DEVOIR N°1 DE MATHEMATIQUES DU 2eme TRIMESTRE

NB : Soignez écriture et présentation !

EXERCICE(4pts)

La constitution d'un groupe de trois élèves devant représenter leurs camarades à un exposé sur l'environnement est soumise à une expérience aléatoire.

On lance trois fois une pièce de monnaie. Un garçon est désigné à chaque apparition de pile et une fille à chaque apparition de face. Un groupe constitué de filles et de garçons est appelé « groupe mixte » et un groupe constitué uniquement de filles ou uniquement de garçons un « groupe non mixte ».

On désigne par M l'évènement «le groupe est mixte » et par $\bar{M}$ l'évènement contraire de M

- 1) Calculer les probabilités des évènements M et $\bar{M}$.
- 2) A l'intérieur de la salle où se tient l'exposé, le groupe de trois élèves reçoit en cadeau trois tee-shirts par filles présente au sein du groupe. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tee-shirts reçus.
 - a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b) Déterminer la loi de probabilité de X .
 - c) Déterminer la fonction de répartition F de X .
 - d) Construis la représentation graphique de F .
 - e) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X .
- 3) Les tee-shirts reçus sont réparties de manière équitable à tous les membres du groupe. Quelle est la probabilité que chaque membre du groupe reparte avec au moins deux tee-shirts.

EXERCICE2(4pts)

Une urne contient 5 jetons portant les réels : $-\sqrt{2}$; -1 ; 0 ; 1 et $\sqrt{2}$. On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne. On appelle x le numéro du premier jeton et y celui du deuxième jeton et on construit le nombre complexe $z = x + iy$.

1. Combien de nombres complexes peut-on ainsi construire ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir :
 - a. Un nombre complexe de module $\sqrt{2}$?
 - b. Un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2}$?
3. On effectue trois fois de suite le tirage successif et avec remise de 2 jetons de l'urne et on désigne par

X la variable aléatoire qui, à l'issue de ces trois tirages associe le nombre de nombres complexes de module $\sqrt{2}$. Déterminer la loi de probabilité de X

Problème(12pts)

f est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} & \text{si } x \in]-\infty; 0] \\ f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 2x \ln x & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases} \quad \text{et } (C_f) \text{ sa représentation dans un repère orthonormé } (o, \vec{i}, \vec{j}) \text{ unité } 2\text{cm}$$

PARTIE A : Etude de la fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x - 1 - 2\ln x$

- 1- a) Etudier le sens de variation de g et calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$
- b) Dresser le tableau de variation de g
- 2- a) Démontrer qu'il existe un unique réel α dans $[2; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $\alpha \in [3,5; 3,6]$
- b) Calculer $g(1)$
- 3- Déduisez-en le signe de $g(x)$

PARTIE B : Etude et représentation graphique de la fonction f

- 1- Déterminer l'ensemble de définition D de f
- 2- a) Etudier la continuité de f en 0
- b) Etudier la dérivabilité de f en 0 . Interpréter graphiquement le résultat. Préciser le domaine de dérivabilité E de f
- 3- a) Calculer les limites de f aux bornes de D
- b) Démontrer que : $f(\alpha) = \frac{-\alpha^2 + 4\alpha}{2}$
- c) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation
- 4- Tracer la courbe (C_f)
- 5- Soit h la restriction de f à l'intervalle $] -1; 0]$ et $(C_{h^{-1}})$ sa représentation graphique
- a) Démontrer que h admet une bijection réciproque h^{-1}
- b) Donner le tableau de variation de h^{-1}
- c) Expliquer h^{-1}
- d) Tracer $(C_{h^{-1}})$ dans $(o, \vec{i}, \vec{j})$

Données : $\ln(3,5)=1,25$; $\ln(3,6)=1,28$; $f(\alpha)=0,8$

« La réussite est l'accumulation d'échecs, d'erreurs ; de faux départs ; de confusions, et la volonté de continuer malgré tout ». NICK Gleason