

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction

PARTIE A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Étude des limites

- Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
- Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
- Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe \mathcal{C} ?

2. Étude des variations de la fonction f

- Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1).$$

- Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe \mathcal{C} dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on considère l'intégrale I_n définie par :

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx.$$

1. Calculer I_2 .

2. Une relation de récurrence

- Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1 - n)I_n.$$

- Calculer I_3 .

3. Étude de la limite de la suite de terme général I_n

- Établir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; 2]$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}.$$

- En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n) .