Université Norbert ZONGO
………………………
UFR-ST
………
Département de Physique
………………

Année Universitaire 2017-2018

Travaux dirigés de Magnétostatique et Régime variable

Niveau : L1S2 MPC I

Exercice 1 : test de compétences mathématiques

On donne les vecteurs et fonction suivants :

$\vec{a} = (2y + x)\vec{i} + (z - y)\vec{j} + z\vec{k}$

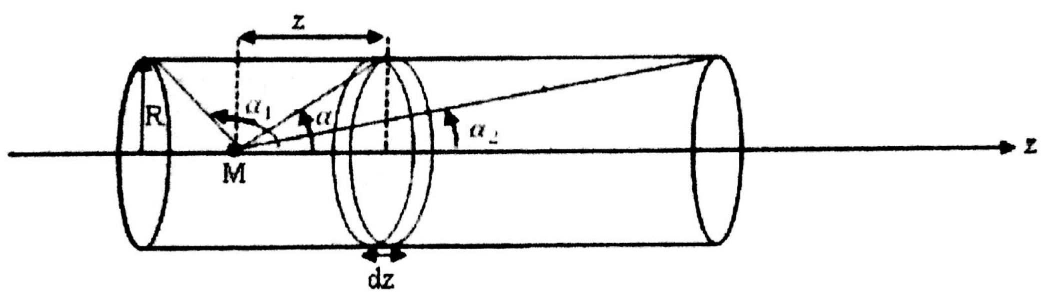
$\vec{b} = 2z\vec{i} + 2\vec{j} - x\vec{k}$

$f(x, y, z) = 3z^2y - xz + 2yx$

1) Calculer $\vec{a} \wedge \vec{b}$
2) Calculer $\overrightarrow{grad}(f)$
3) Calculer $\overrightarrow{rot}(\vec{a})$

Exercice 2

On considère un solénoïde infini, constitué de n spires jointives par unité de longueur, parcouru par un courant I (fig.), l'axe du solénoïde étant confondu avec l'axe Oz des coordonnées cylindriques.



1) Quelle est la direction du champ magnétique ?
2) On définit un contour fermé ABCD, en admettant que le champ B soit nul à l'infini, hors du cylindre, montrer que B est uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur. Pour cela on appliquera le théorème d'Ampère.
3) Donner l'expression du champ magnétique B créé par un solénoïde de longueur finie en un point M de l'axe z. On supposera que α varie de α_1 à α_2.
4) En déduire l'expression du champ magnétique B créé par un solénoïde de longueur infinie en un point M de l'axe z.

Exercice 3

Un câble coaxial est constitué d'un fil rectiligne infini (Oz), parcouru par un courant I dans le sens des z croissants, et d'un cylindre conducteur de rayon R et d'axe (Oz), parcouru par le courant surfacique I dans le sens des z décroissants.

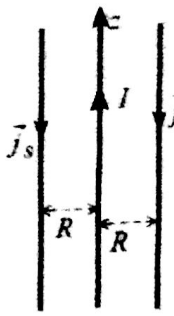
a) Déterminer la densité de courant surfacique $\vec{J}S$ qui circule à la surface du cylindre. Quelle est la dimension et l'unité en S.I. de JS ?

b) Par des arguments de symétrie et d'invariance, que peut-on dire du champ magnétique $\vec{B}$ (M) en un point M de l'espace ?

c) Calculer $\vec{B}$ (M) en tout point de l'espace.

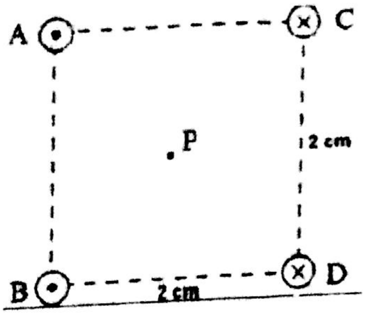
d) Tracer $\|\vec{B}\|$ en fonction de r. (r est la distance à l'axe (Oz).)

e) Tracer sur un schéma quelques lignes de champ de $\vec{B}$.



Exercice 4

Quatre longs conducteurs parallèles, perpendiculaires au plan de la feuille, sont parcourus par des courants de 4 A. Calculez le champ magnétique au point P, situé au centre.



Exercice 5

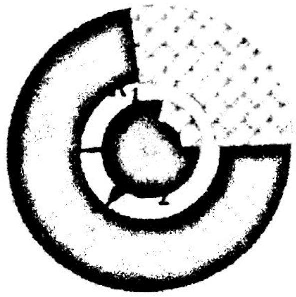
Un fil conducteur cylindrique, noté (1), non magnétique, de rayon R_1, d'axe $\Delta = (Oz)$, de très grande longueur, est parcouru par un courant continu, d'intensité I.

Le milieu (1) est assimilable au vide. Le fil est entouré par un isolant et par un autre conducteur cylindrique noté (2), de rayon intérieur R_2, et de rayon extérieur R_3.

Le courant d'intensité I passe toujours dans le fil (1) et revient en sens inverse par le conducteur (2). la densité de courant étant toujours uniforme et parallèle à l'axe Δ dans chacun des deux conducteurs.

1) Exprimer la densité de courant sur chaque conducteur.1

2) En utilisant la forme différentielle du théorème d'Ampère (l'équation de Maxwell-Ampère), déterminer le vecteur champ magnétique B créé par ce courant : on se limitera aux cas $r \leq R_1$ et $R_1 \leq r \leq R_2$.



On rappelle que :

$$\left[\vec{\text{rot}}\ \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u_z}\right]$$

18/06/2018

Correction du TD de Magnétostatique

Exercice 1

$\vec{a} = (2y+x)\vec{i} + (z-y)\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{b} = 2z\vec{i} + 2\vec{j} - x\vec{k}$; $f(x,y,z) = 3z^2y - xz + 2yx$

1- Calculons $\vec{a} \wedge \vec{b}$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} 2y+x \\ z-y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 2z \\ 2 \\ -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -xz+xy-2z \\ 2z^2+2xy+x^2 \\ 4y+2x-2z^2+2zy \end{vmatrix}$$

2- Calculons $\overrightarrow{grad}(f)$

$$\overrightarrow{grad}(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{grad}(f) = \begin{vmatrix} -z+2y \\ 3z^2+2x \\ 6zy-x \end{vmatrix}$$

3- Calculons $\overrightarrow{rot}(\vec{a})$

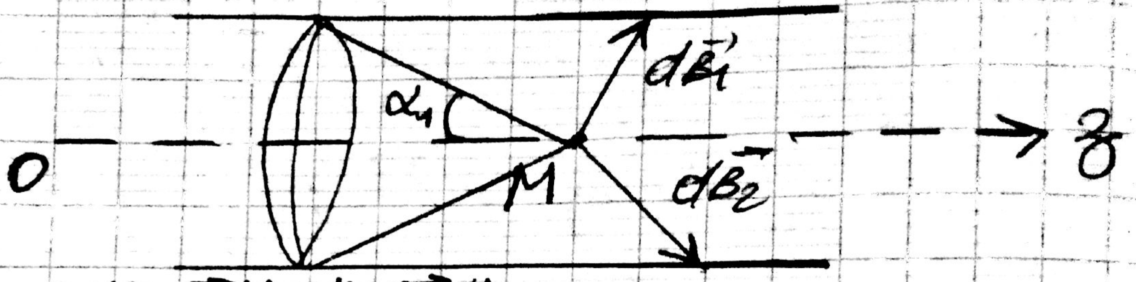
$\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \overrightarrow{grad} \wedge \vec{a}$ ou $\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial(z-y)}{\partial z} \\ \frac{\partial(2y+x)}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial(z-y)}{\partial x} - \frac{\partial(2y+x)}{\partial y} \end{vmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{rot}(\vec{a}) = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{a}) \cdot \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$$

Exercice 2

1. Direction du champ magnétique $\vec{B}$



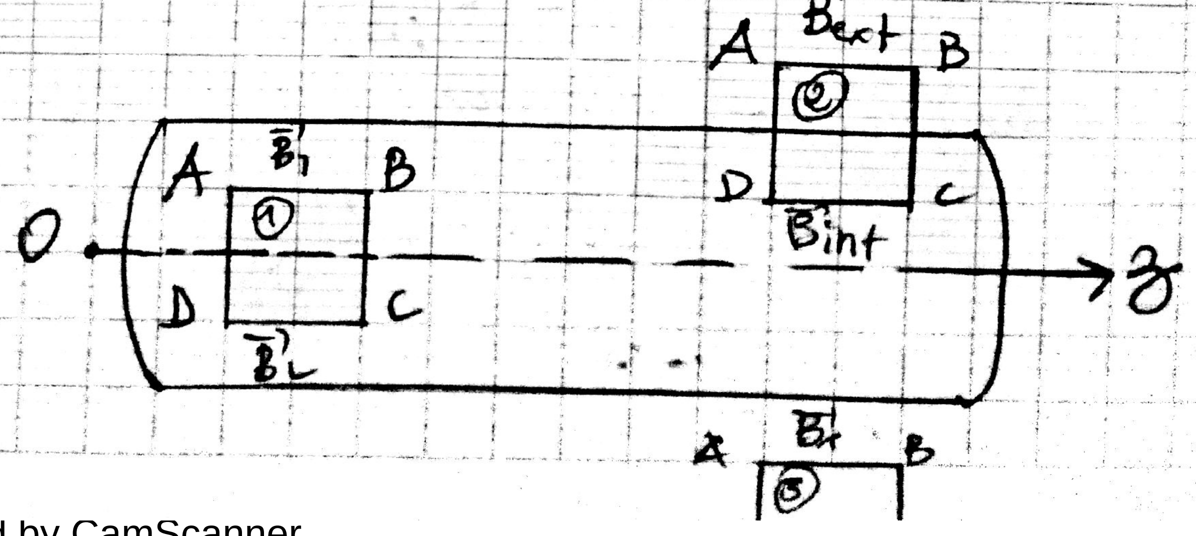
$\|d\vec{B_1}\| = \|d\vec{B_2}\|$

Par supperposition on remarque que les composante radiales ($\perp Oz$) se compensent. Donc, $d\vec{B}$ se resume à sa composante suivant (Oz). C'est-à-dire $\vec{B} = B\,\vec{u_z}$.

Le solénoïde est invariant par translation suivant (Oz) et par rotation autour de l'axe (Oz).

B ne dépend pas de z et de θ, mais du paramètre r. On a : $\vec{B} = B(r)\,\vec{u_z}$

2. Montrons que B est uniforme ou nul



Théorème d'Ampère

Cas 1 : Contour fermé à l'intérieur

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 \sum I_{int}$$

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = AB.B_1 - CD B_2$$

$\sum I_{int} = 0$ (Creux)

$AB.B_1 - CD.B_2 = 0 \Rightarrow \boxed{B_1 = B_2}$

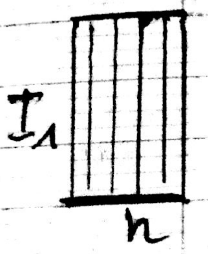
B est uniforme.

2 Cas :

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 \sum I_{int}$$

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = B_{ext}.AB - B_{int}.CD$$

$\sum I_{int} = -n\, I\, CD$



$\underbrace{B_{ext}}_{0}.AB - B_{int}.CD = -\mu_0\, n\, I\, CD$

$\boxed{B_{int} = \mu_0 n I}$ B est uniforme.

Cas 3 : Contour fermé à l'extérieur

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 \sum I_{int}$$

$$\oint \vec{B}.\vec{dl} = B_1 AB - B_2.CD$$

$\sum I_{int} = 0$

$B_1 AB - B_2 CD = 0$

$B_1 = B_2 = 0$ DONC B est nul.

n : bre de spire par unité de longueur
Nb : on ajoute dz pour simplifier

3°) Expression de B champ magnétique dans le cas d'un fil de longueur l finie.

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} \quad \sin\alpha = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{\sin\alpha}$$

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(\frac{R}{\sin\alpha}\right)^3} = \frac{\mu_0 I \sin^3\alpha}{2R}$$

On a : $dB = \frac{\mu_0 I \sin^3\alpha}{2R} n\,dz \quad \tan\alpha = \frac{R}{z} \Rightarrow z = \frac{R}{\tan\alpha}$

$$dz = \frac{-R\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)}{\tan^2\alpha} \Rightarrow dz = \frac{-R}{\cos^2\alpha \tan^2\alpha} d\alpha$$

$$dz = \frac{-R}{\sin^2\alpha} d\alpha \text{ . On a : } dB = \frac{-R\mu_0 I \sin^3\alpha}{2R\sin^2\alpha} n\,d\alpha$$

$$dB = \frac{-\mu_0 I n \sin\alpha\, d\alpha}{2} \quad \int dB = \frac{\mu_0 I n}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -\sin\alpha\, d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0 I n}{2}\left[\cos\alpha\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I n}{2}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)}$$

4°) $\alpha_1 \rightarrow \pi$ A l'infinie
$\alpha_2 \rightarrow 0$

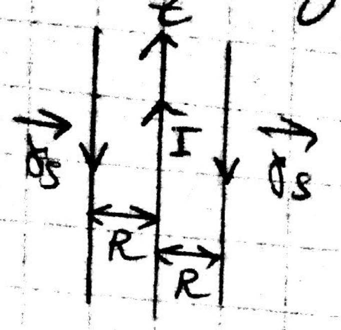
On a : $B = \frac{\mu_0 I n}{2}(\cos 0 - \cos\pi)$

$$B = \frac{\mu_0 I n}{2}(1+1) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I n}{2} \times 2$$

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

Exercice 3

a) Densité surfacique $\vec{j_s}$ de courant



Pour une distribution surfacique, on a :

$$I = \int \vec{j_s} \cdot \vec{dl}$$

$$I = \int j_s \, dl \quad (\text{car } \vec{j_s} \parallel \vec{dl})$$

$$I = j_s \int dl = j_s \times 2\pi R \Rightarrow \boxed{j_s = \frac{I}{2\pi R}}$$

* Dimension de j_s

$$[J_s] = \frac{[I]}{[R]} = \frac{I}{L} \Rightarrow \boxed{J_s = I L^{-1}}$$

Unité : $A\,m^{-1}$

b) Le cylindre admet un plan de symétrie : le plan horizontal contenant (Oz).

D'après la règle de symétrie $\vec{B} \perp$ à ce plan.

On a alors :

$\vec{B} = B\vec{u_\theta}$ car $\vec{u_r}$ est contenu aussi dans le plan de symétrie.

Le cylindre est invariant par translation suivant (Oz) donc, B est indépendant de z.

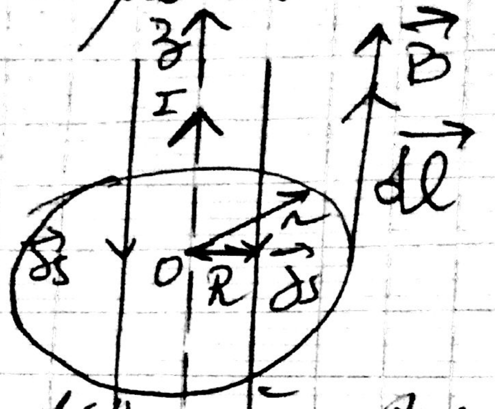
Le cylindre est aussi invariant par rotation autour de (Oz), donc B est aussi indépendant de θ.

On a alors : $\vec{B} = B(r)\vec{u_\theta}$ (θ : angle)

c) Calcul de $\vec{B}(M)$

Théorème d'Ampère

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \sum I_{int}$$



La courbe d'Ampère est un cercle de rayon r centré sur (Oz)

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = B \times 2\pi r$$

* 1^e cas : $r < R$

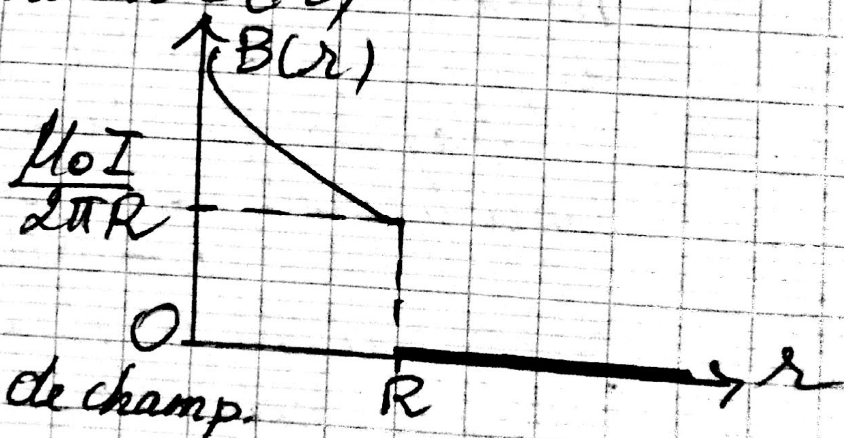
$\sum I_{int} = I \Rightarrow B \times 2\pi r = I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta}$$

* 2^e cas : $r > R$

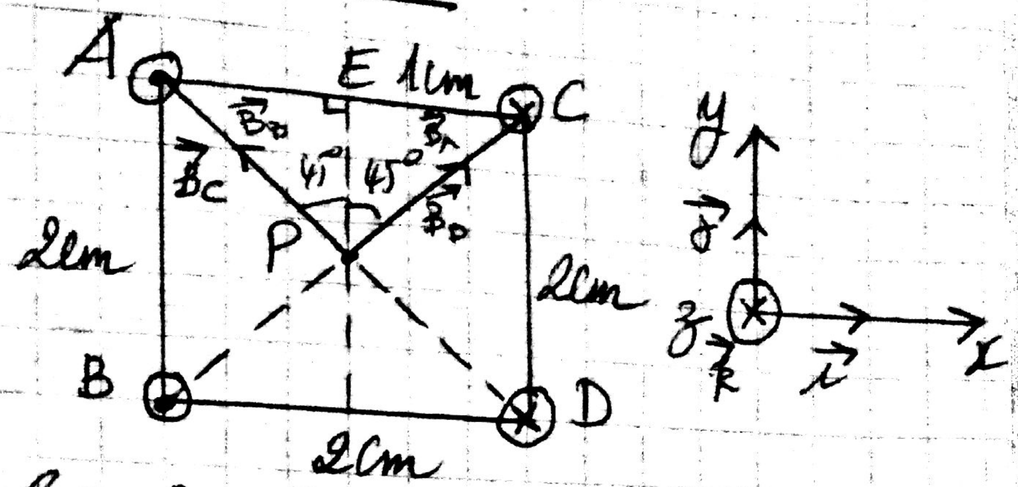
$\sum I_{int} = I - I = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$

d) Représentation $B(r)$



e) Schéma ligne de champ.

Exercice 4



Calculons B en P au centre

Le champ crée par chaque fil est ⊥ à la direction qui relie ce fil au point P.

$\vec{B}_A \perp \vec{AP}$; $\vec{B}_B \perp \vec{BP}$; $\vec{B}_C \perp \vec{CP}$; $\vec{B}_D \perp \vec{DP}$

$I_A = I_B = I_C = I_D = 4A$

dans le cas d'un fil infini $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$\vec{B}_A \begin{vmatrix} B_A \sin 45° \\ B_A \cos 45° \end{vmatrix}$

$B = 4 \times B_A \cos 45 \Rightarrow \boxed{B = \frac{4 \mu_0 I \cos 45°}{2\pi r_A}}$

$r_A = \sqrt{PE^2 + AE^2} \Rightarrow r_A = \sqrt{0{,}01^2 + 0{,}01^2} = 0{,}01\sqrt{2}$

AN : $B = \frac{4 \times 4 \times 4\pi .10^{-7} \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\pi \times 0{,}01\sqrt{2}}$ $\boxed{B = 16.10^{-5} T}$

Exercice 5

1) densités $\vec{J_1}$ et $\vec{J_2}$

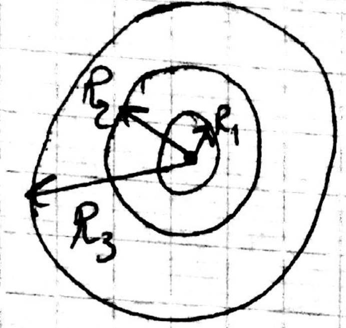
$\vec{J_1}$: densité du cylindre 1 ; $\vec{J_2}$ celle du cylindre 2

On a : $I = \iint \vec{j_1} \, \vec{dS_1}$; $I = j_1 . \pi R_1^2$

$\Rightarrow \boxed{j_1 = \frac{I}{\pi R_1^2}}$ $\boxed{\vec{j} = \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{u_z}}$

De même pour le cylindre

$I = -\iint \vec{j_2} . \vec{dS_2}$; $I = -j_2 \times \pi (R_3^2 - R_2^2)$



$\boxed{j_2 = -\frac{I}{\pi (R_3^2 - R_2^2)} \quad \vec{j} = -\frac{I}{\pi (R_3^2 - R_2^2)} \vec{u_z}}$

2_ Déterminons $\vec{B}$

Forme différentielle du théorème d'Ampère

$\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

Tout plan ⊥ à l'axe du cylindre et contenant (Oz) est un plan de symétrie.

Dans le repère cylindrique le champ $\vec{B}$ est orienté suivant $\vec{u_\theta}$.

Le cylindre est invariant par translation suivant (Oz), ainsi que par rotation autour du même axe (Oz). On déduit que :

NB

$\vec{B} \begin{vmatrix} B_r & \vec{u_r} \\ B_\theta & \vec{u_\theta} \\ B_z & \vec{u_z} \end{vmatrix}$

$\vec{B}(r, \theta, z)$

$\underline{\underline{B(r)}}$

$$\vec{B} = B(r) \vec{u_\theta}$$

* 1er cas : $r \leq R_1$

$\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j_1} \Rightarrow \vec{rot}(\vec{B}) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r}\right)\vec{u_z} = \mu_0 \vec{j_1}$

$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r}\right) = \mu_0 j_1 \Rightarrow \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} = \mu_0 j_1 r$

$\partial(rB_\theta) = \mu_0 j_1 r \, \partial r$

$rB_\theta = \mu_0 j_1 \frac{r^2}{2} + C$

Le champ B est nul sur l'axe ($B(r=0)=0$)

D'où $C = 0$

$rB_\theta = \mu_0 j \frac{r^2}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} \vec{u_\theta}}$

* 2 Cas : $R_1 \leq r \leq R_2$

$\vec{rot}(\vec{B}) = \vec{0} \Rightarrow \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r}\right) = 0$

$\frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = 0 \Rightarrow rB_\theta = C_2$

Déterminons C_2

$B(R_1) = \frac{\mu_0 I R_1}{2\pi R_1^2} \Rightarrow B(R_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$

$R_1 B(R_1) = C_2$

$\Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}}$

$rB_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$

$\Rightarrow \boxed{B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$

$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u_\theta}}$ Champ magnétique dans le cas d'un fil infini.

Exercice 6 (Cas d'un fil infini Voir cours).