Devoir de mathématiques

Exercice 1 *Chute d'un corps avec résistance de l'air*

a) Soit $f(x)=e^x$ la fonction exponentielle. On a $f'(x)=f(x)=e^x$, et, en $x=0$, on a donc $f'(0)=e^0=1$.

Par ailleurs, par définition du nombre dérivé : $f'(0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}$ qui est la limite recherchée. Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1}$.

b) Cette équation différentielle se réécrit : $v'=-\dfrac{k}{m}v+g$ qui a donc pour solution la fonction

$\underline{v(t)=Ke^{-\frac{k}{m}t}+\dfrac{mg}{k}\text{, où } K \text{ est un réel.}}$

c) A $t=0$, on a $v(0)=v_0$, soit, $v(0)=Ke^0+\dfrac{mg}{k}=K+\dfrac{mg}{k}=v_0$. Ainsi, $K=v_0-\frac{mg}{k}$, et donc,

$v(t)=Ke^{-\frac{k}{m}t}+\dfrac{mg}{k}=\left(v_0-\dfrac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}+\dfrac{mg}{k}=\dfrac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)+v_0e^{-\frac{k}{m}t}$,

d) On pose $X=-\dfrac{k}{m}t$, et donc, k tend vers 0 est équivalent à X tend vers 0, et $v(t)$ s'écrit alors,

$$v(t)=-\frac{gt}{X}\left(1-e^X\right)+v_0e^X=gt\frac{e^X-1}{X}+v_0e^X$$

Lorsque $k\to 0 \iff X\to 0$, $\lim_{X\to 0}\dfrac{e^X-1}{X}=0$, d'après 1), et $\lim_{X\to 0}v_0e^X=v_0e^0=v_0$.

On en déduit que, $\lim_{k\to 0}v(t)=\lim_{X\to 0}v(t)=gt+v_0$: en l'abscence de frottement, c'est-à-dire lorsque $k=0$, le mouvement du corps est uniformément accéléré.

Exercice 2 *(Baccalauréat France métropolitaine, septembre 2008, 3 points)*

1. a) Soit f une solution de (E), et g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

   Alors, g est dérivable, comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, avec, $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{(2x+1)f(x)+8x^2-f(x)}{x^2}=\dfrac{2xf(x)+8x^2}{x^2}=2\dfrac{f(x)}{x}+8=2g+8$

   Ainsi, $\underline{g \text{ est bien solution de l'équation différentielle } (E') : y'=2y+8}$.

   b) Soit h une solution de (E'), c'est-à-dire telle que $h'=2h+8$, et f la fonction définie par $f(x)=xh(x)$.

   Alors, f est dérivable sur $]0;+\infty[$, comme produit de fonctions dérivables, avec,

   $$f'(x)=h(x)+xh'(x)=h(x)+x(2h(x)+8)=(2x+1)h(x)+8x=(2x+1)\frac{h(x)}{x}+8x$$

   Ainsi, en multipliant cette relation par x (car $x\neq 0$ sur $]0;+\infty[$), on obtient l'équation différentielle : $xf'(x)=(2x+1)f(x)+8x^2$, et donc, $\underline{f \text{ est une solution de } (E)}$.

   est solution de (E).

2. (E') a pour solution générale : $h(x)=Ke^{2x}+4$, où K est un réel.

   D'après les questions précédentes, on en déduit que les solutions de (E) sont exactement les fonctions $\underline{f(x)=xh(x)=Kxe^{2x}+4x,\ K\in\mathbb{R}}$.

3. On impose de plus que $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, soit $-\dfrac{K}{2}e^{-1}-2=0$, ou encore, $K=-4e$.

   Ainsi, la fonction s'écrit : $\underline{f(x)=-4exe^{2x}+4x=4x\left(-e^{2x+1}+1\right)}$.

Exercice 3 *(Baccalauréat Pondichéry, Avril 2008, 7 points)*

Partie A : un modèle discret

1. (a) On a $f(x)=2x-\dfrac{x^2}{10}$, donc $f'(x)=2-\dfrac{x}{5}$. On a $f'(x)\leqslant 0 \iff x\leqslant 10$ et $f'(x)\geqslant 0 \iff x\geqslant 10$.

   La fonction f est donc croissante sur $[0\,;\,10]$ et décroissante sur $[10\,;\,20]$.

   (b) Sur $[0\,;\,20]$, le maximum de f est donc $f(10)=10$, $f(0)=0$ et $f(20)=0$ sont les minima de f.

   On a donc quel que soit $x\in[0\ ;\ 20]$, $f(x)\in[0\ ;\ 10]$.

   (c) Voir graphique en annexe ci-dessous.

2. <u>Initialisation :</u> On a $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2 - 0,1 = 1,9$ On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 10$.
<u>Hérédité :</u> Supposons qu'il existe une valeur n pour laquelle $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
On a vu que sur l'intervalle $[0\,;\,10]$, la fonction f est croissante, donc

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \iff u_{n+1} \leqslant u_{n+2}.$$

De plus d'après la question **1. b.** quel que soit un nombre dans l'intervalle $[0\,;\,20]$ et donc aussi dans l'intervalle $[0\,;\,10]$, son image par f et elle aussi dans l'intervalle $[0\,;\,10]$.
On a donc bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 10$. La démonstration par récurrence est terminée.

3. On vient en fait de démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. Comme elle majorée par 10, elle converge vers une limite ℓ inférieure ou égale à 10.
Comme la fonction f est continue on obtient d'après le théorème du point fixe :

$$\ell = 2\ell - \frac{\ell^2}{10} \iff 10\ell - \ell^2 = 0 \iff \ell(10-\ell) = 0 \iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = 10.$$

$\ell = 0$ n'est pas possible car $u_0 = \ell$ et la suite est croissante. Donc $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 10}$.

Partie B : un modèle continu

1. (a) $z = \dfrac{1}{y} \iff y = \dfrac{1}{z}$. z est dérivable et $z' = -\dfrac{y'}{y^2} = -y'z^2 \iff y' = -\dfrac{z'}{z^2}$.

On a donc : $y' = \dfrac{1}{20}y(10-y) \iff -\dfrac{z'}{z^2} = \dfrac{1}{20}\dfrac{1}{z}\left(10 - \dfrac{1}{z}\right) \iff z' = -\dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{20}$.

(b) Les solutions de l'équation E_1 sont les fonctions $x \mapsto z(x) = K\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{10}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions : $x \mapsto \dfrac{1}{K\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{10}}$.

2. g est une solution de (E) telle que $g(0) = 1 \iff \dfrac{1}{K\mathrm{e}^{-\frac{0}{2}} + \dfrac{1}{10}} = 1 \iff \dfrac{1}{K+0,1} = 1 \iff K = \dfrac{9}{10}$.

Finalement $g(x) = \dfrac{1}{\frac{9}{10}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{10}} = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 1}$.

3. On a $g'(x) = -\dfrac{10 \times 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\left(9\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 1\right)^2} = \dfrac{45\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\left(9\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 1\right)^2}$. Cette dérivée ne comportant que des termes positifs est positive : la fonction g est donc croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 10$. Ceci signifie qu'à long terme le nombre de foyers équipés de téléviseurs à écran plat va se rapprocher de 10 millions.

ANNEXE