Université Félix HOUPHOUËT–BOIGNY UFR Maths Info

COURS DE MÉCANIQUE 1
MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Juin 2020

Responsable du cours :

SYLLA Moussa

Maître de Conférences

CHAPITRE I : RAPPEL DE CALCULS VECTORIELS

On note $R = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le repère cartésien orthonormé direct de l'espace à 3 dimensions :

O est l'origine de R, les axes $(O; \vec{\imath})$, $(O; \vec{\jmath})$ et $(O; \vec{k})$ sont orthogonaux deux à deux, $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est la base orthonormée directe de R.

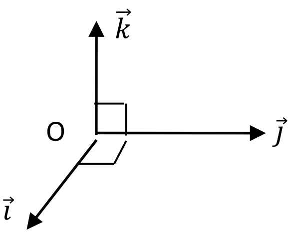


Figure 1 : Base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

I.1 PRODUIT SCALAIRE

Considérons deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées cartésiennes respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) sur la base de R :

$\vec{U} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath} + u_3\vec{k}$ ou bien $\vec{U}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$\vec{V} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$ ou bien $\vec{V}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le nombre réel noté $\vec{U} . \vec{V}$, défini par :

$$\boxed{\vec{U} . \vec{V} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i\, v_i} \qquad (1.a)$$

La formule (1.a) reste valable lorsque la base de (R) est orthonormée.

I.1.1 Norme d'un vecteur

On considère un vecteur $\vec{U}$ de coordonnées cartésiennes (u_1, u_2, u_3) sur la base de (R). La norme de $\vec{U}$ est le nombre réel noté $\|\vec{U}\|$ défini par :

$$\boxed{\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U}^2} = \sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^3} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} u_i{}^2}} \qquad (1.b)$$

La formule (1.b) reste valable lorsque la base de (R) est orthonormée.

Autre notation de la norme $\|\vec{U}\| = U$

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ base orthonormée de (R) $\Rightarrow \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$

I.1.2 Représentation géométrique

Considérons un plan rapporté au repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ orthonormé d'origine O (figure 2) :

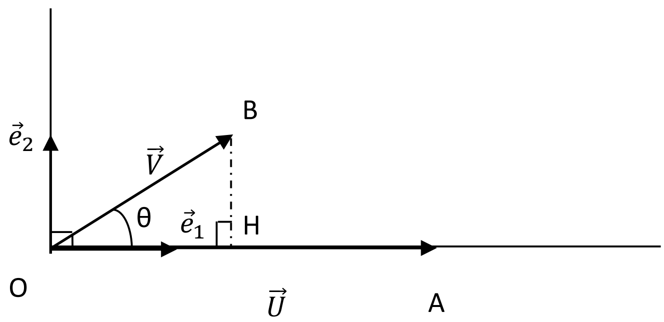


Figure 2 : plan rapporté à $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(u_1, 0)$ et (v_1, v_2) dans le repère $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, définis par les points A et B du plan tels que :

$\vec{U} = \overrightarrow{OA} = u_1\vec{e}_1$

$\vec{V} = \overrightarrow{OB} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$ et $\theta = (\widehat{\vec{U}, \vec{V}})$

$\vec{U}.\vec{V} = u_1v_1$, or $v_1 = \|\vec{V}\| cos\theta = V\, cos\theta$ et $\|\vec{U}\| = u_1 = U$

$$\Rightarrow \quad \vec{U}.\vec{V} = u_1v_1 = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\|\, cos\theta = U \times V\, cos\theta$$

De façon générale si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ont des coordonnées quelconques respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans le repère à trois dimensions, on a la formule suivante :

$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\|\, cos\theta \qquad (1.c)$$

Où $\theta = (\widehat{\vec{U}, \vec{V}})$
Remarque : $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux ($\vec{U} \perp \vec{V}$) si et seulement si $\vec{U}.\vec{V} = 0$

I.2 PRODUIT VECTORIEL

Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées cartésiennes respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans le repère orthonormé direct (R). On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{U}$ et $\vec{V}$, noté
$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$, le vecteur $\overrightarrow{W}$.
$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$ défini par :

$\overrightarrow{W}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ dans (R) :

$$\boxed{\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}} \quad (2.a)$$

Donc $w_1 = u_2v_3 - u_3v_2, w_2 = u_3v_1 - u_1v_3$, et $w_3 = u_1v_2 - u_2v_1$

En appliquant la formule (2.a) à la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de (R) :

$\vec{\imath}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\jmath}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a :

$$\begin{cases} \vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \\ \\ \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}; \ \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}; \ \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath} \end{cases}$$

$\forall \overrightarrow{U}$ et $\vec{V}$, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = -\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{U}} \quad (2.b)$$

I.2.1 Propriétés

Soit $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$

. Cas où $\overrightarrow{W} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{U} = \vec{0}$, $\vec{V} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{U} // \overrightarrow{V}$

. $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} \Rightarrow \overrightarrow{U}.\overrightarrow{W} = 0$ et $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{W} = 0$ donc $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{V}$

I.2.2 Calcul de la norme de $\overrightarrow{\boldsymbol{W}} = \overrightarrow{\boldsymbol{U}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V}}$

En utilisant la formule (2 .a) on a :

$$\overrightarrow{W}^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$$

En développant et en arrangeant ces termes on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{W}^2 = \|\vec{U}\|^2 \times \|\vec{V}\|^2 \left[1 - cos^2\left(\widehat{\vec{U}, \ \vec{V}}\right)\right] = \|\vec{U}\|^2 \times \|\vec{V}\|^2 sin^2\left(\widehat{\vec{U}, \ \vec{V}}\right)}$$

I .3 PRODUIT MIXTE DE TROIS VECTEURS DANS UN ESPACE A 3 DIMENSIONS

Considérons trois vecteurs $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$ et $\vec{U}_3$ dans un espace à 3 dimensions rapporté à un repère orthonormé (R) = $\left(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ (figure 3).

Le produit mixte des trois vecteurs $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$ et $\vec{U}_3$ est la quantité scalaire définie par :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{U_1}\ \wedge \overrightarrow{U_2}\right).\vec{U}_3} \qquad (3.a)$$

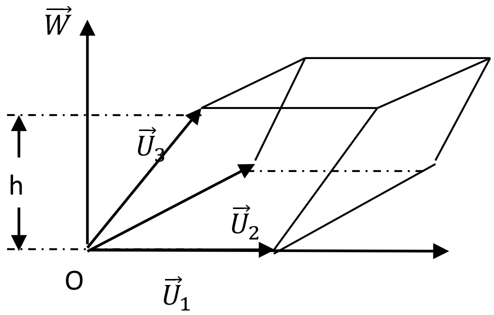


Figure 3 : parallélépipède construit sur $\left(\vec{U}_1,\ \vec{U}_2,\ \vec{U}_3\right)$

I.3.1 Calcul de Volume

La valeur absolue du produit mixte de la formule (3.a) s'identifie au volume limité par le parallélépipède de la figure3, construit avec les 3 vecteurs $\vec{U}_1$, $\vec{U}_2$ et $\vec{U}_3$.

L'aire de la base de ce parallélépipède est la norme du vecteur $\overrightarrow{W}$ défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U_1}\ \wedge \overrightarrow{U_2}} \qquad (3.b)$$

La hauteur h de ce parallélépipède est la norme du vecteur :

$$\boxed{cos\left(\widehat{\overrightarrow{W},\ \ \overrightarrow{U_3}}\right) \times \overrightarrow{U_3}} \qquad (3.c)$$

I.3.2 Propriété du produit mixte

Par permutation circulaire, on obtient le résultat suivant pour le produit mixte des trois vecteurs $\overrightarrow{U_1}$, $\overrightarrow{U_2}$,$\overrightarrow{U_3}$:

$$\forall\ \overrightarrow{U_1},\overrightarrow{U_2}\,,\overrightarrow{U_3},\ \left(\overrightarrow{U_1}\ \wedge \overrightarrow{U_2}\right).\overrightarrow{U_3} = \left(\overrightarrow{U_2}\ \wedge \overrightarrow{U_3}\right).\overrightarrow{U_1} = \left(\overrightarrow{U_3}\ \wedge \overrightarrow{U_1}\right).\overrightarrow{U_2} \qquad (3.d)$$

I.4 DOUBLE PRODUIT VECTORIEL

Considérons trois vecteurs $\overrightarrow{U_1}$, $\overrightarrow{U_2}$,$\overrightarrow{U_3}$ de l'espace à 3 dimensions. Le double produit vectoriel de $\overrightarrow{U_1}$, $\overrightarrow{U_2}$ et $\overrightarrow{U_3}$ est le vecteur défini par :

$$\overrightarrow{U_1} \wedge \left(\overrightarrow{U_2} \wedge \overrightarrow{U_3}\right) \quad (4.a)$$

En utilisant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{U_1}$, $\overrightarrow{U_2}$, et$\overrightarrow{U_3}$ dans une base orthonormée, on montre que :

$$\overrightarrow{U_1} \wedge \left(\overrightarrow{U_2} \wedge \overrightarrow{U_3}\right) = \left(\overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{U_3}\right) \times \overrightarrow{U_2} - \left(\overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{U_2}\right) \times \overrightarrow{U_3} \quad (4.b)$$

Université Félix HOUPHOUËT–BOIGNY UFR Maths Info

COURS DE MÉCANIQUE 1
MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Juin 2020

Responsable du cours :

SYLLA Moussa

Maître de Conférences

CHAPITRE II   CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

II .1   SYSTÈMES DE COORDONNÉES

La position d'un point matériel dans l'espace sera repérée par l'un des systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques ou sphériques.

II .1 .1   Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes sont celles déjà évoquées dans le chapitre I. On considère l'espace à trois dimensions rapporté à un repère orthonormé direct $R_1(O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ cartésien. Le point matériel A est repéré dans R_1 par ses coordonnées cartésiennes notées (x, y, z) :

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3} \quad (2.a)$$

Ou : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

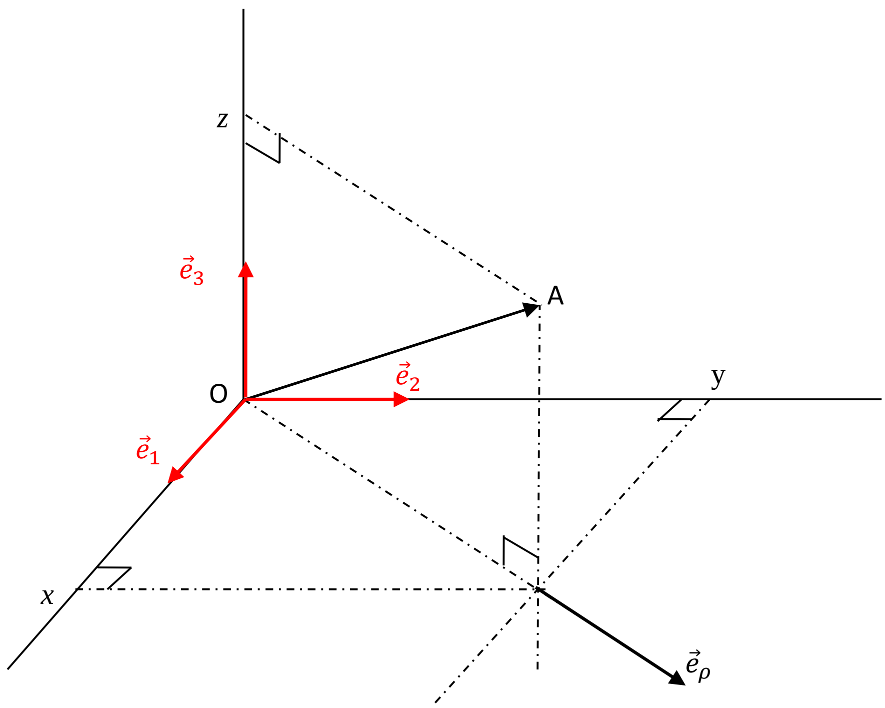


Figure 4 : repère cartésien $R_1(O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

II .1 .2 Coordonnées cylindriques

On rapporte l'espace à 3 dimensions à un repère cylindrique $R_2 = (O;\ \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$, d'origine O et de base orthonormée notée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

Considérons le point A de coordonnées cartésiennes (x, y, z) de la figure 5.

P et H désignent les projections orthogonales respectives de A sur le plan $(O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et sur l'axe $(O ; \vec{e}_3)$.

Les paramètres ρ, φ et z sont définis par :

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|, \rho \text{ est une longueur} \\ \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{OP}}\right) : \text{paramètre d'angle} \\ \text{z} = \left\|\overrightarrow{OH}\right\| : la\ côte \end{array}} \qquad (2.b)$$

La base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ est définie par :

$$\boxed{\vec{e}_\rho = \frac{\overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OP}\right\|}\ ;\ \vec{e}_z = \vec{e}_3, \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho} \qquad (2.c)$$

Les paramètres (ρ, φ z) définis en (2.b) représentent les coordonnées cylindriques du point A . Il résulte de la formule (2.b) la représentation géométrique suivante :

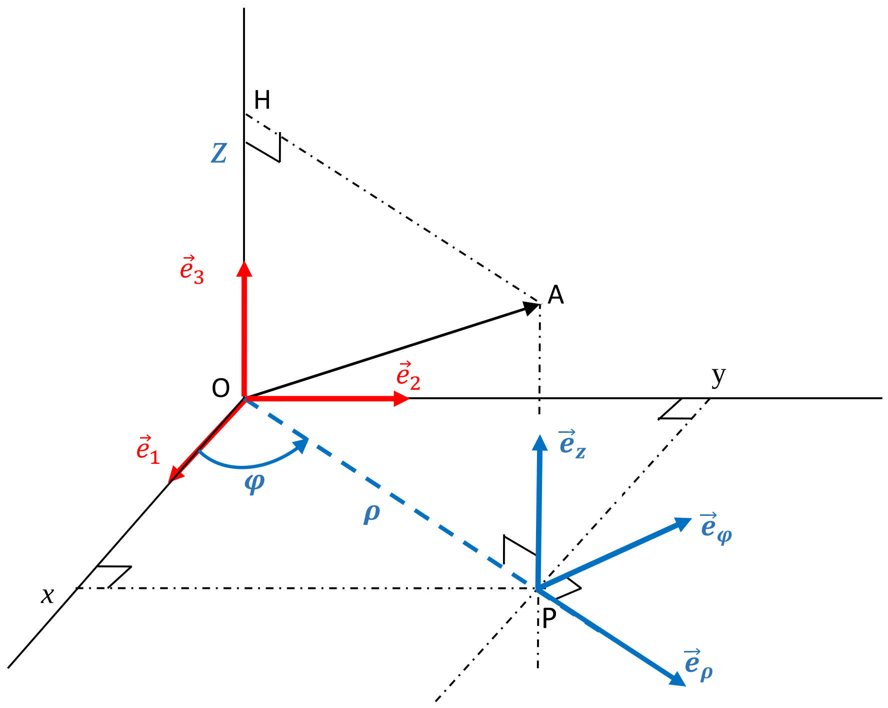


Figure 5 : repère cylindrique $R_2(O;\ \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OH}} \quad (2.d)$$

$\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

Dans le plan $(O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on obtient :

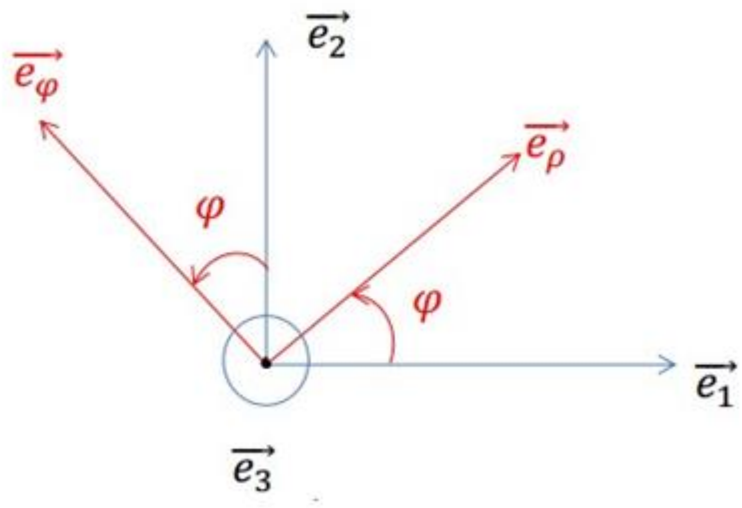


Figure (2.2.c)

Il en résulte :

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{e}_\rho \ = \cos(\varphi)\,\vec{e}_1 \ + \sin(\varphi)\,\vec{e}_2 \\ \\ \vec{e}_\varphi \ = \ \cos(\varphi)\,\vec{e}_2 \ - \sin(\varphi)\,\vec{e}_1 \end{array}} \qquad (2.e)$$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OH} = \rho\vec{e}_\rho \ + z\vec{e}_z$

D'après (2.e) on a :

$\overrightarrow{OA} = \rho\cos(\varphi)\,\vec{e}_1 \ + \rho\sin(\varphi)\,\vec{e}_2 \ + z\vec{e}_z$

On rappelle que dans le repère cartésien R_1, (x,y,z) sont les coordonnées de A :

$\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_1 + \ y\vec{e}_2 \ + z\vec{e}_z = \rho\cos(\varphi)\,\vec{e}_1 \ + \rho\sin(\varphi)\,\vec{e}_2 \ + z\vec{e}_z$

$$\begin{cases} x = \ \rho\ cos\varphi \\ \\ y = \rho\sin\varphi \\ \\ z = z \end{cases} \qquad (2.f)$$

Remarque : Les coordonnées cylindriques sont adaptées pour décrire des systèmes physiques qui ont une symétrique cylindrique.

II .1.3 Coordonnées sphériques

On rapporte l'espace à trois dimensions à un repère sphérique $R_3 = \ (\ O; \vec{e}_r\,, \vec{e}_\theta\,, \vec{e}_\varphi\ )$ d'origine O de base orthonormée notée ($\vec{e}_r\,, \vec{e}_\theta\,, \vec{e}_\varphi$).

Considérons le point A de coordonnées cartésiennes (x, y, z) de la figure 6.

P et H désignent les projections orthogonales respectives de A sur le plan (O ; $\vec{e}_1\,, \vec{e}_2$) et sur l'axe (O ; $\vec{e}_3$).

Les paramètres r, θ, φ sont définis par:

$$\boxed{\begin{array}{l} r = \left\|\overrightarrow{OA}\right\|,\ paramètre\ de\ longueur \\ \\ \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{e_3},\ \ \overrightarrow{OA}}\right),\ paramètre\ d'angle \\ \\ \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{e_1},\ \ \overrightarrow{OP}}\right),\ paramètre\ d'angle \end{array}} \qquad (2.g)$$

La base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ est définie par :

$$\boxed{\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}\ ,\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_\rho\ ,\ \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r} \qquad (2.h)$$

Où on rappelle que $\vec{e}_\rho = \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|}$

Les paramètres (r, θ, φ) définis en (2.h) sont appelés coordonnées sphériques du point A.

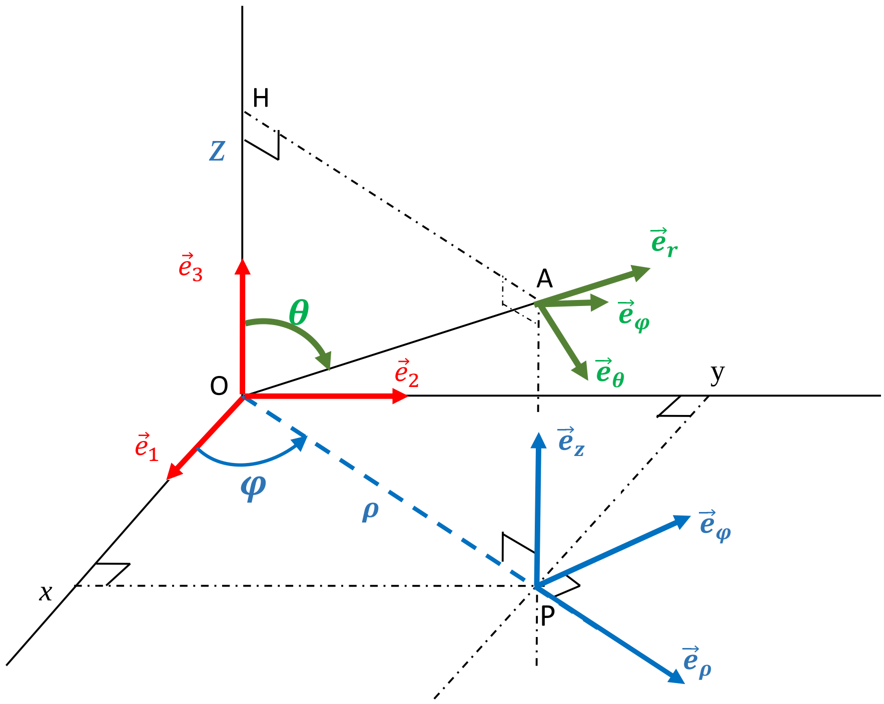


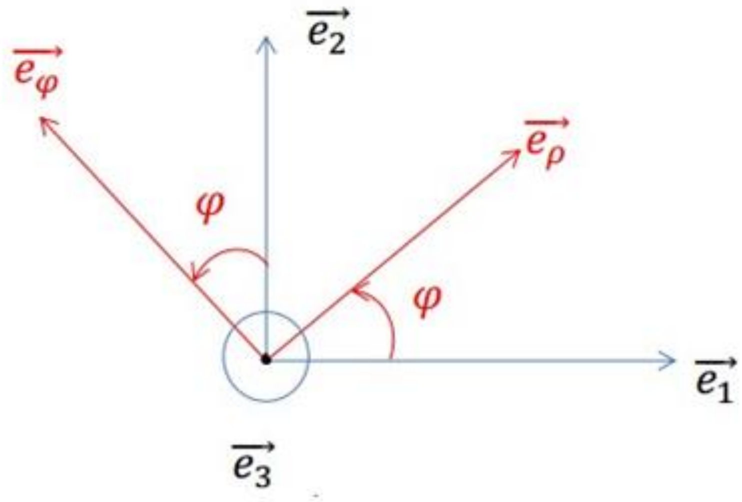
Figure 6 : repère sphérique $R_3\ (O; \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

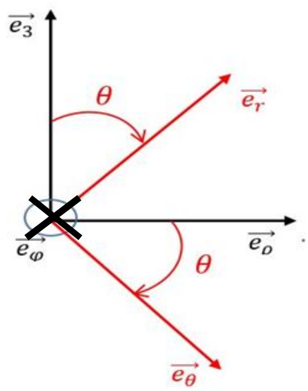
$\overrightarrow{OA} = \|\overrightarrow{OA}\|\vec{e}_r\ ; r = \|\overrightarrow{OA}\|$

$\overrightarrow{OA} = r\vec{e}_r$

On rappelle que (x,y,z) sont les coordonnées cartésienne de A :

$\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$





Ces figures nous donnent les projections suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= cos\varphi\ \vec{e}_1 + sin\varphi\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_\varphi &= cos\varphi\ \vec{e}_2 - sin\varphi\ \vec{e}_1 \\ \vec{e}_r &= cos\theta\ \vec{e}_3 + sin\theta\ \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\theta &= cos\theta\ \vec{e}_\rho - sin\theta\ \vec{e}_3 \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{e}_r = sin\theta cos\varphi\, \vec{e}_1 + sin\theta sin\varphi\, \vec{e}_2 + cos\theta\, \vec{e}_3 \\ \\ \vec{e}_\theta = cos\theta cos\varphi\, \vec{e}_1 + cos\theta sin\varphi\, \vec{e}_2 - sin\theta\, \vec{e}_3 \end{array}}$$

On obtient :

$\overrightarrow{OA} = r\vec{e}_r = r\, sin\theta cos\varphi\, \vec{e}_1 + r\, sin\theta\, sin\varphi \vec{e}_2 \quad + r\, cos\theta\, \vec{e}_3 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

$$\begin{cases} x = r\, sin\theta cos\varphi \\ \\ y = r\, sin\theta\, sin\varphi \\ \\ z = r\, cos\theta \end{cases} \qquad (2.i)$$

Remarque Les coordonnées sphériques sont adaptées pour décrire des systèmes physiques qui ont une symétrique sphérique.

II .2 NOTION DE RÉFÉRENTIEL ET VECTEUR POSITION

La cinématique est l'étude des mouvements des corps dans l'espace physique, indépendamment des causes qui les produisent. La cinématique est fondée sur la notion de temps.

L'espace physique est schématisé par un espace ou repère euclidien de référence à 3 dimensions noté R. Tout corps dont la position par rapport à R ne change pas avec le temps t est dit fixe ou au repos.

La donnée d'un repère d'espace R associé au temps t constitue un référentiel noté $R(t)$: Un repère à chaque instant.

On désigne par P, la position d'un point matériel à l'instant t dans le référentiel $R(t)$ d'origine O.

$\overrightarrow{OP}$(t) est le vecteur position du point matériel dans $R(t)$ à l'instant t.

L'ensemble des positions P(t) lorsque t décrit un intervalle J, constitue la trajectoire du point matériel.

II .3 VITESSE D'UN POINT MATÉRIEL

On considère le point matériel P de vecteur position $\overrightarrow{OP}(t)$ dans le référentiel $R(t) = (O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$(($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) base orthonormée).

Le vecteur vitesse du point matériel Ppar rapport à $R(t)$, est le vecteur noté $\vec{V}(\mathrm{P/R})$ défini par :

$$\vec{V}\big(\mathrm{P}/R(t)\big) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R(t)} \quad (3.1)$$

II .3.1 Composantes cartésiennes de $\vec{V}\big(P/R(t)\big)$

On désigne par (x, y, z) les composantes de $\overrightarrow{OP}(t)$dans $R(t)$:

$$\overrightarrow{OP}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{V}(P/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R(t)} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz}{dt}\vec{e}_3 = \dot{x}\vec{e}_1 + \dot{y}\vec{e}_1 + \dot{z}\vec{e}_3 \; (3.2)$$

($\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt}$)

$\left\|\vec{V}\big(P/R(t)\big)\right\|$= $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ la norme de $\vec{V}\big(P/R(t)\big)$

II .3.2 Composantes cylindriques de $\vec{V}\big(P/R(t)\big)$

D'après le paragraphe II.1, on obtient les composantes cylindriques de $\overrightarrow{OP}(t)$:

$$\overrightarrow{OP} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{V}\big(P/R(t)\big) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R(t)} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\,\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_3$$

Or :

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_\varphi = \cos\varphi\,\vec{e}_2 - \sin\varphi\,\vec{e}_1$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dt}} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{V}\big(P/R(t)\big) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R(t)} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_3 \; (3.3)$$

$\Rightarrow\left\|\vec{V}\big(P/R(t)\big)\right\|$= $\sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}$

II.3.3 Composantes sphériques de $\vec{V}\big(P/R(t)\big)$

D'après les résultats du paragraphe II.1, les composantes sphériques de $\overrightarrow{OP}(t)$ sont :

$$\overrightarrow{OP} = r\vec{e}_r$$

$$\Longrightarrow \vec{V}\big(P/R(t)\big) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R(t)} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_3 + \sin\theta\,\vec{e}_\rho$

$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2$

$\vec{e}_\varphi = \cos\varphi\,\vec{e}_2 - \sin\varphi\,\vec{e}_1$

$\vec{e}_\theta = \cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_3$

$\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_3 + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\rho + \sin\theta\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt}$

$\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$$\vec{V}\big(P/R(t)\big) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R(t)} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi (3.4)$$

$$\left\|\vec{V}\big(P/R(t)\big)\right\| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta}\,)^2 + (r\dot{\varphi}sin\theta)^2}$$

II.4 ACCÉLÉRATION D'UN POINT MATÉRIEL

On considère le point matériel P de vecteur position $\overrightarrow{OP}(t)$ dans le référentiel $R(t) = (O;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ($(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base orthonormée).

Le vecteur accélération du point matériel P par rapport à $R(t)$, est le vecteur noté $\vec{\gamma}\big(P/R(t)\big)$défini par :

$$\vec{\gamma}\big(P/R(t)\big) = \left(\frac{d\vec{V}\big(P/R(t)\big)}{dt}\right)_{R(t)} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OP}(t)}{dt^2}\right)_{R(t)} \quad (3.5)$$

II .4.1 Composantes cartésiennes de $\vec{\gamma}\big(P/R(t)\big)$

On désigne par (x, y, z) les composantes de $\overrightarrow{OP}(t)$ dans $R(t)$:

$$\overrightarrow{OP}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2 + z(t)\vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(P/R(t)) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OP}(t)}{dt^2}\right)_{R(t)} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{e}_1 + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{e}_2 + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{e}_3$$
$$= \ddot{x}\vec{e}_1 + \ddot{y}\vec{e}_1 + \ddot{z}\vec{e}_3$$

(3.6)

($\ddot{x} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$)

$\|\vec{\gamma}(P/R(t))\|$= $\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$ la norme de $\vec{\gamma}(P/R(t))$

II .4.2 Composantes cylindriques de $\vec{\gamma}(P/R(t))$

D'après le paragraphe II.3.2, les composantes cylindriques de $\vec{V}(P/R(t))$ sont :

$$\vec{V}(P/R(t)) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R(t)} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(P/R(t)) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OP}(t)}{dt^2}\right)_{R(t)} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + (\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\,\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \rho\,\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_3$$

Or :

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2$$
$$\vec{e}_\varphi = \cos\varphi\,\vec{e}_2 - \sin\varphi\,\vec{e}_1$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(P/R(t)) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OP}(t)}{dt^2}\right)_{R(t)} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + (\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\,\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \rho\,\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(P/R(t)) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OP}(t)}{dt^2}\right)_{R(t)} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_3$$

$\|\vec{\gamma}(P/R(t))\|$= $\sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)^2 + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}$ la norme de $\vec{\gamma}(P/R(t))$

II.4.3 Composantes sphériques de $\vec{\gamma}(P/R(t))$

D'après les résultats du paragraphe II.3.3, les composantes sphériques de $\vec{V}(P/R(t))$ sont :

$$\vec{V}(P/R(t)) = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_{R(t)} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{\gamma}\big(P/R(t)\big) = {} & \left(\frac{d^2\overrightarrow{OP}(t)}{dt^2}\right)_{R(t)} \\
& = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \big(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\big)\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\
& + \big(\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\big)\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}
\end{aligned}
$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_3 + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\rho + \sin\theta\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_3$$

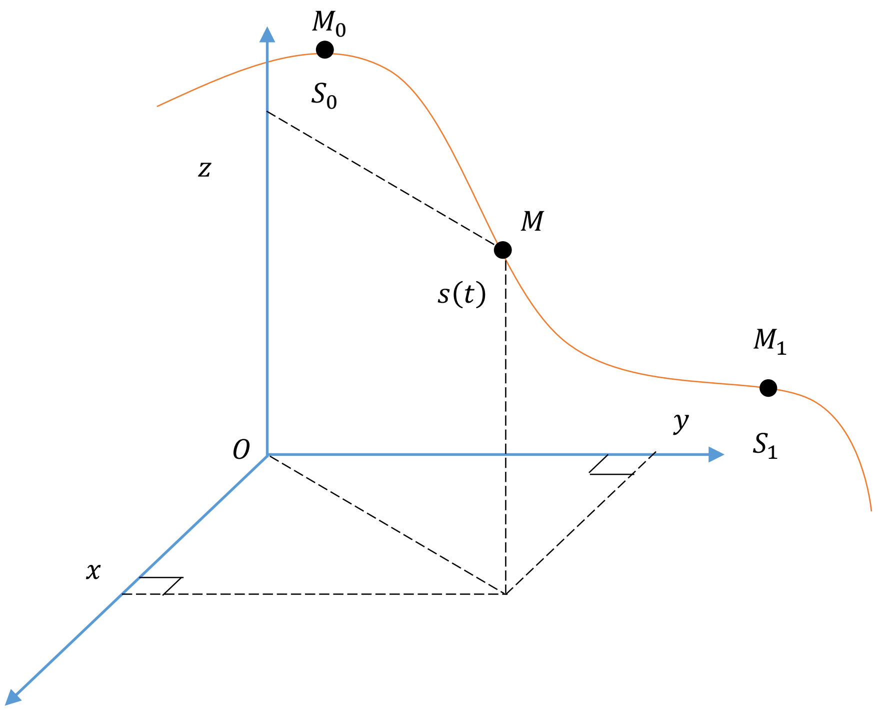
$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{\gamma}\big(P/R(t)\big) = {} & \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\big(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\big) + \big(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\big)\vec{e}_\theta \\
& + r\dot{\theta}\big(-\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_3\big) \\
& + \big(\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\big)\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\,\vec{e}_\rho
\end{aligned}
$$

II.5 COMPOSANTES INTRINSÈQUES

II.5.1 Abscisse curviligne d'un point matériel M

On considère que la trajectoire du point M est portée par une courbe ($\boldsymbol{\mathcal{C}}$) = (M_0, M_1) orientée de M_0 vers M_1. On définit une abscisse curviligne de M notée s(t)sur ($\boldsymbol{\mathcal{C}}$) à l'instant t, fonction croissante telle que : $s_0 \leq s \leq s_1$

$$\begin{cases} s_0 = s(t_0) = \text{abscisse curviligne } de\ M \text{ à } t_0, M \text{ position de } M \text{ à } t_0 \\ s_1 = s(t_1) = \text{abscisse curviligne } de\ M \text{ à } t_1, M \text{ position de } M \text{ à } t_1 \end{cases}$$



On définit le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} \Longrightarrow d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{e_1} + dy\overrightarrow{e_2} + dz\overrightarrow{e_3}$$

Et

$\left\|d\overrightarrow{OM}\right\| = \mathrm{ds}$: longueur d'arc élémentaire

$$\Rightarrow \left\|d\overrightarrow{OM}\right\|^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (\mathrm{ds})^2$$
$$\Rightarrow \dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$
$$\Rightarrow s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

II.5.2 Le trièdre de Frenet

Le trièdre de Frenet est le trièdre défini en un point M de la trajectoire ($\boldsymbol{\mathcal{C}}$) par les 3 vecteurs unitaires $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ tel que $\vec{T}$ est tangent à la trajectoire ; $\vec{N}$ est normal à la trajectoire et $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$, la binormale. Le repère $\left(M;\ \vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\right)$ est le repère de Frenet.

Les composantes de Frenet ou composantes intrinsèques d'un vecteur quelconque, sont celles relatives au trièdre ($\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$) . $\vec{T}$ est tangent à la trajectoire comme le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ de M :

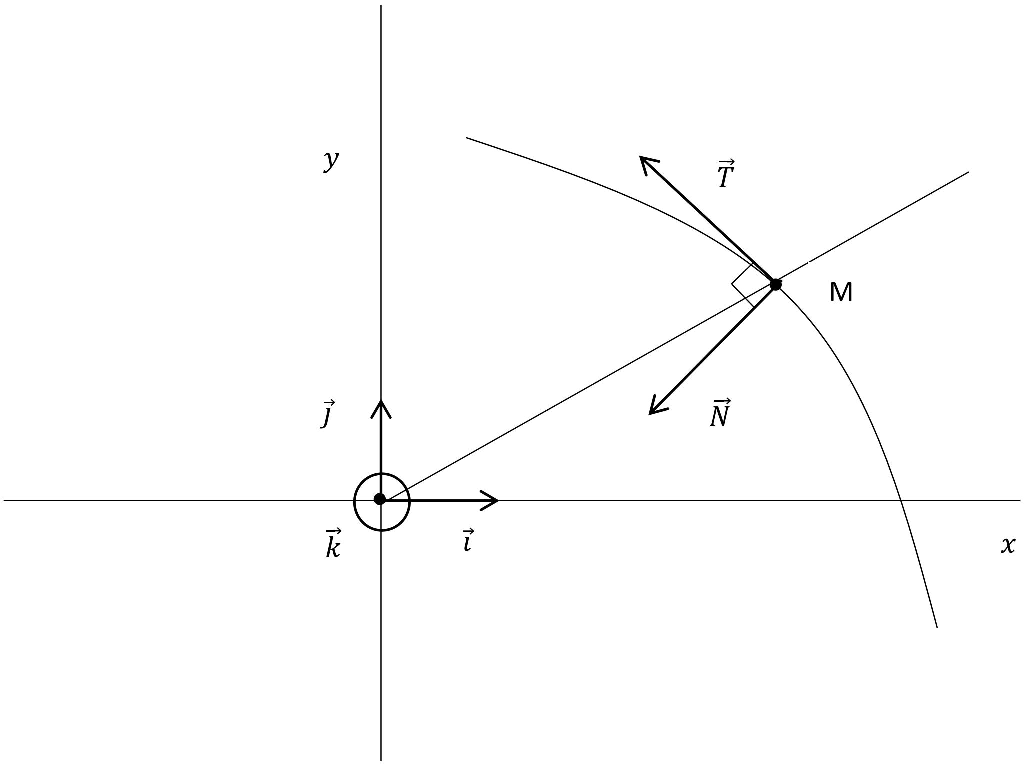
$\vec{V}(M) = v\vec{T}$ où $\quad v = \|\vec{V}(M)\|$

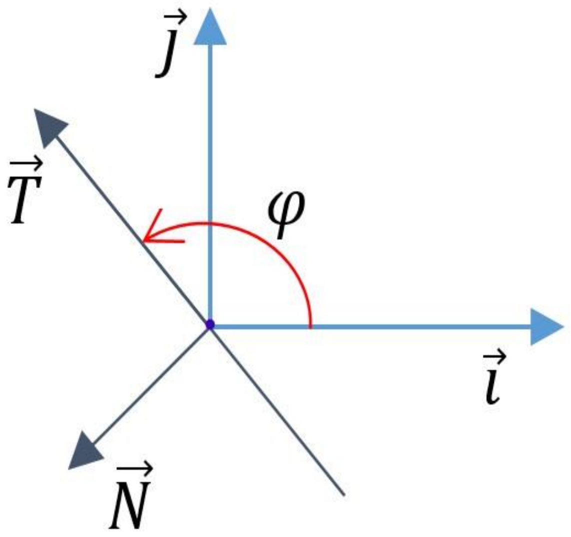
$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{T} = \frac{\vec{V}(M)}{v}}$

$\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}\frac{ds}{dt} \Rightarrow \|\vec{V}(M)\| = \left\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}\right\| \times \left|\frac{ds}{dt}\right|$

$$\|d\overrightarrow{OM}\| = ds$$

$\Longrightarrow v = \frac{ds}{dt}$ et $\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$





On définit l'angle $\varphi = \left(\widehat{\vec{\imath}, \vec{T}}\right)$: $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \Rightarrow \vec{T}$= cos$\varphi\vec{\imath}$ + sin$\varphi\vec{\jmath}$

$\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \Rightarrow$ cos$\varphi\vec{\imath}$ + sin$\varphi\vec{\jmath}$ = $\frac{dx}{ds}\vec{\imath} + \frac{dy}{ds}\vec{\jmath}$

$\Rightarrow \begin{cases} dx = ds\ cos\varphi \\ dy = \ ds\ sin\varphi \end{cases}$

$\vec{T}^2 = 1 \Rightarrow 2\vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds} = 0 \quad \Leftrightarrow \vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds} = 0 \Leftrightarrow \vec{T}.\frac{d\vec{T}}{d\varphi} = 0$ or $\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{d\varphi}$

$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} \times \frac{d\vec{T}}{d\varphi} = \frac{\vec{N}}{R}$,

où $R = \frac{ds}{d\varphi}$: par définition R est le rayon de courbure et $\frac{1}{R}$ est la courbure.

$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ et $\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{1}{\tau}\vec{N}$

τ est le rayon de torsion

et $\frac{1}{\tau}$ est la torsion

composantes intrinsèques de l'accélération $\vec{\gamma}$ du point M

vitesse de M : $\vec{V}(M) = v\,\vec{T}$,

$\vec{\gamma}$ *accéleration de M* : $\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt}$

$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt}$, $\frac{\vec{N}}{R} = \frac{d\vec{T}}{ds}$ et $v = \frac{ds}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v^2\frac{\vec{N}}{R}}$

On définit les composantes intrinsèques de $\vec{\gamma}$:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} : \text{ accélération tangentielle} \\ \frac{v^2}{R} : \text{ accéleration normale} \end{cases}$$

Hodographe d'un mouvement

L'hodographe d'un mouvement (noté (H)) est l'ensemble des point P tels que :

à tout instant, $\overrightarrow{OP} = \vec{V}(M/R)$; où O désigne le pôle de (H) et $\vec{V}(M/R)$ est le champ de vitesse.

II.6 MOUVEMENT A ACCÉLÉRATION CENTRALE

Par définition, un mouvement à accélération centrale est un mouvement dont l'accélération du point matériel M, $\vec{\gamma}(M/R)$, est parallèle au vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à tout instant t :

$$\vec{\gamma}(M/R) \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{0}$$

Par ailleurs :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\left[\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R)\right]}{dt} = \vec{0}$$

D'où : $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R) = \vec{C}$.

$\vec{C}$ est un vecteur constant en module, en sens et en direction. $\vec{C}$ est alors perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}(M/R)$. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ appartiennent donc au même plan quel que soit l'instant t considéré.

Par conséquent, tout mouvement à accélération centrale est un mouvement plan. Pour étudier le mouvement du point M, il est alors préférable d'utiliser ses coordonnées polaires.

On rappelle :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho}$$

$$\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi$$

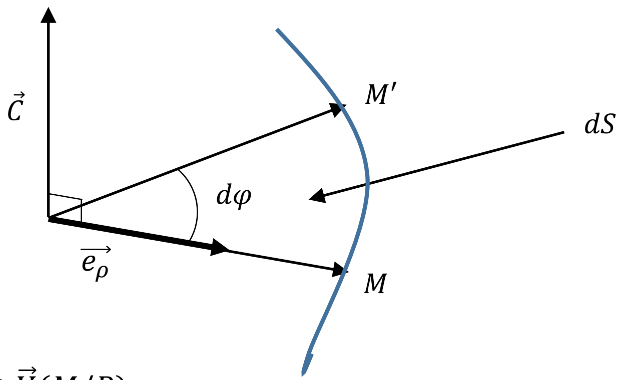
Puisque l'accélération du point M est centrale (parallèle au vecteur position), elle doit s'écrire dans ce cas :
$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho$ et donc sa composante orthogonale est nulle :

$\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\varphi} = 0$ qui peut s'écrire $\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho^2\dot{\varphi})}{dt} = 0$ d'où $\rho^2\dot{\varphi} = Cte$.

Finalement $\rho^2\dot{\varphi} = C = \left|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R)\right|$, appelée constante des aires.

II.6.1 Loi des aires:

Calculons l'aire balayée, par unité de temps, par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{e_\rho}$



$\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R)$

$dS = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MM'}\right\|$, M' est très voisin de M.

Donc $dS = \frac{1}{2}\left\|\rho\overrightarrow{e_\rho} \wedge \left(d\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\varphi\overrightarrow{e_\varphi}\right)\right\| = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$, et

$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$ d'où $dS = \frac{C}{2}dt$ et $\int_0^S ds = \frac{C}{2}\int_0^t dt$.

Donc $S = \frac{C}{2}t$ où $\frac{C}{2}$ est la vitesse aréolaire.

Ce résultat est appelé $2^{ème}$ loi de Kepler.

II.6.2 Formules de BINET

II.6.2.1 cas de la vitesse:

Dans le cas d'un mouvement à accélération centrale, le carré du module du vecteur vitesse est: $V^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$.

$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$. .

On pose $u = \frac{1}{\rho}$, donc $du = -\frac{d\rho}{\rho^2}$ et $\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\varphi}$

Ce qui donne $\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}$

D'autre part,

$C = \rho^2\dot{\varphi}$ peut s'écrire $\dot{\varphi} = Cu^2$

Et $V^2 = \left[-\left(\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi}\right)\right]^2 . C^2u^4 + \frac{1}{u^2}. C^2u^4$,

La première formule de BINET s'écrit:

$$V^2 = C^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right]$$

II.6.2.2 cas de l'accélération

Le mouvement du point M étant à accélération centrale, on a:

$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho$ dont la valeur algébrique est : $\gamma = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2$

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}\left(-C\frac{du}{d\varphi}\right)Cu^2 = -C^2u^2\frac{d^2u}{d\varphi^2}$$

Et $\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{u}C^2u^4 = C^2u^3$.

La deuxième formule de BINET s'écrit alors :

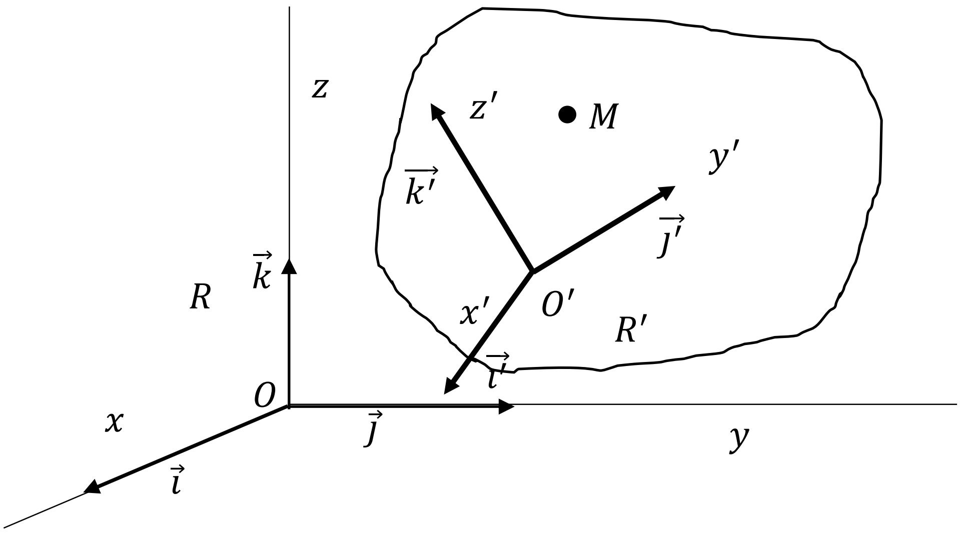
$$\gamma = -C^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right]$$

II.7 CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS

Soit à étudier le mouvement d'une particule M par rapport à un repère fixe R, appelé repère absolu. Il est parfois intéressant d'introduire un second repère R', dit repère relatif, par rapport au quel le mouvement de M soit simple à étudier.

Soient :

- $R(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère absolu (repère fixe).
- $R'(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ un repère relatif (repère mobile par rapport à R).



Considérons particulièrement une rotation d'angle θ autour de $(O;\vec{k})$ tel que $\theta = (\vec{\imath},\vec{\imath'}) = (\vec{\jmath},\vec{\jmath'})$ de vitesse angulaire $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$:

$$\vec{\imath'} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath};\quad \vec{\jmath'} = \cos\theta\,\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{\imath}$$

$$\frac{d\vec{\imath'}}{dt} = \dot{\theta}\vec{\jmath'} = \vec{\omega}\wedge\vec{\imath'};\ \frac{d\vec{\jmath'}}{dt} = -\dot{\theta}\vec{\imath'} = \vec{\omega}\wedge\vec{\jmath'}$$

R' peut être animé d'un mouvement de translation et/ou de rotation par rapport à R.
On désigne par $\vec{\omega}(R'/R)$ le vecteur vitesse de rotation de R' par rapport à R tel que :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{\imath'}}{dt}\right)_R = \vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{\imath'} \\ \left(\dfrac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right)_R = \vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{\jmath'} \\ \left(\dfrac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)_R = \vec{\omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{k'} \end{cases}$$

Dans R' :

$$\left(\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)_{R'} = \vec{0}$$

II.7.1 Dérivation en repère mobile.

Soit $\vec{U}$ un vecteur quelconque. Dans le repère R, ce vecteur s'écrit

$$\vec{U} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Dans le repère R' le vecteur $\vec{U}$ s'écrit :

$$\vec{U} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$$

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k} = \dot{x}'\vec{\imath'} + x'\left(\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right)_R + \dot{y}'\vec{\jmath'} + y'\left(\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right)_R + \dot{z}'\vec{k'} + z'\left(\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)_R$$

or :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{\imath'}}{dt}\right)_R = \vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{\imath'} \\ \left(\frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\right)_R = \vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{\jmath'} \\ \left(\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)_R = \vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{k'} \end{cases}$$

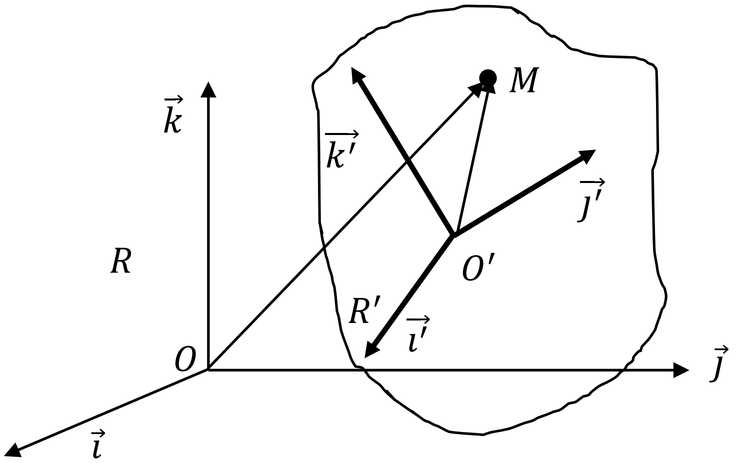
$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \dot{x}'\vec{\imath'} + x'\vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{\imath'} + \dot{y}'\vec{\jmath'} + y'\vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{\jmath'} + \dot{z}'\vec{k'} + z'\vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{k'}$$

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \dot{x}'\vec{\imath'} + \dot{y}'\vec{\jmath'} + \dot{z}'\vec{k'} + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\left(x'\,\vec{\imath'} + y'\,\vec{\jmath'} + z'\,\vec{k'}\right)$$

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{U}$$

II.7.2 Composition des vitesses

On considère un point matériel M en mouvement dans les repères $R(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ définis précédemment.



Les vecteurs position de la particule M dans les repères R et R' sont, respectivement :
$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ et $\overrightarrow{O'M} = \vec{r'}$

On peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Donc la vitesse absolue du point M est,

$$\vec{V_a}(M) = \vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{O'M}$$

or :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{O'M}$$

et

$\vec{V}(M/R') = \vec{V_r}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'}$ désigne la vitesse relative du point M ;

$\vec{V}(O'/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R$;

$\vec{V_e}(M) = \vec{V}(O'/R) + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{O'M}$

On réécrit $\vec{V_a}(M)$:

$$\vec{V_a}(M) = \vec{V_r}(M) + \vec{V_e}(M)$$

C'est la formule de composition des vitesses où $\vec{V_e}(M)$ est la vitesse d'entrainement de M. La vitesse d'entraînement de M est la vitesse absolue du point qui coïncide avec M à l'instant t et supposé fixe dans le repère R'.

II.7.3 Composition des accélérations

On considère un point matériel M en mouvement dans les repères $R(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et $R'(O',\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ définis précédemment. L'accélération absolue du point M est :

$$\vec{\gamma_a}(M) = \vec{\gamma}(M/R) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R = \left(\frac{d\vec{V_a}}{dt}\right)_R$$

$\vec{\gamma_r}(M) = \vec{\gamma}(M/R') = \left(\frac{d\left(\vec{V}(M/R')\right)}{dt}\right)_{R'}$: accélération relative de M

On rappelle que

$$\vec{V_a}(M) = \vec{V}(M/R) = \vec{V}(M/R') + \vec{V}(O'/R) + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{\gamma_a}(M) = \vec{\gamma}(M/R)$$
$$= \left(\frac{d\vec{V}(M/R')}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\vec{V}(O'/R)}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\vec{\omega}(R'/R)}{dt}\right)_R \wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R$$

or :

$$\left(\frac{d\vec{V}(M/R')}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{V}(M/R')}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{V}(M/R') = \vec{\gamma}(M/R') + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{V}(M/R')$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{O'M} = \vec{V}(M/R') + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{\gamma}(O'/R) = \left(\frac{d\vec{V}(O'/R)}{dt}\right)_R$$

Alors :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}(M/R') + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{V}(M/R') + \vec{\gamma}(O'/R) + \left(\frac{d\vec{\omega}(R'/R)}{dt}\right)_R \wedge\overrightarrow{O'M}$$
$$+ \vec{\omega}(R'/R)\wedge\left(\vec{V}(M/R') + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}(M/R') + \vec{\gamma}(O'/R) + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\left(\vec{\omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + \left(\frac{d\vec{\omega}(R'/R)}{dt}\right)_R \wedge\overrightarrow{O'M}$$
$$+ 2\vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{V}(M/R')$$

Notons $\overrightarrow{\gamma_e}(M)$ et $\overrightarrow{\gamma_c}(M)$:

$$\vec{\gamma}(O'/R) + \left(\frac{d\vec{\omega}(R'/R)}{dt}\right)_R \wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}(R'/R)\wedge\left(\vec{\omega}(R'/R)\wedge\overrightarrow{O'M}\right) = \overrightarrow{\gamma_e}(M)$$
$$2\vec{\omega}(R'/R)\wedge\vec{V}(M/R') = \overrightarrow{\gamma_c}(M)$$

Finalement :

$$\overrightarrow{\gamma_a}(M) = \overrightarrow{\gamma_r}(M) + \overrightarrow{\gamma_e}(M) + \overrightarrow{\gamma_c}(M)$$

Est la loi de composition des accélérations.
$\overrightarrow{\gamma_e}(M)$ est l'accélération d'entrainement de R' par rapport à R ;
$\overrightarrow{\gamma_c}(M)$ est l'accélération de Coriolis.
L'accélération absolue est égale à la somme des accélérations relative, d'entrainement et de Coriolis.

Cas particulier

Quand le repère R' est en translation par rapport à R,

$$\vec{\omega}(R'/R) = \vec{0}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \overrightarrow{V_a}(O') \\ \quad et \\ \overrightarrow{\gamma_a}(M) = \overrightarrow{\gamma_r}(M) + \overrightarrow{\gamma_a}(O') \end{cases}$$

Université Félix HOUPHOUËT–BOIGNY UFR Maths Info

COURS DE MÉCANIQUE 1
MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Juin 2020

Responsable du cours :

SYLLA Moussa

Maître de Conférences

CHAPITRE III DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

La dynamique est l'étude des mouvements des corps en relation avec les causes, appelées forces, qui les produisent. Elle s'appuie sur les lois physiques énoncées par Isaac Newton.

La dynamique utilise la notion de masse. On mesure la masse d'un point matériel à l'aide d'un appareil (balance) en la comparant à celle d'un autre, prise comme unité. L'unité de masse dans le système international est le kilogramme (kg).

III.1 QUANTITÉ DE MOUVEMENT

La quantité de mouvement est, pour un point matériel A de masse m et de vitesse $\vec{V}(A/R)$ par rapport à un référentiel R, le vecteur $\vec{P}$:

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{V}(A/R)}$$

$\vec{P}$ est encore appelée impulsion.

III.2 PRINCIPE D'INERTIE

Lorsqu'un point matériel en mouvement n'est soumis à aucune force, son mouvement est rectiligne uniforme. C'est la première loi de Newton.

III.3 RÉFÉRENTIEL GALILÉEN

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel un point matériel isolé (sur lequel ne s'exerce aucune force ou sur lequel la résultante des forces est nulle) est soit immobile, soit en mouvement rectiligne uniforme par rapport à ce référentiel. Cela signifie que le principe d'inertie, qui est énoncé dans la première loi de Newton s'applique.

III.4 PRINCIPE FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL

III.4.1 Notion de Forces

Tout système matériel exerce sur un point matériel A n'appartenant pas à ce système, une action appelée force, représentée dans un référentiel galiléen R par l'ensemble (A, $\vec{F}$) appelé vecteur lié où $\vec{F}$ est le vecteur force de module $\|\vec{F}\|$ et d'origine (point d'application) A.

Exemples de forces :

Force de gravitation universelle, force électromagnétique, force nucléaire et force de contact.

III.4.2 Énoncé du principe fondamental de la dynamique.

Dans un référentiel galiléen R, le mouvement d'un point matériel A de masse m, de vitesse $\vec{V}(A/R)$ soumis à plusieurs forces dont la somme est $\vec{F}$, satisfait à la relation :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

$$\vec{P} = m\,\vec{V}(A/R)$$

Ou encore : $\boxed{\vec{F} = m\vec{\gamma}(A/R)}$

C'est la deuxième loi de Newton.

On rappelle que $\vec{\gamma}(A/R)$ est l'accélération du point matériel A dans R.

III.4.3 Principe des actions réciproques

Si un point matériel A_1 exerce sur un autre point matériel A_2 une force $\vec{F}_{1/2}$, alors A_2 exerce sur A_1la force opposée $\vec{F}_{2/1}$ telle que :

$$\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$$

Le principe des actions réciproques est encore appelé 3$^{\text{ème}}$ loi de Newton.

III.4.4 Moment cinétique d'un point matériel

On appelle moment cinétique d'un point matériel A, en un point O d'un référentiel R, le moment de sa quantité de mouvement $\vec{P}$, noté $\vec{L}_0$:

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P} = m\overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}(A / R)$$

III.4.5 Théorème du moment cinétique

Énoncé du théorème
La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel en un point O fixe d'un référentiel galiléen, est égale au moment en O des forces qui s'exercent sur ce point.

Démonstration

On considère un référentiel galiléen R d'origine O. $\vec{L}_0$ est le moment cinétique en O du point matériel A :

$$\vec{L}_0 = m\overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}(A / R)$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OA} \wedge \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_R = \vec{V}(A/R) \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

car $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ d'après la loi fondamentale.

D'où :

$$\left(\frac{d\vec{L}_0}{dt}\right)_R = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \vec{M}_0$$

$\vec{M}_0$ est le moment en O des forces $\vec{F}$ exercées sur le point matériel A.

III.4.6 Moment dynamique

On désigne par $\overrightarrow{L_{O'}}$ le moment cinétique du point matériel A, en un point O' mobile dans le référentiel galiléen R. $\overrightarrow{M_{O'}}$ représente le moment en O' des forces exercées sur A. Le théorème du moment cinétique appliqué en O' mobile est énoncé par la formule suivante :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O'}}}{dt}\right)_R + m\vec{V}(O'/R) \wedge \vec{V}(A/R) = \overrightarrow{M_{O'}}$$

Démonstration

Comme $\overrightarrow{L_{O'}} = m\overrightarrow{O'A} \wedge \vec{V}(A/R)$, il vient :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O'}}}{dt}\right)_R = m\left(\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_R \wedge \vec{V}(A/R) + m\overrightarrow{O'A} \wedge \left(\frac{d\vec{V}(A/R)}{dt}\right)_R$$

$m\left(\frac{d\vec{V}(A/R)}{dt}\right)_R = m\vec{\gamma}(A/R) = \vec{F}$ d'après le principe fondamental de la dynamique.

$$\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO'} \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O'A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R - \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R = \vec{V}(A/R) - \vec{V}(O' / R)$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O'}}}{dt}\right)_R = -m\vec{V}(O' / R) \wedge \vec{V}(A/R) + \overrightarrow{O'A} \wedge \vec{F}$$

Finalement :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_{O'}}}{dt}\right)_R + m\vec{V}(O' / R) \wedge \vec{V}(A/R) = \overrightarrow{O'A} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{M_{O'}}$$

$\overrightarrow{M_{O'}}$ est le moment en O' des forces exercées sur le point matériel A.

On note $\overrightarrow{\delta_{O'}}$, la quantité :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{o'}}{dt}\right)_R + m\vec{V}(O'/R) \wedge \vec{V}(A/R) = \overrightarrow{\delta_{O'}}$$

Par définition, $\overrightarrow{\delta_{O'}}$ est appelé le moment dynamique en O' par rapport à R, du point matériel A et :

$$\overrightarrow{\delta_{O'}} = \overrightarrow{M_{O'}}$$

Université Félix HOUPHOUËT–BOIGNY UFR Maths Info

COURS DE MÉCANIQUE 1
MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Juin 2020

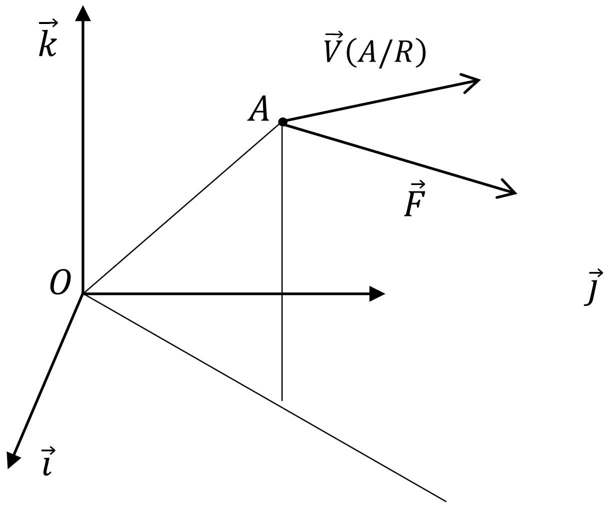
Responsable du cours :

SYLLA Moussa

Maître de Conférences

CHAPITRE IV ÉNERGÉTIQUE D'UN POINT MATÉRIEL

Considérons un référentiel R, dans lequel un point matériel A de vitesse $\vec{V}(A/R)$ et soumis à une force $\vec{F}$.



$$\begin{cases} \vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \\ \overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{V}(A/R) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \end{cases}$$

IV.1. PUISSANCE

La puissance d'une force $\vec{F}$ s'exerçant sur le point A de vitesse $\vec{V}(A/R)$ est $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{V}(A/R)$$

Si $\mathcal{P} > 0$ la puissance est motrice ;

Si $\mathcal{P} < 0$ la puissance est résistante.

L'unité SI de la puissance est le Watt : W

IV.2. TRAVAIL

Le travail élémentaire noté δT de la force $\vec{F}$ exercé sur un point matériel A est :

$$\delta T = \mathcal{P}dt = \vec{F}.\vec{V}(A/R)dt = \vec{F}.d\overrightarrow{OA}$$

Où : $d\overrightarrow{OA}$ est le déplacement élémentaire de A dans le référentiel R, $\mathcal{P}$ est la puissance développée par $\vec{F}$ et T le travail total :

$$T = \int \vec{F}.d\overrightarrow{OA}$$

L'unité SI de travail est le Joule (J).

IV.3. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

On appelle énergie cinétique $E_{C/R}$ du point A, la quantité scalaire :

$$E_{C/R} = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(A/R)$$

$\Delta E_{C/R}$ est la variation de $E_{C/R}$ et T désigne le travail fourni.

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale au travail de toutes les forces exercées :

$$\Delta E_{C/R} = T$$

IV.4. ÉNERGIE POTENTIELLE

On suppose que le travail élémentaire δT d'une force $\vec{F}$ qui s'exerce sur un point M se mette sous la forme

$$\delta T = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -dE_p$$

Dans ce cas, on dit que $\vec{F}$ est une force conservative.

La fonction $E_p(M)$ est alors appelée l'énergie potentielle de M associée à la force $\vec{F}$.

On en déduit en intégrant entre deux positions M_1 et M_2 :

$$T = E_p(M_1) - E_p(M_2)$$

IV.5. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

On appelle énergie mécanique E_m d'un point matériel A, la somme de son énergie cinétique E_C et de son énergie potentiel E_P :

$$E_m = E_C + E_P$$

Dans le cas où les seules forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle, l'énergie mécanique se conserve :

$$E_m = E_C + E_P = Cte$$