]}(Y_S-\mathbb{E}Y_S)\right|\geq t\right)\leq\frac{\sum_S\mathbb{V}Y_S}{t^2}=\frac{2^d}{t^2}$$

Donc pour $t=2^d$, on a égalité : la formule de Tchebychev est optimale si on suppose que les variables sont **deux à deux indépendantes**. Les $(Y_S)_S$ ne sont pas indépendantes au sens fort sans quoi $\mathbb{P}\left(Y_{\{1,2\}}=-1\wedge Y_{\{1\}}=1\wedge Y_{\{2\}}=1\right)=1/8$, alors que $\mathbb{P}\left(Y_{\{1,2\}}=-1\wedge Y_{\{1\}}=1\wedge Y_{\{2\}}=1\right)=0$ car l'évènement décrit est impossible. Si on dispose de variables indépendantes (au sens fort), alors il existe des inégalité de concentration plus puissantes comme l'inégalité de Chernoff.

22 Raisonnements logiques

22.1 Raisonnements logiques

Exercise 22.1. Montrez que, pour P et Q deux assertions : $((P\Rightarrow Q)\wedge(\neg P\Rightarrow Q))\Rightarrow Q$. *Il s'agit du principe de disjonction.*

Montrez que, pour P et Q deux assertions : $((P\Rightarrow Q)\Rightarrow P)\Rightarrow P$. *Il s'agit de la loi de Pierce.*

Donnez la traduction du principe de disjonction avec des phrases en français.

Remplacez les dernières implications par des équivalences.

Re-démontrez la loi de Pierce avec des équivalences.

Exercise 22.2 (*Solution*)**.** Pour démontrer une telle proposition, on va construire petit à petit la formule en vérifiant que dans les 4 cas possibles pour P et Q, la formule est vraie (c'est-à-dire qu'on a une colonne avec que des 1).

P	Q	$\alpha : P \Rightarrow Q$	$\beta : \neg P \Rightarrow Q$	$\gamma : \alpha \wedge \beta$	$\gamma \Rightarrow Q$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

On remarquera qu'on a même montré une formule plus forte car les colonnes Q et γ sont rigoureusement les mêmes : $((P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow Q$

N'hésitez pas à interpréter la phrase en français à l'aide de "P : il va pleuvoir demain" et "Q : je vais prendre mon parapluie demain".

On procède de la même manière :

P	Q	$\alpha : P \Rightarrow Q$	$\beta : \alpha \Rightarrow P$	$\beta \Rightarrow P$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Ici aussi, on a en réalité une équivalence entre P et β : $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Leftrightarrow P$.

Vous pouvez vous amuser à remplacer les assertions P et Q par des phrases dotées de sens, mais cette formule est bien moins intuitive que la précédente !

Interprétation : prendre P : il va pleuvoir demain et Q : Je prendrai mon parapluie demain.

Équivalences finales : Voir ci-dessus.

Autre démonstration de Pierce : On utilise le principe de contraposition, l'écriture de l'implication comme disjonction et le lois de De Morgan :

$$\begin{aligned}
&(((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \Rightarrow \neg((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P)) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge \neg P)) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \Rightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge \neg P)) \\
\Leftrightarrow &(\neg P \Rightarrow (\neg P \vee (Q \wedge \neg P)) \\
\Leftrightarrow &(P \vee (\neg P \vee (Q \wedge \neg P))
\end{aligned}$$

La dernière affirmation est une tautologie en vertu du principe du tiers exclus : $A \vee \neg A$ (en réalité, la loi de Pierce est équivalente au principe du tiers exclu).

22.2 Raisonnements logiques

Exercise 22.3. Prouvez la proposition :

P : Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

Indice : On peut raisonner par contraposée.

Exercise 22.4 (*Solution*). Montrons la contraposée : si n est impair, alors n^2-1 est divisible par 8. Soit n impair, il s'écrit alors $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1; 3\}$. De fait : $n^2-1 = 16k^2+8kr+r^2-1$. Reste à regarder que $3^2-1 = 8$ et $1^2-1 = 0$ sont des multiples de 8, ce qui est évident.

22.3 Raisonnements logiques

Exercise 22.5. Partagez un carré en 4 carrés, puis en 6 carrés, 7, 8, 9, 10 et 11.

Montrez qu'on peut partager un carré en n carrés pour $n \geq 6$ et conclure.

(Comment compter le nombre de manière de séparer un carré en n carrés ?)

Exercise 22.6 (*Solution*). La division en 4 carrés se fait par les médiatrices des côtés (il faut montrer que ce sont des carrés tout de même). La division en 6 est plus astucieuse. Il faut prendre la division en 9 carrés (on divise chacun des côtés en 3), et réunir les 4 carrés en haut à gauche. Pour la division en 8 carrés, il faut construire un premier carré, mettre 3 petits carré en dessous, 3 à sa droite et 1 en bas à droite.

$n = 4$ $\quad$ $n = 6$ $\quad$ $n = 8$ $\quad$ $n = 9$

Ensuite, on peut passer d'une division en n carrés à une division en $n+3$ carrés en divisant un des carrés présents en 4 (ce qui ajoute $4-1 = 3$ carrés). Ainsi, un carré est divisible en n carrés (pas forcément de tailles identiques) pour $n \in \{4\} \cup [\![6, +\infty]\!]$. **Une rédaction propre de la récurrence est attendue.**

Pour compter le nombre manières de découper un carré en n, il faut partir des 1 découpages en 4 et des 4 découpages en 6 et on peut alors compter le nombre de manières de découper un carrée en n carrés par :

$$u_n = (n-3)u_{n-3} + 4(n-6)u_{n-6}$$

Attention, on compte ici les processus de séparation, pas les figures obtenues (ce deuxième calcul étant bien plus ardu).

22.4 Raisonnements logiques

Exercise 22.7. Soit $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrez que H_n n'est jamais entier.

Indice : On pourra écrire H_n comme un quotient et s'intéresser à la parité du numérateur et du dénominateur.

Exercise 22.8 (*Solution*). On écrit sous forme réduite $H_2 = \frac{3}{2}$. Le numérateur est impair et le dénominateur est pair. On va montrer par récurrence (forte) que H_n s'écrit sous forme réduite $H_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec p_n impair et q_n pair.

$\star$ Supposons que n soit pair et que notre hypothèse soit vérifiée pour $n-1$. Alors $H_n = \frac{np_{n-1}+q_{n-1}}{nq_{n-1}}$. Alors H_n s'écrit sous forme réduite $\frac{p_n}{q_n}$ avec p_n impair et q_n pair car la facteur 2 du dénominateur nq_{n-1} ne se simplifie pas avec le numérateur $np_{n-1}+q_{n-1}$.

$\star$ Supposons que $n = 2k-1$ soit impair et que notre hypothèse soit vérifiée pour $n-1$. Alors :

$$H_n = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j-1} = \frac{1}{2} H_k + \frac{P}{Q}$$

où la deuxième fraction est sous forme réduite avec Q impair (car on somme des fractions de dénominateur impair) et P le nombre qui convient (peu importe sa valeur exacte).

Ensuite, $H_k = \frac{p_k}{q_k}$ avec p_k impair et q_k pair par hypothèse de récurrence. Finalement :

$$H_n = \frac{Qp_k + 2Pq_k}{2Qq_k}$$

De la même manière que précédemment, en réduisant la fraction, on trouve bien $H_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec p_n impair et q_n pair car $Qp_k + 2Pq_k$ est impair et $2Qq_k$ est pair.

Ainsi, on a montré par récurrence que H_n ne peut jamais être un entier pour $n \geq 2$ car son dénominateur est pair alors que son numérateur est impair.

22.5 Raisonnements logiques

Exercise 22.9. Démontrer que tout nombre naturel est divisible par un nombre premier.

Exercise 22.10 (*Solution*)**.** Raisonnons par récurrence **forte** pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p$ premier, $p|n$.

Pour n premier, c'est évident : $n|n$. En particulier, l'initialisation est validée avec $n = 2$.

Fixons n et supposons que notre hypothèse soit vérifiée pour tout $1 < k < n$. Si n n'est divisible par aucun $k \in [2, n-1]$, alors n est premier, donc $n|n$ garantit que n est bien divisible par un nombre premier. Sinon, il existe $k \in [2, n-1]$ tel que $k|n$, or, par hypothèse de récurrence, il existe p premier tel que $p|k$. Par transitivité (de la divisibilité) : $p|n$.

Finalement, on a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p$ premier, $p|n$.

23 Séries

23.1 Séries

Exercise 23.1. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. Montrez que la série de terme général $\frac{1}{n\sigma(n)}$ converge.

Étudiez les séries de terme général $\frac{1}{n^\alpha \sigma(n)^\beta}$ (avec $\alpha + \beta > 1$ et $\alpha, \beta > 0$).

Étudiez la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercise 23.2 (*Solution*)**.** On va majorer $\frac{1}{k\sigma(k)}$ pour $k \in [1, n]$. Quelle est la permutation σ qui rend ce terme le plus grand possible ? Plus σ est petit, plus le terme est grand, donc, comme σ est injective sur $\mathbb{N}$, on cherche σ dont l'image de $[1, n]$ est $[1, n]$. Cela fixé, il est facile de se rendre compte que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\sigma(k)}$ est maximal pour $\frac{1}{\sigma}$ décroissante (imaginez $\frac{1}{\sigma(k)}$ comme des poids qu'on affecte à $\left(\frac{1}{k}\right)_k$). Ainsi, quelque soit σ, on a montré que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \times k}$$

La série de droite est convergente d'après Riemann, donc la série de terme général $\frac{1}{k\sigma(k)}$ est convergente.

De la même manière, si $\alpha > 1$, alors la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \sigma(n)^\beta}$ est convergente par comparaison avec la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$. Si $\alpha + \beta > 1$, le même argument que précédemment, donne :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha \sigma(k)^\beta} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha \times k^\beta}$$

La somme de droite converge par le critère de Riemann, donc la série de terme général $\frac{1}{k^\alpha \sigma(k)^\beta}$ est convergente.

On va se servir de l'une des démonstrations de la divergence de la série harmonique. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$.

On veut minorer $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$. Au pire, comme σ est injective, on a $\sigma([n+1, 2n]) = [1, n]$, et les "poids" $\sigma(k)$ sont affectés de sorte à minimiser la somme pondérée $\sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \times \frac{1}{k^2}$, c'est-à-dire que σ est croissante : $\sigma(n+1) = 1$, $\sigma(n+2) = 2$,..., $\sigma(n+k) = k$. Ainsi, on a :

$$S_{2n} - S_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k-n}{k^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - n \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{n}{2n} - n\frac{n}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{4}$$

Finalement, $S_n \to +\infty$, la série général de terme $\frac{\sigma(n)}{n^2}$ est toujours divergente, quel que soit σ une bijection de $\mathbb{N}$.

23.2 Séries

Exercise 23.3 (Escargot de Gardner)**.** Un escargot est posé à l'extrémité d'une corde parfaitement élastique de $100m$. L'escargot souhaite arriver à l'autre bout de la corde. Il se meut à la vitesse d'$1m/h$. Au début de chaque heure, un géant tire sur la corde et celle-ci s'allonge de façon élastique. À chaque fois la corde s'allonge de $100m$ de façon homogène. Est-ce que l'escargot parviendra à son but ?

Exercise 23.4 (*Solution*)**.** La solution est ici.

On s'attachera à utiliser l'équivalent de la série harmonique pour obtenir un approximation du temps nécessaire (la formule apparaissant en fin de vidéo) : $t = e^{L/v - \gamma}$.

23.3 Séries

Exercise 23.5 (Série de Bernoulli)**.** On définit les polynômes de Bernoulli : $B_0 = 1$, $B_p' = pB_p$ et $\int_0^1 B_p = 0$ ($p \neq 0$). Calculez $f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\frac{t^k}{k!}$. On admettra que, **ici, et si la sommation converge**, la dérivée et l'intégrale peuvent être échangées avec la sommation sans problème. Si on a le temps, on essayera de le démontrer.

Exercise 23.6 (*Solution*)**.** Il importe de démontrer d'abord que $f(x,t)$ est bien définie. On remarque que le degré de B^k est k et que son coefficient dominant est 1. De fait : $\left|B_k(x)\frac{t^k}{k!}\right| \in O\left(\frac{(xt)^k}{k!}\right)$. La série de terme général $\frac{(xt)^k}{k!}$ converge avec $\sum_{k\geq 0} \frac{(xt)^k}{k!} = e^{xt}$. De fait, $|f(x,t)| \leq e^{xt}$.

Ensuite, grâce au (gros) théorème qu'on a admis, on peux calculer, en fixant x et t :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,t) = \sum_{k\geq 0} B_k'(x)\frac{t^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} B_k(x)\frac{t^{k+1}}{k!} = tf(x,t)$$

On en déduit en résolvant l'équation différentielle que $f(x,t) = \lambda(t)e^{xt}$ où $\lambda(t)$ désigne une fonction qui ne dépend que de t (pas de x). On peut maintenant utiliser l'intégration (là encore, c'est un gros théorème) :

$$\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}x = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}\int_0^1 B_k(x)\mathrm{d}x = 1$$

On fera attention au fait que, si $k = 0$, $\int_0^1 B_k = 1$ et 0 si $k \geq 1$. D'un autre côté :

$$\int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}x = \lambda(t)\left[\frac{1}{t}e^{xt}\right]_0^1 = \lambda(t) \times \frac{e^t - 1}{t}$$

On obtient finalement la fonction génératrice des polynômes de Bernoulli :

$$f(x,t) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}$$

Ces polynômes ont plein d'application pratiques car $(p+1)\sum_{k=0}^{n} k^p = B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)$, entre autre. Cette série permet de calculer facilement les coefficients de polynômes de Bernoulli ou de les manipuler tous ensemble pour certaines démonstrations. Par exemple, on peut remarquer que $B_{2k+1}(0) = 0$

pour $k \geq 1$. En effet, $f(0,t) - B_1(0)t = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{1}{2}t$ est paire, donc son développement en 0 (à n'importe qu'elle ordre), n'a que des coefficients de rang pair. Or on connaît son développement en 0 : $f(0,t) - \frac{1}{2}t = B_0(0) + \sum k = 3^n B_k(0)\frac{t^k}{k!} + o(t^n)$. Donc tous les $B_k(0)$ pour k impair (supérieur à 3) est nul.

Les théorèmes évoqués sont au programme de deuxième année, voire pour cela les suites de fonctions, les séries de fonction et les séries entières.

23.4 Séries

Exercise 23.7 (Suite de Sylvester)**.** On définit la suite d'entiers $(s_n)_n$ avec $s_0 = 2$ et $s_n = 1 + \prod_{k=0}^{n-1} s_k$. Montrez que $s_n \to +\infty$. Montrez que la série de terme général $1/s_n$ converge et calculez sa somme ($= 1$).

Montrez que la somme des k premiers termes de la suite $\left(\frac{1}{s_n}\right)_n$ constitue la meilleure approximation possible par défaut de 1 à l'aide de k fractions égyptiennes (fraction positive avec un numérateur qui vaut 1) puis que pour représenter tout nombre dans $]1805/1806, 1[$, une somme de fractions égyptiennes doit avoir au moins cinq termes.

Exercise 23.8 (*Solution*)**.** On remarque que $(s_n)_n$ est une suite d'entiers strictement croissante, donc elle tend vers $+\infty$ (elle est supérieure à $(n)_n$).

Ensuite, on a : $s_{n+1} - 1 = \prod_k s_k = s_n(s_n - 1)$, d'où une croissante plus rapide que $n!$: on a tout d'abord $s_n - 1 \geq n$ par récurrence immédiate, donc $s_{n+1} \geq n \times s_n$, et ainsi $s_n \geq n!$ par récurrence. Il s'ensuit que la série de terme général $\frac{1}{s_n}$ converge (vers moins que e d'ailleurs).

En outre, on a aussi :

$$\frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1} = \frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_n(s_n - 1)} = \frac{s_n - 1}{s_n(s_n - 1)} = \frac{1}{s_n}$$

Comme toutes les séries concernées convergent, on peut Calculer la somme par télescopage :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{s_n} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{s_n - 1} - \sum_{k \geq 0} \frac{1}{s_{n+1} - 1} = \frac{1}{s_0 - 1} - \lim_{+\infty} \frac{1}{s_{n+1} - 1} = 1$$

On va montrer par récurrence que $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{s_j}$ est la meilleure approximation de 1 par k fraction égyptiennes. Ce fait et vérifié pour $k = 1$ car il n'existe pas de fraction unitaire plus proche de 1 que $\frac{1}{2}$. Cela revient à montrer que s_k est égal à $m = \min\left\{n \in \mathbb{N} \; ; \; \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{s_j} + \frac{1}{n} < 1\right\}$. Or on sait calculer $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{s_j}$ par télescopage : $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{s_j} = 1 - \frac{1}{s_k - 1}$. Il vient $\frac{1}{m} < \frac{1}{s_k - 1}$, donc $m > s_k - 1$ et $s_k = m$ par minimalité.

Enfin, on calcule que $s_0 = 2$, $s_1 = 3$, $s_2 = 7$, $s_3 = 43$ et $s_4 = 1807$. Dès lors : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} = \frac{1}{1807 - 1} = \frac{1}{1806}$. Comme on a là la meilleur approximation par défaut par 4 fractions égyptiennes de 1, si on prend un nombre dans $]1 - \frac{1}{1806}, 1[$, il ne peut s'écrire comme la somme de 4 fractions égyptiennes ou moins car cela fournirait une meilleur approximation par défaut de 1.

23.5 Séries, Dénombrabilité

Exercise 23.9. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites croissantes d'entiers $(q_i)_i$ avec $q_1 \geq 2$. Pour $\mathbf{q} \in \mathcal{S}$, soit $\Phi(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \dots q_k}$. Montrez que $\Phi(\mathbf{q})$ converge, que $\Phi : \mathcal{S} \to]0,1]$, que Φ est strictement décroissante (l'ordre sur $\mathcal{S}$ est l'ordre lexicographique) et que c'est une bijection. Montrez que $\Phi^{-1}(\mathbb{Q} \cap]0,1])$ est l'ensemble des suites croissantes stationnaires.

Exercise 23.10 (*Solution*)**.** Pour $\mathbf{q} \in \mathcal{S}$, on a $\forall i,\ q_i \geq 2$, donc $\frac{1}{q_1 q_2 \dots q_k} \leq \frac{1}{2^k}$, donc la série de terme général $\frac{1}{q_1 q_2 \dots q_k}$ converge car c'est un terme positif majorée par un terme convergent.

On obtient en particulier que $\Phi(\mathbf{q}) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - 1/2} = 1$. Donc $\Phi : \mathcal{S} \to]0,1]$ (et 1 est atteint).

Ensuite, soient deux suites $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathcal{S}$. Supposons que $\mathbf{q} < \mathbf{p}$, c'est-à-dire qu'il existe j tel que $q_j < p_j$ et $q_i = p_i$ pour $i < j$. Alors, on note $R = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{q_1 \dots q_k} = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{p_1 \dots p_k}$ et $Q = q_1 \dots q_{j-1} = p_1 \dots p_{j-1}$:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 \dots q_k} = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{q_1 \dots q_k} + \frac{1}{q_1 \dots q_j} + \sum_{k=j+1}^{+\infty} \frac{1}{q_1 \dots q_k} > R + \frac{1}{Q q_j} + 0$$

$$\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_1 \dots p_k} = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{p_1 \dots p_k} + \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{1}{p_1 \dots p_k} \leq R + \frac{1}{Q} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_j^k} = R + \frac{1}{Q(p_j - 1)}$$

Comme $q_j + 1 \leq p_j$, on a donc $\Phi(\mathbf{p}) \leq R + \frac{1}{Q(p_j - 1)} \leq R + \frac{1}{Q q_j} < \Phi(\mathbf{q})$: l'application Φ est strictement décroissante.

Dès lors, Φ est injective. Reste à prouver qu'elle est surjective.

Pour ce faire, prenons $x \in]0,1]$. Essayons de construire $\mathbf{q} \in \mathcal{S}$ tel que $\Phi(\mathbf{q}) = x$. Construisons déjà le premier terme : q_1. Si $\frac{1}{q_1} > x$, alors $\Phi(\mathbf{q}) \geq \frac{1}{q_1} > x$. Si $\frac{1}{q_1}$ est fixé, alors, comme dans le raisonnement précédent, la plus grande valeur que $\Phi(\mathbf{q})$ peut atteindre est $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1(q_1 - 1)}$ (atteinte en prenant tous les termes égaux à q_1), ce qui vaut $\frac{1}{q_1 - 1}$. Donc si $\Phi(\mathbf{q}) = x$, alors $\frac{1}{q_1 - 1} \leq x < \frac{1}{q_1}$. On en déduit que $q_1 = \min\left\{n \geq 2 \ ;\ \frac{1}{n} < x\right\}$.

Supposons maintenant qu'on a construit $(q_1, \dots, q_m)$. Alors, on peut noter $R = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{q_1 \dots q_k}$ et $Q = q_1 \dots q_m$. On peut fixer $q_{m+1} = \min\left\{n \geq q_m \ ;\ \frac{1}{n} < Q(x - R)\right\}$ (un tel ensemble est une partie non-vide de $\mathbb{N}$, donc admet bien un minimum). Reste à prouver que $\mathbf{q}$ construit par ce processus vérifie bien $\mathbf{q} \in \mathcal{S}$ et $\Phi(\mathbf{q}) = x$.

Par construction, $\mathbf{q}$ est bien croissante car $q_{m+1} > q_m$.

Ensuite, on sait que, pour m fixé, $\frac{1}{q_m} < Q(x - R) \leq \frac{1}{q_m - 1}$, donc $x \in \left[R + \frac{1}{Q q_m}, R + \frac{1}{Q(q_m - 1)}\right[$. Dès lors :

$$0 \leq x - \left(R + \frac{1}{Q q_m}\right) \leq \left(R + \frac{1}{Q(q_m - 1)}\right) - \left(R + \frac{1}{Q q_m}\right) = \frac{1}{Q q_m (q_m - 1)}$$

Or on sait que $Q \geq 2^{m-1}$ car $Q = q_1...q_{m-1}$ et pour tout i, on a $q_i \geq 2$. Donc on a bien la convergence $\frac{1}{Qq_m(q_m-1)} \to 0$, et $\Phi(\mathbf{q}) = x$ via cette construction.

On a montré que $\Phi : \mathcal{S} \to]0,1]$ est une bijection. Cela prouve que $\mathcal{S}$ (et par extensions $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) n'est pas dénombrable.

Notons $\mathcal{S}_{\text{stat}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ constitué de suite d'entiers croissantes et stationnaires.On veut montrer que $\Phi : \mathcal{S}_{\text{stat}} \to \mathbb{Q}\cap]0,1]$ est une bijection (et est bien définie).

Premièrement, soit $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_{m-1}, q_m, q_m, ...) \in \mathcal{S}_{\text{stat}}$. Calculons $\Phi(\mathbf{q})$. Comme avant, on note $R = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{q_1...q_k}$ et $Q = q_1...q_{m-1}$, qui sont tous les deux des rationnels. Alors :

$$\Phi(\mathbf{q}) = R + \frac{1}{Q}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{q_m^k} = R + \frac{1}{Q(q_m-1)} \in \mathbb{Q}$$

Réciproquement, prenons $\mathbf{q} \in \mathcal{S}$ qui n'est pas stationnaire et notons $x = \Phi(\mathbf{q})$, on veut démonter que $x \notin Q$. Supposons que $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, alors, comme $\mathbf{q}$ est croissante mais pas stationnaire, elle tend vers $+\infty$ (et donc est non bornée). En particulier, il existe m tel que $b < q_m$. On sait alors que $x \in \left[R + \frac{1}{Qq_m}, R + \frac{1}{Q(q_m-1)}\right[$. Or QR est un entier car $QR = q_1...q_{m-1}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{q_1...q_k} = \sum_{k=1}^{m-1} q_1...q_k \in \mathbb{N}$. Donc $Qa - QRb \in \mathbb{N}$, alors que, comme $b < q_m$:

$$Qa - QRb \in \left[\frac{b}{q_m}, \frac{b}{q_m-1}\right[\subseteq [0,1[$$

On en conclut que $\Phi(\mathbf{q}) \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $\mathbf{q} \in \mathcal{S}_{\text{stat}}$. Comme Φ est une bijection $\mathcal{S} \to]0,1]$, on en déduit qu'elle se restreint à une bijection $\mathcal{S}_{\text{stat}} \to \mathbb{Q}\cap]0,1]$. Cela montre en particulier que $\mathcal{S}_{\text{stat}}$ est dénombrable.

23.6 Séries, Intégration

Exercise 23.11. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrez que :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a^n b^n}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}} \mathrm{d}\theta$$

Exercise 23.12 (*Solution*)**.** Regardons tout d'abord $S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(ae^{i\theta}+be^{-i\theta}\right)^k}{k!}$.

On sait que $S_n(\theta) \to e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}}$ quand $n \to +\infty$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(\theta)\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(ae^{i\theta}+be^{-i\theta}\right)^k}{k!}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^j b^{k-j} e^{i\theta(2k-j)}\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^j b^{k-j}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2^\pi} e^{i\theta(2k-j)}\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^j b^{k-j}\delta_{2k,j} = \sum_{k=0,2|k}^{n} \frac{1}{k!}\binom{k}{k/2}a^{k/2}b^{k/2} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}.\frac{(2k)!}{(k!)^2}a^k b^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k b^k}{(k!)^2}
\end{aligned}$$

D'où, en premier lieu, et comme la série converge, quand $n \to +\infty$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(\theta)\mathrm{d}\theta \longrightarrow \sum_{k\geq 0}\frac{a^k b^k}{(k!)^2}$$

On voudrais maintenant "inverser" limite et intégrale (des théorème généraux sur cette sorte d'inversion seront vus en Spé). Pour ce faire, on va majorer, pour tout θ, $\left|S_n(\theta) - e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}}\right|$. On a (on note $\alpha(\theta) = ae^{i\theta}+be^{-i\theta}$) :

$$\begin{aligned}
\left|S_n(\theta) - e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}}\right| &= \left|\sum_{k\geq n+1}\frac{\alpha(\theta)^k}{k!}\right| \\
&\leq \frac{|\alpha(\theta)|^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{k\geq n+1}\left|\frac{\alpha(\theta)^{k-n-1}}{(n+2)(n+3)...(k-1)k}\right| \\
&\leq \frac{|\alpha(\theta)|^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{k\geq 0}\frac{|\alpha(\theta)|^k}{k!} = \frac{|\alpha(\theta)|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|\alpha(\theta)|}
\end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité, on notera que $n+2 \geq 1$, $n+3 \geq 2$, $n+4 \geq 3$, etc.

On a une majoration plutôt simple, maintenant, éliminons la dépendance en θ. On note que $|\alpha(\theta)| \leq |a+b|$ (on pourrait avoir une majoration plus fine mais peu importe), d'où :

$$\left|S_n(\theta) - e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}}\right| \leq \frac{|a+b|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|a+b|}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}}-S_n(\theta)\right)\mathrm{d}\theta\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}}-S_n(\theta)\right|\mathrm{d}\theta\\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|a+b|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|a+b|}\mathrm{d}\theta\\ &\leq \frac{|a+b|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|a+b|}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\end{aligned}$$

Finalement, on a deux expressions de la limite de $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_n(\theta)\mathrm{d}\theta$ quand $n\to+\infty$. Par unicité de la limite :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{a^nb^n}{(n!)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ae^{i\theta}+be^{-i\theta}}\mathrm{d}\theta$$

Notamment, pour un réel positif t : $\sum_{k\geq 0}\frac{t^k}{(k!)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2\sqrt{t}\cos\theta}\mathrm{d}\theta$.

On notera que la présente technique fonctionne pour plein d'autres exemple, et qu'il faut retenir qu'avec des "décroissances exponentielles", on peut largement abuser de majoration grossières via des inégalités triangulaires sans (trop) craindre d'obtenir une inégalité trop lâche.

24 Sommes algébriques

24.1 Sommes algébriques

Exercise 24.1. Calculez et comparez :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}j\quad,\quad\sum_{1\leq i<j\leq n}j\quad,\quad\sum_{1\leq i<j\leq n}i\quad,\quad\sum_{1\leq i<j\leq n}ij\quad\text{et}\quad\sum_{1\leq i,j\leq n}\frac{i}{i+j}$$

Exercise 24.2 (*Solution*)**. a)** On a :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}j=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n j=n\times\sum_{j=1}^n j=\frac{n^2(n+1)}{2}$$

b) Puis :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n}j&=\sum_{j=2}^n\sum_{i=1}^{j-1}j=\sum_{j=2}^n j(j-1)=\sum_{j=2}^n j^2-\sum_{j=2}^n j\\ &=\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1\right)-\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)\\ &=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}\end{aligned}$$

c) Ensuite :

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n} i &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n} i = \sum_{j=1}^{n-1} i(n-i+1) = (n+1)\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2\\ &= (n+1)\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\ &= \frac{(n-1)n(n+4)}{6}\end{aligned}$$

d) De surcroît : $\sum_{1\le i<j\le n} ij = \sum_{1\le j<i\le n} ij$. D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n} ij &= \frac{1}{2}\left(\sum_{1\le i,j\le n} ij - \sum_{i=1}^{n} i^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{4}\left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3}\right]\\ &= \frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+{}^2\!/\!_3)}{8}\end{aligned}$$

e) Enfin, pour la dernière somme, on peut prendre deux copies de la même somme et échanger les noms des variables muettes i et j :

$$\begin{aligned}2\sum_{1\le i,j\le n}\frac{i}{i+j} &= \sum_{1\le i,j\le n}\frac{i}{i+j} + \sum_{1\le i,j\le n}\frac{j}{j+i}\\ &= \sum_{1\le i,j\le n}\frac{i+j}{i+j}\\ &= \sum_{1\le i,j\le n} 1 = n^2\end{aligned}$$

Donc : $\sum_{1\le i,j\le n}\frac{i}{i+j} = \frac{n^2}{2}$.

24.2 Sommes algébriques

Exercise 24.3 (Sommation d'Abel)**.** Soient deux familles de nombres complexes $(a_k)_k$ et $(B_k)_k$. On définit $A_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ et $b_j = B_{n+1} - B_n$. Montrez que : $\sum_{j=0}^{n} a_j B_j = A_n B_n - \sum_{j=0}^{n-1} A_j b_j$. En déterminer $\sum_{k=0}^{n} k2^k$.

Exercise 24.4 (*Solution*)**.** Convenons de poser $A_{-1} = 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1}) B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\ &= A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) \\ &= A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k\end{aligned}$$

Il s'agit en fait de l'intégration par partie pour les sommes et non pour les intégrales. Avec des outils plus puissant de théorie de la mesure, les deux formules sont en fait deux facettes d'une même formule plus générale.

Avec $a_k = 2^k$ et $B_k = k$, on a $A_n = 2^{n+1} - 1$ et $b_n = 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k = (2^{n+1}-1)n - \sum_{k=0}^{n-1} (2^{k+1}-1) = n2^{n+1} - n - 2(2^n - 1) + n = 2^{n+1}(n-1) + 2$$

24.3 Sommes algébriques, Binôme de Newton

Exercise 24.5. Quel est le plus grand terme dans le développement de $(a+b)^n$ où $a, b \in \mathbb{R}_*^+$?

Exercise 24.6 (*Solution*)**.** On pose $u_k = \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. On regarde $\frac{u_{k+1}}{u_k}$:

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \Leftrightarrow k < \frac{na - b}{a + b}$$

On a donc 3 cas.

1. $\frac{na-b}{a+b} > n - 1$ (i.e. $n < \frac{a}{b}$), alors $(u_k)_k$ est croissante et le terme dominant est a^n.
2. $\frac{na-b}{a+b} \leq 0$ (i.e. $n \leq \frac{b}{a}$), alors $(u_k)_k$ est décroissante et le terme dominant est b^n.
3. Sinon, $(u_k)_k$ est unimodale (croissante puis décroissante), et le terme dominant est celui d'indice $k_0 = E\left(\frac{na-b}{a+b}\right) + 1$.

24.4 Sommes algébriques, Coefficients binomiaux

Exercise 24.7 (Formule de la crosse de hockey)**.** Démontrez par récurrence puis visuellement que $\sum_{k=n}^{r}\binom{k}{n}=\binom{r+1}{n+1}$

Exercise 24.8 (*Solution*)**.** On va raisonner par récurrence sur r, à n fixé. Cette propriété est évidente pour $r=n$. En effet, cela revient alors à : $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}$.

Ensuite, si la formule est vraie pour r donné, alors regardons :

$$\sum_{k=n}^{r+1}\binom{k}{n}=\sum_{k=n}^{r}\binom{k}{n}+\binom{r+1}{n}=\binom{r+1}{n+1}+\binom{r+1}{n}=\binom{r+2}{n+1}$$

Ainsi, par récurrence, on a bien montré que pour tout n et pour tout r, on a : $\sum_{k=n}^{r}\binom{k}{n}=\binom{r+1}{n+1}$.

Avec un dessins du triangle de Pascal, cette formule est bien plus simple à interpréter. On prétend que la somme des coefficients bleus vaut le coefficient rouge (cette forme est censé ressembler à une crosse de hockey). En effet, la formule du binôme permet d'effectuer les opérations des dessins de la ligne qui suit.

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad \color{blue}{1}\\
1\quad 3\quad \color{blue}{3}\quad 1\\
1\quad 4\quad \color{blue}{6}\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad \color{blue}{10}\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad \color{red}{20}\quad 15\quad 6\quad 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad \color{teal}{3}\quad \color{teal}{1}\\
1\quad 4\quad \color{blue}{6}\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad \color{blue}{10}\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad \color{red}{20}\quad 15\quad 6\quad 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad \color{teal}{6}\quad \color{teal}{4}\quad 1\\
1\quad 5\quad \color{blue}{10}\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad \color{red}{20}\quad 15\quad 6\quad 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad \color{teal}{10}\quad \color{teal}{10}\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad \color{red}{20}\quad 15\quad 6\quad 1
\end{array}$$

24.5 Sommes algébriques, Coefficients binomiaux

Exercise 24.9. On va montrer que $\forall n$, $\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}\frac{1}{2^k}=1$. Soit $S_n=\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}\frac{1}{2^k}$. Calculez que $2S_{2n}-S_n$ puis conclure.

Exercise 24.10 (*Solution*)**.** Notons qu'on a : $\sum_{k=0}^{0}\binom{k}{0}\frac{1}{2^k}=\binom{0}{0}\frac{1}{2^0}=1$ et $\sum_{k=1}^{2}\binom{k}{1}\frac{1}{2^k}=\binom{1}{1}\frac{1}{2^1}+\binom{2}{1}\frac{1}{2^2}=1$.

Alors pour n quelconque :

$$\begin{aligned}
2S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{2n+2} \binom{k}{n+1} \frac{1}{2^{k-1}} - \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} \frac{1}{2^k} \\
&= \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{2^{2n+1}} + \sum_{k=n}^{2n} \left(\binom{k+1}{n+1} \frac{1}{2^k} - \binom{k}{n} \frac{1}{2^k} \right) \\
&= \binom{2n+2}{n+1} \frac{1}{2^{2n+1}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{k}{n+1} \frac{1}{2^k}
\end{aligned}$$

On a utilisé que $\binom{n}{n}\frac{1}{2^n} = \binom{n+1}{n+1}\frac{1}{2^n}$ pour supprimer le premier terme de la somme et $\binom{k}{n} + \binom{k}{n+1} = \binom{k+1}{n+1}$ pour les autres termes. Ensuite, on a : $\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{1}{2}\binom{2n+1}{n} + \frac{1}{2}\binom{2n+1}{n+1} = \binom{2n+1}{n+1}$ par la formule de Pascal puis la symétrie des coefficients binomiaux.

Finalement : $2S_{n+1} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{k}{n+1}\frac{1}{2^k} + \binom{2n+1}{n+1}\frac{1}{2^{2n+1}} + \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}} = S_n$. Plus clairement : $S_{n+1} = S_n$.

Ainsi, par récurrence immédiate : $\forall n,\ S_n = \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n}\frac{1}{2^k} = 1$.

24.6 Sommes algébriques, Dérivation

Exercise 24.11. Soit une fonction f dérivable et un réel b. Comment calculer $S : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} k f'(kx+b)$?

Calculez $S(x) = \sum_{k=1}^{n} k \sinh(kx)$.

Exercise 24.12 (*Solution*)**.** On pose $T(x) = \sum_{k=0}^{n} f(kx+b)$. Comme la somme est finie, on peut dériver terme à terme et on obtient : $S(x) = T'(x)$. Par exemple, on peut avoir : $T(x) = \sum_{k=0}^{n} \cosh(kx)$. On peut alors calculer la somme de l'énoncé en dérivant. On a :

$$\begin{aligned}
T(x) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^x)^k + \sum_{k=0}^{n} (e^{-x})^k \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} + \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \right)
\end{aligned}$$

On définit la fonction $f : x \mapsto \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}$. On a :

$$f'(x) = \frac{-(n+1)e^{(n+1)x}(1-e^x) + e^x(1-e^{(n+1)x})}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x - (n+1)e^{(n+1)x} + ne^{(n+2)x}}{(1-e^x)^2}$$

Donc avec $g : x \mapsto f(-x)$, on a $g'(x) = -f'(-x) = -\frac{e^{-x} - (n+1)e^{-(n+1)x} + ne^{-(n+2)x}}{(1-e^{-x})^2}$.

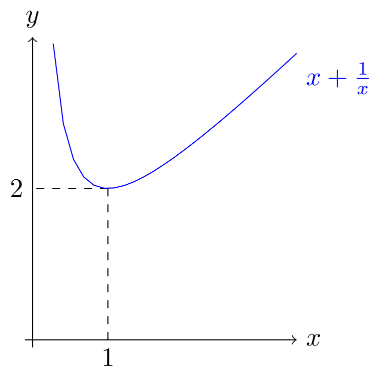
On obtient : $T(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x))$, donc :

$$S(x) = T'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - (n+1)e^{(n+1)x} + ne^{(n+2)x}}{(1-e^x)^2} - \frac{e^{-x} - (n+1)e^{-(n+1)x} + ne^{-(n+2)x}}{(1-e^{-x})^2} \right)$$

24.7 Sommes algébriques, Étude de fonction

Exercise 24.13. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_i)_{i\in[|1;n|]} \in \mathbb{R}_+^*, \sum_i a_i \times \sum_i \frac{1}{a_i} \geq n^2$

Exercise 24.14 (*Solution*)**.** On étudie la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est toujours supérieure à 2. Ensuite, on a :



$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \frac{a_i}{a_j} &= \sum_i \frac{a_i}{a_i} + 2\sum_{i<j} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) \\
&\geq n + 2 \times 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \\
&\geq n^2
\end{aligned}$$

24.8 Sommes algébriques, Polynômes

Exercise 24.15. Calculez la limite ($n \to +\infty$) de (ça fait -1) :

$$u_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \left(5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4\right)$$

On commencera par trouver $\sum_k k^4$ en regardant la somme télescopique $\sum_k (P(k+1) - P(k))$ pour P un polynôme de degré 5 tel que $P(X+1) - P(X) = X^4$.

Exercise 24.16 (*Solution*)**.** On trouve $P = \frac{1}{30}X(X-1)(6X^3 - 9X^2 + x + 1)$, donc $\sum_k k^4 = P(n+1) - P(1) =: Q(n)$ avec $Q = \frac{1}{30}X(X+1)(6X^3+9X^2+X-1)$.

Dès lors

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n^5}\left(\sum_{k,h=1}^{n} 5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4\right) \\
&= \frac{1}{n^5}\left(5\sum_{k,h} h^4 - 18\sum_{k,h} h^2k^2 + 5\sum_{k,h} k^4\right) \\
&= \frac{1}{n^5}\left(5nQ(n) - 18\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2 + 5nQ(n)\right) \\
&= \frac{1}{n^5}\left(2 \times 5 \times 6 \times \frac{1}{30}n^6 - 18 \times 2^2 \times \frac{1}{6^2}n^6 + n^5\left(\frac{15}{3} - \frac{12}{2}\right) + O(n^4)\right) \\
&\to -1
\end{aligned}$$

24.9 Sommes algébriques, Produits

Exercise 24.17. Montrez que $\forall n \geq 3, \sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}$.

Exercise 24.18 (*Solution*)**.** On regarde le membre de droite de l'inégalité équivalente : $n^n < (n!)^2$. On a :

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k \times \prod_{j=1}^{n} (n-j+1)$$

Donc le terme diagonal de $k(n-j+1)$ (c'est-à-dire quand $k = j$) étant toujours supérieur à n (car l'un des deux l'est alors que l'autre est ≥ 1), donc par produit, on obtient l'inégalité souhaitée.

24.10 Sommes algébriques, Trigonométrie

Exercise 24.19. Montrez que $\tanh x = \frac{2}{\tanh 2x} - \frac{1}{\tanh x}$. En déduire la valeur et la limite ($n \to +\infty$) de la suite :

$$u_n(x) = 2^0 \tanh 2^0 x + 2^1 \tanh 2^1 x + 2^2 \tanh 2^2 x + ... + 2^n \tanh 2^n x$$

Exercise 24.20 (*Solution*)**.** On a :

$$\tanh x + \frac{1}{\tanh x} = \frac{\sinh^2 x + \cosh^2 x}{\sinh x \cosh x} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} \frac{(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) + (e^{2x} + 2 + e^{-2x})}{e^{2x} - e^{-2x}} = \frac{2\cosh 2x}{\sinh 2x}$$

La somme demandée est alors une somme télescopique, et on trouve :

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k \times 2}{\tanh(2^k \times 2x)} - \frac{2^k}{\tanh(2^k x)} \right) = \frac{2^{n+1}}{\tanh(2^{n+1}x)} - \frac{1}{\tanh(x)}$$

Il s'ensuit que, pour $x \neq 0$, $\lim_{+\infty} u_n(x) = +\infty$ (pour $x = 0$, on a évidement $\forall n, u_n(0) = 0$).

24.11 Sommes algébriques, Trigonométrie

Exercise 24.21. Calculez $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$.

Exercise 24.22 (*Solution*)**.** On utilise la forme exponentielle :

$$\begin{aligned}
\sum_k \binom{n}{k} \cos(k\theta) &= \Re\left(\sum_k \binom{n}{k} (e^{\theta})^k 1^{n-k} \right) \\
&= \Re\left((1+e^{\theta})^n \right) \\
&= \Re\left(2^n \cos^n \frac{\theta}{2} e^{\frac{in\theta}{2}} \right) \\
&= 2^n \cos^n \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos\left(\frac{n\theta}{2} \right)
\end{aligned}$$

24.12 Sommes algébriques, Trigonométrie hyperbolique

Exercise 24.23. Résoudre $\sum_k \sinh(2+kx) = 0$

Exercise 24.24 (*Solution*)**.** Pour $x = 0$, la somme vaut $100 \sinh 2 \neq 0$. Supposons $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{100} \sinh(2+kx) &= \frac{1}{2}\left(e^2 \sum_k e^{kx} - e^{-2} \sum_k e^{kx}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{x+2}\frac{1-e^{100x}}{1-e^x} - e^{-2}e^{-x}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^{-x}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^2e^x\frac{1-e^{100x}}{1-e^x} - e^{-2}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^x}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, on peut raisonner par équivalence : $S = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow e^{x+2} = e^{-100x-2}$. Donc l'ensemble de solution est $\mathcal{S} = \{\frac{-4}{101}\}$.

25 Suites

25.1 Suites

Exercise 25.1. Soit deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ qui tendent vers $+\infty$ avec $\lim_{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Donnez des exemples pour $(u_n)_n$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$. Montrez que pour tout $x \geq u_{n_0}$, il existe un rang p tel que $|u_p - x| \leq \varepsilon$. Montrez que $\{u_p - v_m; (p,m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que, par exemple, $\{u_n - E(u_n); n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$.

Exercise 25.2 (*Solution*)**.** On peut par exemple penser à $(\log n)_n$ ou à $(\sqrt{n})_n$.

Soit $p = \min_{k > n_0 \text{ et } u_k > x}$ (partie non-vide de $\mathbb{N}$ car $u_n \to +\infty$). Alors $x \in [u_{p-1}, u_p]$, et comme $p-1 \geq n_0$, $|u_p - u_{p-1}| \leq \varepsilon$, donc $0 \leq u_p - x \leq \varepsilon$ (attention au cas $p = n_0 + 1$).

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Soit n_0 défini comme précédent (pour u_n). Soit m tel que $x + v_m \geq u_{n_0}$, ce qui existe car $v_m \to +\infty$. En appliquant le paragraphe précédent, on obtient l'existence de p tel que $|(u_p - v_m) - x| \leq \varepsilon$, d'où la densité.

Soit $x \in [0,1]$. On pose $(v_n)_n = (\lfloor u_n \rfloor)_n \to +\infty$. On obtient donc l'existence pour tout $\varepsilon > 0$ de m, p tels que $|(u_p - v_m) - x| \leq \varepsilon$. Cela induit $u_p - v_m \in [0,1[$, puis $v_m = \lfloor u_p \rfloor$ nécessairement. On obtient bien a densité de $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor\}_n$ dans $[0,1]$.

25.2 Suites

Exercise 25.3. J'ai un paquet infini de carte. Je pose la première carte au bord de la table de sorte que son centre de gravité soit parfaitement sur la frontière de la table (la moitié de la carte est sur la table, l'autre au-dessus du vide). Je pose une autre carte dessus de sorte qu'elle dépasse au dessus du vide et que la pile soit à la limite de tomber (le centre de gravité de la pile est à la frontière de la table), puis une troisième, etc. Est-ce que le point de la pile de carte le plus éloigné du bord de la table peut se trouver arbitrairement loin ?

Exercise 25.4 (*Solution*)**.** Toute la solution est sur cette vidéo.

25.3 Suites

Exercise 25.5. Montrez qu'une suite de Cauchy converge et qu'une suite convergente et de Cauchy (dans $\mathbb{R}$).

Exercise 25.6 (*Solution*)**.** On rappelle la définition d'une suite de Cauchy : c'est une suite telle que $\sup_{m,p\geq n} |u_m - u_p| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy réelle. $(u_n)_n$ est en particulier bornée car il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{m,p\geq N} |u_m - u_p| < +\infty$ (sans quoi cela ne pourrait tendre vers 0). On nomme M cette valeur. On a alors $\forall n \geq N, |u_n| \leq |u_N| + |u_n - u_N| \leq |u_N| + M$. Donc $(u_n)_n$ est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, soit $(u_{\varphi(n)})_n$ une extraction convergente vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{m,p\geq N} |u_m - u_p| < \varepsilon$ et $\forall n \geq N, |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. Soit $n \geq N$, alors $|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \sup_{m,p\geq N} |u_m - u_p| + |u_{\varphi(n)} - \ell| < 2\varepsilon$. D'où la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Réciproquement, si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors, pour $\varepsilon > 0$, on pose N tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$. Alors, soit $m, p \geq N$, on a $|u_m - u_p| \geq |u_m - \ell| + |u_p - \ell| < 2\varepsilon$. D'où $\forall \varepsilon, \exists N, \sup_{m,p\geq N} |u_m - u_p| < \varepsilon$ et ainsi $(u_n)_n$ est de Cauchy.

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a équivalence de *converger* et *être une suite de Cauchy*, ce qui n'est pas le cas dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ par exemple. $\mathbb{R}$ est ce qu'on appelle un corps *complet*.

25.4 Suites

Exercise 25.7. On considère $(u_n)_n$ qui vérifie $u_{n+1} - (n+1)u_n = 2^n(n+1)!$ (et u_0 fixé). Montrez que $(v_n)_n$ vérifiant $v_{n+1} - (n+1)v_n = 0$ et $v_0 = C$ vaut $v_n = Cn!$. Trouvez une condition sur $C(n)$ telle que $u_n = C(n)n!$ et résoudre.

Procédez de même pour $u_{n+1} - 3^{2n}u_n = 3^{n^2}$.

Exercise 25.8 (*Solution*)**.** Pour $(v_n)_n$, on a le produit télescopique : $\prod_n k = 0^{n-1} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n}{v_0}$ d'une part. D'autre part : $\prod_n k = 0^{n-1} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \prod_k (k+1)! = n!$. Ainsi : $v_n = Cn!$.

En injectant $C(n)n!$ dans l'égalité, on obtient immédiatement :

$$C(n+1) - C(n) = 2^n$$

Cela donne la somme télescopique : $\sum_{k=0}^{n-1} C(k+1) - C(k) = C(n) - C(0) = 2^n - 1$. Comme on veut que $u_n = (C(0) + 2^n - 1)n!$, on obtient $C(0) = u_0$ et finalement $u_n = (u_0 + 2^n - 1)n!$

Pour la deuxième récurrence, on peut faire exactement la même chose : on cherche d'abord $(v_n)_n$ telle que $v_{n+1} - 3^{2n}v_n = 0$, ce qui donne $v_n = 3^{n(n-1)}v_0$.

On cherche ensuite les solution à la récurrence de la forme $C(n)3^{n(n-1)}$, ce qui donne $C(n+1)-C(n)=3^{-n}$ et finalement, en regardant la condition initiale :

$$u_n = \left(u_0 + \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right)3^{n(n-1)}$$

25.5 Suites

Exercise 25.9. Calculez $\inf_{\alpha\in]0,\pi[}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}|\sin n\alpha|\right)$.

Exercise 25.10 (*Solution*)**.** On pose la fonction $f:\alpha\mapsto\sup_{n\in\mathbb{N}}|\sin n\alpha|$, qui est bien définie par l'axiome de la borne supérieure.

- Si $\alpha\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$: $f(\alpha)\geq\sin\alpha\geq\frac{\sqrt{3}}{2}=f(\frac{\pi}{3})$.
- Si $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{3}\right]$: Soit n_0 tel que $(n_0-1)\alpha<\frac{\pi}{3}\leq n_0\alpha$. Alors les inégalités garantissent $n_0\alpha\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$, donc $f(\alpha)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Si $\alpha\in\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$: on note que $\pi-\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{3}\right]$, donc $f(\alpha)=\sup_n|\sin(n\alpha)|=\sup_n|\sin(n(\pi-\alpha))|\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, on vient de prouver que l'inf est atteint (c'est un minimum) et vaut $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

25.6 Suites

Exercise 25.11. Pour $x,y\in\mathbb{R}_+$, on considère les suites définies par $u_0=x$ et $v_0=y$ puis :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}\\ v_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}\end{cases}$$

Montrez que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. Ont appelle $M(x,y)$ cette limite (moyenne arithmético-géométrique). Montrez que M est symétrique, homogène de degré 1 ($M(tx,ty)=tM(x,y)$) et que le cas d'égalité de $\min(x,y)\leq\sqrt{xy}\leq M(x,y)\leq\frac{x+y}{2}\leq\max(x,y)$ est seulement $x=y$.

Pour la culture, on peut montrer que $\frac{\pi/2}{M(x,y)}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2\cos^2t+y\sin^2t}}$ en utilisant le changement de variable $u=t+\arctan\left(\frac{y}{x}\tan t\right)$ dans l'intégrale qui exprime $M\left(\frac{x+y}{2},\sqrt{xy}\right)$.

Exercise 25.12 (*Solution*)**.** Premièrement, $v_n\leq u_n$ car $u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n})^2}{2}$. Cela induit que $(u_n)_n$ est décroissante (car $u_{n+1}=\frac{v_n+u_n}{2}\geq\frac{u_n+u_n}{2}=u_n$) et $(v_n)_n$ est croissante (car $v_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}\geq\sqrt{v_nv_n}=v_n$. En outre, on a $0\leq u_{n+1}-v_{n+1}\leq u_{n+1}-v_n=\frac{u_n-v_n}{2}$ donc $0\leq u_n-v_n\leq 2^{-n}(u_0-v_0)\to 0$. D'où le caractère adjacent de ces suites.

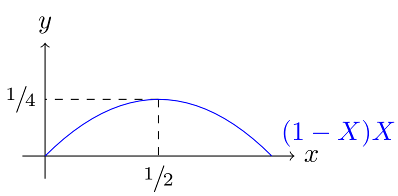
Par sa définition, on a $M(x,y)=M\left(\frac{x+y}{2},\sqrt{xy}\right)=M\left(\frac{y+x}{2},\sqrt{yx}\right)=M(y,x)$. M est bien symétrique. Ensuite, si on pose $u'_0=tx$ et $v'_0=ty$, alors on peut prouver par récurrence que $u'_n=tu_n$ et $v'_n=tv_n$. Ainsi, la limite commune de $(u'_n)_n$ et $(v'_n)_n$ vaut t fois celle de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$: $M(tx,ty)=tM(x,y)$. Enfin, on a déjà prouvé l'inégalité grâce au caractère adjacent des deux suites, reste le cas d'égalité. S'il y a égalité, alors en particulier l'une des deux suites $(u_n)_n$ ou $(v_n)_n$ est stationnaire. Il s'ensuit que x et y son égaux car on aurait $\frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}$ (ce qui induit $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} = 0$).

Pour l'intégrale elliptique, voire ici.

25.7 Suites

Exercise 25.13. Soit $(u_n)_n \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ vérifiant que $\forall n, (1-u_n)u_{n+1} > 1/4$. Montrez que $u_n \to 1/2$ quand $n \to +\infty$.

Exercise 25.14 (*Solution*)**.** Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, alors on a $(1-\ell)\ell \geq \frac{1}{4}$. Or comme $\ell \in [0,1]$, par l'analyse du polynôme $(1-X)X$, on obtient que $\ell = \frac{1}{2}$ est la seule valeur possible.



Reste à prouver la convergence. On sait que $(u_n)_n$ est minorée par 0. En outre :

$$\begin{aligned} u_n(1-u_n) &= 1/4 - (1/2 - u_n)^2 \\ &\leq 1/4 < u_{n+1}(1-u_n) \end{aligned}$$

Comme $1 - u_n > 0$, on obtient que $(u_n)_n$ est décroissante. Ainsi, elle converge.

25.8 Suites

Exercise 25.15. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs. Montrez que si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ converge vers ℓ, alors $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)_n$ converge aussi vers ℓ. Étudiez la réciproque.

Appliquez avec les suites $(u_n)_n \in \left\{ \left(\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \right)_n ; \left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \right)_n ; \left(\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} \right)_n \right\}$.

Exercise 25.16 (*Solution*)**.** Ou bien on revient aux suite de Césaro en appliquant le logarithme, ou on refait la démonstration comme il suit (ici $\ell > 0$, on laisse le lecteur faire le cas $\ell = 0$).

Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\forall n \geq N, \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon$. On a alors par produit : $u_N (\ell - \varepsilon)^{n-N} \leq u_n \leq u_N (\ell + \varepsilon)^{n-N}$. En passant à la $\sqrt[n]{\ldots}$, on obtient :

$$u_N^{1/n} (\ell - \varepsilon)^{1-N/n} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq u_N^{1/n} (\ell + \varepsilon)^{1-N/n}$$

Par encadrement et passage à la limite, on obtient l'existence d'un $\tilde{N}$ tel que $\forall n \geq \tilde{N}, \ell - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \ell + 2\varepsilon$. Ainsi, $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

La réciproque est fausse, on peut par exemple créer la suite suivante : on prend a, b deux réels positifs différents, $u_0 = 1$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n & \text{si } n \text{ impair} \\ u_{n+1} = bu_n & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Alors, $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ ne converge pas (cela vaut alternativement a puis b), alors que $\sqrt[2n]{u_{2n}} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt[2n+1]{u_{2n+1}} = a^{\frac{n+1}{2n+1}} b^{\frac{2n}{2n+1}} \to \sqrt{ab}$, d'où $\sqrt[n]{u_n} \to \sqrt{ab}$.

Pour $u_n = \binom{2n}{n}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4n+2}{n+1} \to 4$, donc $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \to 4$ quand $n \to +\infty$.

Pour $u_n = \frac{n^n}{n!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, donc $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$ quand $n \to +\infty$.

Pour $u_n = \frac{(3n)!}{n^{2n} n!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n} \to \frac{27}{e}$, donc $\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} \to \frac{27}{e}$ quand $n \to +\infty$.

25.9 Suites

Exercise 25.17. Trouvez un exemple de suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ divergente telle que $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, (u_{kn})_n$ est convergente.

Exercise 25.18 (*Solution*)**.** On définit la suite $(u_n)_n$ par $u_n = 0$ si n n'est pas premier, et $u_p = 1$ pour tout p premier (on pourra noter $(\mathbb{1}_{\mathcal{P}}(n))_n$). Dans ce cas, $(u_{kn})_n$ est nulle pour $n \geq 2$, donc $\forall k \neq 1, u_{kn} \to 0$. Cependant, $(u_n)_n$ ne peut converger car elle possède une suite extraite $(u_p)_{p\in\mathcal{P}}$ qui tend vers 1. Elle a donc 2 valeurs d'adhérence.

25.10 Suites

Exercise 25.19. Soit $(u_n)_n$ une suite de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ avec $u_1 = 1$ qui vérifie que pour tout n, $2u_n$ est inférieur à au moins la moitié des termes $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$. Montrez que $u_n \to 0$.

Exercise 25.20 (*Solution*)**.** Après quelques expérimentations sur les premiers termes de la suite, on se rend compte qu'on doit pouvoir prouver que $\forall n, \forall k \geq 2^n, u_k \leq 1/2^n$. Cela se montre efficacement par récurrence.

Supposons que cette propriété soit vérifiée pour un n fixé. Soit $k \geq 2^{n+1}$, on sait que $2u_k$ est inférieur à au moins $\lceil \frac{k-1}{2} \rceil$ termes des $u_1, ..., u_{k-1}$. De fait, $2u_k$ est inférieur à au moins 2^n termes (car $k \geq 2^{n+1}$), et l'un d'entre eux est nécessairement un terme d'indice $\geq 2^n$ (sans quoi on aurait 2^n nombres entre 1 et $2^n - 1$). Ainsi, par hypothèse de récurrence : $2u_k \leq 1/2^n$, puis : $u_k \leq 1/2^{n+1}$.

Finalement, on a montré que $(u_n)_n$ est majorée par la suite $(v_n)_n$ définie par : $\forall n, \forall k \in [2^n, 2^{n+1}[, v_k = 1/2^n$. Cette suite tend évidemment vers 0, et donc u_n aussi. Pour le voir, soit on peut montrer que $\forall \varepsilon, \exists N, \forall n \geq N, 0 \leq v_n \leq \varepsilon$, soit on peut voir que $(v_n)_n$ est une suite décroissante minorée (par 0), donc convergente ; et que sa suite extraite $(v_{2^n})_n = (1/2^n)_n$ tend vers 0.

25.11 Suites

Exercise 25.21. Soit une suite $(u_n)_n$, on définit $(v_n)_n$ par : $v_n = \frac{1}{n^2}(u_1 + 2u_2 + 3u_3 + ... + nu_n)$. Montrez que si $(u_n)_n$ converge, alors $(v_n)_n$ aussi. Que pensez-vous de la réciproque ?

Exercise 25.22 (*Solution*)**.** Soit ℓ la limite de $(u_n)_n$. On étudie $v_n - \frac{n+1}{2n}\ell$:

$$v_n - \frac{n+1}{2n}\ell = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(u_k - \ell)$$

On applique alors la même méthode que afin de démontrer le théorème de Césaro, et on va montrer que $v_n - \frac{n+1}{2n}\ell \to 0$, c'est-à-dire : $v_n \to \ell/2$.

Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq N$ assez grand :

$$\left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k(u_k - \ell)\right| \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k|u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k \leq \varepsilon\frac{n(n+1)}{2n^2} \leq \varepsilon$$

D'autre part, $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N} k(u_k - \ell) \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc à partir d'un certain rang $N_1 \geq N$, on a $\forall n \geq N_1, \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N} k(u_k - \ell)\right| \leq \varepsilon$. Finalement :

$$\forall n \geq N_1, \left|v_n - \frac{n+1}{2n}\ell\right| \leq \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{N} k(u_k - \ell)\right| + \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=N}^{n} k(u_k - \ell)\right| \leq 2\varepsilon$$

De fait, $v_n - \frac{n+1}{2n}\ell \to 0$ et $v_n \to \ell/2$.

La réciproque est fausse, comme celle du théorème de Cesaro : la suite $(u_n)_n = (1, 0, 1, 0, ...)$ ne converge pas, mais on a :

$$v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1, k \text{ impair}}^{n} k = \frac{1}{n^2}\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor^2 \to \frac{1}{4}$$

25.12 Suites

Exercise 25.23. Soit $(u_n)_n$ une suite de $[0,1]^{\mathbb{N}^*}$ avec $u_1 = 1$ qui vérifie que $\forall n, u_{2n} \leq \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $u_{2n+1} = u_{2n}$. Montrez que $u_n \to 0$. **Non résolu !**

Exercise 25.24 (*Solution*)**.** Une telle suite $(u_n)_n$ est majorée par la suite qui vérifie $v_1 = 1$ et $\forall n, v_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} v_k$ et $v_{2n+1} = v_{2n}$. On peut majorer cette suite par plateau. On définit la suite $(h_n)_n$ par $h_0 = 1$ et $h_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1} 2^k h_k$. On va montrer par récurrence que $\forall n, \forall k \in [2^n, 2^{n+1}[, v_k \leq h_n$. Cette propriété est bien vérifiée pour $n = 0$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour tous les $n < N$, alors soit j tel que $2j \in [2^N, 2^{N+1}[$ et on a, en remarquant que toutes nos suites sont positives :

$$v_{2j} = \frac{1}{2j}\sum_{k=1}^{j} v_k \leq \frac{1}{2^N}\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{k\in[2^p,2^{p+1}[} v_k \leq \frac{1}{2^N}\sum_{p=0}^{N-1} 2^p h_p = h_N$$

Comme $v_{2j+1} = v_{2j}$, on a bien l'hérédité de la propriété sur N et ainsi : $\forall n, \forall k \in [2^n, 2^{n+1}[, v_k \leq h_n$. Reste à montrer que $h_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

25.13 Suites

Exercise 25.25. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} &= \sqrt{u_{n+1}v_n} \end{cases}$$

Soit $\alpha = \arccos \frac{a}{b}$. Montrez que u_n et v_n sont adjacentes avec comme limite commune $b\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

Exercise 25.26 (*Solution*)**.** Montrons par récurrence que $\forall n,\ v_n = b\prod_{k=1}^n \cos\frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n = v_n \cos\frac{\alpha}{2^n}$.

L'hypothèse est bien vérifiée en $n = 0$. et si elle est vérifiée au rang n, alors (notons que $\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} > 0$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(v_n + v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}\right) = v_n\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}} \\ v_{n+1} &= \sqrt{u_{n+1}v_n} = v_n\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Grâce à la seconde ligne ci-dessus, on en déduit la formule voulue pour u_n. L'hérédité s'en suit.

Ensuite, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} < 1$, donc $(v_n)_n$ est décroissante. Par ailleurs :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}\frac{\cos{}^{\alpha}/_{2^{n+1}}}{\cos{}^{\alpha}/_{2^n}} = \frac{\cos^2{}^{\alpha}/_{2^{n+1}}}{\cos{}^{\alpha}/_{2^n}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\cos{}^{\alpha}/_{2^n}}\right) > \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

Donc $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ décroissante avec $\forall n,\ u_n < v_n$ (car $\cos\frac{\alpha}{2^n} < 1$). Ces deux suites convergent donc (u_n est majorée par v_0 et inversement) : $u_n \to \ell_u$ et $v_n \to \ell_v$. Or : $\ell_u = \lim v_n \cos\frac{\alpha}{2^n} = \ell_v \times 1$. Les deux suites sont bien adjacentes.

Reste à déterminer la limite de $(v_n)_n$. C'est un exercice classique : comme $\cos\frac{\alpha}{2^k} = \frac{\sin{}^{\alpha}/_{2^{k-1}}}{2\sin{}^{\alpha}/_{2^k}}$, le produit dans la formule de v_n est télescopique :

$$v_n = b\prod_{k=1}^n \cos\frac{\alpha}{2^k} = b\prod_k \frac{\sin{}^{\alpha}/_{2^{k-1}}}{2\sin{}^{\alpha}/_{2^k}} = b\frac{\sin\alpha}{2^2\sin{}^{\alpha}/_{2^n}} = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{\sin{}^{\alpha}/_{2^n}}{{}^{\alpha}/_{2^n}}\right)^{-1}$$

Quand $n \to +\infty$, on a ${}^{\alpha}/_{2^n} \to 0$, donc $\frac{\sin{}^{\alpha}/_{2^n}}{{}^{\alpha}/_{2^n}} \to 1$ (c'est la dérivée de $x \mapsto \sin x$ en 0).

Finalement : u_n et v_n tendent vers $b\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ quand $n \to +\infty$.

25.14 Suites

Exercise 25.27. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles positives avec $u_n \sim v_n$. Soient $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Montrez que si $V_n \to +\infty$, alors $U_n \sim V_n$.

Qu'en est-il des autres notations de Landau ? (Montrez que $U_n = o(V_n)$ si $u_n = o(v_n)$ et $U_n \to +\infty$, alors $U_n = o(V_n)$ et idem pour O, attention, ici $U_n \to +\infty$, pensez à trouver des exemples dans les autres cas.)

Exercise 25.28 (*Solution*)**.** Cet exercice est traité dans son entièreté dans le cours de convergence des séries en fin d'année ou en Spé. Seule la solution de la première partie (divergence + équivalence ⇒ équivalence des sommes partielles) sera détaillée ici.

Soit $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ (1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n$$

Remarquons que $U_n = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$ et idem pour V_n, donc, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
(1-\varepsilon)\sum_{k=n_0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \leq\ & U_n \ \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=n_0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \\
(1-\varepsilon)V_n - (1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \leq\ & U_n \ \leq (1+\varepsilon)V_n - (1+\varepsilon)\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \\
(1-\varepsilon) - \frac{1}{V_n}\left((1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right) \leq\ & \frac{U_n}{V_n} \ \leq (1+\varepsilon) - \frac{1}{V_n}\left((1+\varepsilon)\sum_{k=0}^{n_0-1} v_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k\right)
\end{aligned}$$

Or $V_n \to +\infty$, donc, à partir de $n_1 (\geq n_0)$:

$$\forall n \geq n_1,\ (1-\varepsilon) - \varepsilon \leq \frac{U_n}{V_n} \leq (1+\varepsilon) + \varepsilon$$

Cela prouve que ${}^{U_n}/_{V_n} \to 1$, et donc que $U_n \sim V_n$.

25.15 Suites

Exercise 25.29. Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ définies par $u_0 = x$, $v_0 = y$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = \frac{u_n + v_n}{2} \\ \frac{1}{v_{n+1}} & = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \end{cases}$$

Montrez que u_n et v_n sont adjacente et convergent vers une limite commune $\sqrt{xy}$.

Exercise 25.30 (*Solution*)**.** Avant d'attaquer l'exercice, redémontrons l'inégalité des 3 moyennes :

$$\forall x, y \neq 0,\ \frac{1}{{}^1/_x + {}^1/_y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

On a $xy - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(4xy - x^2 - y^2 - 2xy\right) = \frac{-1}{4}(x+y)^2$, donc l'inégalité de droite est vérifiée.

De surcroît, $\frac{xy}{\left(1/x+1/y\right)^{-2}} = \frac{xy}{4}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy}\right) = \frac{1}{4xy}\left(x^2+y^2+2xy\right)$. Donc $\frac{xy}{\left(1/x+1/y\right)^{-2}} \geq 1$ équivaut à $x^2+y^2+2xy \geq 4xy$, c'est-à-dire $(x-y)^2 \geq 0$, ce qui est le cas. Cela prouve l'inégalité de gauche.

Terminons par remarquer que :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{\frac{1}{1/x + 1/y} \times \frac{x+y}{2}}$$

Commençons par prouver par récurrence que $\forall n,\ 0 > v_n \leq u_n$. Cela montrera qu'il n'y a pas de problème de définition pour v_n. C'est vrai au rang 0 et, si cela est vrai au rang n, alors les suites sont bien strictement positives au rang n et les inégalités entre les 3 moyennes donnent bien $v_{n+1} \leq u_{n+1}$.

En outre, $(u_n)_n$ est décroissante car, grâce à $v_n \leq u_n$, on a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} = u_n$$

De plus, v_n est croissante car :

$$v_{n+1} = \frac{1}{1/u_n + 1/v_n} \geq \frac{1}{1/v_n + 1/v_n} = v_n$$

Ainsi, les suites u_n et v_n sont convergente (u_n est décroissante minorée par v_0 et inversement). Disons que $u_n \to \ell_u$ et $v_n \to \ell_v$. Regardons ce que cela signifie pour $(u_n)_n$:

$$\ell_u = \frac{\ell_u + \ell_v}{2}$$

Ainsi, $\ell_u = \ell_v$ et les suites sont adjacentes : elle convergent vers une limite commune ℓ.

Enfin, la dernière remarque sur l'inégalité des 3 moyennes nous indique, par une récurrence immédiate, que $\forall n,\ \sqrt{u_n v_n} = \sqrt{xy}$. En passant à la limite : $\sqrt{\ell^2} = \sqrt{xy}$ donc $\ell = \sqrt{xy}$ car les suites sont positives.

25.16 Suites

Exercise 25.31. Soit une suite $(v_n)_n$ qui tend vers 0 et telle que $v_n + v_{2n} = o\left(1/n\right)$. Montrez que $v_n = o\left(1/n\right)$ en montrant d'abord que :

$$\forall p, n,\ |v_n| \leq |v_{2^{p+1}n}| + \sum_{k=0}^{p} |v_{2^k n} + v_{2^{k+1}n}|$$

Exercise 25.32 (*Solution*)**.** Par une somme télescopique, on a :

$$\forall p, n,\ v_n + (-1)^p v_{2^{p+1}n} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \left(v_{2^k n} + v_{2^{k+1}n}\right)$$

Donc en appliquant l'inégalité triangulaire, on trouve l'inégalité souhaitée :

$$\forall p, n,\ |v_n| \leq |v_{2^{p+1}n}| + \sum_{k=0}^{p} |v_{2^k n} + v_{2^{k+1}n}|$$

Ensuite, soit $\varepsilon > 0$ et n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|v_n + v_{2n}| \leq \frac{\varepsilon}{n}$. Dès lors, pour $n \geq n_0$ fixé et p quelconque :

$$\sum_{k=0}^{p} |v_{2^k n} + v_{2^{k+1}n}| \ \leq\ \sum_{k=0}^{p} \frac{\epsilon}{2^k n} \ \leq\ \frac{2\varepsilon}{n}$$

En outre, comme $v_p \to 0$, on sait que pour p suffisamment grand, $|v_{2^{p+1}n}| \leq \frac{\varepsilon}{n}$ (on a fixé n juste avant). Dès lors, comme notre inégalité est vérifiée pour tout p, on a en particulier :

$$\forall n \geq n_0,\ n|v_n| \leq 3\varepsilon$$

Ce qui montre que $v_n = o\left({}^1\!/_n\right)$. Cela aurait fonctionné pour n'importe quelle suite u_n avec le même raisonnement : $v_n \to 0$ et $v_n + v_{2n} = o(u_n) \Rightarrow v_n = o(u_n)$.

Par contre, on ne peut pas se débarrasser de l'hypothèse $v_n \to 0$. Le lecteur est invité à trouver des exemples ainsi qu'à étudier ce qu'on peut dire quand $v_n + v_{2n} = O(u_n)$ et ce qui se passe quand $v_n \to +\infty$.

25.17 Suites

Exercise 25.33. Montrez que toute suite log-concave positive est unimodale.

Log-concave : $\forall k, \ln a_k \geq \frac{1}{2}\left(\ln a_{k-1} + \ln a_{k+1}\right)$ soit $a_k^2 \geq a_{k-1}a_{k+1}$.

Unimodale : Un seul mode, ie croissante puis décroissante.

Exercise 25.34 (*Solution*)**.** Si $(a_k)_k$ n'est pas unimodale, alors elle possède un minimum local, disons en r : $a_{r-1} > a_r \leq a_{r+1}$ où $a_{r-1} \geq a_r > a_{r+1}$. Dès lors, $a_r^2 < a_{r-1}a_{r+1}$, donc $(a_k)_k$ n'est pas log-concave.

25.18 Suites, Coefficients binomiaux

Exercise 25.35 (Identité de Cassini, Théorème de Singmaster)**.** Soit F_n le n-ième nombre de Fibonacci ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$). Montrez que $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k} = F_n$. Montrez l'identité de Cassini : $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$.

Montrez que, pour n pair, $\binom{F_nF_{n+1}-1}{F_{n-1}F_n} = \binom{F_nF_{n+1}}{F_{n-1}F_n-1}$. En déduire qu'il y a au moins 6 coefficients binomiaux valant $A_n = \binom{F_nF_{n+1}-1}{F_{n-1}F_n}$.

Exercise 25.36 (*Solution*)**.** Notons $G_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k}$. On a :

$$\begin{aligned}
G_1 &= 1 \\
G_2 &= 1 \\
G_{n-1} + G_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-k-2}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-k-2}{k} + \binom{n-0-1}{0} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1} \binom{n-j-2}{j+1} \\
&= \binom{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \delta_{n \text{ pair}} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1} \binom{n-k-1}{k+1} + \binom{n-0-1}{0} \\
&= \sum_{k'=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k'}{k'} \qquad \text{en changeant l'indice } k' = k+1
\end{aligned}$$

Ainsi, G_n a la même formule de récurrence d'ordre 2 que F_n et coïncide avec elle sur 2 valeurs : les deux suites sont égales.

La somme de G_n correspond à la somme sur les diagonales du triangle de Pascal.

Posons $\Delta_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\
&= (F_n + F_{n+1})F_n - F_{n+1}^2 \\
&= F_n^2 + F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) \\
&= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} \\
&= -\Delta_n
\end{aligned}$$

Or $\Delta_1 = 1 \times 0 - 1 = -1$, donc $\Delta_n = (-1)^n$ par récurrence immédiate, ce qui est l'identité de Cassini.

Posons ensuite $A_n = \binom{F_nF_{n+1}-1}{F_{n-1}F_n}$ et $B_n = \binom{F_nF_{n+1}}{F_{n-1}F_n-1}$ et regardons grâce à l'expression factoriel des coefficients binomiaux (grâce à $F_{n+1} - F_{n-1} = F_n$) :

$$\begin{aligned}
\frac{B_n}{A_n} &= \frac{(F_nF_{n+1})!}{(F_nF_{n+1}-1)!} \times \frac{(F_{n-1}F_n)!}{(F_{n-1}F_n-1)!} \times \frac{(F_nF_{n+1}-1-F_{n-1}F_n)!}{(F_nF_{n+1}-(F_{n-1}F_n-1))!} \\
&= F_nF_{n+1} \times F_{n-1}F_n \times \frac{1}{(F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_n+1)(F_nF_{n+1}-F_{n-1}F_n)} \\
&= \frac{F_{n+1}F_{n-1}}{F_n^2+1} = 1 \qquad \text{identité de Cassini car } n \text{ est pair}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $A_n = B_n$. Dès lors, A_n est exprimé par les trois coefficients binomiaux $\binom{A_n}{1}$, $\binom{F_nF_{n+1}-1}{F_{n-1}F_n}$ et $\binom{F_nF_{n+1}}{F_{n-1}F_n-1}$, ainsi que par les trois coefficient binomiaux obtenus en symétrisant ceux-ci : il y a au moins 6 coefficients binomiaux valant A_n. Remarquons que, pour $n = 4$, $A_n = 3003$ et il y a 8 coefficients binomiaux valant A_n, c'est le nombre qui possède le plus grand nombre d'occurence parmi les coefficients binomiaux (testés jusqu'à 2^{48}).

26 Théorie des ensembles

26.1 Théorie des ensembles

Exercise 26.1. On appelle *différence symétrique* l'opération suivante, notée Δ, entre deux ensembles A et B :

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

Montrez que la différence symétrique est commutative et associative. **Pensez à dessiner !**

Dispose-t-elle d'un élément neutre ? D'inverses pour certains éléments ?

(Est-ce que la différence symétrique se distribue sur l'union ? l'intersection ?)

Exercise 26.2 (*Solution*)**.** Le calcul est très casse-pied, mais vous pouvez faire un dessin !

Le justifier proprement est formateur, et je ne vous mâcherai pas le travail en le faisant ici. Il s'agit de vérifier que $A\Delta B = B\Delta A$ (commutativité), puis $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ (associativité), puis $A\Delta\emptyset = A$ (élément neutre : $\emptyset$), et enfin $A\Delta A = \emptyset$ (inverse : $A^{-1} = A$).

Ici, il faut trouver que :

$$\begin{aligned}
A\Delta(B \cup C) &= (A\Delta B) \cup (A\Delta C) \\
A\Delta(B \cap C) &\neq (A\Delta B) \cap (A\Delta C) \\
A \cup (B\Delta C) &\neq (A \cup B)\Delta(A \cup C) \\
A \cap (B\Delta C) &= (A \cap B)\Delta(A \cap C)
\end{aligned}$$

26.2 Théorie des ensembles

Exercise 26.3. Soient E un ensemble, et $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de parties de E indexées par un ensemble I. Montrez que :

$$\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{X\in\mathcal{P}(I)} \left(\bigcup_{i\in X} A_i \cup \bigcup_{i\in I\backslash X} B_i \right)$$

Exercise 26.4 (*Solution*)**.** Soit $j \in I$ et $X \subset I$. On va montrer que $(A_j \cap B_j) \subset \left(\bigcup_{i\in X} A_i \cup \bigcup_{i\notin X} B_i\right)$.

— Si $j \in X$, alors on a : $(A_j \cap B_j) \subset A_j \subset \left(\bigcup_{i\in X} A_i \cup \bigcup_{i\notin X} B_i\right)$.

— Si $j \notin X$, alors on a : $(A_j \cap B_j) \subset B_j \subset \left(\bigcup_{i\in X} A_i \cup \bigcup_{i\notin X} B_i\right)$.

Finalement, on a bien :

$$\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B_i)\subset\bigcap_{X\subset I}\left(\bigcup_{i\in X}A_i\cup\bigcup_{i\notin X}B_i\right)$$

Étudions l'inclusion réciproque. Pour $X=\emptyset$ puis $X=I$, on obtient :

$$\bigcap_{X\subset I}\left(\bigcup_{i\in X}A_i\cup\bigcup_{i\notin X}B_i\right)\subset\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in I}A_j\right)=\bigcup_{i,j\in I}(A_i\cap B_j)$$

Or si $i\neq j$, on peut construire $X\in\mathcal{P}(I)$ tel que $i\notin X$ et $j\in X$. Si $x\in(A_i\cap B_j)$ et $x\notin A_k$ (pour $k\neq i$), $x\notin B_k$ (pour $k\neq j$), alors $x\notin\left(\bigcup_{k\in X}A_k\cup\bigcup_{k\notin X}B_k\right)$. Ainsi, on obtient bien :

$$\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B_i)\supset\bigcap_{X\subset I}\left(\bigcup_{i\in X}A_i\cup\bigcup_{i\notin X}B_i\right)$$

On a finalement l'égalité souhaitée.

26.3 Théorie des ensembles

Exercise 26.5. Soit E un ensemble. On définit la *fonction indicatrice* de $A\subset E$, notée $\mathbb{1}_A$, par $\forall x\in E, \mathbb{1}_A(x)=1$ si $x\in A$, $=0$ sinon.

Soient $A,B\subset E$. Exprimez, en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$: $\mathbb{1}_{\overline{A}}$, $\mathbb{1}_{A\cup B}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ et $\mathbb{1}_{A\Delta B}$.

Démontrez que $\mathbb{1}_A=\mathbb{1}_B$ si et seulement si $A=B$.

Démontrez ainsi que : $\cap$ et distributif sur Δ ; que Δ est associatif, etc.

Exercise 26.6 (*Solution*)**.** On a :

— $\mathbb{1}_{\overline{A}}=1-\mathbb{1}_A$.

— $\mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

— $\mathbb{1}_{A\cup B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

— $\mathbb{1}_{A\setminus B}=\mathbb{1}_A(1-\mathbb{1}_B)$.

— $\mathbb{1}_{A\Delta B}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$.

Si $\mathbb{1}_A=\mathbb{1}_B$, alors si $x\in A$, on a $\mathbb{1}_A(x)=1$, donc $\mathbb{1}_B(x)=1$, donc $x\in B$, on a : $A\subset B$. Par symétrie, on a $A=B$. La réciproque est évidente.

On montre que les fonctions indicatrices de $A\cap(B\Delta C)$ et de $(A\Delta B)\cap(A\Delta C)$ pour en montrer l'égalité. Or on a (on utilise $\mathbb{1}_A^2=\mathbb{1}_A$) :

$$\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)}=\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C}=\mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C)=\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C-2(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C)$$

Ainsi, $\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)}=\mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}$, ce qui montre la distributivité de $\cap$ sur Δ.

De même :

$$\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_C\mathbb{1}_B+4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$$

On obtient une formule symétrique, on en déduit que Δ est associative.

27 Théorie des groupes

27.1 Théorie des groupes

Exercise 27.1. Soir G un groupe. Soit X un ensemble et $\varphi : G \times X \to X$ qui vérifie : $\forall x \in X, \varphi(e, x) = x$ et $\forall g, h \in G, \forall x \in X, \varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(g \star h, x)$.

On note $\sim_G$ la relation binaire sur X : $\exists g \in G, y = \varphi(g, x)$. Montrez que $\sim_G$ est une relation d'équivalence.

Exercise 27.2 (*Solution*)**.** φ définit ce qu'on appelle une action de G sur X.

1. On a $x \sim_G x$ car $\varphi(x, e) = x$.
2. Si $x \sim_G y$, alors il existe $g \in G$ tel que $y = \varphi(g, x)$. Dans ce cas, on a $\varphi(g^{-1}, y) = \varphi(g^{-1}, \varphi(g, x)) = \varphi(g^{-1} \star g, x) = \varphi(e, x) = x$, d'où la symétrie.
3. Si $x \sim_G y$ et $y \sim_G z$, alors soit $g, h \in G$ tels que $y = \varphi(g, x)$ et $z = \varphi(h, y)$, alors $\varphi(h \star g, x) = \varphi(h, \varphi(g, x)) = \varphi(h, y) = z$. Ainsi $\sim_G$ est transitif.

On a bien une relation d'équivalence.

En réalité, on connaît déjà plein d'actions de groupe. Par exemple, l'action du groupe des rotations de l'espace qui laisse inchangé un cube ou un tétraèdre sur les sommets de ce dernier ; ou l'action du groupe des permutations sur $[1, n]$; ou l'action du groupe des translation (ou de quelque transformations géométriques que ce soit) sur les points du plan.

27.2 Théorie des groupes

Exercise 27.3. Soit G un groupe et $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrez que Ker φ est distingué dans G.

Exercise 27.4 (*Solution*)**.** On doit montrez que $\forall g \in G, x \in \text{Ker } \varphi, g^{-1}xg \in \text{Ker } \varphi$. Or, on a avec ces notations :

$$\varphi(g^{-1}xg) = \varphi(g)^{-1}\varphi(x)\varphi(g) = \varphi(g)^{-1}\varphi(g) = e_H$$

On a utilisé $\varphi(x) = e_H$. Ainsi, $g^{-1}xg \in \text{Ker } \varphi$. Ker φ est bien distingué dans G car c'est un sous-groupe de G stable par conjugaison.

27.3 Théorie des groupes

Exercise 27.5. Sur $]-1, 1[$, on définit une loi $\star$ par $\forall (x, y) \in]-1, 1[, x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$

Montrez que $(]-1, 1[, \star)$ est un groupe abélien.

Que pensez-vous des autres moyennes ?

Exercise 27.6 (*Solution*)**.** Il s'agit de la moyenne harmonique : $\frac{1}{x \star y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

La loi est interne (car $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$ pour $x, y > 1$), commutative, d'élément neutre 0, d'inverse $-x$, et associative car :

$$\frac{1}{(x \star y) \star z} = \frac{1}{x \star y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

La dernière expression est symétrique en x, y, z donc la loi est associative. On a bien un groupe abélien.

On peut faire de même avec la moyenne (arithmétique) : $x \star y = \frac{x+y}{2}$; la moyenne géométrique : $x \star y = \sqrt{xy}$; la moyenne quadratique : $x \star y = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$; et la moyenne arithmético-géométrique.

27.4 Théorie des groupes

Exercise 27.7. On sait que $3+3+3+3+3 = 3 \times 5$ et $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$. On dit que la multiplication est l'opération itérée de l'addition, et que la puissance est l'opération itérée de la multiplication.

Définissez et étudiez l'opération dont l'addition est l'opération itérée (oui, elle existe !).

Exercise 27.8 (*Solution*)**.** On note cette nouvelle loi $\heartsuit$. On veut calculer $x \heartsuit y$ pour $x, y \in \mathbb{N}$. **Attention, $\heartsuit$ n'est pas associative.** On considère que $((...(x \heartsuit x) \heartsuit x)...\heartsuit x) \heartsuit x = x + n$ où n est le nombre d'occurrences de x dans le membre de gauche.

Dès lors, $x \heartsuit x = x+2$, puis $(x+2) \heartsuit x = (x \heartsuit x) \heartsuit x = x+3$, et ainsi de suite : $(x+k) \heartsuit x = x + (k+1)$ pour $k \geq 2$.

On connaît déjà beaucoup de valeurs de $x \heartsuit y$, on peut conjecturer une formule générale, par exemple : $x \heartsuit y = \max(x, y) + 1$. Vérifions que cela fonctionne : $((...(x \heartsuit x) \heartsuit x)...\heartsuit x) \heartsuit x = x + n$ est bien vérifié. La loi ainsi définie est commutative mais pas associative (car $0 \heartsuit (0 \heartsuit 3) = 0 \heartsuit 4 = 5$ alors que $(0 \heartsuit 0) \heartsuit 3 = 2 \heartsuit 3 = 4$). Il n'y a pas d'élément neutre.

On aurait pu faire d'autres choix pour une loi générale, par contre, elle n'aurait pas été associative, car sinon, on aurait pu écrire : $x = 1 \heartsuit 1 \heartsuit ... \heartsuit 1$ avec $x - 1$ fois 1 ; puis $x \heartsuit x = (1 \heartsuit ... \heartsuit 1) \heartsuit (1 \heartsuit ... \heartsuit 1) = 1 + (x-1) + (x-1) \neq x+2$, en se débarrassant des parenthèse grâce à l'associativité.

Il ne peut pas non plus y avoir d'élément neutre (ni à droite, ni à gauche) car sinon $e \heartsuit e = e$. Or on sait que $x \heartsuit x = x \neq x$ pour tout x. (La recherche d'inverse est hors de propos.)

Reste la commutativité : peut-on définir des lois qui qui ne soient pas commutatives mais respectent $((...(x \heartsuit x) \heartsuit x)...\heartsuit x) \heartsuit x = x + n$? Oui, on peut par exemple simplement prendre 0 pour toutes les valeurs de $x \heartsuit y$ qui ne sont pas imposées par la règle (à savoir $(x+1) \heartsuit x = 0$ et $x \heartsuit y = 0$ pour $y < x$). Cela donne une opération qui "précède l'addition" et qui n'est pas commutative.

N.B. : On aurait pu choisir un autre parenthésage pour discuter de la non-associativité. Chaque parenthésage donne possiblement une loi différente (ou bien n'admet aucune loi).

27.5 Théorie des groupes

Exercise 27.9. Soit H un sous-groupe de G tel qu'il existe $g \in G$ tel que : $G = H \cup gH$ et $H \cap gH = \emptyset$. Montrez que H est distingué dans G.

Exercise 27.10 (*Solution*)**.** On doit montrer que $\forall x \in G, h \in H, xhx^{-1} \in H$. On fixe $g \in G$ tel que $H \cup gH = G$ et $H \cap gH = \emptyset$.

Si $x \in H$, alors on a évidement $xhx^{-1} \in H$ car H est un groupe. Sinon, il existe $h' \in H$ tel que $x = gh'$. On a alors :

$$xhx^{-1} = gh'hh'^{-1}g^{-1}$$

Or, si le dernier élément appartient à gH, alors il exite $h'' \in H$ tel que : $gh'hh'^{-1}g^{-1} = gh''$; d'où : $g = \left(h'' \left(h'hh'^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} \in H$. Or cela est impossible car $g = g.e \in gH$ et $gH \cap H = \emptyset$. Ainsi, $gh'hh'^{-1}g^{-1} \in H$, et finalement H est distingué dans G.

27.6 Théorie des groupes

Exercise 27.11. Sur $\mathbb{R}^2$, on définit une loi $\star$ par :

$$\forall((x,y),(x',y')) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2, (x,y) \star (x',y') = \left(x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}\right)$$

Montrez que $\left(\mathbb{R}^2, \star\right)$ est un groupe non abélien. Trouvez les application f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$ soit un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$.

Exercise 27.12 (*Solution*)**.** La loi est :

1. Interne : c'est évident.
2. Associative : $[(x,y) \star (z,t)] \star (u,v) = (x+z+u, (ye^z + te^{-x})e^u + ve^{-x-z}) = (x+z+u, ye^{z+u} + (te^u + ve^{-z})e^{-x}) = (x,y) \star [(z,t) \star (u,v)]$
3. Élément neutre : $(0,0)$, il suffit de vérifier.
4. Inverse : $(x,y)^{-1} = (-x,-y)$, il suffit de vérifier.
5. (Non-)commutative : $(0,1) \star (1,0) = (1, e^{-1})$ alors que $(0,1) \star (1,0) = (1, e^{+1})$.

On obtient bien un groupe non-abélien.

Si $\{(x, f(x); x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ pour cette loi, avec f dérivable, alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)e^y + f(y)e^{-x}$$

On en déduit tout d'abord que $f(0) = 0$ (car $f(x+0) = f(x) \times 1 + f(0)e^{-x}$ pour tout x). Ensuite, si on dérive par rapport à y, on obtient :

$$\forall x, y, f'(x+y) = f(x)e^y + f'(y)e^{-x}$$

En particulier, en $y = 0$: $f'(x) = f(x) + f'(0)e^{-x}$. Cela veut dire que f est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} f(0) = 0, f'(0) = \mu \\ f' - f = \mu e^{-x} \end{cases}$$

On obtient ainsi l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda e^x - \frac{\mu}{2}e^{-x}$. D'après la condition initiale, on a : $2\lambda - \mu = 0$.

Réciproquement, toute les fonctions $g : x \mapsto \alpha \sinh x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, vérifient $\forall x, y, g(x+y) = g(x)e^y + g(y)e^{-x}$, et donc $\{(x, g(x); x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ pour $\star$.

27.7 Théorie des groupes

Exercise 27.13 (Groupe de Grothendieck)**.** Un *monoïde commutatif* $(M, +)$ est un ensemble doté d'une opération qui est interne, associative, commutative et possède un élément neutre. On définit $\sim$ la relation binaires sur M^2 par $(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow \exists k \in M,\ a + b' + k = a' + b + k$. Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence (il faut penser (a, b) comme "$a - b$" mais uniquement formellement). **Attention, toute soustraction est interdite, toute simplification est interdite, mais la commutation est autorisée.**

Soit $G(M)$ l'ensemble des classes d'équivalence de M pour $\sim$. Soit (a, b) et (c, d) deux représentant de classe, on pose $(a, b) \star (c, d) = (a + c, b + d)$. Vérifiez que l'opération est bien définie et montrez que $(G(M), \star)$ est un groupe abélien (le groupe de Grothendieck, notamment $G(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$).

Soit H un autre groupe et $f : M \to H$ un morphisme de monoïdes commutatifs (un morphisme qui envoie le neutre sur le neutre et respecte les lois des monoïdes). Montrez qu'il existe un unique morphisme de groupe (abéliens) $g : G(M) \to H$ qui étend f (au sens où $g(a, e_M) = f(a)$ pour tout $a \in M$).

Exercise 27.14 (*Solution*)**.** La relation $\sim$ est :

- Réflexive : $(a, a) \sim (a, a)$ car, pour $k = e_M$ l'élément neutre, on a : $a + a + k = a + a + k$.
- Symétrique : Si $(a, b) \sim (a', b')$, alors, quitte à échanger le membre de droite et celui de gauche, il existe k tel que : $a' + b + k = a + b' + k$, c'est-à-dire que $(a', b') \sim (a, b)$.
- Transitive : Soient $(a_0, b_0) \sim (a_1, b_1)$ et $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$. Soient k_1, k_2 tels que $a_0 + b_1 + k_1 = a_1 + b_0 + k_1$ et $a_1 + b_2 + k_2 = a_2 + b_1 + k_2$. En posant $k = b_1 + k_1 + a_1 + k_2$, on a alors $(a_0, b_0) \sim (a_2, b_2)$ car :

$$a_0+b_2+k = (a_0+b_1+k_1)+(b_2+a_1+k_2) = (a_1+b_0+k_1)+(b_1+a_2+k_2) = a_2+b_0+k$$

Pour montrer que la relation est bien définie, il faut vérifier que, pour $c, d \in M$ fixés et tout $(a, b) \sim (a', b')$, on a bien $(a, b) \star (c, d) \sim (a', b') \star (c, d)$. Soit alors $k \in M$ tel que $a + b' + k = a' + b + k$, on pose $K = k$, et on a, par commutativité :

$$(a + c) + (b' + d) + K = (a' + c) + (b + d) + K$$

Maintenant, $\star$ sur $G(M)$ hérite de l'associativité, de la commutativité et du caractère interne de $+$ sur M puis sur $M \times M$. Reste à trouver l'élément neutre et les inverses. L'élément neutre est la classe de (e_M, e_M), qui est celle de (a, a) pour tout $a \in M$. En effet, pour tout $a \in M$, on a $a + e_M + k = e_M + a + k$ avec

$k = e_M$, donc $(a, a) \sim (e_M, e_M)$. Il s'agit de l'élément neutre car pour tout (a, b) représentant une classe de $G(M)$, on a : $(a, b) \star (e_M, e_M) = (a + e_M, b + e_M) = (a, b) = (e_M, e_M) \star (a, b)$.

Maintenant, pour (a, b) représentant une classe de $G(M)$, son inverse est la classe représenté par (b, a). En effet, on a :

$$(a, b) \star (b, a) = (a + b, b + a) = (a + b, a + b) \sim (e_M, e_M)$$

Ainsi, $G(M)$ est bien un groupe.

Maintenant, soit $f : M \to H$ un morphisme de monoïde (la seule chose interdite est de dire que $f(-a) = -f(a)$). On peut définir $g : G(M) \to H$ par (rappel, dans H, les soustractions sont autorisées) :

$$g((a, b)) = f(a) - f(b)$$

Il faut vérifier que cette application est bien définie (qu'elle ne dépend pas du représentant (a, b) choisi) et que c'est un morphisme de groupe. Pour la définition correcte, on constate que si $(a, b) \sim (a', b')$, alors posons $k \in M$ tel que $a'+b+k = a+b'+k$. Alors, comme f est un morphisme : $f(a')+f(b)+f(k) = f(a)+f(b')+f(k)$. Or H est un groupe, et l'égalité précédente est dans H, donc on peut simplifier $f(k)$ à droite :

$$g((a, b)) = f(a) - f(b) = f(a') - f(b') = g((a', b'))$$

En outre :

$$g((a, b)\star(c, d)) = f(a+c)-f(b+d) = (f(a) - f(b))+(f(c) - f(d)) = g((a, b))+g((c, d))$$

$$g((b, a)) = f(b) - f(a) = -(f(a) - f(b)) = -g((a, b))$$

Ainsi, g est bien un morphisme de groupes (abéliens), qui étend f au sens où, pour tout $a \in M$, on a $g((a, e_M)) = f(a)$ car $f(e_M) = e_H$.

Si un autre morphisme de groupe $h : G(M) \to H$ étend f, alors on a $h((a, e_M)) = f(a)$, donc, comme h est un morphisme, $h((e_M, b)) = -h((b, e_M)) = f(a)$. Dès lors :

$$h((a, b)) = h((a, e_M) \star (e_M, b)) = h((a, e_M)) + ((e_M, b)) = f(a) - f(b)$$

Le morphisme $g : G(M) \to H$ est bien l'**unique** morphisme de groupe qui étend $f : M \to H$. Ce type d'extension s'appelle une *propriété universelle* en théorie des Catégories.

27.8 Théorie des groupes

Exercise 27.15. Soit H un sous-groupe de G tel qu'il existe $g \in G$ tel que : $G = H \cup gH$ et $H \cap gH = \emptyset$. Montrez que H est distingué dans G.

En déduire que $\mathcal{A}_n$ est le seul sous-groupe de taille $\frac{n!}{2}$ dans $\mathcal{S}_n$, on utilisera pour cela le fait que la signature est le seul morphisme de groupe $\mathcal{S}_n \to \{-1; 1\}$ non trivial.

Exercise 27.16 (*Solution*)**.** Cf **??**.

Soit H un sous-groupe de $G = \mathcal{S}_n$ de taille $\frac{n!}{2}$. Soit $g \notin H$. On a $gH \cap H = \emptyset$ car si $gh \in H$, alors $g \in h^{-1}H = H$. On a aussi $\#gH = \#H$ car $x \mapsto gx$ est une bijection sur G, donc $H \cup gH = G$. Ainsi, on peut définir le morphisme $\phi : G \to \{-1; +1\}$ tel que $\phi(g) = -1$ et $\phi(h) = +1$ pour tout $h \in H$. On peut vérifier que c'est un morphisme par disjonction de cas. On a en plus $H = \mathrm{Ker}\ \phi$. Comme la signature est le seul tel morphisme, on obtient bien que $H = \mathcal{A}_n$.

27.9 Théorie des groupes

Exercise 27.17. Soit G un groupe. Soit $\sim$ la relation sur G définit par : $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G,\ y = gxg^{-1}$. Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence. Montrez que cette relation est trivial pour un groupe commutatif.

Soit $\iota_g : G \to G$ l'application $x \mapsto gxg^{-1}$. Justifier l'appellation *automorphisme* "intérieur". Montrez que $\iota_g \circ \iota_h = \iota_{gh}$ et $\iota_{e_G} = \mathrm{Id}_G$, donc $\iota_g^{-1} = \iota_{g^{-1}}$. En déduire que $\iota : g \mapsto \iota_g$ est un morphisme de groupe, de G vers $\mathrm{Aut}(G)$, le groupe des automorphismes de G. Pour $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, montrez que $\phi \circ \iota_g \circ \phi = \iota_{\phi(g)}$ et en déduire que $\mathrm{Im}\iota$ est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$.

Exercise 27.18 (*Solution*)**.** La relation $\sim$ est :

- Réflexive : $x = r_G x e_G^{-1}$.
- Symétrique : si $y \sim x$, alors soit $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. Alors $y = g^{-1}x\left(g^{-1}\right)^{-1}$. Or $g^{-1} \in G$, donc $x \sim y$.
- Transitive : si $x \sim y$ et $y \sim z$, soient g et h tels que $y = gxg^{-1}$ et $z = hyh^{-1}$. Alors $z = (hg)x(hg)^{-1}$, donc $x \sim z$.

Donc $\sim$ est bien une relation d'équivalence.

Soit $x \in G$, alors : $\iota_g \circ \iota_h(x) = g(hxh^{-1})g^{-1} = (gh)x(gh)^{-1} = \iota_{gh}(x)$. Donc on a bien $\iota_g \circ \iota_h = \iota_{gh}$.

En outre, $\iota_{e_G}(x) = e_G x e_G^{-1} = x = \mathrm{Id}_G(x)$.

Dès lors, $\iota_g \circ \iota_{g^{-1}} = \iota_{e_G} = \mathrm{Id}_G$, et symétriquement. Donc $\iota_g^{-1} = \iota_{g^{-1}}$.

Ainsi, l'application ι est un morphisme de G vers $\mathrm{Aut}(G)$.

Soit maintenant $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ et $g, x \in G$:

$$\phi \circ \iota_g \circ \phi^{-1}(x) = \phi(g\phi^{-1}(x)g^{-1}) = \phi(g)\phi(\phi^{-1}(x))\phi(g)^{-1} = \iota_{\phi(g)}(x)$$

Ainsi, pour $\psi \in \mathrm{Im}\iota$ et $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, on a bien $\phi\psi\phi^{-1} \in \mathrm{Im}\iota$: $\forall \phi \in \mathrm{Aut}(G),\ \phi\left(\mathrm{Im}\iota\right)\phi^{-1} \subseteq \mathrm{Im}\iota$, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}\iota$ est distingué dans $\mathrm{Aut}(G)$.

27.10 Théorie des groupes

Exercise 27.19. Soit G un groupe, on note le *commutateur* de $a, b \in G$, $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ et le groupe dérivé DG, le groupe qui est engendré par $\{[a, b]; a, b \in G\}$. Montré que DG est distingué dans G. Montrez que $H := \{gDG; g \in G\}$ peut être muni d'une structure de groupe (avec $(g_1DG) \star (g_2DG) = (g_1g_2)DG$), et que ce groupe est commutatif (on prendra le temps de vérifier que c'est un groupe et que l'opération $\star$ est bien définie).

Exercise 27.20 (*Solution*)**.** Soient $g \in G$ et $h \in DG$. On veut montrer que DG est distingué dans G, c'est-à-dire que $ghg^{-1} \in G$. Or h peut s'écrire comme un produit de commutateurs, commençons donc par le cas $h = [a, b]$: $g[a, b]g^{-1} = gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1})(ga^{-1}g^{-1})(gb^{-1}g^{-1}) = [gag^{-1}, gbg^{-1}]$. En fait, plus globalement, si $\phi : G \to G$ est un endomorphisme, alors $\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)]$. De fait, si h est un produit de commutateurs $[a_1, b_1]...[a_n, b_n]$, et ϕ un endomorphisme, on a $\phi(h) = \phi([a_1, b_1])...\phi([a_n, b_n]) = [\phi(a_1), \phi(b_1)]...[\phi(a_n), \phi(b_n)]$. Ainsi, l'image d'un produit de commutateurs est un produit de commutateurs. En particulier DG est normal car $\forall g \in G, h \in DG, ghg^{-1} \in DG$ en vertu du fait que $x \mapsto gxg^{-1}$ est un endomorphisme de G.

On a montré que $\forall g \in G, gDGg^{-1} \subset DG$. On va vérifier tout d'abord que la loi proposée est bien définie. Cela équivaut à ce que $\forall g_1, g_1', g_2 \in G, g_1DG = g_1'DG \Rightarrow (g_1DG) \star (g_2DG) = (g_1'DG) \star (g_2DG)$; ce qui revient à :$\forall g_1, g_2 \in G, h \in DG, (g_1DG) \star (g_2DG) = (g_1hDG) \star (g_2DG)$; c'est-à-dire $\forall g_2 \in G, h \in DG, g_2DG = hg_2DG$; finalement, l'opération est bien définie si et seulement si $\forall g_2 \in G, h \in DG, g_2^{-1}hg_2 \in DG$ (ce qui est le cas).

La loi $\star$ sur H est interne et associative (par héritage de l'associativité de la loi de groupe de G), son élément neutre est $DG = e_GDG$ (où e_G est l'élément neutre de G). L'inverse d'une classe est donné par la classe de l'inverse : $(gH)^{-1} = g^{-1}H$. Ainsi, H est bien muni d'une structure de groupe (on dit que c'est le groupe quotient de G par DG, on aurait pu parler du quotient d'un groupe par un sous-groupe distingué en toute généralité).

Reste à montrer que $(H, \star)$ est commutatif (ici, on va utiliser qu'on a le quotient par DG en particulier). Soient $g_1, g_2 \in G$, calculons $[g_1DG, g_2DG]$ (défini avec la même formule dans H que dans G) :

$$[g_1DG, g_2DG] = (g_1DG) \star (g_2DG) \star (g_1^{-1}DG) \star (g_2^{-1}DG) = [g_1, g_2]DG = DG$$

La dernière égalité vient du fait que $[g_1, g_2] \in DG$ d'après sa définition. Comme DG est l'élément neutre de H, on a : $\forall x, y \in H, [x, y] = xyx^{-1}y^{-1} = e_H$. C'est-à-dire : $\forall x, y \in H, xy = yx$. H est bien un groupe commutatif (c'est ce qu'on appelle *l'abélianisé* de G).

27.11 Théorie des groupes

Exercise 27.21 (Groupe diédral)**.** Dans le plan, pour $n \geq 2$ fixé, on note τ la rotation d'un $\frac{1}{n}$-ième de tour (autour de l'origine), et σ la symétrie par l'axe des abscisses. Soit $D_n = \langle \tau, \sigma \rangle$ le groupe diédral.

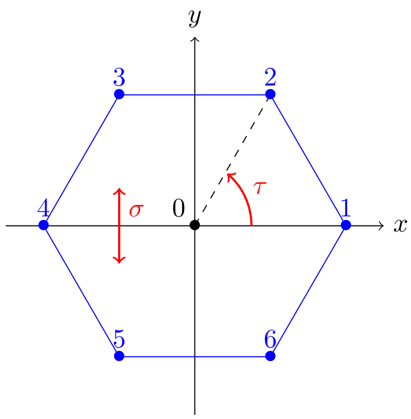
Expliquez en quoi D_n "capture" les symétries du polygone régulier à n côté.

Calculez σ^2, τ^n et $\sigma\tau\sigma^{-1}$. En déduire que D_n est fini, dénombrez-le.

Déterminez le centre $Z(D_n) = \{\rho \in D_n \ ; \ \forall \mu \in D_n, \ \rho\mu = \mu\rho\}$ en fonction de n. Quand est-ce que D_n est abélien ?

Les éléments $\tau^k\sigma$ sont appelés *réflexions*. Montrez que si n est impair, alors pour toutes réflexions ρ_1 et ρ_2, il existe $\mu \in D_n$ tel que $\rho_2 = \mu\rho_1\mu^{-1}$.

Exercise 27.22 (*Solution*)**.** Les éléments τ et σ du groupe diédral correspondent aux symétries fondamentales du polygone régulier à n côté. En effet, τ correspond à faire tourner le polygone sur lui-même jusqu'à ce que le polygone tourné coïncident avec le polygone de départ. De même, σ correspond à l'axe de symétrie du polygone. Le groupe engendré par ces symétries donnent toutes les symétries du polygone.



On a $\sigma^2 = id$ (id est l'application identité du plan, qui est l'élément neutre de D_n) car effectuer deux fois une symétrie autour de l'axe des abscisses revient à ne rien faire. En particulier $\sigma^{-1} = \sigma$. De la même manière, $\tau^n = id$ car effectuer n fois un $\frac{1}{n}$-ième de tour revient à faire un tour complet (donc à ne rien faire).

Prenons un polygone régulier et numérotons ses sommets de 1 à n. le sommet k est envoyé par τ sur $k+1$ et par σ sur $n-k+1$ (cf dessin). Donc :

$$k \xrightarrow{\sigma^{-1}} n-k+1 \xrightarrow{\tau} n-k+2 \xrightarrow{\sigma} n-(n-k+2)+1 = k-1$$

Cela s'étend à tout le plan naturellement. Finalement, $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{-1}$. Cela induit que $\sigma\tau = \tau^{-1}\sigma$, donc si on a un élément de D_n écrit $\gamma = \tau^{i_1}\sigma^{j_1}\tau^{i_2}\sigma^{j_2}...\tau^{i_r}\sigma^{j_r}$, on peut commuter les τ et les σ pour récrire γ sous la forme $\tau^i\sigma^j$. Ensuite, comme $\tau^n = id$ et $\sigma^2 = id$, on peut réduire i modulo n et j modulo 2, donc tout élément de D_n est de la forme $\tau^i\sigma^j$ avec $i \in [0, n-1]$ et $j \in \{0,1\}$. Ainsi $\#D_n \leq 2n$. On remarque aussi que les $\tau^i\sigma^j$ avec $i \in [0, n-1]$ et $j \in \{0,1\}$ sont deux à deux distincts (il suffit de regarder les images des sommets 1 et 2 pour s'en convaincre). De fait $\#D_n = 2n$.

Supposons maintenant que $\rho = \tau^k\sigma^m$ avec $k \in [0, n-1]$ et $m \in \{0,1\}$ commute avec tous les éléments de D_n. Alors en particulier, en utilisant la règle de commutation $\sigma\tau = \tau^{-1}\sigma$, si on suppose $m = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho\tau & = \tau\rho \\ \rho\sigma & = \sigma\rho \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{ll} \tau^{k-1}\sigma & = \tau^{k+1}\sigma \\ \tau^k\sigma^2 & = \tau^{-k}\sigma^2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{ll} \tau^2 & = id \\ \tau^{2k} & = id \end{array} \right.$$

Donc si $m = 1$, alors $\tau^2 = id$, donc nous sommes dans D_2 car tous les τ^i sont différents de id pour $[1, n-1]$. D_2 contient 4 éléments : id, τ, σ et $\tau\sigma$. Parmi ces 4 éléments, id et τ commutent avec tous les autres car $\tau \times \sigma = \sigma\tau^{-1} = \sigma \times \tau$ et $\tau \times (\tau\sigma) = \sigma = (\tau\sigma) \times \tau$.

Par ailleurs, si $m = 0$, alors :

$$\begin{cases} \rho\tau & = \tau\rho \\ \rho\sigma & = \sigma\rho \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \tau^{k+1} & = \tau^{k+1} \\ \tau^k\sigma & = \tau^{-k}\sigma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} id & = id \\ \tau^{2k} & = id \end{cases}$$

Comme les τ^i ne sont pas l'identité, l'égalité $\tau^{2k} = id$ conduit à $k = 0$ si n est impair et à $k \in \{0, n/2\}$ si n est pair. et donc n doit être pair.

En conclusion, $Z(D_{2n}) = \{id, \tau^n\}$ et $D_{2n+1} = \{id\}$. En particulier, D_n n'est jamais abélien car si G est abélien, alors $Z(G) = G$.

Soient $\rho_1 = \tau^{k_1}\sigma$ et $\rho_2 = \tau^{k_2}\sigma$ deux réflexions de D_n. Posons $\mu = \tau^i\sigma$, on a $\mu^{-1} = \sigma\tau^{-i} = \tau^i\sigma = \mu$:

$$\mu\rho_1\mu^{-1} = (\tau^i\sigma)(\tau^{k_1}\sigma)(\tau^i\sigma) = \tau^{i-k_1+i}\sigma$$

Donc si $k_2 = 2i - k_1\ [n]$, alors on aura $\rho_2 = \mu\rho_1\mu^{-1}$. On cherche de fait à fixer i tel que $2i = k_1 + k_2\ [n]$. Si $k_1 + k_2$ est pair, $i = \frac{k_1+k_2}{2}$ fonctionne, et si n est impair et $k_1 + k_2$ aussi, alors $i = \frac{k_1+k_2+n}{2}$ fonctionne car $2i$ est à considérer modulo n. Ainsi, si n est impair, alors toutes les réflexions sont *conjuguées* (c'est-à-dire que pour tout couple de réflexions (ρ_1, ρ_2), il existe $\mu \in D_n,\ \rho_2 = \mu\rho_1\mu^{-1}$).

N. B. : Si n est pair, la question est plus subtile. Les réflexions $\rho_1 = \tau^{k_1}\sigma$ $\rho_2 = \tau^{k_2}\sigma$ telles que $k_1 + k_2$ est pair sont conjuguées entre elles. Donc celles de $R_1 = \{\tau^{2k}\sigma\ ;\ k \in [0, n/2 - 1]\}$ sont conjuguées entre elles, et celles de $R_2 = \{\tau^{2k+1}\sigma\ ;\ k \in [0, n/2 - 1]\}$ sont conjuguées entre elles, mais si $\rho_1 \in R_1$ et $\rho_2 \in R_2$ alors ρ_1 et ρ_2 ne sont pas conjuguées entre elles (on a prouvé que si $\mu = \tau^i\sigma$ pour un certain i, alors $\rho_2 = \mu\rho_1\mu^{-1}$ est impossible ; de même, si $\mu = \tau^j$ pour un certain j, alors $\rho_2 = \mu\rho_1\mu^{-1}$ est impossible aussi). On obtient ainsi deux classes de conjugaisons distinctes pour les réflexions de D_n quand n est pair.

27.12 Théorie des groupes, Espaces vectoriels

Exercise 27.23. Soit G un groupe et E un corps. Soient $\chi_1, ..., \chi_n$ n morphismes de G dans $E^\times$, tous distincts. Montrer que $\chi_1, ..., \chi_n$ sont linéairement indépendants.

28 Topologie générale et réelle

28.1 Topologie générale

Exercise 28.1. Lacs de Wada.

28.2 Topologie générale

Exercise 28.2. Pour une norme absolue ultramétrique, montrez que deux boules sont soit disjointes soit l'une est incluse dans l'autre. Une norme est ultramétrique si on a : $\forall x, y, ||x + y|| \leq \max(||x||, ||y||)$.

Montrez que les boules fermées sont ouvertes et fermées.

Montrez que si $||a|| \neq ||b||$ alors $||a + b|| = \max(||a||, ||b||)$.

Exercise 28.3 (*Solution*)**.** Commençons par remarquer que si $z, t \in \mathcal{B}(x, R_x)$, alors on a $||z - t|| = ||(z - x) + (x - t)|| \leq \max(R_x, R_x) = R_x$.

Soit maintenant deux boules $\mathcal{B}(x, R_x)$ et $\mathcal{B}(y, R_y)$ avec $x \neq y$ et $R_x \leq R_y$. On suppose que $\mathcal{B}(x, R_x) \cap \mathcal{B}(y, R_y) \neq \emptyset$ et on va montrer que $\mathcal{B}(x, R_x) \subset \mathcal{B}(y, R_y)$ (ce qui est très étrange). Soit $z \in \mathcal{B}(x, R_x)$: $||z - x|| \leq R_x$. Alors, avec $t \in \mathcal{B}(x, R_x) \cap \mathcal{B}(y, R_y)$:

$$||z - y|| = ||(z - t) + (t - y)|| \leq \max(||z - t||, ||t - y||) \leq \max(R_x, R_y) = R_y$$

Ainsi, $z \in \mathcal{B}(y, R_y)$ et on a bien $\mathcal{B}(x, R_x) \subset \mathcal{B}(y, R_y)$.

$\mathcal{B}(x, R_x) = \{z; ||z - x|| \leq R_x\}$ est ouverte car pour $z \in \mathcal{B}(x, R_x)$, $\mathcal{B}(z, R_x) \subset \mathcal{B}(x, R_x)$ (et $R_x \neq 0$). En outre, $\mathcal{B}(x, R_x)$ est fermée car son complémentaire est ouvert : si z est tel que $||z - x|| > R_x$, soit $\varepsilon < R_x$, si $\mathcal{B}(x, R_x) \cap \mathcal{B}(z, \varepsilon) \neq \emptyset$, alors on a $\mathcal{B}(z, \varepsilon) \subset \mathcal{B}(x, R_x)$ d'après le raisonnement précédent, or $z \notin \mathcal{B}(x, R_x)$, donc $\mathcal{B}(x, R_x) \cap \mathcal{B}(z, \varepsilon) = \emptyset$ et on a bien défini une boule non nulle autour de z, ce qui montre que ${}^C\mathcal{B}(x, R_x)$ est ouverte.

Maintenant, soient a, b avec $||b|| < ||a||$. On remarquera que $||-b|| = ||b||$ car $||...||$ est une norme. Dès lors, on a d'une part : $||a+b|| \leq \max(||a||, ||b||) = ||a||$; et d'autre part $||a|| = ||a + b - b|| \leq \max(||a + b||, ||-b||)$, or $||a|| > ||b||$, donc $||a|| \leq ||a + b||$. Ces deux inégalités montrent que $||a + b|| = ||a||$ et plus généralement : $\forall a, b, ||a|| \neq ||b|| \Rightarrow ||a + b|| = \max(||a||, ||b||)$.

28.3 Topologie réelle

Exercise 28.4. Soit $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a, b \in A, a < x < b$ et $\forall a, b \in A, \frac{a+b}{2} \in A$. Montrez que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercise 28.5 (*Solution*)**.** Soient $x < y \in \mathbb{R}$. On peut trouver $a, b \in A$ tels que $a < x < y < b$. On pose les suites réelles $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(m_n)_n$ définies ainsi : $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Pour n fixé, soit $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, si $m_n < x$, on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$, si $m_n > y$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$, si $m_n \in [x, y]$, on s'arrête. Grâce à la propriété de moyennage de A, on sait que $\forall n, a_n, b_n, m_n \in A$. On veut montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}, m_N \in [x, y]$.

Raisonnons par l'absurde, si ce n'est pas le cas, alors $\forall n, a_n, b_n \notin [x, y]$. De fait, la récurrence garantit que $a_n < x < y < b_n$, donc $0 < y - x < b_n - a_n$. Or $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \to 0$, ce qui est une contradiction.

Finalement, il existe un N tel que $m_N \in [x, y]$, donc $A \cap [x, y] \neq \emptyset$.

28.4 Topologie réelle

Exercise 28.6. Montrez que $\{r^3; r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercise 28.7 (*Solution*)**.** Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Comme $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y}$, puis (toujours par stricte croissance ce la racine cubique) : $x < r^3 < y$. Ainsi, l'ensemble $\{r^3; r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

28.5 Topologie réelle

Exercise 28.8. Montrez que $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\}$ est non-vide, bornée, mais n'admet pas de borne supérieure. (Introduire $B = \{y \in \mathbb{Q}_+; y^2 \geq 2\}$.)

Exercise 28.9 (*Solution*)**.** On a évidemment $0 \in A$, et si $|x| \geq 2$, alors $x^2 \geq 4 > 2$, donc $A \subset [-2, 2]$ est borné.

Si A admet une borne supérieure, alors cela signifie que $B = \{y \in \mathbb{Q}_+; y^2 \geq 2\}$ admet un minimum. Or si on note $m = \frac{a}{b}$ ce minimum. Soit n assez grand pour que $0 < \frac{1}{n} < m - \sqrt{2}$. Alors $m - \frac{1}{n} \in B$ car $\left(m - \frac{1}{n}\right)^2 > \sqrt{2}^2 = 2$. Seulement $m - \frac{1}{n} < m$, ce qui contredit la définition de m.

Ainsi A n'a pas de borne supérieure.

28.6 Topologie réelle

Exercise 28.10. Soit $A \subset \mathbb{R}$ non-vide. Montrez que la fonction $d_A : x \mapsto \inf\{|x - a|; a \in A\}$ est bien définie puis : $\forall x, y \in \mathbb{R}, |d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|$.

Exercise 28.11 (*Solution*)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{|x - a|; a \in A\} \subset \mathbb{R}$ est non vide car A est non vide et minorée par 0, donc il admet un borne inférieure par l'axiome de la topologie réelle. Ainsi, d_A est bien définie. On remarque que si $x \in A$, alors $0 \in \{|x - a|; a \in A\}$, donc $d_A(x) = 0$. En outre, $d_A(x) \geq 0$ grâce à la valeur absolue.

Soit $a \in A$, grâce à l'inégalité triangulaire, on a : $|x - a| \leq |x - y| + |y - a|$, donc $d_A(x) \leq |x - y| + d_A(y)$. Pareillement, on peut échanger les rôles de x et y et on obtient finalement : $|d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|$. Une application respectant une telle propriété est appelée 1-lipchitzienne (voire cours sur la continuité).

28.7 Topologie réelle

Exercise 28.12 (Lemme de Cousin)**.** Soit $[a, b]$ un segment réel et δ une fonction strictement positive (appelée **jauge**) sur ce segment. Montrez qu'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ telle que :

$$\forall i \leq n, \exists t_i \in [x_{i-1}, x_i], x_i - x_{i-1} \leq \delta(t_i)$$

On pourra poser $C = \{y \in [a, b]; [a, y] \text{ possède une subdivision}\}$.

Exercise 28.13 (*Solution*)**.** C'est un exercice assez difficile...

On construit $C = \{y \in [a,b]; [a,y] \text{ possède une subdivision}\}$ ($[a,y]$ est dite δ-fine), on va montrer que $b \in C$. On sait que C est non vide car $a \in C$ (on peut subdiviser $\{a\}$ par $x_0 = a$ et $t_0 = a$). En outre, C est majoré par b. on note c sa borne supérieure. On va montrer que $c \in C$.

Supposons $c \notin C$. Soit $c - \delta(c) < d < c$ tel que $d \in C$ (ce qui existe car c est a borne supérieure de C). Soit $x_0, ..., x_n$ une subdivision de $[a,d]$ avec $t_0, ..., t_n$. On pose $x_{n+1} = c$ et $t_{n+1} = c$, on obtient que $[a,c]$ est δ-fine : $c \in C$.

Maintenant, si $c < b$, alors soit e tel que $c < e < b$ et $e - \delta(e) < c$, on peut refaire le même raisonnement te prouver que $e \in C$, ce qui contredit la majoration de C par c. De fait, $c = b$ et $[a,b]$ est δ-fine.

En réalité, cette propriété équivaut à l'axiome de la borne supérieure, et il est parfois plus pratique de raisonner avec cette formulation.

28.8 Topologie réelle

Exercise 28.14. On va montrer l'irrationalité de e. Montrez que $\forall n, e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$, puis $0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Raisonner alors par l'absurde.

Exercise 28.15 (*Solution*)**.** On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité $e = \sum_0^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$ est évidente ($e = \int_0^1 e^t \mathrm{d}t$).

Supposons l'égalité vérifiée pour un n donné. Dans ce cas, on effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \mathrm{d}t &= \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\right]_0^1 - (-1) \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{(n+1)!} + \left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient l'égalité souhaitée.

Ainsi : $0 < \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t < e \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{d}t = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$.

Si on suppose $e = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, alors on peut écrire que pour tout n : $0 < an! - b \sum_0^n \frac{n}{k!} < \frac{3b}{n+1}$. En particulier, avec $n = 3b$:

$$0 < an! - b \sum_0^{3b} \frac{(3b)!}{k!} < 1$$

Or on vient d'encadrer un entier entre 0 et 1, ce qui n'est pas possible, donc $e \notin \mathbb{Q}$.

28.9 Topologie réelle

Exercise 28.16 (Théorème de Beatty)**.** On note $A(x) = \{\lfloor nx \rfloor; n \in \mathbb{N}^*\}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrez que $(A(x), A(y))$ est un partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ et $x, y \notin \mathbb{Q}$.

Exercise 28.17 (*Solution*)**.** On introduit $a_n(x) = \#(A(x) \cap [1,n])$ et idem pour y.

Soit $k \geq \frac{n+1}{x}$, alors $\lfloor kx \rfloor \geq kx \geq n+1$, donc $a_n(x) \leq \frac{n+1}{x}$. De la même manière, si $k \leq \frac{n+1}{x} - 1$, alors $\lfloor kx \rfloor \leq kx \leq n+1-x$, et comme $\lfloor kx \rfloor$ est un entier, on a bien $\lfloor kx \rfloor \leq n$, ce qui induit : $a_n(x) \geq \frac{n+1}{x} - 1$. On obtient l'inégalité (qui vaut aussi pour y) :

$$a_n(x) \leq \frac{n+1}{x} \leq a_n(x) + 1$$

De fait, en retournant les inégalités, on obtient $\frac{a_n(x)}{n} \to \frac{1}{x}$, et si $(A(x), A(y))$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, on doit avoir : $a_n(x) + a_n(y) = n$, donc en passant à la limite : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. En outre, si x (ou y) appartient à $\mathbb{Q}$, alors l'autre aussi, et en posant $x = \frac{p_1}{q_1}$ et $y = \frac{p_2}{q_2}$, on a $\lfloor p_2 q_1 x \rfloor = \lfloor p_1 q_2 y \rfloor (= p_1 p_2)$, ce qui n'est pas.

Réciproquement, on suppose que $x, y \notin \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, et (par l'absurde) que $A(x) \cap A(y) \neq \emptyset$. Dans ce cas, soit $k = \lfloor nx \rfloor = \lfloor ym \rfloor$, Grâce aux inégalités usuelles, on obtient $k \leq n + m < k + 1$. Comme k, n et m sont des entiers, cela induit $k = n + m$, puis $k = nx$ et $k = ny$, ce qui contredit le caractère irrationnel de x et y. Soit maintenant $k = \lfloor nx \rfloor$, on veut montrez que toutes les valeurs $j \leq k$ sont dans $A(x) \cup A(y)$, c'est à dire qu'on veut montrer que $\#(A(x) \cup A(y)) = k$. On pose m tel que $\lfloor my \rfloor < k < \lfloor (m+1)y \rfloor$ (on a déjà prouvé qu'il ne pouvait pas y avoir égalité car $A(x) \cap A(y) = \emptyset$). Comme $x, y > 1$, $n \mapsto \lfloor nx \rfloor$ et $n \mapsto \lfloor ny \rfloor$ sont strictement croissante, donc il y a $n + m$ valeurs dans $A(x) \cup A(y)$ qui sont $\leq k$. Or on a :

$$\frac{k}{x} \leq n < \frac{k+1}{x} \quad \text{et} \quad \frac{k}{y} - 1 < m < \frac{k+1}{y}$$

En additionnant, on trouve : $k - 1 < n + m < k + 1$, d'où $k = n + m$, ce qui conclut.

Ce théorème permet d'assurer qu'on a toujours un moyen de proposer une partie qu'on est sûr de pouvoir gagner au jeu de Wythoff.

29 Trigonométrie

29.1 Trigonométrie

Exercise 29.1. Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\cos x) < \cos(\sin x)$.

Exercise 29.2 (*Solution*)**.** Plusieurs pistes sont possibles. La plus efficace consiste à poser la fonction $f : x \mapsto \sin\cos x - \cos\sin x$, puis d'en étudier le signe (c'est un réflexe à acquérir face à ce genre de problème). Une étude de signe commence toujours par la résolution de l'équation $f(x) = 0$, dont la résolution peut être rédigée comme il suit.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. On a alors : $\cos(\frac{\pi}{2} - \cos x) - \cos\sin x = 0$

De fait : $\frac{\pi}{2} - \cos x = \pm \sin x$

Il s'ensuit que : $\cos x \pm \sin x = \frac{\pi}{2}$

On remarque ici une forme en $a\cos\theta + b\sin\theta$, donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi)$. En appliquant ce résultat, on a : $\cos x \pm \sin x = \sqrt{2}\cos(x+\varphi_\pm)$ pour un certain $\varphi_\pm$ (qu'il n'est pas utile de calculer et qui est différent pour le $+$ et pour le $-$ du $\pm$, attention à l'abus de notation).

Dès lors : $\cos(x+\varphi_\pm) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Or une simple vérification donne : $\pi > 3 > 2\sqrt{2}$, donc $\cos(x+\varphi_\pm) > 1$.

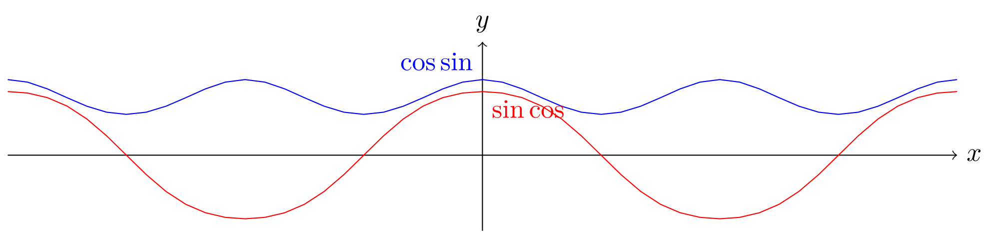
Cela est impossible, ainsi, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires garantit que f garde un signe fixe. Calculons $f(0)$ pour le déterminer (en utilisant à nouveau que $\sin < 1$) :

$$f(0) = \sin 1 - \cos 0 = \sin 1 - 1 < 0$$

Finalement, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$, ce qui se traduit par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin\cos x < \cos\sin x$$



29.2 Trigonométrie

Exercise 29.3. Montrez que : $\sin^2 + \cos^2 = 1$ et $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

Exercise 29.4 (*Solution*)**.** Il s'agit d'appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle usuellement tracé dans le cercle trigonométrique. Identifiez les côtés et lisez les valeurs, on retrouve directement la formule souhaitée. Le but est plus de voir si vous parvenez à fournir une explication orale claire du tac-au-tac sur un problème dont vous avez parfaitement intégré la formule mais pas forcément la démonstration.

On pourrait aussi vous demander de démontrer grâce au cercle trigonométrique que $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, en définissant $\tan x$ (pour $x \in \mathbb{R}$) comme la longueur indiquée sur la deuxième image de la page Wikipédia mentionnée ci-dessus.

29.3 Trigonométrie

Exercise 29.5. Montrez que

$$\sum_{\epsilon_i \in \{-1;+1\}} \cos(\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + ... + \epsilon_n a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 ... \cos a_n$$

En déduire la valeur de $\sum_{\epsilon_i \in \{-1;+1\}} \sin(\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + ... + \epsilon_n a_n)$.

Exercise 29.6 (*Solution*)**.** On peut le montrer par récurrence. L'écriture exponentielle est la plus efficace. Soit $S_n = \sum e^{i \sum_i^n \pm a_i}$. Il y a 2^n termes dans la somme, et on a :

$$S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2\cos a_1$$

$$S_{n+1} = \sum e^{i \sum_i^{n+1} \pm a_i} = e^{ia_n} S_n + e^{-ia_n} S_n = 2 \cos a_n S_n$$

Par récurrence, on montre bien que : $S_n = 2^n \prod_i^n \cos a_i$

On a ensuite les parties réelles et imaginaires :

$$\sum \cos\left(\sum_i^n \pm a_i\right) = \Re(S_n) = 2^n \prod_i^n \cos a_i$$

$$\sum \sin\left(\sum_i^n \pm a_i\right) = \Im(S_n) = 0$$

29.4 Trigonométrie

Exercise 29.7. Calculez :

$$\sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Exercise 29.8 (*Solution*)**.** On rappelle que : $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$. On note $\Re z$ et $\Im z$ les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe z. Dès lors (la deuxième ligne est une somme géométrique) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) &= \Re\left(\sum_{k=0}^n e^{\frac{k\pi}{2}}\right) \\
&= \Re\left(\frac{1 - e^{i\frac{(n+1)\pi}{2}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{2}}}\right) \\
&= \Re\left(\frac{2i \sin\frac{(n+1)\pi}{4} e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}}{2i \sin\frac{\pi}{4} e^{i\frac{\pi}{4}}}\right) \\
&= \frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} \Re\left(e^{i\frac{n\pi}{4}}\right) \\
&= \sqrt{2} \sin\frac{(n+1)\pi}{4} \cos\frac{n\pi}{4}
\end{aligned}$$

29.5 Trigonométrie

Exercise 29.9. Calculer (on doit trouver $\frac{3}{2}$) :

$$\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$$

Exercise 29.10 (*Solution*)**.** Soit x le nombre en question. On a :

$$\begin{aligned}
x &= 2(\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8})\\
&= 2(\cos^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8})\\
&= 2\left((\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8})^2-2\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}\right)\\
&= 2\left(1^2-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{8}\right)\\
&= 2\left(1-\frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

29.6 Trigonométrie

Exercise 29.11. Résoudre l'équation :

$$2^{4\cos^2 x+1}+16\times 2^{4\sin^2 x-3}=20$$

(On doit trouver $x\in\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$.)

Exercise 29.12 (*Solution*)**.** Nommons (E) l'équation à résoudre :

$$\begin{aligned}
&(E)\\
\Leftrightarrow\ & 2^{4\cos^2 x}+16\times 2^{-4\cos^2 x}-10=0\\
\Leftrightarrow\ & \left(2^{4\cos^2 x}\right)^2-10\times 2^{4\cos^2 x}+16=0\\
\Leftrightarrow\ & 2^{4\cos^2 x}\ \textit{est solution de}\ X^2-10X+16=0\\
\Leftrightarrow\ & 2^{4\cos^2 x}\in\{2;8\}\\
\Leftrightarrow\ & \cos x\in\{\pm\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\}\\
\Leftrightarrow\ & x\in\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)
\end{aligned}$$

29.7 Trigonométrie

Exercise 29.13. Résoudre l'équation : $\cos 3x=\sin 2x$. Grâce à la formule $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$, en déduire les valeurs de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ pour $\theta\in\{\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{5};\frac{3\pi}{10}\}$.

Exercise 29.14 (*Solution*)**.** Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\cos 3x = \sin 2x &\Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \pm 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi\\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\cos 3x = \sin 2x &\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = 2\sin x \cos x\\ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad -4\cos^3 x + 3 + 2\sin x = 0\\ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad 4\sin^2 x - 1 + 2\sin x = 0\end{aligned}$$

Donc $\sin\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{13\pi}{10}$ sont solutions de $4X^2 + 2X - 1 = 0$ (car leur cosinus est non nul). Or les racines de $4X^2 + 2X - 1$ sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Comme $\sin\frac{3\pi}{10} = -\sin\frac{13\pi}{10}$ et avec une étude de signe, on trouve finalement :

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Enfin, on peut remarquer que :

$$\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Puis (attention à justifier le signe par un cercle trigonométrique) :

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Pour compléter le tableau, on peut remarquer que :

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{10}} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \cos\frac{3\pi}{10} = \sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

29.8 Trigonométrie

Exercise 29.15. Simplifiez $\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$ et en déduire $\tan\frac{\pi}{24}$. Quels sinus et cosinus s'en déduisent ?

Exercise 29.16 (*Solution*)**.** On a, si $(p+q) \notin \pi\mathbb{Z}$:

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = \frac{-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}} = -\tan\frac{p-q}{2}$$

On peut alors utiliser $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ pour obtenir (penser à vérifier le signe) :

$$\tan\frac{\pi}{24} = \frac{\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}/2 - 1/2}{\sqrt{3}/2 + \sqrt{2}/2} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 2+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

Dès lors, avec les formules de tangentes de l'angle de moitié, on retrouve la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

30 Trigonométrie réciproque

30.1 Trigonométrie réciproque

Exercise 30.1. (Montrez que $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2}$.)

Montrez que $\arctan(e^x) - \arctan(\tanh\frac{x}{2})$ est une constante ($= \frac{\pi}{4}$).

Exercise 30.2 (*Solution*)**.** (On dérive par composition, d'abord sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$. On pose $f : x \mapsto \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Ainsi, f est constante sur les intervalles où elle est définie, et en testant pour $x=-1$ et $x=1$, on obtient l'égalité voulue.)

On procède de même avec la fonction $g : x \mapsto \arctan(e^x) - \arctan(\tanh\frac{x}{2})$. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable par composition. On a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^x\frac{1}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\cosh^2\frac{x}{2}}\frac{1}{1+\tanh^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1/2}{\cosh^2\frac{x}{2} + \sinh^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1/2}{\frac{1}{4}(2e^x + 2e^{-x})} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, g est constante sur $\mathbb{R}$, et on a d'ailleurs $g(0) = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.

30.2 Trigonométrie réciproque

Exercise 30.3. $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} (= \frac{\pi}{4})$.

Exercise 30.4 (*Solution*)**.** Premièrement, $0 \leq \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} < \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5}\right) = \frac{1/2 + 1/5}{1 - 1/2 \times 1/5} = \frac{7}{9}$$

De la même manière, $0 \leq \arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8} < \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\tan\left(\arctan\frac{7}{9} + \arctan\frac{1}{8}\right) = \frac{7/9 + 1/8}{1 - 7/9 \times 1/8} = \frac{65}{65} = 1$$

Finalement : $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

30.3 Trigonométrie réciproque

Exercise 30.5. Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan \frac{2}{k^2}$. Calculez $\lim_{+\infty} u_n$.

($u_n = \arctan(n+1) + \arctan n - \arctan 1 - \arctan 0 \to \frac{3\pi}{4}$. Il faut retrouver la formule d'addition des arctan.)

Exercise 30.6 (*Solution*)**.** Il faut démontrer la formule de sommation des arctan (en dérivant). Pour $x, y \in [0; \frac{\pi}{2}[$:

$$\arctan \frac{x+y}{1-xy} = \arctan x + \arctan y$$

Dès lors, on constate que (comme arctan est impaire) :

$$\arctan \frac{2}{k^2} = \arctan(k+1) - \arctan(k-1)$$

On obtient une somme télescopique sur 2 rangs, puis le terme général de la suite.

30.4 Trigonométrie réciproque

Exercise 30.7. Résoudre $\arcsin x + \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Exercise 30.8 (*Solution*)**.** Comme somme de fonctions strictement croissante, la fonction $x \mapsto \arcsin x \arcsin \frac{x}{2}$ est strictement croissante et réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0; \frac{2\pi}{3}]$. L'équation a donc un unique solution. Or, dans $[0, \frac{2\pi}{3}]$, il y a un seul argument tel que son sinus vaut $\sin \frac{\pi}{4} (= \frac{1}{\sqrt{2}})$. On peut donc raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \sin\left(\arcsin x + \arcsin \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\Leftrightarrow \ldots \\
&\Leftrightarrow 17x^4 - 20x^2 + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{10 - 4\sqrt{2}}{17}}
\end{aligned}$$

30.5 Trigonométrie réciproque

Exercise 30.9 (Formule de Machin)**.** Montrez que : $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$.

Exercise 30.10 (*Solution*)**.** On se rappelle que $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$. Dès lors, $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$, en particulier avec $x = \arctan \frac{1}{5}$, on a :

$$\tan\left(2 \arctan \frac{1}{5}\right) = \frac{2/5}{1 - 1/25} = \frac{5}{12}$$

Puis $2\arctan\frac{1}{5} = \arctan\frac{5}{12}$. On applique la même idée :

$$\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) = \tan\left(2\arctan\frac{5}{12}\right) = \frac{2\times{}^{5}/_{12}}{1-{}^{25}/_{144}} = \frac{120}{119}$$

Pour finir, remarquons que $-\arctan\frac{1}{239} = \arctan\frac{-1}{239}$, puis :

$$\begin{aligned}\tan\left(4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}\right) &= \frac{\frac{120}{119}+\frac{-1}{239}}{1-\frac{120}{119}\times\frac{-1}{239}}\\ &= \frac{120\times 239-119}{119\times 239+120} = \frac{120\times 238+1}{119\times 240+1}\\ &= \frac{120\times 2\times 119+1}{119\times 2\times 120+1} = 1\end{aligned}$$

Dès lors :

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

N.B. : Cette formule a été utilisée par John Machin pour calculer à la main les 100 première décimales de π, vers 1706. En effet, on verra dans le cours sur le développement limité que $\arctan x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$. On en déduit que :

$$\pi = \lim_{n\to+\infty} 4\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(4\left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1} - \left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1}\right)\right)$$

On "peut" calculer la valeur de la somme pour des n de plus en plus grands pour avoir une valeur approchée de π. La méthode est juste, mais de bien meilleures méthodes se sont développées depuis !

31 ? ? ?

31.1 ? ? ?

Exercise 31.1. Énigme des trois maisons de Dunedey.

Énigme des cavaliers d'Al-Adli.

31.2 ? ? ?

Exercise 31.2 (Ponts de Köenigsberg)**.** Montrez qu'il n'est pas possible de construire tétraèdre en sculpture sur ballon.

31.3 ? ? ?

Exercise 31.3. Récurrence transfinie sur une suite de Goodstein faible : http://blog.kleinproject.org/?p=722&lang=fr.