Devoir de mathématiques

Exercice 1 *(Baccalauréat France métropolitaine, juin 2009)*

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geq 1$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1 \ .$$

Le tableau suivant donne les premiers termes de cette suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

Exercice 2

Partie I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique que l'on notera α.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en -1. Préciser les asymptotes éventuelles.
2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2 - 1}$.
3. Justifier l'existence d'une asymptote oblique Δ à $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3 *(Baccalauréat France métropolitaine, septembre 2007)*

La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{23}{27}$, pour tout entier naturel n.

a) On a représenté, dans un repère orthonormé direct du plan en annexe (en fin d'énoncé), la droite d'équation $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2; 0)$.
Construire sur l'axe des abscisses les quatres premiers termes de la suite u.

b) Démontrer que, si la suite u est convergente, alors sa limite est $l = \dfrac{23}{18}$.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq \dfrac{23}{18}$.

d) Etudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

Exercice 4 *(Baccalauréat France métropolitaine, juin 2005 4 points)*

Cet exercice est une restitution organisée des connaissances.

Partie A : question de cours On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer la proposition suivante :
"Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite."

Partie B On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.

Annexe de l'exercice 3