Physique

Corrigé

Auteurs

Collectif

© Vallesse Éditions, Abidjan, 2021

ISBN : 978-2-902594-94-8

Toute reproduction interdite sous peine de poursuites judiciaires.

Thème 1 : Mécanique

Leçon

1

Cinématique du point

IV. Exercices

Exercice 1

a)

Exercice 2

b)

Exercice 3

Exercice 4

- 1) La trajectoire d'un point mobile est l'ensemble des positions occupées successivement par ce point mobile au cours de son mouvement.
- 2) Un mouvement est rectiligne et uniforme si la trajectoire est une droite et le vecteur-vitesse du mobile est constant.
- 3) Dans un mouvement circulaire et uniforme, la trajectoire est un cercle et la valeur du vecteur-vitesse est constante.

Exercice 5

	Mouvement rectiligne et uniforme	Mouvement rectiligne et uniformément varié	Mouvement circulaire et uniforme
Vecteur - vitesse constant.	×		

Valeur du vecteur - vitesse constante.			×
Vecteur - accélération constant et non nul.		×	
Accélération tangentielle nulle.			×
Accélération normale nulle.	×	×	

Exercice 6

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	Au cours d'un mouvement rectiligne retardé, la valeur du vecteur-accélération diminue.		×
2	Le vecteur-vitesse d'un mobile qui effectue un mouvement circulaire et uniforme est constant.		×
3	Le vecteur-accélération d'un mobile qui a un mouvement circulaire et uniforme est centripète.	×	
4	Dans un mouvement circulaire et uniforme, le vecteur-accélération normale est constant.		×
5	La dérivée seconde du vecteur-position d'un mobile qui a un mouvement rectiligne et uniforme est nulle.	×	
6	Un mobile qui recule sur une trajectoire rectiligne a un mouvement nécessairement retardé.		×

Exercice 7

- 1) Le **vecteur-accelération** d'un point mobile est la dérivée seconde de son vecteur-position par rapport au temps.
- 2) Le mouvement d'un point mobile est uniforme si la **valeur de son vecteur-vitesse** est **constante**.
- 3) La dérivée par rapport au temps du vecteur - vitesse d'un mobile est nulle lorsque le mouvement de ce mobile est **rectiligne et uniforme**.
- 4) Dans un mouvement circulaire et uniforme, l'accélération **tangentielle** est nulle.
- 5) Le vecteur - vitesse d'un mobile en un point donné, est **tangent** à la trajectoire de ce mobile en ce point.

Exercice 8

Mouvement circulaire et uniforme	×			×	
Mouvement rectiligne et uniformément retardé			×		×
Mouvement rectiligne et uniformément accéléré		×			×
Mouvement rectiligne et uniforme	×				
	$\uparrow a \cdot v = 0$	$\uparrow a \cdot v > 0$	$\uparrow a \cdot v < 0$	$\uparrow a = a_{nn}$	$\uparrow a = a_{\tau u} \neq 0$

- 1) Le mouvement est rectiligne uniformément varié.

$$\text{Donc } x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0$$

$$\text{et } v_x(t) = a_x t + v_{0x} . \text{ Avec } a_x = -3 m.s^{-2}$$

$$v_{x0} = +4 m.s^{-1} \text{ et } x_0 = -2 m .$$

$$\text{D'où } x(t) = -1,5t^2 + 4t - 2 \text{ et } v_x(t) = -3t + 4$$

- 2) Détermination de :

- 2.1) la date t_1 .

Le point rebrousse chemin en M_1 donc

$$v_1 = 0 m.s^{-1} ; -3t_1 + 4 = 0 ; t_1 = \frac{4}{3} ; t_1 = 1,33 \text{ s.}$$

- 2.2) l'abscisse x_1 du point M_1 .

$$x_1 = -1,5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4 \times \frac{4}{3} - 2 ; x_1 = 0,67 \text{ m.}$$

- 2.3) la vitesse avec laquelle, il repasse au point M_0 .

Au point M_0 , $x = x_0 = -2m ; -1,5t^2 + 4t - 2 = -2 ;$

$$-1,5t^2 + 4t = 0 ; t = 0s \text{ (date de départ)}$$

$$\text{et } t = \frac{4}{1,5} = \frac{8}{3} = 2,7s \text{ (date de retour en } M_0).$$

$$v_x = -3 \times \frac{8}{3} + 4 ; v_x = -4 m.s^{-1}.$$

Exercice 10

- 1) Équation de la trajectoire du point mobile :

$$\text{On a : } \begin{cases} x(t) = 2t^2 - t + 1 \\ y(t) = -2t^2 + t + 3 \end{cases} ;$$

$$\text{donc } x + y - 4 = 0 \text{ ou } y = -x + 4.$$

- 2) L'équation obtenue est celle d'une droite.

Donc la trajectoire est rectiligne.

- 3) Coordonnées du :

$$3.1) \text{ vecteur-vitesse : } \vec{v} \begin{cases} v_x = \dot{x} = 4t - 1 \\ v_y = \dot{y} = -4t + 1 \end{cases} ;$$

$$3.2) \text{ vecteur-accelération : } \vec{a} \begin{cases} a_x = \ddot{x} = 4 m.s^{-2} \\ a_y = \ddot{y} = -4 m.s^{-2} \end{cases}$$

4) La trajectoire du point mobile est une droite et son vecteur-accélération est constant. Donc le mouvement est rectiligne et uniformément varié.

Exercice 11

1) Détermination, à la date t :

1.1) des coordonnées des vecteur-vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ du point mobile :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ y(t) = -t \end{cases} \quad \vec{v} \begin{cases} v_x = \dot{x} = t \\ v_y = \dot{y} = -1 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = \ddot{x} = 1 \text{ m.s}^{-2} \\ a_y = \ddot{y} = 0 \text{ m.s}^{-2} \end{cases}$$

1.2) les composantes tangentielle et normales de l'accélération :

On a : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$; $a = 1 \text{ m.s}^{-2}$

et $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{t^2 + 1}$ (m.s^{-1})

Accélération tangentielle :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} (\text{m.s}^{-2})$$

Accélération normale :

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{1 - \frac{t^2}{t^2 + 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{t^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} (\text{m.s}^{-2})$$

2) Équation de la trajectoire du mobile :

On a : $t = -y$. Donc : $x = \frac{1}{2}y^2$.

3) Pour $y = -2$; $x = \frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2$.

Donc le mobile passe par le point B (2 ; -2).

4) Date de passage du mobile au point B.

On a : $t = -y$; $t = 2 \text{ s}$.

5) Représentation de la trajectoire du mobile dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

6) Construction des vecteurs $\vec{v}$; $\vec{a}$; $\vec{a}_N$ et $\vec{a}_T$ en B (voir courbe)

Pour $t = 2\text{s}$; $\vec{v} \begin{cases} v_x = 2 \text{ m.s}^{-1} \\ v_y = -1 \text{ m.s}^{-1} \end{cases}$

$\vec{a} \begin{cases} a_x = 1 \text{ m.s}^{-2} \\ a_y = 0 \text{ m.s}^{-2} \end{cases}$; $a_T = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,9 \text{ m.s}^{-2}$

Exercice 12

1) Les différentes phases du mouvement du mobile.

Pour $t \in [0\text{s}; 20\text{s}]$; la vitesse du mobile augmente. Donc le mouvement est rectiligne et accéléré.

Pour $t \in [20\text{s}; 40\text{s}]$; la vitesse du mobile est constante. Donc le mouvement est rectiligne et uniforme.

Pour $t \in [40\text{s}; 50\text{s}]$; la vitesse du mobile décroît. Donc le mouvement est rectiligne et retardé.

2) Détermination, pour chaque phase identifiée de :

2.1) la valeur de l'accélération a

$t \in [0\text{s}; 20\text{s}]$: $a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; a_N : $a_1 = \frac{50 - 0}{20 - 0}$
 $a_1 = 2,5 \text{ m.s}^{-2}$.

Pour $t \in [20\text{s}; 40\text{s}]$: $a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

a_N ; $a_2 = \frac{50 - 50}{40 - 20}$
 $a_2 = 0 \text{ m.s}^{-2}$.

Pour $t \in [40\text{s}; 50\text{s}]$: $a_3 = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; a_N ;

$a_3 = \frac{0 - 50}{50 - 40}$
 $a_3 = -5 \text{ m.s}^{-2}$.

2.2) les expressions de la vitesse $v(t)$ et de l'abscisse $x(t)$:

$t \in [0s ; 20s]$:

$$v_1(t) = a_1 t + v_{01}; v_1(t) = 2,5t.$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2 + v_{01} t + x_{01}.$$

$$x_1(t) = 1,25t^2$$

Pour $t \in [20s ; 40s]$:

$$v_2(t) = v_{02}; \text{ avec } v_{02} = 50 \text{ m.s}^{-1};$$

$$v_2(t) = 50 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$x_2(t) = v_{02}(t - 20) + x_{02};$$

avec ; $v_{02} = 50 \text{ m.s}^{-1}$

$$x_{02} = 1,25 \times (20)^2 = 500 \text{ m}.$$

$$x_2(t) = 50(t - 20) + 500$$

$$x_2(t) = 50t - 500$$

Pour $t \in [40s ; 50s]$:

$$v_3(t) = a_3(t - 40) + v_{03};$$

avec $a_3 = -5 \text{ m.s}^{-2}$; et $v_{03} = 50 \text{ m.s}^{-1}$.

$$x_3(t) = \frac{1}{2} a_3(t - 40)^2 + v_{03}(t - 40) + x_{03}$$

avec $a_3 = -5 \text{ m.s}^{-2}$; $v_{03} = 50 \text{ m.s}^{-1}$

$$x_{03} = 50 \times 40 - 500 = 1500 \text{ m}.$$

$$v_3(t) = -5(t - 40) + 50;$$

$$v_3(t) = -5t + 250$$

$$x_3(t) = \frac{1}{2} \times (-5)(t - 40)^2 + 50(t - 40) + 1500;$$

$$x_3(t) = -2,5 t^2 + 250 t - 4500.$$

3) La distance totale parcourue par le mobile :

$$D = -2,5 \times 50^2 + 250 \times 50 - 4500; D = 1750 \text{ m}.$$

4) La vitesse moyenne du mobile :

$$v_m = \frac{D}{\Delta t}; \text{ AN : } v_m = \frac{1750}{50}; v_m = 35 \text{ m.s}^{-1}.$$

Exercice 13

1)

1.1) Coordonnées du vecteur-vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \dot{x} = 10 \cos 5t \\ v_y = \dot{y} = -10 \sin 5t \end{cases}$$

1.2) Coordonnées du vecteur-accélération $\vec{a}$:

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = \ddot{x} = -50 \sin 5t \\ a_y = \ddot{y} = -50 \cos 5t \end{cases}$$

2) Valeurs de $\vec{v}$ et de $\vec{a}$.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2};$$

$$v = \sqrt{(10 \cos 5t)^2 + (10 \sin 5t)^2};$$

$$v = \sqrt{100}; v = 10 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2};$$

$$a = \sqrt{(-50 \cos 5t)^2 + (-50 \sin 5t)^2};$$

$$a = \sqrt{2500}; a = 50 \text{ m.s}^{-2}.$$

3) Équation cartésienne de la trajectoire du point mobile.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2 \sin 5t)^2 + (2 \cos 5t)^2 \\ &= 2^2 [(\sin 5t)^2 + (\cos 5t)^2]; x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

4) La nature de cette trajectoire : La trajectoire est un cercle.

5) La nature du mouvement du point mobile :

La norme du vecteur - vitesse $\vec{v}$ du point mobile est constante et sa trajectoire est un cercle, le mouvement est donc circulaire et uniforme.

Exercice 14

1) Calcul de la vitesse du mobile sur la première et la deuxième phase :

$$\text{Phase 1 : } t \in [0s ; 4s]; v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t};$$

$$v_1 = \frac{8 - 0}{4 - 0} = \frac{8}{4}; v_1 = 2 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$\text{Phase 2 : } t \in [6s ; 8s]; v_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 8}{8 - 6}$$

$$= \frac{-8}{2}; v_2 = -4 \text{ m.s}^{-1};$$

2) Équation horaire du mouvement du mobile sur ces deux phases :

Phase 1 : $t \in [0\text{s} ; 4\text{s}]$; $x_1(t) = v_1 t + x_{01}$;
avec $x_{01} = 0\text{ m}$. $x_1(t) = 2t$.

Phase 2 : $t \in [6\text{s} ; 8\text{s}]$; $x_2(t) = v_2 t + x_{02}$;
avec $x_{02} = 8\text{ m}$. $x_2(t) = -4t + 8$.

3) La distance totale parcourue par le mobile :
 $d = d_1 + d_2$; $d_1 = 8\text{ m}$ et $d_2 = 8\text{ m}$.

Donc $d = 8 + 8$;

$d = 16\text{ m}$.

Exercice 15

1) Les mouvements sont rectilignes et uniformes.

2) Équations horaires :

$$x_1(t) = v_1 t + x_{01} ; x_1(t) = 3t - 4 .$$

Avec $v_1 = +3\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $x_{01} = -4\text{ m}$.

$$x_2(t) = v_2 t + x_{02} ; x_2(t) = -3t + x_{02} .$$

À la date $t = 2\text{ s}$; $x_2 = 5 = -3 \times 2 + x_{02}$.

Donc $x_{02} = +11\text{ m}$.

D'où $x_2(t) = -3t + 11$.

3) Date de rencontre des deux mobiles :

Lorsque les deux mobiles se rencontrent,

$$x_1(t) = x_2(t) ; 3t - 4 = -3t + 11 ; t = \frac{11 + 4}{6} ;$$

$$t = 2,5\text{ s} .$$

4) L'abscisse du point de rencontre :

$$x_1 = x_2 = 3 \times 2,5 - 4 ; x_1 = x_2 = 3,5\text{ m} .$$

Exercice 16

1) Les différentes phases du mouvement de l'ascenseur :

Phase 1 : du début de la montée à la fin des deux premiers mètres de montée ;

Phase 2 : pendant les 10 secondes suivantes où la vitesse de l'ascenseur est constante ;

Phase 3 : pendant le ralentissement de l'ascenseur.

2) Calcul de son accélération sur chaque phase :

Phase 1 :

$$a_1 = \frac{v^2 - 0}{2\Delta x} ; A.N : a_1 = \frac{2^2}{2 \times 2} ; a_1 = 1\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Phase 2 :

$a_2 = 0\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ car le mouvement est rectiligne et uniforme.

Phase 3 :

$$a_3 = \frac{0 - v^2}{2\Delta x} ; A.N : a_3 = \frac{0 - 2^2}{2 \times 10} ; a_3 = -0,2\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

3) Équations horaires du mouvement sur chaque phase :

Phase 1 : $v_1(t) = a_1 t + v_{01}$; avec $v_{01} = 0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $a_1 = 1\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $v_1(t) = t$.

$$x_1(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2 + v_{01} t + x_{01} ; \text{ avec } x_{01} = 0\text{ m} ;$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} t^2 .$$

Phase 2 : $v_2(t) = v_{02} = 2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;

$$x_2(t) = v_{02}(t - \Delta t_1) + x_{02} \text{ avec } \Delta t_1 = 2\text{ s}$$

et $x_{02} = 2\text{ m} \Rightarrow x_2(t) = 2t - 2$.

Phase 3 : $v_3(t) = a_3 [t - (\Delta t_1 + \Delta t_2)] + v_{03}$ avec $\Delta t_1 + \Delta t_2 = 2 + 10 = 12\text{ s}$ et $v_{03} = 2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \Rightarrow$

$$v_3(t) = -0,2t + 4,4 .$$

$$x_3(t) = \frac{1}{2} a_3 (t - 12)^2 + v_{03} (t - 12) + x_{03} \text{ avec}$$

$$x_{03} = 22\text{ m}$$

$$x_3(t) = -0,1t^2 + 4,4t - 16,4 .$$

4) Détermination de :

4.1) la distance totale parcourue : $d = d_1 + d_2 + d_3$.

$$d_1 = 2\text{ m} ; d_2 = 2 \times 10 = 20\text{ m} \text{ et } d_3 = 10\text{ m} .$$

$$d = 2 + 20 + 10 ; d = 32\text{ m} .$$

4.2) la durée totale du parcours :

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 .$$

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta v}{a_1} = \frac{2}{1} = 2\text{ s} ; \Delta t_2 = 10\text{ s} \text{ et } \Delta t_3 = \frac{\Delta v}{a_3}$$

$$= \frac{-2}{-0,2} ; \Delta t_3 = 10\text{ s} . \Delta t = 2 + 10 + 10 ; \Delta t = 22\text{ s} .$$

4.3) la vitesse moyenne de cet ascenseur :

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} ; A.N : v_m = \frac{32}{22} . v_m = 1,45\text{ m}\cdot\text{s}^{-1} .$$

Exercice 17

1)

1.1) Expressions des coordonnées $x(t)$;

$y(t)$ et $z(t)$ de M :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ y(t) = -t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

1.2) Équation cartésienne de la trajectoire de

M : on a $t = -y$. Donc $x = \frac{1}{2}y^2$.

2) L'équation obtenue est celle d'une parabole.

La trajectoire de M est donc parabolique.

3)

3.1) Coordonnées du vecteur - vitesse $\vec{v}$ et du vecteur - accélération $\vec{a}$:

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \dot{x} = t \\ v_y = \dot{y} = -1 \\ v_z = \dot{z} = 0 \end{cases} \text{ et } \vec{a} \begin{cases} a_x = \ddot{x} = 1 \text{ m.s}^{-2} \\ a_y = \ddot{y} = 0 \text{ m.s}^{-2} \\ a_z = \ddot{z} = 0 \text{ m.s}^{-2} \end{cases}$$

3.2) Expression de la valeur de $\vec{v}$ et celle de $\vec{a}$:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} ; v = \sqrt{t^2 + (-1)^2 + 0} = \sqrt{t^2 + 1} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} ; a = \sqrt{1^2 + 0 + 0}$$

$$a = 1 \text{ m.s}^{-2}$$

3.3) Expressions des accélérations tangentielle a_T et normale a_N et du rayon de courbure ρ de la trajectoire :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} ; a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{t^2}{t^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \text{ (m.s}^{-2}\text{)}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} = \sqrt{(t^2 + 1)^3} \text{ (m)}$$

4) La valeur du vecteur - vitesse et le rayon de courbure ne sont pas constants. Donc le mouvement de M ne peut être circulaire et uniforme.

Exercice 18

1) Pour tout t , $y = 0$. Donc le mouvement de la balle se déroule dans le plan (x O z).

2)

2.1) Coordonnées du vecteur - vitesse $\vec{v}$ du vecteur - accélération $\vec{a}$ de la balle :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \dot{x} = 4 \text{ m.s}^{-2} \\ v_y = \dot{y} = 0 \text{ m.s}^{-2} \\ v_z = \dot{z} = -10t + 25 \text{ m.s}^{-2} \end{cases} \text{ et } \vec{a} \begin{cases} a_x = \ddot{x} = 0 \text{ m.s}^{-2} \\ a_y = \ddot{y} = 0 \text{ m.s}^{-2} \\ a_z = \ddot{z} = -10 \text{ m.s}^{-2} \end{cases}$$

2.2) Intervalle de temps sur lequel le mouvement de la balle est accéléré :

Le mouvement de la balle est accéléré si

$$\vec{a} \cdot \vec{v} > 0 ; -10(-10t + 25) > 0 ; t > 2,5\text{s.}$$

2.3) Intervalle de temps sur lequel le mouvement de la balle est retardé :

Le mouvement de la balle est retardé si

$$\vec{a} \cdot \vec{v} < 0 ; -10(-10t + 25) < 0 ; t < 2,5\text{s.}$$

3) Équation cartésienne de la trajectoire de la balle :

$$\text{On a : } t = \frac{x}{4} . \text{ Donc } y = -5 \left(\frac{x}{4} \right)^2 + 25 \left(\frac{x}{4} \right) + 3 ;$$

$$y = -\frac{5}{16}x^2 + \frac{25}{4}x + 3 .$$

4) Nature de cette trajectoire :

L'équation obtenue est celle d'une parabole.

La trajectoire est donc parabolique.

Exercice 19

1) Nature des mouvements :

1.1) Camarade : mouvement rectiligne et uniforme.

1.2) Train : mouvement rectiligne et uniformément accéléré.

2) Équations horaires des mouvements :

Camarade : $v_1(t) = v_{01}$; $v_1(t) = 5 \text{ m.s}^{-1}$

et $x_1(t) = v_{01}t + x_{01}$; $x_1(t) = 5t - 25$.

Train : $v_2(t) = a_2(t) + v_{02}$; $v_2(t) = t$

et $x_2(t) = \frac{1}{2}a_2t^2 + v_{02}t + x_{02}$; $x_2(t) = 0,5t^2$.

3) Il rattrape le train si l'équation : $x_1(t) = x_2(t)$ admet une solution.

C'est-à-dire : $0,5t^2 = 5t - 25$; $0,5t^2 - 5t + 25 = 0$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 0,5 \times 25 ; \Delta = -25 < 0.$$

Donc l'équation n'admet pas de solution. D'où le camarade ne pourra pas rattraper le train.

4) Distance minimale de la portière du train à laquelle il parviendra.

$d(t) = x_2(t) - x_1(t) = 0,5t^2 - 5t + 25$. La distance est minimale si la dérivée de $d(t)$ est nulle.

$d'(t) = t - 5$; $d'(t) = 0$ équivaut à $t - 5 = 0$; $t = 5s$.
Donc $d_{\min} = 0,5 \times 5^2 - 5 \times 5 + 25$; $d_{\min} = 12,5$ m.

Exercice 20

1) Un mouvement rectiligne uniformément varié est un mouvement dont trajectoire est rectiligne et l'accélération constante.

2) Accélérations a_1 ; a_2 et a_3 du train sur les trois phases.

Phase 1 : de A à B : $a_1 = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2AB}$.

Phase 2 : de B à C : $a_2 = \frac{v_C - v_B}{\Delta t}$.

Phase 3 : de C à D : $a_3 = \frac{v_D - v_C}{\Delta t}$.

A.N.

$$a_1 = \frac{10^2 - 15^2}{2 \times 125} ; a_1 = \frac{-125}{2 \times 125} ;$$

$$a_1 = -0,5 \text{ m.s}^{-2}.$$

$$a_2 = \frac{10 - 10}{60} ; a_2 = 0 \text{ m.s}^{-2}.$$

Exercice 21

1) Relations permettant de calculer la vitesse v_i et l'accélération a_i du mobile M.

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \text{ et } a_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

2) Calcul des valeurs de la vitesse v_i et de l'accélération a_i aux positions M_2 ; M_3 et M_4 du mobile M :

M_i	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
t_i (ms)	0	50	100	150	200	250	300
x_i (cm)	0	8,125	17,500	28,125	40,000	53,125	67,500
v_i (m.s ⁻¹)		1,75	2	2,25	2,5	2,75	
a_i (m.s ⁻²)			5	5	5		

$$a_3 = \frac{15 - 10}{20} ; a_3 = 0,25 \text{ m.s}^{-2}.$$

3) Équations horaires $x_1(t)$; $x_2(t)$ et $x_3(t)$ et $v_1(t)$; $v_2(t)$ et $v_3(t)$ du mouvement au cours des trois phases.

Phase 1 : $v_1(t) = a_1(t) + v_{01}$; $v_1(t) = 0,5t + 15$.

$$x_1(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2 + v_{01} t + x_{01} ;$$

$$x_1(t) = -0,25t^2 + 15t.$$

Phase 2 : $v_2(t) = v_{02}$; $v_2(t) = 10$

$$x_2(t) = v_{02} t + x_{02} ; \text{ avec } x_{02} = 0 \text{ m} ; x_2(t) = 10t.$$

Phase 3 : $v_3(t) = a_3(t) + v_{03}$; $v_3(t) = +0,25t + 10$.

$$x_3(t) = \frac{1}{2} a_3 t^2 + v_{03} t + x_{03} ; \text{ avec } x_{03} = 0 \text{ m}$$

$$x_3(t) = 0,125t^2 + 10t.$$

4)

4.1) Durée de la première phase :

$$\Delta t_1 = \frac{v_B - v_A}{a_1} ; \Delta t_1 = \frac{10 - 15}{-0,5} ; \Delta t_1 = 10s.$$

4.2) Distance parcourue par le train de A à D :

AD = AB + BC + CD avec AB = 125 m ;

$$BC = 10 \times 60 = 600 \text{ m} ;$$

$$CD = 0,125 \times 20^2 + 10 \times 20 = 250 \text{ m}.$$

$$AD = 125 + 600 + 250 ; AD = 975 \text{ m}.$$

4.3) La distance entre le point D et le point E :

$$DE = \frac{v_E^2 - v_D^2}{2a_4} ;$$

$$DE = \frac{0 - 15^2}{2 \times (-1)} ; DE = 112,5 \text{ m}.$$

3) La vitesse du mobile croît et son accélération est constante. Donc le mouvement de M est rectiligne et uniformément accéléré.

4)

4.1) Expression $v(t)$ de la vitesse du mobile : $v(t) = at + v_0$; $v(t) = 5t + v_0$.

Pour $t = 0,1s$; $v = 2 = 5 \times 0,1 + v_0$.

$v_0 = 2 - 0,5$; $v_0 = 1,5 \text{ m.s}^{-1}$.

D'où $v(t) = 5t + 1,5$.

4.2) Expression $x(t)$ de la position du mobile :

$x(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0t + x_0$; $At = 0s$; $x_0 = 0 \text{ m}$.

$x(t) = 2,5t^2 + 1,5t$.

Leçon 2

Mouvement du centre d'inertie d'un solide

IV. Exercices

Exercice 1

- 1) Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe de l'inertie est vérifié.
- 2) Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un système entre deux instants est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures appliquées à ce système entre ces deux instants.
- 3) Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale au produit de sa masse par le vecteur-accélération de son centre d'inertie.

Exercice 2

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	Le théorème de l'énergie cinétique donne la relation entre la somme des forces extérieures qui s'exercent sur un solide et le vecteur - accélération de ce solide.		×
2	La somme des forces extérieures qui s'exercent sur un solide dans un référentiel galiléen est le produit de sa masse par le vecteur- accélération de son centre d'inertie.	×	
3	La variation de l'énergie cinétique d'un système dans un référentiel galiléen est la somme des travaux des forces extérieures appliquées à ce système.	×	
4	Un solide soumis à des forces extérieures qui se compensent a un mouvement nécessairement rectiligne et uniforme s'il est en mouvement.	×	
5	Un solide soumis à l'action d'une seule force dans un référentiel galiléen effectue un mouvement circulaire et uniforme si cette force est centripète.	×	

Exercice 3

Exercice 4

(2)

Exercice 5

$$a_x = g \sin \alpha$$

Exercice 6

Un solide de masse m , tombe en chute libre. En appliquant le **théorème du centre d'inertie** dans le référentiel terrestre, on montre que son vecteur - accélération $\vec{a} = \vec{g}$.

Après une chute d'une hauteur h , on établit en appliquant le **théorème de l'énergie cinétique**, que sa vitesse v est telle que $v^2 = 2.g.h$. Ces deux **théorèmes** qui ne s'appliquent que dans des **référentiels galiléens**, sont très utilisés en mécanique.

Exercice 7

- 1) Le **vecteur - accélération** du centre d'inertie d'un solide est colinéaire à la somme vectorielle des forces extérieures qui sont appliquées à ce solide.
- 2) Si l'énergie cinétique d'un solide est **constante**, alors la somme **vectorielle** des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle.
- 3) D'après le théorème du centre d'inertie, un solide soumis à l'action d'une seule force ne peut avoir un **vecteur - accélération** nul.
- 4) Si la somme des travaux des forces extérieures qui s'exercent sur un solide est positive alors l'énergie cinétique de ce solide **augmente**.

Exercice 8

(c)

Exercice 9

1)

1.1) La vitesse v_A de la bille au point A :

$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{AB}(\vec{F}_{ext})$. La bille n'est soumise qu'à son poids P et $v_B = 0 \text{ m.s}^{-1}$.

$$0 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -m.g.h_1 ; v_A = \sqrt{2g.h_1} ; \text{ avec}$$

$$h_1 = 10 - 1,5 = 8,5 \text{ m.}$$

$$A.N : v_A = \sqrt{2 \times 10 \times 8,5} ; v_A = 13 \text{ m.s}^{-1}$$

1.2) la vitesse v_O avec laquelle la bille touche le sol :

$$\frac{1}{2} m v_O^2 - 0 = m.g.h_2 ; v_O = \sqrt{2g.h_2} ; \text{ avec}$$

$$h_2 = 10 \text{ m.}$$

$$A.N : v_O = \sqrt{2 \times 10 \times 10} ; v_A = 14,14 \text{ m.s}^{-1}$$

2) Détermination de l'expression du vecteur - accélération $\vec{a}$ de la bille :

La bille est soumise à l'action de son poids $\vec{P}$ uniquement. Donc $\vec{P} = m \vec{a}$; $m \vec{g} = m \vec{a}$; $\vec{a} = \vec{g}$.

3) Représentation de $\vec{a}$:

Exercice 10

1) Représentation des forces appliquées aux solides (S_1) et (S_2).

Le solide (S_1) est soumis à son poids $\vec{P}_1$, à la réaction normale $\vec{R}_N$ du plan horizontal et à la tension T_1 du fil horizontal.

Le solide (S_2) est soumis à son poids $\vec{P}_2$ et à la tension T_2 du fil vertical.

2)

2.1) Relation entre l'accélération a_1 du solide (S_1) et la valeur T_1 de la tension du fil horizontal :

Appliquons le théorème du centre d'inertie dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{P}_1 + \vec{R}_N + \vec{T}_1 = M \cdot \vec{a}_1. \text{ Projection sur l'axe}$$

$$(x'x) : 0 + 0 + T_1 = M \cdot a_1; T_1 = M \cdot a_1(1).$$

2.2) Relation entre l'accélération a_2 du solide (S_2) et la valeur T_2 de la tension du fil vertical.

$$\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = m \cdot \vec{a}_2. \text{ Projection sur l'axe } (y'y) : -m \cdot g + T_2 = m \cdot a_2; T_2 = m \cdot a_2 + m \cdot g(2).$$

3) Expressions de l'accélération a des deux solides et celle de la valeur T de la tension du fil en fonction de m , M et g :

$$T = T_1 = T_2 \text{ et } a = a_1 = a_2. T = M \cdot a = m \cdot a + m \cdot g.$$

$$\text{Donc } a = \frac{mg}{M - m}; T = \frac{Mm}{M - m} g$$

4) Calcul de a et T :

$$\text{A.N : } a = \frac{250 \times 9,8}{500 - 250}; a = 9,8 \text{ m.s}^{-2}.$$

$$T = \frac{0,5 \times 0,25}{0,5 - 0,25} \times 9,8; T = 4,9 \text{ N.}$$

Exercice 11

1) Les forces extérieures qui s'exercent sur le skieur :

Le skieur est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{R}_N$ du sol et à la force de frottement $\vec{f}$.

2) Représentation de ces forces :

3)

Système : le skieur

Référentiel galiléen : référentiel terrestre.

3.1) Détermination de la valeur de la force $\vec{f}$.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R}_N) + W_{AB}(\vec{f})$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - 0 = m \cdot g \cdot AB \cdot \sin \alpha + 0 - f \cdot AB;$$

$$f = \frac{-\frac{1}{2} m v_B^2}{AB} + m \cdot g \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{A.N : } f = \frac{-\frac{1}{2} \times 80 \times (10)^2}{300} + 80 \times 9,8 \times 0,5;$$

$$f = -13,3 + 392; f = 378,7 \text{ N.}$$

3.2) Détermination de l'accélération a du skieur lors de son déplacement :

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_G; \vec{P}_1 + \vec{R}_N + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G.$$

$$\text{Projection sur } (x'x) : m \cdot g \cdot \sin \alpha + 0 - f = m \cdot a_G.$$

$$\text{Donc } a_G = g \cdot \sin \alpha - \frac{f}{m}.$$

$$\text{A.N : } a_G = 9,8 \times 0,5 - \frac{378,7}{80}; a_G = 0,17 \text{ m.s}^{-2}.$$

Exercice 12

1)

Système : le solide (S)

Référentiel galiléen : référentiel terrestre

Bilan des forces extérieures : le poids $\vec{P}$ du solide et la réaction normale $\vec{R}_N$ du plan incliné.

1.1) Expression de l'accélération a du solide :

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{R}_N = m \cdot \vec{a}$$

Projection sur l'axe (x'x) : $mg \sin \alpha + 0 = ma$;
 $a = g \sin \alpha$.

1.2) Calcul de la valeur de a :

$$A.N : a = 10 \times \sin 30^\circ ; a = 5 \text{ m.s}^{-2}$$

1.3) La vitesse du solide en B :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et B.

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R}_N)$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - 0 = mgh + 0 \text{ avec } h = AB \sin \alpha = L \sin \alpha ;$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mgL \sin \alpha ; v_B = \sqrt{2gL \sin \alpha}$$

$$A.N : v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 2 \times \sin 30^\circ} ;$$

$$v_B = 4,47 \text{ m.s}^{-1}$$

2) En plus de la réaction normale $\vec{R}_N$ du plan incliné et de son poids $\vec{P}$, le solide est soumis à la force de frottement $\vec{f}$.

2.1) La nouvelle expression de l'accélération a' du solide.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P}_1 + \vec{R}_N + \vec{f} = m \cdot \vec{a}'$$

Projection sur l'axe (x'x) : $mg \sin \alpha + 0 - f = ma'$

$$a' = g \sin \alpha - \frac{f}{m}$$

2.2) Calcul de la valeur de a' :

$$A.N : a' = 5 - \frac{0,15}{0,2} ; a' = 4,25 \text{ m.s}^{-2}$$

2.3) La vitesse v'_B du solide en B :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m v_B'^2 - 0 = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R}_N) + W_{AB}(\vec{f})$$

$$\frac{1}{2} m v_B'^2 - 0 = mgL \sin \alpha + 0 - fL ;$$

$$\frac{1}{2} m v_B'^2 - 0 = mgL \sin \alpha - fL ;$$

$$v_B' = \sqrt{2gL \sin \alpha - \frac{2fL}{m}}$$

$$A.N : v_B' = \sqrt{2 \times 10 \times 2 \times 0,5 - \frac{2 \times 0,15 \times 2}{0,2}}$$

$$v_B' = 4,12 \text{ m.s}^{-1}$$

Exercice 13

1) Représentation des forces extérieures appliquées au solide :

Entre A et B, le solide est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{R}_N$ du plan incliné et à la force de frottement $\vec{f}$.

2) Détermination

2.1) de l'accélération algébrique a du solide :
 Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a} ; \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$$

Projection sur l'axe ($x'x$) : $-mgsin\alpha + 0 - f = ma$

$$a = -(gsin\alpha + \frac{f}{m}).$$

$$A.N : a = -(10 \times \sin 20^\circ + \frac{0,1}{0,15});$$

$$a = -4 \text{ m.s}^{-2}.$$

2.2) de la distance L parcourue par le solide :

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$\Delta E_C = \Sigma W_{AB}(\vec{F}_{ext});$$

$$E_{CB} - E_{CA} = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R}_N) + W_{AB}(\vec{f})$$

$$0 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mgL \sin\alpha + 0 - fL;$$

$$L = \frac{\frac{1}{2}mv_A^2}{mg \sin\alpha + f}$$

$$A.N : L = \frac{\frac{1}{2} \times 0,15 \times 5^2}{0,15 \times 10 \times \sin 20^\circ + 0,1}$$

$$L = 3 \text{ m.}$$

Exercice 14

1)

1.1) Représentation des forces qui s'exercent sur le solide (S) :

Le solide (S) est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction normale $\vec{R}_N$ de la piste.

1.2) Expression de la vitesse v_M de (S) au point M en fonction de r ; g et θ :

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème de l'énergie cinétique.

$$\Delta E_C = E_{CM} - E_{CA} = W_{AM}(\vec{R}_N) + W_{AM}(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2}mv_M^2 - 0 = 0 + mgh_{AM}. \text{ Avec } h_{AM} = r \sin\theta;$$

$$\frac{1}{2}mv_M^2 = mgr \sin\theta; v_M = \sqrt{2gr \sin\theta}.$$

1.3) Expression de la réaction R_M de la piste au point M :

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}; \vec{P} + \vec{R}_N = m \cdot \vec{a}.$$

Projection suivant

$$(M, \vec{n}) : -mgsin\theta + R_N = ma_n;$$

$$-mgsin\theta + R_N = m \frac{v_M^2}{r} = 2gm \sin\theta;$$

$$R_M = R_N = mg \sin\theta + 2gm \sin\theta; R_M = 3mg \sin\theta$$

1.4) Les valeurs de la vitesse v_B de (S) et de la réaction R_B de la piste au point B :

$$\text{Au point B, } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}; v_B = \sqrt{2gr \sin \frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{2gr}. A.N : v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 0,5};$$

$$v_B = 3,2 \text{ m.s}^{-1}.$$

$$R_B = 3mg \sin \frac{\pi}{2}; R_B = 3mg.$$

$$A.N : R_B = 3 \times 0,2 \times 10. R_B = 6 \text{ N.}$$

2)

2.1) Détermination de l'expression de l'énergie cinétique E_{Cb} du solide au point B :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et B.

$$\Delta E_C = E_{Cb} - E_{CA}$$

$$= W_{AB}(\vec{R}_N) + W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{f});$$

$$E_{Cb}^2 - 0 = 0 + mgh_{AB} - (f \times r) \times \frac{\pi}{2}.$$

$$E_{Cb}^2 = mgr - (f \times r) \times \frac{\pi}{2}.$$

2.2) Détermination de la valeur de f .
 Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et D.

$$\Delta E_C = E_{CD} - E_{CA}$$

$$= W_{AD}(\vec{R}_N) + W_{AD}(\vec{P}) + W_{AD}(\vec{f});$$

$$0 - 0 = 0 + mgh_{AD} - f \cdot r \times \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right).$$

$$\text{Avec } h_{AD} = r \cos \frac{\pi}{3}.$$

$$0 = + mgr \cos \frac{\pi}{3} - f r \times \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right).$$

$$0 = + mgr \cos \frac{\pi}{3} - f r \times \frac{5\pi}{6}.$$

$$f = \frac{6mg \cos \frac{\pi}{3}}{5\pi}.$$

$$\text{A.N : } f = \frac{6 \times 0,2 \times 10 \times \cos \frac{\pi}{3}}{5\pi}; f = 0,38 \text{ N.}$$

Exercice 15

1) Les forces extérieures appliquées au solide :

- le poids $\vec{P}$ du mobile ;
- la réaction normale $\vec{R}_N$ du plan.

2) Représentation de ces forces :

2.1) en un point du parcours AB :

2.2) au point C du parcours BD.

3) Détermination des travaux de ces forces

3.1) sur le parcours AB :

$W_{AB}(\vec{P}) = W_{AB}(\vec{R}_N) = 0 \text{ J}$ car les supports de $\vec{P}$ et $\vec{R}_N$ sont perpendiculaires au déplacement.

3.2) sur le parcours BC :

$W_{BC}(\vec{R}_N) = 0 \text{ J}$, car le support de $\vec{R}_N$ est perpendiculaire au déplacement.

$W_{BC}(\vec{P}) = -mgh$; avec $h = BC \sin \alpha$;

$W_{BC}(\vec{P}) = -mgBC \sin \alpha$;

A.N : $W_{BC}(\vec{P}) = -0,5 \times 10 \times 2 \times \sin 30^\circ$.

$W_{BC}(\vec{P}) = -5 \text{ J}$.

4)

4.1) La vitesse du solide au point B :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R}_N) = 0.$$

$$v_B = v_A = 5 \text{ m.s}^{-1}.$$

4.2) La vitesse du solide au point C :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre B et C :

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = W_{BC}(\vec{P}) + W_{BC}(\vec{R}_N).$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = W_{BC}(\vec{P}) + 0.$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + \frac{2}{m}W_{BC}(\vec{P})}; v_C = \sqrt{25 - 20};$$

$$v_C = 2,24 \text{ m.s}^{-1}.$$

4.3) La distance BD parcourue par le mobile sur plan incliné :

$$\frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = W_{BD}(\vec{P}) + W_{BD}(\vec{R}_N);$$

$$0 - \frac{1}{2}mv_B^2 = W_{BD}(\vec{P}) + 0;$$

$$-\frac{1}{2}mv_B^2 = -mgBD\sin\alpha$$

$$BD = \frac{\frac{1}{2}v_B^2}{g \sin \alpha}; BD = \frac{\frac{1}{2} \times 5^2}{10 \times \sin 30^\circ}; BD = 2,5 \text{ m}$$

Exercice 16

1) Les forces extérieures appliquées au mobile

1.1) entre A et B :

Le mobile est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction normale $\vec{R}_N$ de la gouttière.

1.2) entre B et C :

Le mobile est soumis à son poids $\vec{P}$; à la réaction normale $\vec{R}_N$ de la gouttière et à la force de frottement $\vec{f}$.

2) Représentation de ces forces au point M et en un point du tronçon BC.

3)

3.1) Expression littérale de la vitesse v_M du mobile au point M en fonction de v_A , g , r et θ : Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et M.

$$\Delta E_C = E_{C_M} - E_{C_A} = W_{AM}(\vec{P}) + W_{AM}(\vec{R}_N).$$

$$\frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_{AM} + 0.$$

Avec $h_{AM} = r\cos\theta$ et $W_{AM}(\vec{R}_N) = 0 \text{ J}$ car $\vec{R}_N$ est orthogonal au déplacement.

$$\frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgr\cos\theta.$$

$$v_M = \sqrt{v_A^2 + 2gr\cos\theta}.$$

3.2) Expression de f en fonction de v_B , m_{BC} et v_C .

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre B et C.

$$\Delta E_C = E_{C_C} - E_{C_B}$$

$$= W_{BC}(\vec{P}) + W_{BC}(\vec{R}_N) + W_{BC}(\vec{f}).$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = 0 + 0 - f \text{ BC.}$$

$$\text{Avec } W_{BC}(\vec{P}) = W_{AM}(\vec{R}_N) = 0 \text{ J.}$$

$$f = \frac{\frac{1}{2}m(v_B^2 - v_C^2)}{BC}.$$

4)

4.1) Valeur de la vitesse v_B du mobile au point B :

$$\text{En B, } \theta = 0 \text{ rad. Donc } v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gr}.$$

$$\text{A.N : } v_B = \sqrt{5^2 + 2 \times 10 \times 0,8}.$$

$$v_B = 6,4 \text{ m.s}^{-1}.$$

4.2) Valeur de f .

$$\text{A.N : } f = \frac{\frac{1}{2} \times 0,15 \times (41 - 25)}{2}; f = 0,6 \text{ N.}$$

Exercice 17

1)

1.1) Énoncé du théorème de l'énergie cinétique :

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un système entre deux instants est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures appliquées à ce système entre ces deux instants.

1.2) Énoncé du théorème du centre d'inertie :

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un système est égale au produit de sa masse par le vecteur - accélération de son centre d'inertie.

2) Le solide est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction normale $\vec{R}_N$ de la piste.

2.1) Détermination de la vitesse v_B du solide en B :

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R}_N).$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - 0 = m g h_{AB} + 0. \text{ Avec } h_{AB} = l \sin \alpha \text{ et}$$

$$W_{AB}(\vec{R}_N) = 0 \text{ J car } \vec{R}_N \text{ est orthogonal au déplacement.}$$

$$v_B = \sqrt{2 g l \sin \alpha}.$$

$$\text{A.N : } v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 1 \times \sin 30^\circ};$$

$$v_B = 3,2 \text{ m.s}^{-1}.$$

2.2) Détermination de l'expression de la vitesse v_M du solide en M en fonction de v_B , r , θ et θ_0 .

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre B et M :

$$\Delta E_C = E_{CM} - E_{CB} = W_{BM}(\vec{P}) + W_{BM}(\vec{R}_N).$$

$$\frac{1}{2} m v_M^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = m g h_{BM} + 0.$$

$$\text{Avec } h_{BM} = r(\sin \theta_0 - \sin \theta) \text{ et } W_{BM}(\vec{R}_N) = 0 \text{ J}$$

car $\vec{R}_N$ est orthogonal au déplacement.

$$\frac{1}{2} m v_M^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = m g r(\sin \theta_0 - \sin \theta).$$

$$v_M = \sqrt{v_B^2 + 2 g r(\sin \theta_0 - \sin \theta)}.$$

3) Expression de la réaction R de la piste au pont M en fonction de v_B , r , θ , θ_0 et m .

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{R}_N = m \vec{a}.$$

$$\text{Projection sur } (M, \vec{n}) : P \sin \theta - R = m a_n;$$

$$m g \sin \theta - R = m \frac{v_M^2}{r};$$

$$R = m g \sin \theta - m \frac{v_B^2 + 2 g r(\sin \theta_0 - \sin \theta)}{r};$$

$$R = m g(3 \sin \theta - 2 \sin \theta_0) - \frac{m v_B^2}{r}.$$

4)

4.1) Valeur de θ à partir de laquelle le solide quittera la piste.

Lorsque le solide quitte la piste, la réaction s'annule.

$$R = 0 \text{ N.}$$

$$\text{Ce qui entraînerait : } g(3 \sin \theta - 2 \sin \theta_0) = \frac{v_B^2}{r};$$

$$\sin \theta = \frac{2}{3} \sin \theta_0 + \frac{v_B^2}{3 g r}.$$

$$\text{A.N : } \sin \theta = \frac{2}{3} \sin 60^\circ + \frac{10}{3 \times 10 \times 2}.$$

$$\sin \theta = 0,744. \theta = 48^\circ$$

4.2) La vitesse avec laquelle le solide quittera la piste.

Le solide quittera la piste pour $\theta = 48^\circ$.

Donc

$$v = \sqrt{10 + 2 \times 10 \times 2 \times (\sin 60^\circ - \sin 48^\circ)};$$

$$v = 3,86 \text{ m.s}^{-1}.$$

Exercice 18

1) Les forces extérieures qui s'exercent sur la bille en mouvement :

La bille est soumise à son poids $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ du fil.

2)

2.1) Expression du rayon r de la trajectoire de la bille en fonction de L et α :

$$r = L \sin \alpha.$$

2.2) Expression de l'accélération de la bille dans le repère $(M, \vec{u}, \vec{n})$, en fonction de L , ω et α :

D'après le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}$$

$$\tan \alpha = \frac{ma}{P} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}.$$

$$\text{Or } a = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2. \text{ Or } r = L \sin \alpha.$$

$$\text{Donc } a = L \sin \alpha \omega^2$$

3)

3.1) Valeur minimale ω_0 de ω à partir de laquelle le pendule s'écarte de la verticale :

$$\text{On a : } a = g \cdot \tan \alpha = L \sin \alpha \omega^2. \text{ Si } 0 < \alpha < 90^\circ$$

$$\text{alors : } \omega = \sqrt{\frac{g}{L \cos \alpha}}.$$

Lorsque le pendule s'écarte de la verticale, $\alpha > 0$.

$$\text{Donc } 0 < \cos \alpha < 1 ; 0 < L \cos \alpha < L ;$$

$$\frac{g}{L} < \frac{g}{L \cos \alpha} ; \omega^2 > \frac{g}{L}. \text{ D'où } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{10}{1}} ;$$

$$\omega_0 = 3,2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

3.2) La valeur T_1 de la tension du fil si le pendule tourne à la vitesse angulaire ω_1 :

$\omega_1 < \omega_0$, le pendule ne s'écarte pas de la verticale.

$$\text{Donc } T_1 = P = mg.$$

$$\text{A.N : } T_1 = 0,2 \times 10 ; T_1 = 2 \text{ N.}$$

4)

4.1) Détermination de l'angle α dont le pendule s'écarte de la verticale :

$$\text{On a : } a = L \sin \alpha \omega_2^2 = g \tan \alpha.$$

$$\text{Donc } \cos \alpha = \frac{g}{L \omega_2^2}. \text{ A.N : } \cos \alpha = \frac{10}{1 \times 5^2} = 0,4 ;$$

$$\alpha = 66,4^\circ.$$

4.2) Détermination de la valeur T_2 de la tension du fil.

$$\text{On a : } T_2 \sin \alpha = ma = mg \tan \alpha ; T_2 = \frac{mg}{\cos \alpha}.$$

$$\text{A.N : } T_2 = \frac{0,2 \times 10}{0,4} ; T_2 = 5 \text{ N.}$$

Exercice 19

1) Les forces extérieures appliquées au solide sur chaque portion du parcours :

- Sur AB, le solide est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{R}_N$ du plan incliné et à la force de frottement $\vec{f}$.

- Sur BC, le solide est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{R}_N$ du plan horizontal et à la force de frottement $\vec{f}'$.

- Sur CD, le solide est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la réaction normale $\vec{R}_N$ du demi-cercle.

2) Représentation de ces forces extérieures en un point de chaque portion de la glissière.

3)

3.1) Détermination de la valeur de la force de frottements $\vec{f}$:

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et B.

$$\Delta E_C = E_{CB} - 0 = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R}_N) + W_{AB}(\vec{f})$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mgL \sin \beta - fL$$

$$f = \frac{m(gL \sin \beta - \frac{1}{2} v_B^2)}{L}$$

$$\text{A.N: } f = \frac{0,15 \times (10 \times 4 \times \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \times 6^2)}{4}$$

$$f = 0,6 \text{ N.}$$

3.2) Détermination de l'accélération a du solide sur ce tronçon AB :

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème du centre d'inertie.

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m \vec{a}$$

$$\text{Projection sur (AB) : } P \sin \beta + 0 - f = ma$$

$$mg \sin \beta + 0 - f = ma ; a = g \sin \beta - \frac{f}{m}$$

$$\text{A.N : } a = 10 \times \sin 60^\circ - \frac{0,6}{0,15} ; a = 4,7 \text{ m.s}^{-2}$$

3.3) Détermination de la distance L' et de l'accélération a' du solide sur BC :

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre B et C.

$$\Delta E_C = E_{CC} - E_{CB} = W_{BC}(\vec{P}) + W_{BC}(\vec{R}_N) + W_{BC}(\vec{f})$$

$$= W_{BC}(\vec{P}) = W_{BC}(\vec{R}_N) = 0 \text{ car } \vec{P} \text{ et } \vec{R}_N \text{ sont perpendiculaires au déplacement.}$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m v_B^2 = 0 + 0 - f' L'$$

$$L' = \frac{m}{2f'} (v_B^2 - v_C^2)$$

$$\text{A.N : } L' = \frac{0,15}{2 \times 0,4} (6^2 - 5^2) ; L' = 2 \text{ m}$$

Détermination de l'accélération a' du solide.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème du centre d'inertie.

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f}' = m \vec{a}'$$

$$\text{Projection sur (BC) : } 0 + 0 - f' = ma'$$

$$a' = -\frac{f'}{m} ; \text{A.N : } a' = -\frac{0,4}{0,15} ; a' = -2,7 \text{ m.s}^{-2}$$

3.4) Détermination de la vitesse v_D du solide au point D.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre C et D.

$$\Delta E_C = E_{CD} - E_{CC} = W_{CD}(\vec{P}) + W_{CD}(\vec{R}_N) + W_{CD}(\vec{f})$$

$$= -mgh \text{ et } W_{CD}(\vec{R}_N) = 0 \text{ car } \vec{R}_N \text{ est orthogonal au déplacement.}$$

$$\frac{1}{2} m v_D^2 - \frac{1}{2} m v_C^2 = -mgh. \text{ Avec } h = 2r$$

$$\frac{1}{2} v_D^2 - \frac{1}{2} v_C^2 = -2gr$$

$$v_D = \sqrt{v_C^2 - 4gr}$$

$$\text{A.N : } v_D = \sqrt{5^2 - 4 \times 10 \times 0,5} ; v_D = 2,24 \text{ m.s}^{-1}$$

4) Détermination de la vitesse avec laquelle le solide retombe sur le plan BC.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre D et le point de chute sur BC.

$$\Delta E_C = E_C - E_{CD} = W(\vec{P})$$

$$W(\vec{P}) = mgh \text{ Or } E_{CD} = E_{CC} - mgh$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} m v^2 = (E_{CC} - mgh) + mgh = E_{CC}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 \Leftrightarrow v = v_C = 5 \text{ m.s}^{-1}$$

Exercice 20

1) Bilan des forces extérieures appliquées au mobile :

Le mobile est soumis à son poids $\vec{P}$; à la réaction normale $\vec{R}_N$ de la table et à la force de frottement $\vec{f}$.

2)

2.1) Expression de la valeur algébrique de l'accélération a du mobile en fonction de m , g , f et α :

Appliquons, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m \vec{a}$$

Projection suivant l'axe (x^x) :

$$P \sin \alpha + 0 - f = m a_x ; m g \sin \alpha - f = m a_x ;$$

$$a_x = g \sin \alpha - \frac{f}{m}$$

2.2) Expression de x en fonction de t^2 :

Le mouvement est rectiligne et uniformément accéléré. Donc $x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0t} + x_0$.

Or $v_0 = 0 \text{ m.s}^{-1}$ et à $t = 0 \text{ s}$, $x = x_0 = 0 \text{ m}$. Donc

$$x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2$$

3) Courbe $x = h(t^2)$:

4)

4.1) Détermination graphique de la valeur a de l'accélération du mobile :

La courbe obtenue est une portion de droite qui passe par l'origine du repère. x et t^2 sont proportionnels.

$$x(t) = k t^2 \text{ avec } k = \frac{\Delta x}{\Delta t^2} = \frac{4,5 \times 2 \times 0,01}{6 \times 0,02}$$

$$= 0,75 \text{ m.s}^{-2}. \text{ Or } x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} a_x = k ;$$

$$a = a_x = 2k = 1,5 \text{ m.s}^{-2}.$$

4.2) Détermination de la valeur f de la force de frottement :

$$f = m(-a_x + g \sin \alpha)$$

$$\text{A.N : } f = 0,25 (-1,5 + 10 \times \sin 25^\circ) ;$$

$$f = 0,68 \text{ N}.$$

Leçon 3

Intéraction gravitationnelle

IV. Exercices

Exercice 1

1) a

2) c

Exercice 2

Le système solaire contient une étoile (le Soleil), autour de laquelle gravitent huit planètes sur des orbites quasi circulaires. Ces planètes sont

maintenues sur leurs orbites grâce à l'action d'attraction exercée par le Soleil qui les empêche de s'éloigner et à leur vitesse qui les empêche de se rapprocher du Soleil. Toutes ces planètes exercent elles aussi des forces d'attraction sur le Soleil. Ces forces sont donc des forces d'interaction entre le Soleil et chacune de ces planètes. La force de gravitation entre le Soleil et une planète donnée est proportionnelle à chacune de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance entre leurs centres de gravité.

Exercice 3

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	L'interaction gravitationnelle est toujours attractive.	×	
2	La constante G dans l'expression $F_{1/2} = G \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$ dépend des objets que l'on étudie.		×
3	L'interaction gravitationnelle s'exerce toujours à distance.		×
4	Plus les corps en interaction sont volumineux, plus l'interaction gravitationnelle est forte.		×
5	Plus les objets sont éloignés, plus l'interaction gravitationnelle est faible.	×	
6	Lorsque deux corps sont en interaction, le plus lourd exerce une force plus importante que le plus léger.		×
7	Sur une planète, l'interaction gravitationnelle exercée est appelée la masse.		×

Exercice 4

(Voir Résumé de cours)

Exercice 5

1) (3)

Exercice 6

1) (c) 2) (c) 3) (b)

Exercice 7

- La période T et la vitesse v d'un satellite ne dépendent pas de sa masse mais de son altitude.
- La trajectoire d'un satellite géostationnaire est un cercle situé dans le plan équatorial / et sa période est égale à celle de la Terre

Exercice 8

1) Deux corps ponctuels exercent l'un sur l'autre des **forces d'attraction** proportionnelles au **produit de leurs masses** et inversement proportionnelles au carré de la **distance** qui les sépare.

2) Un satellite **géostationnaire** tourne dans le plan **équatorial**, dans le même sens et à la même vitesse que la Terre.

3) Selon la **troisième loi de KEPLER**, le rapport $\frac{r^3}{T^2}$ est **constant** pour toutes les planètes.

Exercice 9

1) Représentation du vecteur champ de gravitation $\vec{g}_z$ en un point M situé à l'altitude z.

2) Expressions littérales de g_z et g_0 .

$$g_z = G \frac{M_T}{(R_T + z)^2} \text{ et } g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

3) Relation qui lie ces deux grandeurs g_z et g_0 .

$$g_z = G \frac{M_T}{(R_T + z)^2} = G \frac{M_T}{R_T^2 \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2};$$

$$G \frac{M_T}{R_T^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}; g_z = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}$$

4) Pour ($z \ll R_T$),

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{z}{R_T}\right) &\ll 1. \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2} \\ &= 1 - \frac{2z}{R_T}; g_z = g_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} \\ &= g_0 \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2}. g_z = g_0 \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right) \end{aligned}$$

Exercice 10

1)

1.1) Calcul de la valeur de la vitesse linéaire v pour un point situé sur l'équateur :

$$v = \frac{2\pi R_T}{T}$$

$$\text{A.N: } v = \frac{6380000 \times 2\pi}{86164};$$

$$v = 465,4 \text{ m.s}^{-1} = 1\,674,85 \text{ km.h}^{-1}$$

1.2) Calcul de la vitesse angulaire ω pour un point situé sur l'équateur :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \text{ A.N: } \omega = \frac{2\pi}{86164};$$

$$\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}.$$

2)

2.1) Calcul de la période de rotation du satellite :

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v}$$

$$\text{A.N: } T = \frac{2\pi \times (6380 + 830) \times 1000}{7550};$$

$$T = 6\,000 \text{ s.}$$

2.2) Comparaison de cette période à celle de rotation de la Terre autour de l'axe de ses pôles.

$$T_{\text{Terre}} = 86\,164 \text{ s} > T = 6\,000 \text{ s}$$

2.3) Ce satellite n'est pas géostationnaire car sa période est différente de celle de la Terre.

Exercice 11

1) Expression de la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite :

Système : la fusée

Référentiel galiléen : référentiel géocentrique ;

Bilan des forces extérieures :

$\vec{F}_{\text{Terre/satellite}} = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \vec{n}$ (la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite).

2) Expression de l'accélération de la pesanteur à l'altitude h :

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{F}_{\text{Terre/satellite}} = m \vec{a}; G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \vec{n} = m \vec{a}.$$

$$\text{Donc } \vec{a} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \vec{n}. \text{ Or } \vec{a} = \vec{g}_h;$$

$$\begin{aligned} g_h &= G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} = G \frac{M_T}{R_T^2} \times \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \\ &= g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}. \end{aligned}$$

3) Le satellite est soumis uniquement à l'attraction terrestre.

D'après le théorème du centre d'inertie appliquée dans le référentiel géocentrique :

$$\vec{F}_{\text{Terre/satellite}} = m \vec{a}; G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \vec{n} = m \vec{a}.$$

$$\text{Donc } \vec{a} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \vec{n}. \text{ Ce qui entraîne } \vec{a} = \vec{a}_m$$

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \vec{u} = \vec{0}. \text{ D'où } \frac{dv}{dt} = 0;$$

$v = \text{constante}$: le mouvement du satellite est uniforme.

4) Expressions de la période T et de la vitesse v du satellite en fonction de R_T , h et g_0 .

$$\text{On a : } a = a_n = \frac{v^2}{R_T + h} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

$$= g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}; v^2 = g_0 \frac{R_T^2}{R_T + h};$$

$$v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}}$$

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v} = \frac{2\pi(R_T + h)}{R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}}}$$

$$T = \frac{2\pi}{R_T} \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0}}$$

5) Calcul de la valeur de l'altitude h du satellite :

$$T^2 = \frac{4\pi^2(R_T + h)^3}{g_0 R_T^2}$$

$$(R_T + h)^3 = \frac{T^2 g_0 R_T^2}{4\pi^2}$$

$$h = -R_T + \sqrt[3]{\frac{g_0 T^2 \times R_T^2}{4\pi^2}}$$

A.N :

$$h = -6370000 + \sqrt[3]{\frac{9,8(86164)^2 \times (6370000)^2}{4\pi^2}}$$

$$h = 35\,760 \text{ km.}$$

6)

6.1) Un satellite géostationnaire se déplace dans le plan équatorial et son sens de rotation est identique à celui de la Terre.

6.2) La valeur du rapport $\frac{r^3}{T^2}$ pour ce

satellite :

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{(R_T + h)^3}{T^2} = \frac{g_0 R_T^2}{4\pi^2}$$

A.N :

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{9,8 \times (6370000)^2}{4\pi^2}$$

$$\frac{r^3}{T^2} = 10\,072\,683\,864\,575 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} = 10^{13} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

Exercice 12

1) Système : le satellite ;
Référentiel galiléen : référentiel géocentrique ;
Bilan des forces extérieures : la force gravitationnelle : $\vec{F}_{T/S} = G \frac{M_T m}{r_1^2} \vec{n}$.

Appliquons le théorème du centre d'inertie dans le référentiel géocentrique.

$$\vec{F}_{\text{Terre/satellite}} = G \frac{M_T m}{r_1^2} \vec{n} = m \vec{a}$$

$$\vec{a} = G \frac{M_T}{r_1^2} \vec{n} = \vec{a}_N.$$

Donc $\vec{a}_T = \vec{0}$; $\frac{dv}{dt} = 0$; $v = \text{constante}$;
le mouvement du satellite est uniforme.

2) Détermination de la vitesse v du satellite :

$$\vec{a} = \vec{a}_N ; \frac{GM_T}{r_1^2} = \frac{v^2}{r_1} ; v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}}$$

Or $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$. Donc $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T^2} \times \frac{R_T^2}{r_1}}$.

D'où $v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{r_1}}$.

A.N : $v = 6\,370\,000 \times \sqrt{\frac{9,8}{25000000}}$;

$$v = 4\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3) La période T du mouvement du satellite :

$$T^2 = \frac{2\pi^2 r_1}{v}$$

A.N : $T = \frac{2\pi \times 25000000}{4000}$, $T = 39\,269 \text{ s}$.

4) Détermination du rayon r_1' de l'orbite du satellite pour qu'il soit géostationnaire. Le satellite est géostationnaire si sa période et sa vitesse sont égales à celles de la Terre.

$$\frac{(r_1')^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} ; r_1' = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}}$$

$$r_1' = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{R_T^2} \times \frac{R_T^2 T^2}{4\pi^2}}$$

$$r_1' = \sqrt[3]{g_0 \times \frac{R_T^2 T^2}{4\pi^2}}$$

A.N : $r_1' = \sqrt[3]{9,8 \times \frac{(6370000 \times 86164)^2}{4\pi^2}}$

$$r_1' = 42\,430\,728 \text{ m} ; r_1' = 42\,431 \text{ km.}$$

Exercice 13

1)

1.1) Expression de la valeur du poids $\vec{P}$ d'un objet : $P = mg$.

1.2) Expression de la valeur de la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par la Terre sur cet objet :

$$F = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

2) Expression de l'intensité de la pesanteur g en fonction de M_T et R_T :

$$F = P; mg = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}; g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

3) Calcul de la valeur de $\vec{g}$ à la surface de la Terre :

$$g_T = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

$$\text{A.N. : } g_T = 6,67 \cdot 10^{-11} \times \frac{5,979 \cdot 10^{24}}{(6380000)^2};$$

$$g_T = 9,79 \text{ m.s}^{-2}.$$

Exercice 14

1) Les deux actions qui s'exercent sur la fusée sont la force d'attraction de la Terre et la force d'attraction de la Lune.

2) Lorsque la fusée s'éloigne de la Terre, l'attraction de la Terre diminue alors que celle de la Lune augmente.

3) Détermination de la position du point d'équilibre H :

Au point d'équilibre : $F_{VF} = F_{LF}$;

$$G \frac{M_T m}{d_{T-F}^2} = G \frac{M_L m}{d_{L-F}^2};$$

$$d_{T-L} = d_{T-F} + d_{L-F}; \quad d_{L-F} = d_{T-L} - d_{T-F};$$

$$\frac{(d_{T-F})^2}{(d_{L-F})^2} = \frac{M_T}{M_L}; \quad d_{T-F} = d_{L-F} \times \sqrt{\frac{M_T}{M_L}}$$

$$= (d_{T-L} - d_{T-F}) \times \sqrt{\frac{M_T}{M_L}}$$

$$\left(1 + \sqrt{\frac{M_T}{M_L}}\right) d_{T-F} = d_{T-L} \times \sqrt{\frac{M_T}{M_L}};$$

$$d_{T-F} = d_{T-L} \times \frac{\sqrt{\frac{M_T}{M_L}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{M_T}{M_L}}\right)}$$

$$\text{A.N. : } d_{T-F} = 3,84 \cdot 10^8 \times \frac{\sqrt{\frac{5,976 \cdot 10^{24}}{7,35 \cdot 10^{22}}}}{\left(1 + \sqrt{\frac{5,976 \cdot 10^{24}}{7,35 \cdot 10^{22}}}\right)}$$

$$d_{T-F} = 3,44 \cdot 10^8 \text{ m} = 3,44 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

4) Les moteurs servent à faire avancer la fusée entre la Terre et le point d'équilibre.

Ils servent à faire ralentir entre le point d'équilibre et la Lune.

Exercice 15

1) Détermination du rapport de la masse du Soleil et celle de la Terre :

En utilisant la troisième loi de KEPLER, on

obtient : $\frac{r_L^3}{T_L^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$ et $\frac{r_T^3}{T_T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}$ soit

$$\frac{M_S}{M_T} = \left(\frac{r_T}{r_L}\right)^3 \times \left(\frac{T_L}{T_T}\right)^2$$

$$\text{A.N. : } \frac{M_S}{M_T} = \left(\frac{1,496 \cdot 10^8}{3,84 \cdot 10^8}\right)^3 \times \left(\frac{27,32}{365,25}\right)^2;$$

$$\frac{M_S}{M_T} = 33 \cdot 10^4.$$

2) Expression de la masse M_T de la Terre :

$$\text{On a : } P = mg_0 = G \frac{M_T m}{R_T^2}. \text{ Donc } M_T = \frac{PR_T^2}{Gm}$$

3) Détermination de la masse M_S du Soleil :

$$M_S = 33 \cdot 10^4 M_T; \quad M_S = 33 \cdot 10^4 \times \frac{PR_T^2}{Gm}$$

$$\text{A.N. : } M_S = 33 \cdot 10^4 \times \frac{9,83 \times (6\,370\,000)^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \times 1};$$

$$M_S = 1,97 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

Exercice 16

1) Loi de Newton :

Deux corps ponctuels A et B de masses m_A et m_B , exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction directement opposées, dirigées suivant la droite (AB), de valeurs proportionnelles à leurs masses et inversement proportionnelles au carré de leur distance.

2) Calcul de la valeur de cette force :

$$F_{T/S} = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2}$$

A.N :

$$F_{T/S} = 6,67 \cdot 10^{-11} \times \frac{5,97 \cdot 10^{24} \times 4,1 \cdot 10^2}{(6380000 + 820000)^2};$$

$$F_{T/S} = 3,1 \cdot 10^4 \text{ N.}$$

3) Représentation des forces $\vec{F}_{T/S}$ et $\vec{F}_{S/T}$:

$\vec{F}_{T/S}$ et $\vec{F}_{S/T}$ sont opposés et ont la même valeur.

Chaque force est représentée par un vecteur de longueur 2,1 cm.

4) Détermination de la période de révolution T de ce satellite :

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v}$$

$$\text{A.N : } T = \frac{2\pi \times (6,38 \cdot 10^6 + 8,2 \cdot 10^5)}{7500}$$

$$T = 6032 \text{ s} = 1 \text{ h } 40 \text{ min } 32 \text{ s.}$$

Exercice 17

1) Énoncé de la 3^{ème} loi de Kepler :

Pour toutes les planètes, le rapport entre le cube

du demi - grand axe et le carré de la période de révolution est la même.

2) 2.1) Expression de la force exercée par la Terre sur l'un de ces satellites de masse m :

$\vec{F}_{T/S} = -G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} \vec{u}_{OP}$ où $\vec{u}_{OP}$ est un vecteur unitaire de l'axe (OP) joignant le centre de la Terre à celui du satellite. $\vec{u}_{OP}$ est orienté de la Terre vers le satellite.

2.2) Expression de l'accélération de ce satellite :

$$F_{T/S} = G \frac{M_T m}{(R_T + h)^2} = ma.$$

$$\text{Donc } a = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

2.3) Expression de la vitesse v du satellite en fonction de g_0 , R_T et h :

$$a = a_N = \frac{v^2}{R_T + h} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}.$$

$$v^2 = G \frac{M_T}{R_T + h}$$

$$= G \frac{M_T}{R_T^2} \times \frac{R_T^2}{R_T + h} = g_0 \frac{R_T^2}{R_T + h};$$

$$v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}}$$

2.4) Expression de la période T du satellite :

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v}; \text{ Or } v^2 = G \frac{M_T}{R_T + h}.$$

$$\text{Donc } T^2 = \frac{4\pi^2(R_T + h)^2}{v^2}$$

$$= \frac{4\pi^2(R_T + h)^2(R_T + h)}{GM_T}.$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}(R_T + h)^3$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$$

3) Détermination du rapport $\frac{T^2}{(R_T + h)^3}$ pour chaque satellite.

Satellite	Intelsat V	Comos 1970	Fen Yun 1	USA 35
Période T (s)	86 160	40 440	6 168	43 200
Altitude h (km)	3,58.10 ⁴	1,91.10 ⁴	900	2,02.10 ⁴
T ² (s ²)	7,4.10 ⁹	1,6.10 ⁹	0,04.10 ⁹	1,9.10 ⁹
R _T + h (m)	4,22.10 ⁷	2,55.10 ⁷	7,3.10 ⁶	2,66.10 ⁶
(R _T + h) ³ (m ³)	75.10 ²¹	16,6.10 ²¹	0,4.10 ²¹	18,8.10 ²¹
$\frac{T^2}{(R_T + h)^3}$	0,99.10 ⁻¹³	0,96.10 ⁻¹³	1,01.10 ⁻¹³	1,01.10 ⁻¹³

4) La masse M_T de la Terre :

$$\text{On a : } T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} (R_T + h)^3 .$$

$$\text{Donc } \frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} .$$

Or G et M_T sont des constantes alors

$$\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = 10^{-13} \text{ Donc } \frac{4\pi^2}{GM_T} = 10^{-13}$$

$$M_T = \frac{4\pi^2}{10^{-13} G} .$$

$$\text{A.N : } M_T = \frac{4\pi^2}{10^{-13} \times 6,67.10^{-11}} ;$$

$$M_T = 5,92.10^{24} \text{ kg}$$

Exercice 18

1) Énoncé la loi de Newton :

Deux corps ponctuels A et B de masses m_A et m_B, exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction directement opposées, dirigées suivant la droite (AB), de valeurs proportionnelles à leurs masses et inversement proportionnelles au carré de leur distance.

2) Expression du champ de gravitation g_z en un point d'altitude z au-dessus de la planète Jupiter

$$F_{J/\text{Satellite}} = \frac{GM_J m}{(R_J + z)^2} = mg_z .$$

$$\text{Donc } g_z = \frac{GM_J}{(R_J + z)^2} .$$

3) Détermination du rayon de Jupiter :

$$g_1 = G \frac{M_J}{(R_J + z_1)^2} \text{ et } g_2 = G \frac{M_J}{(R_J + z_2)^2} .$$

$$\frac{(R_J + z_1)^2}{(R_J + z_2)^2} = \frac{g_2}{g_1} ;$$

$$R_J + z_1 = (R_J + z_2) \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} ;$$

$$R_J = \frac{-z_1 + z_2 \sqrt{\frac{g_2}{g_1}}}{1 - \sqrt{\frac{g_2}{g_1}}}$$

$$\text{A.N : } R_J = 7.10^7 \text{ m.}$$

4) La masse de Jupiter :

$$M_J = \frac{g_1}{G} (R_J + z_1)^2 . \text{ A.N : } M_J = 1,89.10^{27} \text{ kg}$$

Exercice 19

1) Énonce la loi de l'attraction universelle de Newton :

Deux corps ponctuels A et B de masses m_A et m_B, exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction directement opposées, dirigées suivant la droite (AB), de valeurs proportionnelles à leurs masses et inversement proportionnelles au carré de leur distance.

2)

2.1) Expression de la valeur du vecteur

champ de gravitation terrestre $\vec{g}$ en fonction de R, M, h et G (la constante de gravitation universelle).

$$\vec{F}_{T/N} = -G \frac{Mm}{(R+h)^2} \vec{u}_{OP} = m \vec{g}.$$

$$\vec{g} = -G \frac{M}{(R+h)^2} \vec{u}_{OP}.$$

D'où $g = G \frac{M}{(R+h)^2}$

2.2) Expression du vecteur champ de gravitation $\vec{g}_0$ au sol :

Pour $h = 0$; $\vec{g} = \vec{g}_0 = -G \frac{M}{R^2} \vec{u}_{OP}$

3) On a : $g = G \frac{M}{(R+h)^2} = G \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{(R+h)^2}$

Donc $g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2$.

4)

4.1) Détermination de la vitesse v de cette navette et sa période de révolution T :

On a : $a = a_N = \frac{v^2}{R+h} = G \frac{M}{(R+h)^2}$

$v^2 = G \frac{M}{R+h} = G \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{R+h} = g_0 \frac{R^2}{R+h}$;

$v = R \sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$

On a : $T = \frac{2\pi(R+h)}{v}$;

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{R \sqrt{\frac{g_0}{R+h}}} = \frac{2\pi(R+h) \sqrt{R+h}}{R \sqrt{g_0}}$$

$$= \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}} ; T = \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}$$

A.N : $v = 6370.10^3 \times \sqrt{\frac{9,81}{(6370+250).10^3}}$

$v = 7754 \text{ m.s}^{-1}$

$T = \frac{2\pi \times (6370+250).10^3}{7754}$; $T = 5364 \text{ s}$.

4.2) Détermination de l'intervalle de temps qui sépareit le passage de la navette spatiale au-dessus des deux villes.

$\Delta t = \frac{940000}{7754}$; $\Delta t = 121 \text{ s}$.

Exercice 20

1) Expression de la force gravitationnelle exercée par Jupiter sur l'un de ses satellites :

$$\vec{F}_{J/S} = -G \frac{Mm}{R^2} \vec{u}_{OP}.$$

2) 2.1) Expression de la vitesse v du satellite en fonction de R, M et G (la constante de gravitation universelle) :

On a : $a = a_N = \frac{v^2}{R} = G \frac{M}{R^2}$.

Donc $v^2 = G \frac{M}{R}$; $v = \sqrt{G \frac{M}{R}}$

2.2) Expression de la période de révolution T du satellite :

On a : $T = \frac{2\pi R}{v}$; $T = \frac{2\pi R}{\sqrt{G \frac{M}{R}}}$

$T = 2\pi R \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{GM}}$; $T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

2.3) Expression du rapport $\frac{T^2}{R^3}$ en fonction de G et M :

On a : $T^2 = 4\pi^2 \frac{R^3}{GM}$;

donc $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

3) Détermination des rapports $\frac{T^2}{R^3}$ pour les différents satellites :

	Io	Europe	Ganymède	Callisto
T(heures)	42,5	85,2	171,7	400,5
R(km)	422.10 ³	671.10 ³	1070.10 ³	1883.10 ³
T ² (s ²)	0,23.10 ¹¹	0,94.10 ¹¹	3,82.10 ¹¹	20,8.10 ¹¹
R ₃ (m ³)	0,75.10 ²⁶	3,02.10 ²⁶	12,25.10 ²⁶	66,76.10 ²⁶
$\frac{T^2}{R^3}$ (s ² .m ⁻³)	3,1.10 ⁻¹⁶	3,1.10 ⁻¹⁶	3,1.10 ⁻¹⁶	3,1.10 ⁻¹⁶

4) La masse de Jupiter :

On a : $\frac{T^2}{R^3} = 3,1.10^{-16}$. Or $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$. Donc $\frac{4\pi^2}{GM} = 3,1.10^{-16}$. $M = \frac{4\pi^2}{3,1.10^{-16} G}$;

$$M = \frac{4\pi^2}{3,1.10^{-16} \times 6,6710^{-11}}$$

$$M = 1,9.10^{27} \text{ kg.}$$

Leçon

4

Mouvements dans les champs ($\vec{g}$ et $\vec{E}$) uniformes

IV. Exercices

Exercice 1

(4)

Exercice 2

Exercice 3

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	Le vecteur - accélération $\vec{a}_G$ du centre d'inertie G du projectile ne dépend pas des conditions initiales dans lesquelles il a été lancé.	×	
2	La trajectoire du centre d'inertie G du projectile est parabolique quelle que soit la valeur de l'angle entre son vecteur - vitesse $\vec{v}_0$ initial et l'axe horizontal (Ox).		×
3	Le mouvement du centre d'inertie G du projectile sur l'axe vertical (Oz) est rectiligne et uniforme.		×
4	Le mouvement du centre d'inertie G du projectile sur l'axe horizontal (Ox) est rectiligne et uniforme pour $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.	×	
5	Si le projectile est lancé à partir d'une hauteur H au-dessus du sol avec un vecteur-vitesse $\vec{v}_0$ horizontal, l'abscisse de son point de chute est : $x = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$	×	

Exercice 4

3)

Exercice 5

1) (c)

2) (a)

Exercice 6

Dans l'espace situé entre deux plaques métalliques parallèles, soumises à une différence de potentiel U, règne un champ électrostatique. Ce champ est **uniforme** car en chacun de ses points, le vecteur-champ E est **constant**. Une particule de charge q négative qui entre dans ce champ avec un vecteur-vitesse $\vec{v}_0$, voit sa trajectoire **déviée** si $\vec{v}_0$ et $\vec{E}$ n'ont

pas la même direction. La particule effectue alors un mouvement **parabolique** dans le champ électrostatique. Mais si $\vec{v}_0$ et $\vec{E}$ ont la même direction, la trajectoire de la particule est **rectiligne**. Dans ce cas, le mouvement de la particule est **accélééré** si $\vec{v}_0$ et $\vec{E}$ ont le même sens et **retardé** s'ils sont de sens opposés.

Exercice 7

1) Un champ est uniforme si, en tout point de ce champ, le vecteur-champ a même direction, même sens et même valeur.

2) La déflexion électrique subit par un faisceau homocinétique d'électrons à la sortie d'un condensateur est proportionnelle à la valeur de la tension appliquée aux plaques défectrices de ce condensateur.

Exercice 8

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	Dans un champ électrostatique uniforme, le vecteur-accélération d'une particule de charge négative est colinéaire et opposé au vecteur-champ $\vec{E}$.	×	
2	Le vecteur - accélération d'une particule de charge q négative dans un champ électrostatique est lié au vecteur-champ $\vec{E}$ par la relation $\vec{a} = -\frac{q}{m}\vec{E}$.		×
3	Un projectile lancé dans le champ de pesanteur et soumis à la seule action de son poids a un vecteur-accélération $\vec{a}$ toujours égal au vecteur-champ de pesanteur $\vec{g}$.	×	
4	Le champ de pesanteur n'est un champ uniforme que pour de faibles altitudes.	×	
5	La force électrostatique qui s'exerce sur une particule de charge q a toujours le sens des potentiels décroissants.		×

Exercice 9

- Pour tout t , $z(t) = 0 =$ constante.
Donc le mouvement du mobile se déroule dans le plan (xOy) .
- Équation cartésienne de sa trajectoire :
On a : $x(t) = v_0 t \cos \alpha$. Donc $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$;
 $y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2 + v_0\left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha}\right) \sin \alpha$
 $y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$.
- Expressions de la flèche $h_{\max}$ et de la portée horizontale d du tir :
 $h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ et $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.
- La valeur de α pour que l'obus tombe le plus loin possible du point O.
La portée du tir est maximale si : $\sin(2\alpha) = 1$;
 $\sin 2\alpha = \sin \frac{\pi}{2}$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad.
- On a : $\sin 2\alpha = \frac{gd}{v_0^2}$. Pour $d < d_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$;
il existe deux valeurs α_1 et α_2 de α telles que
 $2\alpha_2 = \pi - 2\alpha_1$. $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$.

Exercice 10

$$1) \frac{F}{P} = \frac{|q|E}{mg} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^3}{9,1 \cdot 10^{-31} \times 9,8}$$

$$\frac{F}{P} = 1,8 \cdot 10^{13}$$

Donc le poids de la particule est négligeable devant la force électrostatique.

2) Représentation de la force électrostatique $\vec{F}$ et du vecteur - champ électrostatique $\vec{E}$:

2.1) La trajectoire de la particule est déviée vers le bas donc $\vec{F}$ est dirigé de (A) vers (B).

2.2) On a : $\vec{F} = q\vec{E}$ et $q < 0$ donc $\vec{E}$ est opposé à $\vec{F}$.

3) Équations horaires du mouvement de la particule dans le repère (O, x, y) :

Système : la particule ;

Référentiel galiléen : référentiel terrestre ;

Bilan des forces extérieures : $\vec{F} = q\vec{E}$ (force électrostatique ; le poids de la particule est négligeable).

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{F} = m\vec{a} ; q\vec{E} = m\vec{a} ; \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}.$$

$$\vec{v}_0 = t\vec{a} + \vec{v}_0 \text{ et } \vec{OM} = \frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{V}_0 + \vec{OM}_0$$

$$\text{On a : } \vec{E} \begin{cases} E_X = 0 \\ E_Y = E \end{cases} \text{ Donc } \vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{qE_X}{m} = 0 \\ a_y = \frac{qE_Y}{m} = \frac{qE}{m} \end{cases}$$

$$\text{À la date } t = 0 \text{ s ; } \vec{OM}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} ;$$

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = a_y t + v_{0y} = \frac{qE}{m} t + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\vec{OM} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 = v_0 t \cos \alpha \\ y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y} t + y_0 = \frac{qE}{m} t^2 + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

4) Équation de la trajectoire :

$$\text{On a : } t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} ; \text{ donc}$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right) \sin \alpha$$

$$\text{D'où : } y = \frac{qE}{2m v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

5) La vitesse v_s de la particule à sa sortie du condensateur.

À la sortie du condensateur au point S ; $x_s = \ell$

$$\text{donc } t_s = \frac{x_s}{v_0 \cos \alpha} = \frac{\ell}{v_0 \cos \alpha}.$$

$$v_s = \sqrt{v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2}.$$

$$= \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + \left(\frac{qE\ell}{m v_0 \cos \alpha} + v_0 \sin \alpha \right)^2}.$$

A.N :

$$v_s = \sqrt{(9,4.10^5)^2 + (-1,87.10^7 + 3,42.10^5)^2}$$

$$v_s = 1,84.10^7 \text{ m.s}^{-1}.$$

Exercice 11

1) Équations horaires $x(t)$; $y(t)$ et $z(t)$ du mouvement du projectile.

Système : le projectile ;

Référentiel galiléen : référentiel terrestre ;

Bilan des forces extérieures : le poids $\vec{P}$ du projectile.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} = m\vec{a} ; m\vec{g} = m\vec{a} . \vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases} \text{ à la date } t = 0 \text{ s}$$

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = v_0 \\ v_{0z} = 0 \end{cases} \text{ et } \vec{OM}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} t = 0 \\ v_y = a_y t + v_{0y} t = 0 \\ v_z = a_z t + v_{0z} t = -gt \end{cases}$$

$$\vec{OM} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 = 0 \\ y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y} t + y_0 = v_0 t \\ z(t) = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{0z} t + z_0 = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Exercice 12

2) Pour tout t , $x(t) = 0 = \text{constante}$. Donc la trajectoire est plane.

3) Ce plan est $(y O z)$.

4) Équation cartésienne de la trajectoire du projectile.

$$\text{On a : } t = \frac{y}{v_0}; z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{y}{v_0}\right)^2; z = -\frac{g}{2v_0^2}y^2$$

5) Détermination, à la date $t_1 = 0,5$ s :

5.1) du vecteur-vitesse v_1 du projectile à la date $t_1 = 0,5$ s :

$$\vec{v}_1 = v_0\vec{j} + (-gt_1)\vec{k} = 2\vec{j} - 5\vec{k}$$

5.2) de la valeur v_1 de ce vecteur :

$$v_1 = \sqrt{2^2 + (-5)^2}; v_1 = 5,4 \text{ m.s}^{-1}$$

5.3) des coordonnées de la position M_1 du projectile :

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \text{ avec } \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = v_0 t_1 = 1 \text{ m} \\ z_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 = -1,25 \text{ m} \end{cases}$$

$$M_1(0; 1\text{m}; -1,25\text{m}).$$

6) La date t_2 à laquelle le projectile rencontre le plan $z = -2$ m.

$$z = -2 \text{ équivaut à : } -\frac{1}{2}gt_2^2 = -2; -5t_2^2 = -2;$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}; t_2 = 0,63 \text{ s}$$

1) Équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ du mouvement du projectile dans le repère (O, x, z)

Système : le projectile ;

Référentiel galiléen : référentiel terrestre :

Bilan des forces extérieures : le poids $\vec{P}$ du projectile.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} = m \vec{a}; m \vec{g} = m \vec{a}; \vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{v} = t\vec{a} + \vec{v}_0 \text{ et } \vec{OM} = \frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{v}_0 + \vec{OM}_0.$$

$$\text{On a : } \begin{cases} g_x = 0 \\ g_z = -g \end{cases} \text{ Donc } \vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases}$$

$$\text{À la date } t = 0 \text{ s ; } \vec{OM}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases};$$

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \sin \alpha \\ v_{0z} = v_0 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \sin \alpha \\ v_z = a_z t + v_{0z} = -gt + v_0 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\vec{OM} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0 t \sin \alpha \\ z(t) = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{0z}t + z_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \cos \alpha \end{cases}$$

2) Équation cartésienne de sa trajectoire :

$$\text{On a : } t = \frac{x}{v_0 \sin \alpha} \text{ . Donc}$$

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \sin \alpha}\right)^2 + v_0\left(\frac{x}{v_0 \sin \alpha}\right) \cos \alpha;$$

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \sin^2 \alpha} x^2 + x \cot \alpha \text{ .}$$

3) Détermination de

3.1) l'altitude maximale atteinte par le projectile :

$$z_{\max} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2g}. \text{ A.N. : } z_{\max} = \frac{15^2 \times (\cos 30^\circ)^2}{2 \times 10};$$

$$z_{\max} = 8,4 \text{ m}$$

3.2) la portée horizontale de tir :

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \text{ A.N. : } x_{\max} = \frac{15^2 \times \sin 60^\circ}{10};$$

$$x_{\max} = 19,5 \text{ m}$$

Exercice 13

$$1) \frac{F}{P} = \frac{|q|E}{mg} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \times 2 \cdot 10^7}{7,5 \cdot 10^{-6} \times 10} = 5,3 \cdot 10^6.$$

Donc le poids de la bille est négligeable devant la force électrostatique.

2) Le signe de la tension $U = V_A - V_B$:

$\vec{E}$ est orienté de (A) vers (B), donc $V_A > V_B$.
D'où $U = V_A - V_B > 0$.

3)

3.1) Équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ du mouvement de la bille :

Système : la bille ;

Référentiel galiléen : référentiel terrestre ;

Bilan des forces extérieures : $\vec{F} = q\vec{E}$ (force électrostatique ; le poids de la bille est négligeable).

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{F} = m \vec{a} ; q\vec{E} = m \vec{a} ; \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}.$$

$$\vec{v} = t\vec{a} + \vec{v}_0 \text{ et } \vec{OM} = \frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{v}_0 + \vec{OM}_0.$$

$$\text{On a : } \vec{E} \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -E \end{cases}$$

$$\text{Donc } \vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{qE_x}{m} = 0 \\ a_y = \frac{qE_y}{m} = -\frac{qE}{m} \end{cases}$$

$$\text{À la date } t = 0 \text{ s ; } \vec{OM}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} ; \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \\ v_y = a_y t + v_{0y} = -\frac{qE}{m} t \end{cases}$$

$$\vec{OM} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y} t + y_0 = -\frac{qE}{2m} t^2 \end{cases}$$

3.2) Équation de la trajectoire de la bille :

$$\text{On a : } t = \frac{x}{v_0} ; \text{ donc } y = -\frac{qE}{2m} \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

$$\text{D'où : } y = -\frac{qE}{2mv_0^2} x^2$$

4) La valeur limite que doit avoir la vitesse v_0 pour que la bille sorte sans heurter les plaques :

Pour que la bille sorte du condensateur sans heurter les plaques, il faut que pour $x = \ell$, $-\frac{d}{2} < y$.

$$\text{Or pour } x = \ell, \text{ on a } -\frac{qE}{2mv_0^2} \ell^2.$$

$$\text{Donc } -\frac{d}{2} < -\frac{qE}{2mv_0^2} \ell^2 ; \frac{qE}{2mv_0^2} \ell^2 < \frac{d}{2}$$

$$\frac{\ell^2}{2} < \frac{mv_0^2}{qE} ; v_0 \text{ limite} = \frac{qE\ell^2}{md}$$

$$v_0 \text{ limite} = \ell \sqrt{\frac{qE}{md}}$$

$$\text{A.N. : } v_0 \text{ limite} = 15 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-5} \times 2 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-2} \times 7,5 \cdot 10^{-6}}}$$

$$v_0 \text{ limite} = 4,9 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}.$$

Exercice 14

1) Bilan des forces extérieures : le poids de la sphère $\vec{P} = m\vec{g}$; la force électrostatique

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

2) Expression du vecteur-accelération de la sphère en fonction de m , q , $\vec{g}$ et $\vec{E}$:

Appliquons le théorème du centre d'inertie dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{P} + \vec{F} = m \vec{a} ; m \vec{a} = m \vec{g} + q \vec{E} ;$$

$$\vec{a} = \vec{g} + \frac{q}{m} \vec{E}$$

3)

3.1) Détermination des coordonnées du vecteur-accelération $\vec{a}$ de la sphère :

$U_{AB} = V_A - V_B$ est positive donc $V_A > V_B$:

$\vec{E}$ est orienté de (A) vers (B).

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = g_x + \frac{q}{m} E_x \\ a_y = g_y + \frac{q}{m} E_y \end{cases}$$

$$\text{Or } \vec{g} \begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = -g \end{cases} ; \vec{E} \begin{cases} E_x = E \\ E_y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{q}{m} E \\ a_y = -g \end{cases}$$

3.2) Détermination des coordonnées du vecteur-vitesse $\vec{v}$ et celles du vecteur-position $\vec{OM}$:

$$\text{On a : } \vec{v} = t\vec{a} + \vec{v}_0 = t\vec{a} \text{ et}$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} t^2 \vec{a} + t\vec{v}_0 + \vec{OM}_0 = \frac{1}{2} t^2 \vec{a} + \vec{OM}_0$$

À la date $t = 0$ s ;

$$\vec{OM}_0 \begin{cases} x_0 = \frac{d}{2} \\ y_0 = \ell \end{cases} ; \vec{v} \begin{cases} v_x = a_x t = \frac{q}{m} E t \\ v_y = a_y t = -g t \end{cases}$$

$$\text{et } \vec{OM} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + x_0 = \frac{qE}{2m} t^2 + \frac{d}{2} \\ y(t) = \frac{1}{2} a_y t^2 + y_0 = -\frac{g}{2} t^2 + \ell \end{cases}$$

4) Équation cartésienne de la trajectoire :

$$\text{On a : } y = -\frac{g}{2} t^2 + \ell ; t^2 = -\frac{2}{g} (y - \ell)$$

$$\text{Donc } x = -\frac{qE}{mg} (y - \ell) + \frac{d}{2} ;$$

$$x = -\frac{qE}{mg} y + \frac{qE\ell}{mg} + \frac{d}{2}$$

5) L'équation obtenue est celle d'une droite. La trajectoire est donc rectiligne.

6) Calcule la date d'arrivée de la sphère dans le plan horizontal passant par O.

Dans le plan passant par O, $y = 0$ m.

$$\text{Donc } -\frac{g}{2} t^2 + \ell = 0 ; t^2 = \frac{2\ell}{g} ; t = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}$$

$$\text{A.N : } t = \sqrt{\frac{2 \times 0,5}{10}} ; t = 0,32 \text{ s.}$$

7) Détermination de la valeur de U_{AB} :

La trajectoire de la sphère passe par le point P de coordonnées (d,0) si pour $x = d$ on a $y = 0$ m.

$$\text{On a donc : } \frac{qE\ell}{mg} + \frac{d}{2} = d ; \frac{qU_{AB}\ell}{mgd} + \frac{d}{2} = d$$

$$\frac{qU_{AB}\ell}{mgd} = -\frac{d}{2} + d = \frac{d}{2}$$

$$U_{AB} = -\frac{mgd^2}{2q\ell} = \frac{gd^2}{2 \frac{q}{m} \ell}$$

$$\text{A.N : } U_{AB} = \frac{10 \times (0,04)^2}{2 \times 10^{-6} \times 0,5} ; U_{AB} = 16 \text{ 000 V.}$$

Exercice 15

1) Expression de l'accélération $\vec{a}$ du mobile après son passage au point O :

Système : le mobile ;

Référentiel galiléen : référentiel terrestre ;

Bilan des forces extérieures : le poids $\vec{P}$ du mobile.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} = m \vec{a} ; m \vec{g} = m \vec{a} . \quad \vec{a} = \vec{g} .$$

2)

2.1) Équations horaires $x(t)$, $y(t)$ du mouvement après le point O :

$$\vec{v} = t\vec{a} + v_0 \quad \text{et} \quad \vec{OM} = \frac{1}{2}t^2\vec{a} + tv_0 + \vec{OM}_0 .$$

$$\text{On a : } \vec{g} \begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = -g \end{cases} . \text{ Donc } \vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{cases}$$

$$\text{À la date } t = 0 \text{ s ; } \vec{OM}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases} ;$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = a_y t + v_{0y} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\vec{OM} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0 t \cos \alpha \\ y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha \end{cases}$$

2.2) Équation cartésienne de sa trajectoire :

$$\text{On a : } t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} .$$

$$\text{Donc } y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right) \sin \alpha .$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

3) Expression numérique de l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$y = -\frac{10}{2 \times 4^2 \times \cos^2 30^\circ} x^2 + x \tan 30^\circ ;$$

$$y = -0,42 x^2 + 0,58 x .$$

4)

4.1) L'abscisse du point d'impact B du mobile sur le sol :

$$\text{Au point B, } y = 0 \text{ m. } -0,42 x^2 + 0,58 x = 0 ; \\ -0,42 x_B + 0,58 = 0 ; x_B = 1,4 \text{ m.}$$

4.2) La durée du saut :

$$v_0 t_B \cos \alpha = x_B ; t_B = \frac{x_B}{v_0 \cos \alpha} .$$

$$\text{A.N : } t_B = \frac{1,4}{4 \times \cos 30^\circ} ; t_B = 0,4 \text{ s.}$$

4.3) La vitesse du mobile au moment où il prend contact avec le sol.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre O et B :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_O^2 = W_{OB}(\vec{P}) ; W_{OB}(\vec{P}) = 0 \text{ J.}$$

$$\text{Donc } v_B = v_O = 4 \text{ m.s}^{-1} .$$

Exercice 16

1)

Système : la balle ;

Référentiel galiléen : référentiel terrestre ;

Bilan des forces extérieures : le poids $\vec{P}$ de la balle.

2)

2.1) Équations horaires du mouvement de G :

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} = m \vec{a} ; m \vec{g} = m \vec{a} . \quad \vec{a} = \vec{g} .$$

$$\vec{v} = t\vec{a} + \vec{v}_0 \text{ et } \vec{OG} = \frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{v}_0 + \vec{OG}_0$$

$$\text{On a : } \vec{g} \begin{cases} g_x = 0 \\ g_z = -g \end{cases} . \text{ Donc } \vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases} .$$

À la date $t = 0$ s ;

$$\vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ z_0 = z_0 \end{cases} ; v_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0z} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_z = a_z t + v_{0z} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \text{ et}$$

$$\vec{OG} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0 t \cos \alpha \\ z(t) = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{0z}t + z_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha + z_0 \end{cases}$$

2.2) L'équation de la trajectoire de la balle :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} .$$

Donc

$$z = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right) \sin \alpha + z_0$$

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha + z_0$$

3)

3.1) La hauteur à laquelle la balle passe au-dessus du filet :

Au-dessus du filet, $x = d_1$.

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} d_1^2 + d_1 \tan \alpha + z_0$$

$$z = -\frac{9,8}{2 \times 10^2 \times \cos^2 60^\circ} \times 2^2 + 2 \times \tan 60^\circ + 0,3$$

$$z = -0,784 + 3,764 ; z = 3 \text{ m.}$$

3.2) La hauteur à laquelle la balle passe au-dessus de l'adversaire.

Lorsque la balle arrive au-dessus de l'adversaire, $x = d_1 + d_2$.

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} (d_1 + d_2)^2 + (d_1 + d_2) \tan \alpha + z_0$$

$$z = -\frac{9,8}{2 \times 10^2 \times \cos^2 60^\circ} \times (4+2)^2 + (4+2) \times \tan 60^\circ + 0,3$$

$$z = -7,056 + 10,692 ; z = 3,6 \text{ m.}$$

4) Le lob est réussi si $x < d_1 + D$ pour $z = 0$ et $z > H$ pour $x = d_1 + d_2 = 6$ m.

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha + z_0 = 0 ;$$

$-0,196 x^2 + 1,73x + 0,3 = 0 ; x = 9$ m (la balle retombe à 9 m du point O).

Pour $x = d_1 + d_2 = 6$ m, $z = 3,6$ m $> H$ et pour $z = 0$, $x = 9$ m $< d_1 + D = 14$ m. Donc le lob est réussi.

Exercice 17

1) La force extérieure qui s'exerce sur le ballon est son poids $\vec{P}$.

2)

2.1) Équations horaires $x(t)$, $y(t)$ du mouvement après le point O :

Appliquons le théorème du centre d'inertie dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{P} = m \vec{a} ; m \vec{g} = m \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g} .$$

$$\vec{v} = t\vec{a} + \vec{v}_0 \text{ et } \vec{OG} = \frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{v}_0 + \vec{OG}_0$$

$$\text{On a : } \vec{g} \begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = -g \end{cases} . \text{ Donc } \vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{cases} .$$

À la date $t = 0$ s ;

$$\vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} ; v_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = a_y t + v_{0y} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \text{ et}$$

$$\vec{OG} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 = v_0 t \cos \alpha \\ y(t) = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0 = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha \end{cases}$$

2.2) Équation cartésienne de sa trajectoire :

$$\text{On a : } t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

Donc

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right) \sin \alpha$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

3)

3.1) Le temps mis par le ballon pour parvenir aux poteaux :

$$\text{On a : } t = \frac{D}{v_0 \cos \alpha} ; t = \frac{50}{24 \cos 40^\circ} ; t = 2,7 \text{ s.}$$

3.2) La vitesse du ballon à son passage au niveau des poteaux :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

A.N :

$$v = \sqrt{(24 \times \cos 40^\circ)^2 + (-9,8 \times 2,7 + 24 \times \sin 40^\circ)^2}$$

$$v = 21,44 \text{ m.s}^{-1}$$

4) La pénalité sera marquée si pour $x = D$, $y > H$.

Déterminons y pour $x = D$.

$$y = -\frac{9,8}{2 \times 24^2 \times \cos^2 40^\circ} x^2 + x \tan 40^\circ ; y = 5,7 \text{ m.}$$

Comme $5,7 \text{ m} > 3 \text{ m}$ alors la pénalité sera marquée.

Exercice 18

1) Les forces extérieures qui s'exercent sur le solide :

1.1) entre A et B, le solide est soumis à son poids P et à la réaction normale R_N du plan incliné ;

1.2) au-delà du point B, le solide est soumis à l'action de son poids P uniquement.

2) Détermination de la vitesse v_B du solide en B :

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre A et B :

$$\Delta E_C = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R}_N).$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - 0 = M \cdot g \cdot AB \cdot \sin \alpha + 0 ;$$

$W_{AB}(\vec{R}_N) = 0 \text{ J}$ car la droite d'action de $\vec{R}_N$ est perpendiculaire à (AB).

$$v_B = \sqrt{2g \cdot AB \cdot \sin \alpha}.$$

$$\text{A.N : } v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 2,5 \times \sin 30^\circ} ;$$

$$v_B = 5 \text{ m.s}^{-1}.$$

3)

3.1) Équations horaires du mouvement du solide :

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} = M \vec{a} ; M \vec{g} = M \vec{a} ; \vec{a} = \vec{g}.$$

Exercice 19

$$\vec{v} = t\vec{a} + \vec{v}_0 \text{ et } \vec{OG} = \frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{v}_0 + \vec{OG}_0.$$

$$\text{On a : } \vec{g} \begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = -g \end{cases} . \text{ Donc } \vec{a} \begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = -g \end{cases}$$

À la date $t = 0$ s ;

$$\vec{OG}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{cases} ; \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_B \cos \alpha \\ v_{0y} = -v_B \sin \alpha \end{cases}$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} = v_B \cos \alpha \\ v_y = a_y t + v_{0y} = -gt - v_B \sin \alpha \end{cases} \text{ et}$$

$$\vec{OG} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 = v_B t \cos \alpha \\ y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y} t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 - v_B t \sin \alpha + h \end{cases}$$

3.2) Équation cartésienne de la trajectoire du solide :

$$\text{On a : } t = \frac{x}{v_B \cos \alpha} . \text{ Donc}$$

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_B \cos \alpha}\right)^2 - v_B\left(\frac{x}{v_B \cos \alpha}\right)\sin \alpha + h ;$$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 - x \tan \alpha + h.$$

4)

4.1) Détermination des coordonnées du point d'impact I du solide sur le plan horizontal :

Sur le plan horizontal, $y = 0$. Donc $y_1 = 0$ m et $x_1 = v_B \Delta t \cos \alpha = 5 \times 0,5 \times \cos 30^\circ$; $x_1 = 2,2$ m.

4.2) Détermination de la vitesse v_1 du solide à son arrivée sur le plan horizontal.

$$v_1 = \sqrt{(v_{1x})^2 + (v_{1y})^2} ;$$

$$v_1 = \sqrt{(v_B \cos \alpha)^2 + (-g\Delta t - v_B \sin \alpha)^2} ;$$

A.N :

$$v_1 = \sqrt{(5 \cos 30^\circ)^2 + (-10 \times 0,5 - 5 \sin 30^\circ)^2}$$

$$v_1 = 8,66 \text{ m.s}^{-1}.$$

1) Les forces qui s'exercent sur l'électron :

1.1) Entre les armatures du condensateur, l'électron est soumis à la force électrostatique $\vec{F} = -e\vec{E}$.

1.2) Entre le condensateur et l'écran fluorescent, l'électron n'est soumis à aucune force.

2) Équation de la trajectoire de l'électron.

Système : l'électron ;

Référentiel galiléen : référentiel terrestre ;

Bilan des forces extérieures : la force électrostatique $\vec{F} = -e\vec{E}$:

$U_{AB} > 0$ donc $V_A > V_B$; $\vec{E}$ est orienté de (A) vers (B).

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{F} = m\vec{a} ; -e\vec{E} = m\vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E}.$$

$$\vec{v} = t\vec{a} + \vec{v}_0 \text{ et } \vec{OM} = \frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{v}_0 + \vec{OM}_0$$

$$\text{On a : } \vec{E} \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -E \end{cases} .$$

$$\text{Donc } \vec{a} \begin{cases} a_x = -\frac{e}{m}E_x = 0 \\ a_y = -\frac{e}{m}E_y = \frac{e}{m}E \end{cases} .$$

$$\text{À la date } t = 0 \text{ s ; } \vec{OM}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} ; \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \\ v_y = a_y t + v_{0y} = \frac{eE}{m} t \end{cases} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_{0y} t + y_0 = \frac{eE}{2m} E t^2 \end{cases}$$

On a : $t = \frac{x}{v_0}$. Donc $y = \frac{1}{2} \frac{e}{m} E \left(\frac{x}{v_0} \right)^2$;
 $y = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2 = \frac{eU_{AB}}{2mdv_0^2} x^2$.

3)

3.1) Détermination du déplacement vertical y_M de l'électron à la sortie du condensateur.

Pour $y = y_M$; $x = \ell$; $y_M = \frac{eU_{AB}}{2mdv_0^2} \ell^2$.

A.N :

$$y_M = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 100}{2 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times 0,02 \times (1,3 \cdot 10^7)^2} (0,05)^2 ;$$

$$y_M = 6,5 \text{ mm.}$$

Détermination de l'angle α de déviation de la trajectoire de l'électron à la sortie du condensateur :

$$\tan \alpha = \frac{y_M}{\ell} = \frac{2y_M}{\ell} \cdot \tan \alpha = \frac{2 \times 6,5}{50} ;$$

$$\tan \alpha = 0,26 ; \alpha = 15^\circ .$$

3.2) Les coordonnées du point d'impact P de l'électron sur l'écran fluorescent (E) :

Au point P, $x = D$ et $y_p = \left(D - \frac{\ell}{2} \right) \tan \alpha$.

A.N : $y_p = \left(20 - \frac{5}{2} \right) \tan 15^\circ$. $y_p = 4,7 \text{ cm}$

et $x_p = 20 \text{ cm}$.

3.3) La vitesse v_p de l'électron à son arrivée sur l'écran (E) :

Entre le condensateur et l'écran, le mouvement de l'électron est rectiligne et uniforme.

Donc $v_p = v_M$.

Or $v_M = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eU_{AB}}{mdv_0} \right)^2}$;

$$v_p = v_M = \sqrt{(1,3 \cdot 10^7)^2 + \left(\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,05 \times 100}{9,1 \times 10^{-31} \times 0,02 \times 1,3 \cdot 10^7} \right)^2}$$

$$v_p = 1,34 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1} .$$

Exercice 20

1)

1.1) Pour que les électrons soient accélérés entre (A) et (B), il faut que la force électrostatique qui s'exerce sur eux soit orientée de (A) vers (B). Donc le champ électrostatique entre ces plaques doit être orienté de (B) vers (A) puisqu'il est opposé à cette force.

D'où $U_1 = V_B - V_A > 0$.

1.2) Pour que le faisceau d'électrons entre (P) et (Q) soit dévié vers le haut, il faut que la force électrostatique qui s'exerce sur les électrons soit orientée de (Q) vers (P). Donc le champ électrostatique entre ces plaques doit être orienté de (P) vers (Q).

D'où $U_2 = V_Q - V_P < 0$.

2) Détermination de la vitesse v_0 d'un électron quand celui-ci sort des plaques (A) et (B) :

Système : l'électron de charge

$q = -e$ et de masse m ;

Référentiel galiléen : référentiel terrestre ;

Bilan des forces : la force électrostatique :

$$\vec{F} = -e \vec{E} .$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - 0 = W(\vec{F}_0) = -e(V_A - V_B) = eU_1$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2eU_1}{m}} .$$

A.N : $v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 1000}{9,1 \cdot 10^{-31}}}$;

$$v_0 = 1,875 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1} .$$

3)

3.1) Équations horaires $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ du mouvement de l'électron entre les plaques (P) et (Q) :

À la sortie des plaques (A) et (B), les électrons sont animés d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Au point O, ils ont un vecteur - vitesse égal à $\vec{v}_0$.

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{F} = m \vec{a} ; -eE = m \vec{a} ; \vec{a} = -\frac{eE}{m}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = -\frac{e}{m}E_x = 0 \\ a_y = -\frac{e}{m}E_y = 0 \\ a_z = -\frac{e}{m}E_z = \frac{eE}{m} \end{cases}$$

À la date $t=0$ s, $\vec{v}_0$ $\begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = 0 \end{cases}$ et $\overrightarrow{OM}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = a_x t + v_{0x} = v_0 \\ v_y = a_y t + v_{0y} = 0 \\ v_z = a_z t + v_{0z} = \frac{eE}{m}t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + x_0 = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + y_0 = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{0z}t + z_0 = \frac{eE}{2m}t^2 \end{cases}$$

3.2) Équation cartésienne de la trajectoire de l'électron.

On a : $t = \frac{x}{v_0}$; donc $z = \frac{e}{2m}E \left(\frac{x}{v_0} \right)^2$;

$$z = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2 .$$

4)

4.1) Détermination du temps τ au bout duquel l'électron sort des plaques (P) et (Q) :

L'électron sort des plaques (P) et (Q) au bout

d'un τ tel que : $\tau = \frac{L}{v_0}$. A.N : $\tau = \frac{6.10^{-2}}{1,875.10^7}$;
 $\tau = 3,2. 10^{-9}$ s

4.2) Détermination de la vitesse v_s de l'électron à la sortie des plaques (P) et (Q) :

$$v_s = \sqrt{v_{sx}^2 + v_{sy}^2 + v_{sz}^2} ;$$

$$v_s = \sqrt{(v_0)^2 + \left(\frac{eE}{m} t_s \right)^2} .$$

A.N :

$$v_s = \sqrt{(1,875.10^7)^2 + \left(\frac{1,6.10^{-19} \times 100}{9,1 \times 10^{-31} \times 2.10^{-2} \times 3,2.10^{-9}} \right)^2} ;$$

$$v_s = 1,9.10^7 \text{ m.s}^{-1} .$$

4.3) La nature de la trajectoire ultérieure de l'électron au-delà des plaques (P) et (Q) :

À la sortie des plaques (P) et (Q), l'électron n'est soumis à aucune force. Donc son mouvement est rectiligne et uniforme.

4.4) Les coordonnées du point d'impact I de l'électron sur l'écran.

Sur l'écran, le point I a pour abscisse $x_1 = D + L$;
 $x_1 = 0,09 + 0,06$; $x_1 = 0,15$ m ou $x_1 = 15$ cm.

$$\tan \alpha = \frac{z_I}{D + \frac{L}{2}} = \frac{z_S}{\frac{L}{2}} ; z_I = \frac{2D + L}{L} = z_S .$$

$$\text{Avec } z_S = \frac{eE}{2mv_0^2} L^2 ; z_I = \frac{e(2D + L)LE}{2mv_0^2}$$

$$= \frac{e}{2mv_0^2} \times \frac{(2D + L)L}{d} \times U_2$$

A.N :

$$z_I = \frac{1,6.10^{-19}}{2 \times 9,1.10^{-31} \times (1,875.10^7)^2} \times \frac{(2 \times 9.10^{-2} + 6.10^{-2}) \times 6.10^{-2}}{2.10^{-2}} \times 100 ;$$

$$z_I = 0,018 \text{ m ou } z_I = 1,8 \text{ cm} .$$

Leçon 5

Oscillations mécaniques libres

IV. Exercices

Exercice 1

- 1) (c) 2) (b)

Exercice 2

Exercice 3

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	La fréquence des oscillations est d'autant plus grande que la masse du solide est importante.		×
2	L'énergie potentielle élastique du ressort comprimé a pour expression : $E_p = -\frac{1}{2} kx^2$.		×
3	L'énergie cinétique du solide peut s'écrire : $E_c = -\frac{1}{2} m\omega_0^2 \dot{x}^2$.		×
4	Dans l'expression $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ de l'équation horaire de son mouvement, X_m et φ se déterminent à partir des conditions initiales.	×	
5	L'énergie mécanique est proportionnelle à l'amplitude des oscillations.	×	
6	L'expression de l'énergie mécanique est : $E_m = -\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$.		×

Exercice 4

Un oscillateur mécanique effectue un mouvement de va-et-vient autour de sa position d'équilibre. Un va-et-vient représente **une oscillation**. Sa durée correspond à **la période** des oscillations. La **fréquence** des oscillations quant à elle, elle est le nombre de **périodes par seconde**. Lorsque l'oscillateur mécanique n'est pas amorti, son énergie totale **est constante**. Cependant cette énergie **diminue** si les oscillations sont amorties. Dans ce cas, **l'amplitude des oscillations** diminue à cause des pertes d'énergie. Pour compenser ces pertes, un apport extérieur d'énergie est nécessaire.

Exercice 5

- 1) (c) 2) (a)

Exercice 6

- L'amplitude et la phase à l'origine des dates se déterminent à partir des conditions initiales du mouvement d'un oscillateur mécanique.
- La pulsation propre d'un pendule élastique augmente lorsque la masse du solide fixé au ressort diminue.
- L'amplitude d'un oscillateur mécanique amorti diminue dans le temps à cause des pertes d'énergie.
- L'énergie mécanique totale d'un pendule élastique non amorti est constante alors que ses énergies cinétique et potentielle varient.

Exercice 7

- 1) (b) 2) (a)

Exercice 8

Amplitude (m)	•	12,5.10 ⁻³
Vitesse maximale (m.s ⁻¹)	•	10
Abscisse initiale (m)	•	5.10 ⁻¹
Vitesse initiale (m.s ⁻¹)	•	$\frac{\pi}{2}$
Énergie mécanique totale (J)	•	5.10 ⁻²
	•	0

Exercice 9

- Définition d'un oscillateur mécanique :
Un oscillateur mécanique est un système dont le mouvement est périodique et s'effectue de part et d'autre de sa position d'équilibre stable.
- Expression de :
 - l'énergie cinétique en fonction de m et sa vitesse $\dot{x}$: $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$.
 - l'énergie potentielle élastique en fonction de k et x : $E_p = \frac{1}{2} kx^2$.
- Expression de son énergie mécanique totale :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2.$$

- Équation différentielle du mouvement de l'oscillateur :

$$E_m = \text{constante} \text{ donc } \frac{d(E_m)}{dt} = 0 ;$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)}{dt} = 0 ;$$

$$\frac{1}{2}m \frac{d(\dot{x}^2)}{dt} + \frac{1}{2}k \frac{d(x^2)}{dt} = 0 ;$$

$$\frac{1}{2}m(2\dot{x})\dot{x} + \frac{1}{2}k(2x)\dot{x} = 0 ;$$

$$\frac{1}{2}(2\dot{x})(m\dot{x} + kx) = 0.$$

$$\text{Donc } m\dot{x} + kx = 0 \text{ ou } \dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Exercice 10

- Signification de :
 X_m : amplitude des oscillations ou élongation maximale;

ω_0 : pulsation propre de l'oscillateur ;

φ : phase à l'origine des dates.

- Expression de ω_0 en fonction de m et k :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

-

On a : $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$; $v(t) = \dot{x}(t)$

$$= -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

A la date $t = 0$ s, $x = x_0 = X_m \cos \varphi$ et

$$v_0 = -\omega_0 X_m \sin \varphi.$$

- Expression de X_m en fonction de $\cos \varphi$

et x_0 : On a : $X_m \cos \varphi = x_0$; $X_m = \frac{x_0}{\cos \varphi}$.

3.2) Expression de $\tan \varphi$ en fonction de ω_0 ; x_0

et v_0 : On a : $\frac{-\omega_0 X_m \sin \varphi}{X_m \cos \varphi} = \frac{v_0}{x_0}$;

$$-\omega_0 \tan \varphi = \frac{v_0}{x_0} \quad \tan \varphi = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0} .$$

Exercice 11

1)

1.1) Valeur de l'amplitude des oscillations :

$$X_m = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m} .$$

1.2) Valeur de la pulsation propre de

l'oscillateur : $\omega_0 = 314 \text{ rad.s}^{-1}$.

1.3) Valeur de la phase à l'origine des dates :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} .$$

2) Calcul de la période propre et de la fréquence propre de l'oscillateur :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} ; \text{A.N : } T_0 = +\frac{2\pi}{314} ; T_0 = 0,02 \text{ s} .$$

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} ; \text{A.N : } N_0 = \frac{314}{2\pi} ; N_0 = 50 \text{ Hz} .$$

3)

3.1) Expression de la vitesse $v(t)$: On a :

$$v(t) = \dot{x}(t) ;$$

$$v(t) = -314 \times 5.10^{-2} \sin(314t - \frac{\pi}{2}) \text{ (m.s}^{-1}\text{)} ;$$

$$v(t) = -15,7 \sin(314t - \frac{\pi}{2}) \text{ (m.s}^{-1}\text{)} .$$

3.2) Expression de l'accélération $a(t)$:

$$\text{On a : } a(t) = \ddot{x}(t) ;$$

$$a(t) = -(314)^2 \times 5.10^{-2} \cos(314t - \frac{\pi}{2}) \text{ (m.s}^{-2}\text{)} ;$$

$$a(t) = -5.10^3 \cos(314t - \frac{\pi}{2})$$

4) Vitesse et accélération maximales de l'oscillateur :

$$V_m = 15,7 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } a_m = 5.10^3 \text{ m.s}^{-2}$$

Exercice 12

1) Définition d'un oscillateur mécanique :

Un oscillateur mécanique est un système dont le mouvement est périodique et s'effectue de part et d'autre de sa position d'équilibre stable.

2)

2.1) Valeur de l'amplitude des oscillations :

$$X_m = 3.10^{-2} \text{ m} .$$

2.2) Valeur de la pulsation propre de l'oscillateur : $\omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1}$.

2.3) Valeur de la phase à l'origine des dates :

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} .$$

3) Détermination de la constante de raideur k du ressort :

$$E_m = \frac{1}{2} k X_m^2 \quad k = \sqrt{\frac{2E_m}{X_m^2}} .$$

$$\text{A.N : } k = \sqrt{\frac{2 \times 1,8}{(0,03)^2}} ; k = 63 \text{ N.m}^{-1}$$

4. La masse m du solide.

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} ; m = \frac{k}{\omega_0^2} \quad \text{A.N : } m = \frac{63}{20^2} ;$$

$$m = 158 \text{ g} .$$

Exercice 13

1) Expressions de la vitesse $v(t)$ et de l'accélération $a(t)$ de l'oscillateur en fonction du temps.

$$\text{Vitesse : } v(t) = \dot{x}(t) ;$$

$$v(t) = -10 \frac{\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t - \frac{\pi}{2}\right) .$$

$$\text{Accélération : } a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) ;$$

$$a(t) = -\frac{20\pi^2}{T_0^2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t - \frac{\pi}{2}\right) .$$

2)

t (s)	0	$\frac{T_0}{4}$
x(m)	0	5.10^{-2}
v(m.s ⁻¹)	$\frac{10\pi}{T_0} \times 10^{-2}$	0
a(m.s ⁻²)	0	$\frac{20\pi^2}{T_0^2} \times 10^{-2}$

$\frac{T_0}{2}$	$\frac{3T_0}{4}$	T_0
0	$-5 \cdot 10^{-2}$	0
$-\frac{10\pi}{T_0} \times 10^{-2}$	0	$\frac{10\pi}{T_0} \times 10^{-2}$
0	$\frac{20\pi^2}{T_0^2} \times 10^{-2}$	0

3) Représentation de la courbe.

Exercice 14

1)

1.1) L'amplitude des oscillations a pour valeur : $X_m = 3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$.

1.2) L'énergie mécanique du pendule a pour valeur $E_m = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

1.3) Pour $x = 0$; $E_c = E_m = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ J}$; et pour $x = 3 \text{ cm}$, $E_c = 0 \text{ J}$.

2) Détermination de la raideur k du ressort :

$$k = \frac{2E_m}{X_m^2} \quad \text{A.N : } k = \frac{2 \times 3,5 \cdot 10^{-2}}{(3 \cdot 10^{-2})^2} ;$$

$$k = 78 \text{ N.m}^{-1}.$$

Exercice 15

1) Les forces extérieures qui s'exercent sur le solide :

Le solide est soumis à :

- son poids $\vec{P}$;
- la réaction normale $\vec{R}_N$ de la tige ;
- la tension $\vec{T}$ du ressort.

2) Équation différentielle qui régit le mouvement de (G) :

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N = m \vec{a}$$

Projection sur $(x'x)$: $P_x + T_x + R_{Nx} = ma_x$;

$$0 - T + 0 = ma_x ; \quad -kx = m \ddot{x}.$$

$$m \ddot{x} + kx = 0 \text{ ou } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

3) Solution de l'équation différentielle :

On a : $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$. $v(t) = \dot{x}(t)$

$$= -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \text{ et}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t). \text{ Donc } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Comme $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ alors la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

4)

4.1) Valeurs de l'amplitude X_m et de la phase initiale φ :

A la date $t = 0 \text{ s}$, $x = x_0 = X_m \cos \varphi$

et $v_{0x} = -\omega_0 X_m \sin \varphi$. Or $x_0 > 0$ et $v_{0x} < 0$.

Donc $\cos \varphi > 0$ et $\sin \varphi > 0$.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{0,25}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$\tan \varphi = \frac{-v_{0x}}{x_0 \omega_0} \quad \text{A.N : } \tan \varphi = \frac{0,2}{0,02 \times 10} ;$$

$$\tan \varphi = 1 ; \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

$$X_m = \frac{x_0}{\cos \varphi} ; \quad \text{A.N : } X_m = \frac{0,02}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} ;$$

$$X_m = 0,028 \text{ m}$$

4.2) Expression de la vitesse instantanée $v(t)$ du solide (S) :

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) ;$$

$$v(t) = -10 \times 0,028 \sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right) ;$$

$$v(t) = -0,28 \sin\left(10t + \frac{\pi}{4}\right)$$

4.3) Détermination de l'énergie mécanique de l'oscillateur :

$$E_m = \frac{1}{2} k X_m^2 ; \text{ or } k = m \omega_0^2 .$$

$$\text{Donc } E_m = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_m^2 .$$

$$\text{A.N : } E_m = \frac{1}{2} \times 0,25 \times 10^2 \times (0,028)^2 .$$

$$E_m = 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ J} .$$

Exercice 16

1) Les forces extérieures qui s'appliquent au solide (S) :

Le solide est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{R}_N$ du support et à la tension $\vec{T}$ du ressort.

2) Équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G du solide (S).

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème du centre d'inertie.

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N = m \vec{a}$$

$$\text{Projection sur } (x'x) : P_x + T_x + R_{Nx} = m a_x ;$$

$$0 - T + 0 = m \ddot{x} ; -k x = m \ddot{x} .$$

$$m \ddot{x} + kx = 0 \text{ ou } \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

3) Équation horaire du mouvement du solide.

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) ; v(t) = \dot{x}(t)$$

$$= \omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) .$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} ; \omega_0 = \sqrt{\frac{120}{0,1}} ; \omega_0 = 34,64 \text{ rad.s}^{-1} .$$

$$\text{A la date } t = 0 \text{ s, } x = x_0 = X_m \sin \varphi = 0,02$$

$$\text{et } v = v_{0x} = \omega_0 X_m \cos \varphi = -1,2 .$$

Alors $\sin \varphi > 0$ et $\cos \varphi < 0$.

$$\tan \varphi = \frac{\omega_0 x_0}{v_{0x}} .$$

$$\text{A.N : } \tan \varphi = \frac{34,64 \times 0,02}{-1,2} = -0,577 ;$$

$$\varphi = \frac{5\pi}{6} \text{ rad} .$$

$$X_m = \frac{x_0}{\sin \varphi} = \frac{0,02}{\sin \frac{5\pi}{6}} ; X_m = 0,04 \text{ m où } X_m = 4 \text{ cm} .$$

$$\text{Donc } x(t) = 4 \cdot 10^{-2} \sin(34,64 t + \frac{5\pi}{6})$$

4)

4.1) La vitesse de (S) au passage par la position d'équilibre :

$$\text{On a : } v(t) = 1,3856 \cos(34,64 t + \frac{5\pi}{6}) .$$

Au passage par la position d'équilibre, $x = 0$

$$\text{et } v_x < 0 . \text{ Donc } \sin(34,64 t + \frac{5\pi}{6}) = 0 \text{ et}$$

$$\cos(34,64 t + \frac{5\pi}{6}) < 0 . 34,64 t + \frac{5\pi}{6} = \pi ;$$

$$t = \frac{\frac{\pi}{6}}{34,64} ; t = \frac{\pi}{6 \times 34,64}$$

$$v_x = 1,3856 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right) = 1,3856 \cos \pi ;$$

$$v_x = -1,3856 \text{ m.s}^{-1} . \text{ Soit } v_x = -1,4 \text{ m.s}^{-1} .$$

4.2) Expression de l'énergie cinétique $E_c(t)$ et l'énergie potentielle élastique $E_{pe}(t)$ de (S) :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \times 0,1 \times (1,3856)^2 \times [\cos(34,64 t + \frac{5\pi}{6})]^2$$

$$E_c(t) = 9,6 \cdot 10^{-2} \times [\cos(34,64 t + \frac{5\pi}{6})]^2$$

$$E_{pe}(t) = \frac{1}{2} \times 120 \times (0,04)^2 \times [\sin(34,64 t + \frac{5\pi}{6})]^2$$

$$E_{pe}(t) = 9,6 \cdot 10^{-2} \times [\sin(34,64 t + \frac{5\pi}{6})]^2$$

4.3) La valeur de l'énergie mécanique du système $E = E_c(t) + E_{pe}(t)$.

$$E = E_c(t) + E_{pe}(t) ; E = 9,6 \cdot 10^{-2} \text{ J} .$$

Exercice 17

1) Les forces extérieures qui s'exercent sur le solide (S) en une position où $x \neq 0$:

Le solide est soumis à :

- son poids $\vec{P}$;

- la réaction normale $\vec{R}_N$ de la tige ;

- la tension $\vec{T}$ du ressort.

2)

2.1) Expressions des énergies cinétique et potentielle élastique du système :

$$\text{Énergie cinétique : } E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 .$$

$$\text{Énergie potentielle élastique : } E_p = \frac{1}{2} kx^2 .$$

2.2) Expression de l'énergie mécanique du système en fonction de m ; k ; x et $\dot{x}$:

$$E_m = E_C + E_P ; E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

3) Équation différentielle qui régit le mouvement du système à partir :

3.1) du théorème du centre d'inertie :

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N = m \vec{a}$$

Projection sur $(x'x)$: $P_x + T_x + R_{Nx} = m a_x$;

$$0 - T + 0 = m a_x ; -kx = m \ddot{x} .$$

$$m \ddot{x} + kx = 0 \text{ ou } \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

3.2) de l'expression de l'énergie mécanique données en 2.2) :

$$E_m = \text{constante donc } \frac{d(E_m)}{dt} = 0 ;$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{1}{2} k x^2\right)}{dt} = 0 ;$$

$$\frac{1}{2} m \frac{d(\dot{x}^2)}{dt} + \frac{1}{2} k \frac{d(x^2)}{dt} = 0 ;$$

$$\frac{1}{2} m (2\dot{x}) \ddot{x} + \frac{1}{2} k (2x) \dot{x} = 0 ;$$

$$\frac{1}{2} (2\dot{x}) (m\ddot{x} + kx) = 0. \text{ Donc } m\ddot{x} + kx = 0 \text{ ou } \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

4) Détermination des valeurs de X_m , φ , ω_0 et m :

$$\text{On a : } x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) ;$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \omega_0 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) .$$

$$\text{A la date } t = 0s, x = x_0 = X_m \sin\varphi = 0,15$$

$$\text{et } v = v_{0x} = -\omega_0 X_m \cos\varphi = 0.$$

$$\sin\varphi > 0 \text{ et } \cos\varphi = 0, \text{ Donc } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

$$X_m = \frac{x_0}{\sin\varphi} = \frac{0,15}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} ; X_m = 0,15 \text{ m ou}$$

$$X_m = 15 \text{ cm.}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} ; \text{A.N : } \omega_0 = \frac{2\pi}{0,1} ; \omega_0 = 20 \pi \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$m = ; \text{A.N : } m = \frac{50}{(20\pi)^2} ;$$

$$m = 0,0127 \text{ kg ou } m = 12,7 \text{ g.}$$

Exercice 18

1)

1.1) La courbe de $x(t)$ est la courbe (2) et celle de $v(t)$ la courbe (1). En effet, à la date $t = 0s$, $x_0 = 0$ car G a la même abscisse que O et $v_0 = -0,5 \text{ m.s}^{-1}$.

1.2) L'amplitude X_m des oscillations est :

$$X_m = 0,05 \text{ m} ;$$

La vitesse maximale est : $V_m = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$;

La période propre T_0 du pendule est :

$$T_0 = \frac{\pi}{5} \quad T_0 = 0,63 \text{ s.}$$

2)

2.1) La pulsation propre ω_0 : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$;

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\pi} ; \omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1}.$$

2.2) la phase à l'origine des dates :

À la date $t = 0s$, $x = x_0 = X_m \cos\varphi = 0$; $\cos\varphi = 0$;

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \varphi = -\frac{\pi}{2} .$$

$$v = v_0 = -\omega_0 X_m \sin\varphi = -0,5 ; \sin\varphi > 0.$$

$$\text{Donc } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

3) Expressions de $x(t)$ et de $v(t)$:

$$x(t) = 5.10^{-2} \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) ;$$

$$v(t) = -5.10^{-1} \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right).$$

4)

4.1) Détermination de la raideur k du ressort :

Pour $v = 0 \text{ m.s}^{-1}$; $E_C = 0 \text{ J}$.

$$E_p = E_m = \frac{1}{2} k X_m^2 . k = \frac{2E_p}{X_m^2} .$$

$$\text{A.N : } k = \frac{2 \times 2,5.10^{-2}}{(0,05)^2} ; k = 20 \text{ N.m}^{-1}.$$

4.2) Détermination de la masse m du solide :

$$\text{On a : } m = \frac{k}{\omega_0^2} ; \text{A.N : } m = \frac{20}{10^2} ;$$

$$m = 0,2 \text{ kg.}$$

Exercice 19

1) Les forces extérieures qui s'exercent sur la voiturette pour $x \neq 0$:

La voiturette est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction normale $\vec{R}_N$ de la table et à la tension $\vec{T}$ du ressort.

2) Représentation de ces forces dans une position de G où $x < 0$:

3) Équation différentielle du mouvement du système :

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N = m \vec{a}.$$

Projection sur l'axe (x') :

$$P_x + T_x + R_{Nx} = ma_x;$$

$$0 + T + 0 = ma_x; \quad -kx = m\ddot{x}.$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \text{ ou } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

4) Expressions de $x(t)$ et de $v(t)$:

$$\text{On a : } x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$$v(t) = \dot{x} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

A la date $t = 0$ s, $x = x_0 = X_m \cos\varphi = -0,15$;

$\cos\varphi < 0$ et $v = v_0 = -\omega_0 X_m \sin\varphi = 0$; $\sin\varphi = 0$;

$\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$. Or $\cos\varphi < 0$; donc $\varphi = \pi$ rad.

$$X_m = \frac{x_0}{\cos\varphi} . \text{A.N : } X_m = -\frac{0,15}{\cos\pi} ; X_m = 0,15 \text{ m ;}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} . \text{A.N : } \omega_0 = \sqrt{\frac{100}{0,25}} ; \omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$x(t) = 0,15 \cos(20t + \pi) \text{ et } v(t) = -3 \sin(20t + \pi).$$

Thème 2 : Électromagnétisme

Leçon

1

Champ magnétique

IV. Exercices

Exercice 1

1) L'espace champ magnétique est un espace où règne un champ magnétique.

2) Les caractéristiques du vecteur champ magnétique $\vec{B}$:

- Point d'application : le point où l'on veut déterminer le champ
- Direction : l'axe d'une aiguille aimantée placée au point considéré
- Sens : du pôle sud vers le pôle nord de l'aiguille aimantée
- Valeur : mesurée avec un teslamètre et exprimée en tesla.

3) Les règles d'orientation du vecteur - champ magnétique $\vec{B}$:

- la règle du bonhomme d'Ampère ;
- la règle du tire - bouchon de Maxwell ;
- la règle des trois doigts de la main droite.

4) Énoncé de chacune de ces trois règles :

La règle du bonhomme d'Ampère :

Un observateur, placé sur une spire de telle sorte que le courant entre par ses pieds et sorte par sa tête, voit en un point M situé à l'intérieur de la bobine, le champ magnétique orienté vers sa gauche.

La règle du tire - bouchon de Maxwell :

Lorsqu'on le tourne dans le sens du courant qui parcourt les spires d'une bobine, un tire - bouchon progresse de la face sud vers la face nord (sens du vecteur - champ magnétique)

La règle de la main droite :

On place la main droite sur la bobine, le courant électrique sortant par les doigts. Le pouce, écarté des autres doigts, est orienté vers la face Nord : sens du vecteur – champ magnétique.

5) L'appareil de mesure du champ magnétique est le **teslamètre**.

Exercice 2

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	Deux plaques métalliques parallèles et chargées créent un champ magnétique uniforme.		×
2	Un aimant droit crée un champ magnétique uniforme.		×
3	Le champ magnétique créé par les bobines d'Helmholtz est uniforme dans l'espace situé entre ces bobines.	×	
4	Le champ magnétique créé par un solénoïde est uniforme même à l'extérieur du solénoïde.		×
5	Le champ magnétique terrestre est uniforme dans un espace limité.	×	
6	L'unité de champ magnétique est le tesla.	×	

Exercice 3

La Terre ; la bobine d'Helmholtz; un aimant droit ; un aimant en U ; une aiguille aimantée ; un fil conducteur de courant électrique ; un solénoïde.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A.N : \omega_0 = \sqrt{\frac{100}{0,25}} ; \omega_0 = 20 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$x(t) = 0,15\cos(20t + \pi) \text{ et } v(t) = -3 \sin(20t + \pi)$$

Exercice 4

(2)

Exercice 5

Toute bobine parcourue par un courant électrique est source de champ magnétique. Ce champ est **uniforme** si la longueur de la bobine est au moins **supérieure** à dix fois le rayon. Dans ce cas, **les lignes de champ** à l'intérieur de la bobine sont **parallèles** entre elles, à l'axe de la bobine et **orientées** de la face sud vers la face nord. Le nom des faces d'une bobine **dépend du sens** du courant électrique dans ses spires.

Exercice 6

- 1) (b) 2) (a) 3) (c)

Exercice 7

- 1) Parcours par un courant électrique, une bobine se comporte comme un aimant.
- 2) Si les lignes de champ d'un champ magnétique sont parallèles entre elles alors ce champ magnétique est uniforme.
- 3) Les lignes de champ d'un champ magnétique ne se coupent jamais.
- 4) Une bobine ne peut créer un champ magnétique que si elle est parcourue par un courant électrique.
- 5) La valeur du champ magnétique créé par un solénoïde est proportionnelle au nombre de spires et à l'intensité du courant électrique dans ses spires.

Exercice 8

- 1) Dans un champ magnétique uniforme, les lignes de champ **sont parallèles entre elles**.
- 2) **Un champ magnétique uniforme** règne dans l'espace situé dans l'entre-fer d'un aimant en U.
- 3) L'expression $B = \mu_0 n I$ permet de déterminer **la valeur du champ magnétique** créé par **un solénoïde en son centre**.
- 4) À l'intérieur d'un solénoïde, les lignes de champ **sont parallèles** à son axe et orientées de **la face sud vers la face nord**.
- 5) En un point donné d'un espace champ magnétique, les lignes de champ **sont tangentes** au vecteur - champ magnétique $\vec{B}$.

Exercice 9

- 1) Les pôles des aimants :

- 2.1) Valeur du champ résultant $\vec{B}_r$.

$\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ étant orthogonaux, on a :

$$B_r^2 = B_1^2 + B_2^2 ; B_r = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}.$$

$$\text{A.N : } B_r = \sqrt{(4,5 \cdot 10^{-4})^2 + (1,5 \cdot 10^{-4})^2} ;$$

$$B_r = 4,74 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

- 2.2) Détermination de la direction de l'aiguille aimantée placée au point O par rapport à la verticale.

Soit α l'angle formé par la direction de l'aiguille aimantée et la verticale

$$\tan \alpha = \frac{B_2}{B_1} . \text{ A.N : } \tan \alpha = \frac{1,5}{4,5} = \frac{1}{3} ; \alpha = 18,4^\circ .$$

Exercice 10

- 1) Le nombre de spires par mètre du solénoïde :

$$n = \frac{B}{\mu_0 I} ; \text{ A.N : } n = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 2,5} ;$$

$$n = 3\,820 \text{ spires/mètre.}$$

- 2) Le nombre de spires du solénoïde :

$$N = n \times \ell ; \text{ A.N : } N = 3820 \times 0,8 ;$$

$$N = 3056 \text{ spires.}$$

- 3) L'intensité I' du courant électrique dans les spires du solénoïde :

$$I' = \frac{B}{\mu_0 n} ; \text{ A.N : } I' = \frac{24 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 3820} ;$$

$$I' = 5 \text{ A}$$

Exercice 11

- 1) Les noms des faces du solénoïde (voir schéma).

- 2) Représentation :

- 2.1) du sens du courant dans les spires (voir schéma).

2.2) du vecteur - champ magnétique $\vec{B}$ au point O situé à l'intérieur du solénoïde ;

2.3) de quelques lignes de champ magnétique (voir schéma).

Exercice 12

1)

1.1) Le nombre n de spires par unité de longueur :

$$n = \frac{N}{\ell} . \text{ Or } \ell = 2r \times N ; n = \frac{N}{2r \times N} = \frac{1}{2r} .$$

$$\text{A.N. : } n = \frac{1}{2r \times 0,4 \cdot 10^{-3}} ;$$

$$n = 1250 \text{ spires/mètre.}$$

1.2) La longueur L de fil conducteur utilisé pour réaliser l'enroulement :

$$L = d \times \pi \times N = d \times \pi \times n \times \ell .$$

$$\text{A.N. : } L = 4 \cdot 10^{-2} \times \pi \times 1250 \times 0,5 ; L = 78,5 \text{ m.}$$

2) L'intensité I du courant nécessaire pour créer un champ d'intensité $B = 5 \text{ mT}$:

$$I = \frac{B}{\mu_0 n} . \text{ A.N. : } I = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 1250} ;$$

$$I = 3,2 \text{ A.}$$

Exercice 13

1) Expression de B en fonction de μ_0 ; I ; ℓ et N :

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I .$$

2) Calcul du nombre N de spires du solénoïde :

$$N = \frac{B \times \ell}{\mu_0 I} .$$

$$\text{A.N. : } N = \frac{5 \cdot 10^{-3} \times 0,4}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 1,5} ;$$

$$N = 1\,061 \text{ spires.}$$

3) Le nombre de couches de spires disposé sur le solénoïde :

Soient N_1 le nombre de spires sur une couche

et n_{couches} le nombre total de couches.

$$\text{On a : } N = n_{\text{couches}} \times N_1 \text{ et } N_1 = \frac{\ell}{2r} ;$$

$$n_{\text{couches}} = \frac{N}{N_1} = \frac{N \times 2r}{\ell} .$$

$$\text{A.N. : } n_{\text{couches}} = \frac{1061 \times 2 \times 10^{-3}}{0,4}$$

$$n_{\text{couches}} = 5 \text{ couches.}$$

Exercice 14

1) Un solénoïde est une bobine longue dont la longueur est au moins supérieure à dix fois le rayon.

2) On a : $\ell = 40 \text{ cm}$ et $10 r = 5d = 5 \times 2,5 \times 12,5 \text{ cm}$. On constate que : $\ell > 10 r$, donc cette bobine est un solénoïde.

3) Représentation du champ magnétique $\vec{B}$ au centre de la bobine.

4) Le nom des faces de la bobine (voir schéma).

5) La valeur du champ magnétique à l'intérieur de la bobine :

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I .$$

$$\text{A.N. : } B = 4\pi \cdot 10^{-7} \times \frac{1000}{0,4} \times 0,1 ;$$

$$B = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Exercice 15

1) Courbe $B = f(I)$:

2) La courbe obtenue est une portion de droite qui passe par l'origine du repère. B et I sont donc proportionnels.

3) Détermination graphique du coefficient de proportionnalité k :

$$k = \frac{\Delta B}{\Delta I} ; k = \frac{5,5 \times 10^{-3}}{6 \times 0,5} ;$$

$$k = 1,83 \cdot 10^{-3} \text{ T} \cdot \text{A}^{-1}$$

4) La valeur du nombre n de spires par unité de longueur du solénoïde :

$$B = k \cdot I . \text{ Or } B = \mu_0 n I . \text{ Donc } : \mu_0 n = k ;$$

$$n = \frac{k}{\mu_0} ; \text{ A.N : } n = \frac{1,83 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7}} .$$

$$n = 1458 \text{ spires/mètre}$$

Exercice 16

1) Le champ magnétique créé au point où se trouve l'aiguille aimantée lorsqu'il n'y a pas de courant dans les spires du solénoïde est le champ magnétique terrestre.

2) L'aiguille aimantée dévie lorsque le solénoïde est parcouru par un courant parce qu'elle prend la direction du champ magnétique résultant.

3) Représentation qualitative des champs magnétiques en O :

4)

4.1) Détermination de B et de B₀.

$$\cos \alpha = \frac{B_h}{B} ; B = \frac{B_h}{\cos \alpha} .$$

$$\text{A.N : } B = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{\cos 30^\circ} ; B = 2,89 \cdot 10^{-5} \text{ T} .$$

$$\tan \alpha = \frac{B_0}{B_h} ; B_0 = B_h \tan \alpha .$$

$$\text{A.N : } B_0 = 2,5 \cdot 10^{-5} \tan 30^\circ ; B_0 = 1,44 \cdot 10^{-5} \text{ T} .$$

4.2) Détermination de la nouvelle valeur de l'angle α pour une intensité I' du courant telle que I' = 2I.

$$\text{Pour } I' = 2I, B_0' = 2B_0 ; \tan \alpha' = \frac{B_0'}{B_h} = \frac{2B_0}{B_h} .$$

$$\text{A.N : } \tan \alpha' = 2 \times \tan 30^\circ ; \alpha' = 49^\circ$$

Exercice 17

$$1) B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I .$$

2) Tracé de la courbe B₀ = f(I) :

3) Détermination graphique du coefficient directeur :

$$k = \frac{\Delta B}{\Delta I} = \frac{4,9 \times 0,2}{3 \times 0,2} = 1,63 \text{ mT} \cdot \text{A}^{-1}$$

$$= 1,63 \cdot 10^{-3} \text{ T} \cdot \text{A}^{-1} .$$

4) Le nombre N de spires de la bobine :

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I ; \mu_0 \frac{N}{\ell} = k . N = \frac{k \ell}{\mu_0} .$$

$$\text{A.N : } N = \frac{1,63 \cdot 10^{-3} \times 0,25}{4\pi \cdot 10^{-7}} ; N = 325 \text{ spires}$$

Exercice 18

1) Les éléments nécessaires à la réalisation de cette expérience sont : un ampèremètre ; un rhéostat ; un bouton poussoir ; un générateur de courant continu ; un teslamètre et le solénoïde.

2) Construction de la courbe B = f(I) :

3) La courbe obtenue est une portion de droite qui passe par l'origine du repère. Donc la valeur de B du champ magnétique est proportionnelle à l'intensité I du courant.

4)

4.1) Détermination du coefficient de proportionnalité k :

$$k = \frac{\Delta B}{\Delta I} = \frac{3,6 \times 0,5}{5,8 \times 0,5} = 0,62 \text{ mT.A}^{-1}$$

$$= 6,2 \cdot 10^{-4} \text{ T.A}^{-1}.$$

4.2) Détermination de la perméabilité du vide μ_0 .

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I ; \mu_0 \frac{N}{\ell} = k. \mu_0 = \frac{k\ell}{N}.$$

$$\mu_0(\text{exp}) = \frac{6,2 \cdot 10^{-4} \times 0,4}{200} ;$$

$$\mu_0(\text{exp}) = 12,4 \cdot 10^{-7} \text{ (S.I.)}$$

Leçon

2

Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

IV. Exercices

Exercice 1

Exercice 2

(4)

Exercice 3

N°	Propositions	Vrai	Faux
1	Dans un champ magnétique uniforme, une particule chargée en mouvement décrit toujours une trajectoire circulaire.		×
2	La force subie par une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique uniforme accélère cette particule.		×
3	La force de Lorentz qui s'exerce sur une particule de charge q négative a pour expression : $\vec{f} = -q\vec{v} \wedge \vec{B}$		×
4	La direction de la force de Lorentz $\vec{f}$ qui s'exerce sur une particule est perpendiculaire aux directions du vecteur - champ magnétique $\vec{B}$ et du vecteur - vitesse $\vec{v}$ de la particule.	×	
5	Le sens de la force de Lorentz dépend uniquement du signe de la charge portée par la particule qui subit cette force.		×
6	Dans un spectrographe de masse, les isotopes qui ont les masses les plus grandes décrivent les arcs de cercle de plus grands rayons.	×	

Exercice 4

(3)

Exercice 5

(3)

Exercice 6

Une particule de charge q qui entre dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ animée d'une vitesse v subit une force $\vec{f}$ d'origine magnétique. Cette force appelée **force de Lorentz ou force magnétique** a pour expression $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Sa **direction** est **perpendiculaire** au plan défini par $\vec{v}$ et $\vec{B}$. Son **sens** est tel que le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{f})$ soit direct. L'expression $f = |q| \cdot v \cdot B \cdot |\sin(\vec{v}, \vec{B})|$ permet de déterminer **sa valeur**. La **trajectoire** décrite par la particule dans le champ $\vec{B}$ dépend de l'angle formé par $\vec{v}$ et $\vec{B}$. Son mouvement est **circulaire** si cet angle vaut $\frac{\pi}{2}$.

Exercice

7

Filtre de Wien
Spectromètre de masse
Cyclotron

- Trie les particules en fonction de leurs masses.
- Accélère les particules.
- Trie les particules en fonction du signe de leurs charges.
- Trie les particules en fonction de leurs vitesses.

Exercice

8

- 1) Une force magnétique s'exerce sur toute particule chargée en mouvement dans un **champ magnétique**.
- 2) Une particule qui entre avec une vitesse v dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, effectue un **mouvement circulaire et uniforme** si $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{B}$.
- 3) Dans un cyclotron formé de deux « Dees », la vitesse d'une particule **augmente** lorsqu'elle passe de l'un des deux « Dees » à l'autre.
- 4) Dans un cyclotron, l'énergie cinétique d'une particule **reste constante** entre son entrée et sa sortie d'un même « Dee ».
- 5) Le rayon de la trajectoire circulaire d'une particule dans un champ magnétique est **proportionnel** à sa masse et à sa vitesse.

Exercice

9

La valeur de la force de Lorentz appliquée à l'ion He^{2+} est donnée par l'expression :

$$f = |q|v_0 B |\sin(\vec{v}_0, \vec{B})| = 2e v_0 B |\sin(\vec{v}_0, \vec{B})|$$

Cas 1 : Lorsque $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ sont colinéaires, l'angle entre $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ est nul ou plat.

Donc $\sin(\vec{v}_0, \vec{B}) = 0$. D'où $f = 0$ N.

Cas 2 : Lorsque $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$, l'angle entre $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ est égal à 90° . Donc $\sin(\vec{v}_0, \vec{B}) = 1$;

$$f = 2e v_0 B.$$

$$\text{A.N : } f = 2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 2 \cdot 10^4 \times 0,5 ; f = 3,2 \cdot 10^{-15} \text{ N.}$$

Cas 3 : Lorsque $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ font un angle $\theta = 120^\circ$,

$$f = 2e v_0 B |\sin\theta| = f = 2e v_0 B |\sin 120^\circ|$$

$$\text{A.N : } f = 2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 2 \cdot 10^4 \times 0,5 \times |\sin 120^\circ| ;$$

$$f = 2,77 \cdot 10^{-15} \text{ N.}$$

Exercice

10

1)

1.1) Le proton est soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{F}_m = e \vec{v}_0 \wedge \vec{B}.$$

La puissance de $\vec{F}_m$ est :

$$P = \vec{F}_m \cdot \vec{v}_0 = (e \vec{v}_0 \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_0 = 0 \text{ W.}$$

Donc l'énergie cinétique du proton est constante. D'où sa vitesse est constante.

$$1.2) \vec{F}_m = e \vec{v}_0 \wedge \vec{B} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{e}{m} \vec{v}_0 \wedge \vec{B} ;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{k} = \left(\frac{e}{m} \vec{v}_0 \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{k} = 0$$

car $\vec{B}$ est colinéaire à $\vec{k}$.

Donc $a_z = \ddot{z} = 0$; $v_z = a_z t + v_{0z} = 0$; $z = z_0 =$ constante.

Donc la trajectoire du proton est plane.

1.3) Appliquons le théorème du centre d'inertie dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{F}_m = e \vec{v}_0 \wedge \vec{B} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{e}{m} \vec{v}_0 \wedge \vec{B}.$$

$\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{v}_0$ et à $\vec{B}$.

$$\text{Donc } \vec{a} = \vec{a}_n \text{ et } \vec{a}_\tau = \vec{0}.$$

D'où $a = a_n = \frac{v_0^2}{\rho} = \frac{e}{m} v_0 B$; $\rho = \frac{m v_0}{e B} =$ constante. Donc la trajectoire est circulaire.

2) Détermination du rayon R de la trajectoire du proton :

$$R = \frac{m v_0}{e B} ; \text{A.N : } R = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \times 2 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 2 \cdot 10^{-2}} ;$$

$$R = 0,10 \text{ m ou } R = 10 \text{ cm.}$$

Exercice 11

1) La vitesse finale est atteinte lorsque les protons décrivent une trajectoire dont le rayon r est égal à celui du cyclotron R_m .

$$v_{\text{finale}} = R_m \cdot \omega = R_m \times 2\pi n.$$

$$\text{A.N. : } v_{\text{finale}} = 0,4 \times 2\pi \times 12 \cdot 10^6 ; v_{\text{finale}} = 3 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}.$$

2) L'énergie cinétique finale est donnée par l'expression :

$$E_{c\text{finale}} = \frac{mv_{\text{finale}}^2}{2}.$$

$$\text{A.N. : } E_{c\text{finale}} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^7)^2}{2} ;$$

$$E_{c\text{finale}} = 7,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}.$$

3) À chaque passage (2 par tour) dans le champ électrostatique, les protons reçoivent une énergie qU .

Le nombre de passages s s'obtient par l'expression :

$$n = \frac{E_{c\text{finale}}}{qU} = \frac{E_{c\text{finale}}}{e \cdot U}.$$

$$\text{A.N. : } n = \frac{7,6 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,5 \cdot 10^5} ; n = 32 \text{ tours}.$$

Exercice 12

1) Les forces extérieures qui s'exercent sur une particule dans cet espace :

- la force électrostatique $\vec{F}_e = q \vec{E}$

- la force de Lorentz : $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

2) Représentation de ces forces :

3) Expression de v_0 en fonction de B et E :

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = \vec{0} ; q v_0 \wedge \vec{B} + q \vec{E} = \vec{0} ;$$

$$\vec{v}_0 \wedge \vec{B} + \vec{E} = \vec{0} ; v_0 B = E ; v_0 = \frac{E}{B}$$

4) Déviation des particules :

4.1) de vitesse $v_1 < v_0$:

$$qv_1 < qv_0 ; qv_1 B < qv_0 B ; qv_1 B < q \frac{E}{B} B ;$$

$qv_1 B < qE$. Donc $F_m < F_e$: Ces particules sont déviées dans le sens de $\vec{F}_e$.

4.2) de vitesse $v_2 > v_0$:

$$qv_2 > qv_0 ; qv_2 B > qv_0 B ; qv_2 B > q \frac{E}{B} B ;$$

$qv_2 B > qE$; Donc $F_m > F_e$: Ces particules sont déviées dans le sens de $\vec{F}_m$.

5) Calcul de la valeur de v_0 :

$$v_0 = \frac{E}{B} = \frac{U}{Bd}. \text{ A.N. : } v_0 = \frac{100}{0,2 \times 10^{-2}} ; v_0 = 5 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}.$$

6) Ce dispositif est un filtre de vitesse.

Exercice 13

1) La force responsable de la déviation des ions vers le détecteur D est la force de Lorentz.

2) Le champ magnétique $\vec{B}$ n'a aucun effet sur les ions, si leur vitesse initiale en O est nulle.

3) Le champ magnétique $\vec{B}$ doit être sortant pour que les ions soient déviés vers le détecteur D.

4) Dans le champ magnétique $\vec{B}$, chaque ion est soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{F}_m = e \vec{v} \wedge \vec{B}.$$

La puissance de $\vec{F}_m$ est : $P = \vec{F}_m \cdot \vec{v}$

$$= (e \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \text{ W}.$$

Donc l'énergie cinétique du proton est constante.

D'où sa vitesse est constante.

$$\vec{F}_m = e \vec{v} \wedge \vec{B} = m \vec{a} \cdot \vec{a} = \frac{e}{m} \vec{v} \wedge \vec{B} ;$$

$\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$.

$$\text{Donc } \vec{a} = a_n \vec{e}_t \text{ et } \vec{a}_\tau = \vec{0}.$$

$$\text{D'où } a = a_n = \frac{v}{\rho} = \frac{e}{m} v B ;$$

$$\rho = \frac{mv}{eB} = \text{constante}.$$

Donc la trajectoire est circulaire.

Les ions ont donc un mouvement circulaire et uniforme dans le champ magnétique B .

5) Expression du rayon R de la trajectoire d'un ion en fonction de e , v , B et de sa masse m :

$$R = \frac{mv}{2eB}.$$

6) L'ion qui va être le plus dévié est l'ion qui a

la plus grande masse : $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$.

7) La distance qui sépare les points d'impact de ces deux ions sur le détecteur D :

$$d = 2R_2 - 2R_1 = \frac{2m_2 v}{2eB} - \frac{2m_1 v}{2eB}$$

$$= \frac{v}{eB} (m_2 - m_1) = \frac{vU}{eB} (202 - 200) = \frac{2vU}{eB}$$

$$\text{A.N.} : d = \frac{2 \times 1,67.10^{-27} \times 5.10^4}{1,6.10^{-19} \times 10^{-1}} ;$$

$$d = 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm.}$$

7) Ce dispositif joue le rôle d'un spectrographe de masse.

Exercice 14

1)

1.1) Entre les plaques (P_1) et (P_2), les ions sont soumis à la force électrostatique.

1.2) Dans le champ magnétique $\vec{B}$, les ions sont soumis à la force de Lorentz.

2) Expression vectorielle de chacune de ces forces :

$$\text{Force électrostatique } \vec{F}_e = q \vec{E} = e \vec{E}$$

$$\text{Force de Lorentz } : \vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} = e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

3) Expressions littérales des vitesses v_1 et v_2 des deux ions en O_2 en fonction de U , q et de leurs masses respectives m_1 et m_2 :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre O_1 et O_2 pour un ion quelconque :

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = q (V_{P_1} - V_{P_2}) = qU ;$$

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

$$\text{Donc } v_1 = \sqrt{\frac{2qU}{m_1}} \text{ et } v_2 = \sqrt{\frac{2qU}{m_2}}$$

4) Expressions littérales des rayons R_1 et R_2 de leurs trajectoires en fonction de U , q , B et des masses m_1 et m_2 :

$$\text{Pour un ion quelconque } : R = \frac{mv}{|q|B} = \frac{mv}{qB}$$

$$R = \frac{m}{qB} \times \sqrt{\frac{2eU}{m}} = R = \frac{1}{B} \times \sqrt{\frac{2mU}{q}}$$

$$\text{Donc } R_1 = \frac{1}{B} \times \sqrt{\frac{2m_1 U}{q}}$$

$$\text{et } R_2 = \frac{1}{B} \times \sqrt{\frac{2m_2 U}{q}}$$

5) Détermination de la distance $C_1 C_2$:

$$C_1 C_2 = O_2 C_2 - O_2 C_1 = 2R_2 - 2R_1 = 2(R_2 - R_1)$$

$$= \frac{2}{B} \times \sqrt{\frac{2U}{q}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}) .$$

Or $m_2 = 7 \text{ u}$ et $m_1 = 6 \text{ u}$.

A.N. :

$$C_1 C_2 = \frac{2}{0,2} \times \sqrt{\frac{2 \times 10^4 \times 1,67.10^{-27}}{1,6.10^{-19}}} (\sqrt{7} - \sqrt{6}) ;$$

$$C_1 C_2 = 0,03 \text{ m ou } C_1 C_2 = 3 \text{ cm}$$

Exercice 15

1) Les forces extérieures appliquées à un ion K^+ :

1.1) dans la chambre d'accélération : Force électrostatique : $\vec{F}_e = q \vec{E} = e \vec{E}$.

1.2) dans la chambre de déviation : Force de Lorentz $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} = e \vec{v} \wedge \vec{B}$.

2) Expressions des vitesses v_1 et v_2 des ions $^{41}_{19}K^+$ et $^{42}_{19}K^+$ en O_2 , en fonction de v et e de leurs masses m_1 et m_2 respectivement :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre O_1 et O_2 pour un ion quelconque :

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = q (V_{P_1} - V_{P_2}) = eU ;$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$\text{Donc } v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}} \text{ et } v_2 = \sqrt{\frac{2eU}{m_2}}$$

3)

3.1) La force de Lorentz responsable de la déviation des ions vers le collecteur doit être dirigée vers le collecteur. Comme les ions sont chargés positivement, le champ magnétique $\vec{B}$ doit être sortant pour qu'ils puissent atteindre le collecteur.

3.2) La nature du mouvement des ions :

Appliquons le théorème du centre d'inertie :

$$\vec{F}_m = m \vec{a} ; e \vec{v} \wedge \vec{B} = m \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{e}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$. Donc $\vec{a} = \vec{a}_n$;
 $a_\tau = 0$; $\frac{dv}{dt} = a_\tau = 0$. Donc $v = \text{constante}$:
 le mouvement de la particule est uniforme.

3.3) La nature de la trajectoire des ions :

$a = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{e}{m} v B$. $\rho = \frac{mv}{eB} = \text{constante}$: la trajectoire est circulaire.

4)

4.1) Expressions des rayons R_1 et R_2 des trajectoires des ions ${}^{A_1}_{19}\text{K}^+$ et ${}^{A_2}_{19}\text{K}^+$ en fonction de e , U ; B et de leurs masses respectives m_1 et m_2 :

$$R = \frac{mv}{eB} \quad R = \frac{m}{eB} \times \sqrt{\frac{2eU}{m}} ;$$

$$R = \frac{1}{B} \times \sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

$$\text{Donc } R_1 = \frac{1}{B} \times \sqrt{\frac{2m_1 U}{e}}$$

$$\text{et } R_2 = \frac{1}{B} \times \sqrt{\frac{2m_2 U}{e}}$$

4.2) Expression du rapport $\frac{A_1}{A_2}$ en fonction des rayons R_1 et R_2 :

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{A_1 u}{A_2 u}} = \sqrt{\frac{A_1}{A_2}}$$

$$\text{Donc } \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$$

Exercice 16

1)

1.1) La tension $U_1 = V_{A_1} - V_{C_1}$ est négative car V_{C_1} doit être supérieur à V_{A_1} pour que les ions soient accélérés entre O et O_1 .

1.2) Dans la chambre (2), les ions sont soumis à la force électrostatique dirigée vers le bas et à la force de Lorentz qui doit être dirigée vers le haut pour permettre leur sortie en O_2 . Donc $\vec{B}_2$ est rentrant.

Dans la chambre (3), les ions sont soumis à la force de Lorentz qui dévie leur trajectoire vers le haut.

Donc le vecteur - champ magnétique $\vec{B}_3$ est rentrant.

2)

2.1) Représentation du vecteur champ électrostatique $\vec{E}_1$ (voir schéma).

2.2) Représentation des vecteurs - champs magnétiques $\vec{B}_2$ et $\vec{B}_3$ (voir schéma).

2.3) Représentation des forces qui s'exercent sur un ion Ne^+ dans le sélecteur de vitesse (2) (voir schéma).

3)

3.1) Énergie cinétique des ions ${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$ et ${}^{22}_{10}\text{Ne}^+$ en O_1 :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre O et O_1 :

$$E_c(O_1) - 0 = 2e(V_{A_1} - V_{C_1}) = -2e U_1$$

Donc $E_c(O_1) = -2e U_1$ pour un ion quelconque arrivant en O_1 . Les ions ${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$ et ${}^{22}_{10}\text{Ne}^+$ ont la même énergie cinétique en O_1 ;

3.3) dans la chambre (3), le mouvement des ions ${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$ et ${}^{22}_{10}\text{Ne}^+$ est circulaire et uniforme.

4)

4.1) Détermination de la vitesse v_1 de l'isotope

${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$ en O_1 :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = -2e U_1 ; v_1 = \sqrt{\frac{-2eU_1}{m_1}}$$

$$\text{A.N. : } v_1 = \sqrt{\frac{-2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times (-2 \cdot 10^3)}{3,34 \cdot 10^{-26}}}$$

$$v_1 = 1,38 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

4.2) Détermination de la tension

$$U_2 = V_{A_2} - V_{C_2} :$$

$$F_e = F_m \text{ pour les ions } {}^{20}_{10}\text{Ne}^+ \cdot eE_2 = e v_1 B_2 ;$$

$$E_2 = v_1 B_2 ; \frac{U_2}{d} = v_1 B_2 ; U_2 = v_1 B_2 d$$

$$\text{A.N. : } U_2 = 1,38 \cdot 10^5 \times 0,02 \times 0,1 ; U_2 = 276 \text{ V}$$

4.3) Détermination de la valeur de $\vec{B}_3$:

$$R_1 = \frac{m_1 v_1}{eB_3} ; B_3 = \frac{m_1 v_1}{eR_1}$$

$$\text{A.N. : } B_3 = \frac{3,34 \cdot 10^{-26} \times 1,38 \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 5 \cdot 10^{-2}} ; B_3 = 0,58 \text{ T}$$

Exercice 17

1)

1.1) Les ions ${}^{84}_{38}\text{Sn}^{2+}$ et ${}^X_{38}\text{Sn}^{2+}$ chargés positivement sont accélérés entre P_1 et P_2 . Donc la force électrostatique qu'ils subissent et le vecteur - champ électrostatique $\vec{E}$ sont dirigés de P_1 vers P_2 .

D'où $V_{P_1} > V_{P_2}$. $U = V_{P_2} - V_{P_1}$ est par conséquent négative.

1.2) Les ions parviennent en A et C si la force de Lorentz qu'ils subissent à l'entrée du compartiment (III) est dirigée de O vers A. Comme ils sont chargés positivement, le champ magnétique $\vec{B}$ doit être sortant.

2) Détermination de la vitesse v_1 acquise par un ion ${}^{84}_{38}\text{Sn}^{2+}$ en O_2 :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre O_1 et O_2 :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = 2e(V_{P_1} - V_{P_2}) = -2eU ;$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{-4eU}{m_1}} .$$

$$\text{A.N : } v_1 = \sqrt{\frac{-4 \times 1,66 \cdot 10^{-27} \times (-10^3)}{84 \times 1,66 \cdot 10^{-27}}} ;$$

$$v_1 = 6,8 \cdot 10^4 \text{ m.s}^{-1}$$

3)

3.1) Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre O_1 et O_2 pour un ion quelconque :

$$E_c(O_2) - 0 = 2e(V_{P_1} - V_{P_2}) = -2eU .$$

Donc $E_c(O_2) = -2eU$, les ions ${}^{84}_{38}\text{Sn}^{2+}$ et ${}^X_{38}\text{Sn}^{2+}$ ont la même énergie cinétique à leur passage en O_2 .

$$3.2) \text{ On a : } \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = -2eU = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 ;$$

$$m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2 .$$

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} ; v_2 = v_1 \sqrt{\frac{84u}{xu}} .$$

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{84}{x}}$$

3.3) Nature du mouvement des ions dans $\vec{B}$:

Considérons un ion de masse m et de vecteur - vitesse $\vec{v}$ dans $\vec{B}$. Appliquons le théorème

du centre d'inertie : $\vec{F}_m = m \vec{a}$; $2e \vec{v} \wedge \vec{B} = m \vec{a}$.

$\vec{a} = \frac{2e}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}$. Alors $\vec{a}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$.

Donc $\vec{a} = a_n$; $a_\tau = 0$; $\frac{dv}{dt} = a_\tau = 0$.

$v = \text{constante}$: le mouvement est uniforme.

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{2evB}{m} .$$

$R = \frac{mv}{2eB} = \text{constante}$: la trajectoire est circulaire.

Le mouvement des ions dans $\vec{B}$ est circulaire et uniforme.

3.4) Montrons que : $AC = d = \frac{uv_1}{eB} \sqrt{84x} - 84$.

On a : $AC = OC - OA = 2R_2 - 2R_1 = 2(R_2 - R_1)$;

$$2 \left(\frac{m_2 v_2}{2eB} - \frac{m_1 v_1}{2eB} \right) = \frac{1}{eB} \left(x u v_1 \sqrt{\frac{84}{x}} - 84 u v_1 \right)$$

Donc $AC = d = \frac{u v_1}{eB} \left(x \sqrt{\frac{84}{x}} - 84 \right)$;

$$AC = d = \frac{u v_1}{eB} (\sqrt{84x} - 84) .$$

4) La valeur de x :

$$x = \frac{\left(84 + \frac{eBd}{u v_1} \right)^2}{84} .$$

$$\text{A.N : } x = \frac{\left(84 + \frac{1,66 \cdot 10^{-19} \times 0,3 \times 7 \cdot 10^{-3}}{1,66 \cdot 10^{-27} \times 6,8 \cdot 10^4} \right)^2}{84} ;$$

$$x = 90 .$$

Exercice 18

1)

1.1) La force appliquée aux ions entre les deux demi-cylindres est la force électrostatique.

1.2) La force appliquée aux ions dans chaque demi-cylindre est la force de Lorentz.

2)

2.1) Nature du mouvement des ions entre les deux-demi cylindres : le champ électrostatique accélère le mouvement des ions entre les

deux demi-cylindres. Leur mouvement est donc rectiligne et accéléré.

2.2) Nature du mouvement des ions dans chaque demi-cylindre : les ions entrent dans le champ magnétique avec un vecteur - vitesse $\vec{v}$ orthogonal à $\vec{B}$. Ils décrivent un mouvement circulaire et uniforme.

3)

3.1) Détermination de l'énergie cinétique et de la vitesse des ions à leur première arrivée en D_2 .

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre D_1 et D_2 :

$$E_{C_2} - 0 = qU. \quad E_{C_2} = qU.$$

$$\text{A.N : } E_{C_2} = 3,2 \cdot 10^{-19} \times 10^5; \quad E_{C_2} = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ J.}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = E_{C_1}; \quad v_1 = \sqrt{\frac{2E_{C_1}}{m}}.$$

$$\text{A.N : } v_1 = \sqrt{\frac{2 \times 3,2 \cdot 10^{-14}}{3,3 \cdot 10^{-27}}}; \quad v_1 = 4,4 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}.$$

3.2) Détermination du rayon R_1 de leur trajectoire :

$$R_1 = \frac{m v_1}{q |B|}.$$

$$\text{A.N : } R_1 = \frac{3,3 \cdot 10^{-27} \times 4,4 \cdot 10^6}{3,2 \cdot 10^{-19} \times 1};$$

$$R_1 = 0,0454 \text{ m}; \quad R_1 = 4,54 \text{ cm}$$

3.3) Détermination de l'énergie cinétique et de la vitesse v_2 des ions lorsqu'ils ressortent de D_2 et qu'ils entrent dans D_1 .

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre D_2 et D_1 :

$$E_{C_2} - E_{C_1} = qU. \quad E_{C_2} = qU + E_{C_1} = 2qU.$$

$$\text{A.N : } E_{C_2} = 2 \times 3,2 \cdot 10^{-19} \times 10^5; \quad E_{C_2} = 6,4 \cdot 10^{-14} \text{ J.}$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = E_{C_2};$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2E_{C_2}}{m}}. \quad \text{A.N : } v_2 = \sqrt{\frac{2 \times 6,4 \cdot 10^{-14}}{3,3 \cdot 10^{-27}}};$$

$$v_2 = 6,23 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}.$$

3.4) Expression du rayon R_2 de leur trajectoire dans D_1 en fonction de R_1 :

$$R_2 = \frac{m v_2}{q |B|} \quad \text{et} \quad R_1 = \frac{m v_1}{q |B|};$$

$$R_2 = R_1 \frac{v_2}{v_1}. \quad \text{Or} \quad \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{C_1} \text{ et}$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = E_{C_2} = 2 E_{C_1}; \quad \frac{v_2^2}{v_1^2} = 2; \quad \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{2}$$

$$R_2 = R_1 \sqrt{2}.$$

3.5) Expression du rayon de la trajectoire en fonction de n (le nombre de passages entre D_1 et D_2) et de R_1 :

$$R_n = \frac{m v_n}{q |B|} \quad \text{et} \quad R_1 = \frac{m v_1}{q |B|}. \quad \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{C_1} \text{ et}$$

$$\frac{1}{2} m v_n^2 = E_{C_n} = n E_{C_1}; \quad \frac{v_n^2}{v_1^2} = n; \quad \frac{v_n}{v_1} = \sqrt{n}$$

$$R_n = R_1 \sqrt{n}.$$

4)

4.1) Détermination du nombre de tours décrit par les ions à la sortie :

La valeur maximale du rayon est $R = 50 \text{ cm}$.

$$\text{À la sortie, } R_1 \sqrt{n} = R. \quad n = \frac{R^2}{R_1^2}.$$

$$\text{A.N : } n = \left(\frac{50}{4,54} \right)^2;$$

$$n = 122 \text{ tours.}$$

4.2) Détermination de l'énergie cinétique finale :

$$E_C (\text{finale}) = n q U;$$

$$\text{A.N : } E_C (\text{finale}) = 122 \times 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ J.}$$

$$E_C (\text{finale}) = 3,9 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Exercice 19

1)

1.1) Le vecteur-champ électrostatique de $\vec{E}$ est orienté de (P_2) vers (P_1) : sens des potentiels décroissants et sens contraire de la force électrostatique.

1.2) Le vecteur-champ magnétique $\vec{B}$ est rentrant car la force de Lorentz doit être dirigée de O_2 vers le bas.

2) Énergie cinétique des ions en O_2 :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_C - 0 = q(V_{P_1} - V_{P_2}). \quad E_C = -q U_0 = e U_0$$

Tous les ions ont la même énergie cinétique au point O_2 .

3) Nature du mouvement d'un ion dans chacune des chambres (2) et (3) :

Dans la chambre (2), les ions ont un mouvement rectiligne et accéléré.

Dans la chambre (3), les ions ont un mouvement circulaire et uniforme car le vecteur-vitesse est orthogonal au vecteur-champ magnétique.

4) Détermination de la distance qui sépare les deux points d'impact I_1 et I_2 :

$$\text{On a : } I_1 I_2 = O_2 I_2 - O_2 I_1 = 2R_2 - 2R_1 = 2(R_2 - R_1).$$

$$\text{Or } R_1 = \frac{m_1 v_1}{eB} \text{ et } R_2 = \frac{m_2 v_2}{eB}.$$

$$I_1 I_2 = 2 \left(\frac{m_2 v_2}{eB} - \frac{m_1 v_1}{eB} \right) \cdot v_1 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_1}}$$

$$\text{et } v_2 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m_2}}.$$

$$I_1 I_2 = \frac{2}{eB} (\sqrt{2eU_0 m_2} - \sqrt{2eU_0 m_1});$$

$$I_1 I_2 = \frac{2\sqrt{2eU_0}}{eB} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$$

$$I_1 I_2 = \frac{\sqrt{8eU_0}}{eB} (\sqrt{37} - \sqrt{35})$$

A.N :

$$I_1 I_2 = \frac{\sqrt{8 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 1,66 \cdot 10^{-27} \times 500}}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 5 \cdot 10^{-2}} (\sqrt{37} - \sqrt{35})$$

$$I_1 I_2 = 0,0215 \text{ m soit } I_1 I_2 = 2,15 \text{ cm}$$

Leçon

3

Loi de Laplace

IV. Exercices

Exercice 1

1) Expression de la force de Laplace :

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

2) Énoncé la loi de Laplace :

Un conducteur métallique rectiligne dont une portion de longueur ℓ , parcouru par un

courant électrique d'intensité I et placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, est soumis

à l'action de la force électromagnétique $\vec{F}$ appelée force de Laplace telle que :

$\vec{F} = I \vec{\ell} \wedge \vec{B}$ Le vecteur $I \vec{\ell}$ a le même sens que le courant I .

Exercice 2

1) Caractéristiques de la force de Laplace :

- point d'application : milieu de la portion de longueur ℓ ;

- direction : perpendiculaire au plan défini par $I \vec{\ell}$ et $\vec{B}$;

- sens : tel que le trièdre $(I \vec{\ell}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct ;

- valeur : $F = I |\vec{B}| \sin \alpha$ avec $\alpha = (I \vec{\ell}, \vec{B})$

2)

- $\alpha = (I \vec{\ell}, \vec{B}) = 0 \text{ rad}$

- $\alpha = (I \vec{\ell}, \vec{B}) = \pi \text{ rad}$

- $I = 0 \text{ A}$

- $B = 0 \text{ T}$

Exercice 3

Règles d'orientation de la force électromagnétique :

- **La règle du bonhomme d'Ampère** : Ce dernier est allongé sur le courant de manière à être traversé par celui-ci dans le sens pieds-tête en observant la fuite des lignes de force devant lui, son bras gauche tendu indiquant la direction de la force.

- **La règle de la main droite** : La paume de main droite posée sur le solénoïde, les quatre

(04) doigts. Le pouce, écarté des autres doigts, est orienté vers la face Nord donnant le sens du Champ magnétique.

• **La règle des trois doigts de la main droite :**
Si on place le pouce de la main droite dans le

sens du courant, l'index dans le sens des lignes de force du champ magnétique, alors le majeur plié à angle droit nous indique la direction de la force électromagnétique.

Exercice 4

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	La force de Laplace est colinéaire à $\vec{B}$.		×
2	La force de Laplace est orthogonale au fil rectiligne.	×	
3	La force de Laplace qui s'exerce sur une portion rectiligne de conducteur plongée dans un champ magnétique a une valeur maximale lorsque le champ $\vec{B}$ est orthogonal à cette portion rectiligne.	×	
4	La force de Laplace est toujours parallèle au plan formé par le conducteur et le champ.		×
5	La valeur de la force de Laplace est proportionnelle à la longueur de la portion de conducteur plongée dans le champ magnétique.	×	

Exercice 5

Exercice 6

Exercice 10

1) Représentation des forces de Laplace $\vec{F}_i$:

Exercice 7

(c)

Exercice 8

$$F = I \ell B \sin \frac{\pi}{2} = I \ell B$$

$$B = \frac{F}{I \ell}$$

$$AN : B = 0,33 \text{ T}$$

Exercice 9

(b)

2) Valeur de la force :

	a)	b) et d)	c)	e)	f)
$\vec{F}$	$I(\vec{M}_1\vec{N}_1) \wedge \vec{B}$	$I(\vec{M}_2\vec{N}_2) \wedge \vec{B}$	$I(\vec{M}_3\vec{N}_3) \wedge \vec{B}$	$I(\vec{M}_5\vec{N}_5) \wedge \vec{B}$	$I(\vec{M}_6\vec{N}_6) \wedge \vec{B}$
F_i	IdB	$IdB \cdot \cos 30^\circ$	IdB	$2IdB$	$IdB \cdot \cos 60^\circ$
Valeur	0,040 N	0,034 N	0,040 N	0,080 N	0,02 N

Exercice 11

1) $\vec{B}$ est perpendiculaire à la direction du fil :

$$F = I \ell B \sin \frac{\pi}{2} = I \ell B$$

$$AN : F = 0,06 \text{ N}$$

2) $\vec{B}$ fait un angle $\alpha = 45^\circ$ avec la direction du fil :

$$F = I \ell B \sin \frac{\pi}{4}$$

$$AN : F = 0,04 \text{ N}$$

Exercice 12

1) Représentation des forces électromagnétiques

$$\vec{F}_{AC} = I \vec{CA} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_{CD} = I \vec{DC} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{F}_{DE} = I \vec{ED} \wedge \vec{B}$$

2) Composantes des vecteurs forces électromagnétiques.

$$\vec{F}_{AC} \begin{cases} F_{ACx} = IaB \\ F_{ACy} = 0 \end{cases} \quad \vec{F}_{CD} \begin{cases} F_{CDx} = 0 \\ F_{CDy} = -IbB \end{cases}$$

$$\vec{F}_{DE} \begin{cases} F_{DEx} = -IcB \sin \alpha \\ F_{DEy} = -IcB \cos \alpha \end{cases}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{DE}$$

$$\begin{cases} F_x = IaB - IcB \sin \alpha = IB(a - c \cdot \sin \alpha) = 0 \\ F_y = 0 - IbB - IcB \cos \alpha = -IB(b - c \cdot \cos \alpha) = -IdB \end{cases}$$

3) Comparaison des forces $\vec{F}$ et $\vec{F}'$

$$\vec{F}_{AE} = I \vec{EA} \wedge \vec{B} \text{ d'où } F_{AE} = -IdB$$

$$\vec{F}_{AE} \begin{cases} F_{AEx} = 0 \\ F_{AEy} = -IbB \end{cases} \text{ d'où } \vec{F}_{AE} = \vec{F}$$

4) La résultante des forces sur un circuit fermé polygonal.

Pour le circuit fermé EDCAE, le courant circulant dans le sens EDCAE, la force $\vec{F}_{AE}$ exercée sur le côté AE est telle que $\vec{F}'_{AE} = -\vec{F}_{AE}$.

Les trois autres côtés du quadrilatère étant soumis aux forces $\vec{F}_{AC}$, $\vec{F}_{CD}$, $\vec{F}_{DE}$ telles que :

$$\vec{F}' = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{CD} + \vec{F}_{DE} = \vec{F}_{AE} = -\vec{F}'$$

$$\text{d'où } \vec{F} + \vec{F}'_{AE} = 0$$

Pour un circuit polygonal, on généralise ce résultat et on a : $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Exercice 13

$$\vec{F}_{AC} = I \vec{KM} \wedge \vec{B}$$

Relever les points A et C pour rétablir l'équilibre.

1) $\vec{B}$ reste orthogonal aux rails :

La tige KM est soumise à son poids $\vec{P}$ aux réactions $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ des rails et la force de Laplace $\vec{F} = I \ell \wedge \vec{B}$

$$\text{On pose } \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$

$$\text{Condition d'équilibre } \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0} \quad (1)$$

Projection de (1) sur $(O, \vec{i})$: $mg \sin \alpha - F = 0$

$$\sin \alpha = \frac{F}{mg} = \frac{I \ell B}{mg}$$

$$\text{A.N. } \sin \alpha = \frac{4 \times 0,06 \times 0,5}{20 \cdot 10^{-3} \times 10} = 0,6$$

$$\alpha = 36,87^\circ$$

2) $\vec{B}$ reste vertical.

$$\text{Condition d'équilibre } \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$$

Sur $(O, \vec{i})$, On a : $mg \sin \alpha - F \cos \alpha = 0$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{F}{mg} = \frac{I \ell B}{mg} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{I \ell B}{mg}$$

$$\tan \alpha = \frac{4 \times 0,06 \times 0,5}{20 \cdot 10^{-3} \times 10} = 0,6$$

$$\tan \alpha = 0,6 \quad \alpha = 30,96^\circ$$

Exercice 14

1)

1.1) $I = 0, B \neq 0$: pas de déviation

1.2) $I \neq 0, B = 0$: pas de déviation

1.3) $I \neq 0, B \neq 0$: la tige dévie

2) Déviation angulaire de la tige à l'équilibre

Forces s'exerçant sur la tige :

- la force de Laplace : $\vec{F}$
- le poids de la tige : $\vec{P}$
- la réaction de l'axe Λ : $\vec{R}$

À l'équilibre : $\sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = 0$

$$M_{\Delta}(\vec{R}) = 0 ; M_{\Delta}(\vec{F}) = -F \cdot \frac{\ell}{2} ;$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = +P \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{F}{P} = \frac{I \ell B}{P}$$

$$\text{AN : } \sin \alpha = 0,15$$

$$\alpha = 8,6^\circ$$

Exercice 15

1) Le champ magnétique, horizontal et normal au plan de la roue, exerce sur l'élément de courant vertical une force perpendiculaire à la fois au champ et au courant. Autrement dit, si le rayon qui conduit le courant électrique était entièrement libre, la force tendrait à le faire sortir des branches de l'aimant tout en le maintenant dans sa position verticale.

Mais ce rayon étant fixé au centre de la roue, seule son extrémité se déplace et la roue entre en rotation. Tous ses rayons venant successivement au contact du bain de mercure, la roue se maintient en rotation continue.

2) Si le courant traverse le rayon dans l'autre sens, il se déplace toujours perpendiculairement aux lignes de force, mais le disque tourne en sens contraire.

Exercice 16

1)

1.1) Longueur de conducteur situé dans le champ, en fonction de d et α :

Soit ℓ la longueur de conducteur situé dans le champ.

$$\ell = \frac{d}{\cos \alpha}$$

1.2) Force de Laplace : $\vec{F} = I \ell \wedge \vec{B}$

$$F = I \ell B \sin \frac{\pi}{2} = I \ell B$$

1.3) Distance OA en fonction de L et α :

$$OA = \frac{L}{\cos \alpha}$$

2) Valeur B du champ magnétique uniforme $\vec{B}$:

Forces s'exerçant sur la tige :

- la force de Laplace : $\vec{F}$

- le poids de la tige : $\vec{P}$

- la réaction de l'axe de rotation Δ au point O : $\vec{R}$

À l'équilibre : $\sum M_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) = 0$

$$M_{\Delta}(\vec{R}) = 0 ; M_{\Delta}(\vec{F}) = -F \cdot OA ;$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = +P \cdot OG \cdot \sin \alpha$$

$$I \ell B \cdot \frac{L}{\cos \alpha} = mg \cdot OG \cdot \sin \alpha$$

$$I \cdot \frac{d}{\cos \alpha} \cdot B \cdot \frac{L}{\cos \alpha} = mg \cdot OG \cdot \sin \alpha$$

$$B = \frac{mg \cdot OB}{2IdL} \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$AN : B = 0,1 \text{ T.}$$

Exercice 17

1) Valeur F de la force de Laplace qui s'exerce sur le conducteur OP :

$$\text{Force de Laplace : } \vec{F} = I \vec{\ell} \wedge \vec{B} ;$$

$$F = I \ell B \sin \frac{\pi}{2} = I \ell B \text{ où } \ell \text{ représente la longueur de conducteur situé dans le champ ;}$$

$$\ell = ON - OM = 2 \text{ cm}$$

$$AN : F = 6 \text{ mN}$$

2) Angle α que fait le conducteur OP avec la verticale (Δ) :

(voir exercice précédent pour la démarche)

$$F \cdot OA = mg \cdot \frac{OP}{2} \cdot \sin \alpha \text{ et } OA = OM + \ell/2 = 25 \text{ cm}$$

$$\sin \alpha = \frac{2F \cdot OA}{mg \cdot OP} ;$$

$$AN : \sin \alpha = 0,1019$$

$$\alpha \approx 5,8^\circ.$$

Exercice 18

1)

1.1)

	Point A	Point C	Point D
Force de Laplace	$\vec{F} = I \vec{L} \wedge \vec{B}$	$\vec{F}' = I \vec{L} \wedge \vec{B}$	$\vec{F}'' = \vec{0}$
Direction	Perpendiculaire au plan $(\vec{L}, \vec{B})$	Perpendiculaire au plan $(\vec{L}, \vec{B})$	$\times$
Sens	Dirigé vers le haut	Dirigé vers le bas	$\times$

1.2) Action des forces sur la spire.

Le courant circule dans la spire mais dans deux sens opposés de chaque côté de la spire.

Ainsi par interaction avec le champ magnétique créée par le stator, il se crée deux forces de Laplace qui tendent toutes deux à faire tourner la spire dans le même sens.

2) Valeurs des forces de Laplace.

Point A	Point C	Point D
$\vec{F} = I \vec{L} \wedge \vec{B}$	$\vec{F} = I \vec{L} \wedge \vec{B}$	$\vec{F}'' = \vec{0}$
$F = ILB = 0,45 \text{ N}$	$F = ILB = 0,45 \text{ N}$	$F'' = 0$

3) Représentation des forces de Laplace

4) Si on inverse le sens du courant dans la spire, la spire tourne en sens contraire.

Exercice 19

1) Expression de la force de Laplace.

$$\vec{F} = I \vec{H} \wedge \vec{B}$$

2) Représentation

3)

3.1) la valeur de la force Laplace :

$$F = IHB = 2 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

3.2) le travail de cette force en un tour de roue :

$$W(\vec{F}) = M_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \alpha = F \cdot OM \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow W(\vec{F}) = 0,02 \text{ J}$$

4) La puissance du moteur.

$$P_m = M_{\Delta}(\vec{F}) \cdot \omega \text{ avec}$$

$$\omega = \frac{180 \times 2\pi}{60} = 6\pi = 18,85 \text{ rad/s}$$

$$P_m = F \cdot OM \cdot \omega \Rightarrow P_m = 0,056 \text{ W}$$

Exercice 20

1) Énoncé de la loi de Laplace :

Un conducteur métallique rectiligne dont une portion de longueur l , parcouru par un courant électrique d'intensité I et placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, est soumis à l'action de la force électromagnétique $\vec{F}$ appelée force de Laplace telle que :

$\vec{F} = I\vec{l} \wedge \vec{B}$ Le vecteur $\vec{l}$ a le même sens que le courant I .

2.1) les forces qui s'exercent sur le dispositif à l'équilibre :

– Sur les portions MM' , MN et NN' s'exercent les forces électromagnétiques $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$

Les supports de $\vec{F}_1, \vec{F}_3$ passent par l'axe de rotation (Δ)

$$\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{F}_1) = M_{\Delta}(\vec{F}_3) = 0$$

$\vec{F}_1$ et $\vec{F}_3$ n'ont aucun effet sur l'équilibre de la balance. Par ailleurs $M_{\Delta}(\vec{F}_2) \neq 0$

L'action du champ sur la balance se réduit

à la force électromagnétique $\vec{F}_2$ qui agit sur l'élément MN .

- Le poids $\vec{P}$ de la partie mobile

- La réaction $\vec{R}$ de l'axe Δ en O

- L'action $\vec{F}$ des masses marquées sur le plateau.

(équivalente au poids des masses marquées)

2.2) le sens dans lequel il faut faire circuler le courant pour obtenir l'équilibre :

Ce sens est tel que le trièdre $(I\vec{l}, \vec{B}, \vec{F}_2)$ soit direct. ($\vec{F}_2 = I\vec{l} \wedge \vec{B}$)

Le courant circule de N vers M (voir schéma)

3) Courbe $m = f(I)$.

L'allure de la courbe indique que : $m = k \cdot I$, k étant la pente de la droite

$$k = \frac{\Delta m}{\Delta I} = \frac{2,3 - 0,8}{3,8 - 1,3} = \frac{1,5}{2,5}$$

$$k = 0,6 \text{ g/A ou } 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg/A}$$

4) Valeur du champ magnétique $\vec{B}$:

Condition d'équilibre :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{F}_2) + M_{\Delta}(\vec{F}_1) + M_{\Delta}(\vec{F}_3) + M_{\Delta}(\vec{F}) + M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

Par construction :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = M_{\Delta}(F_1) = M_{\Delta}(F_3) = M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

$$D'où M_{\Delta}(F_2) + M_{\Delta}(F) = 0 \Leftrightarrow$$

$$IMN.B.d' - mgd = 0 \text{ ou } d = d'.$$

$$\text{donc, } mg = IMN.B.$$

$$D'où m = \frac{MN.B}{g} \cdot I$$

$$\text{La question 3) permet d'écrire : } k = \frac{MN.B}{g}$$

$$\text{On obtient alors : } B = \frac{kg}{MN} ; \text{ AN : } B \approx 0,3 \text{ T}$$

Exercice 21

1) Représentation de $\vec{B}$ et $\vec{F}$:

2)

2.1) la membrane M se déplace dans le sens de la force électromagnétique $\vec{F}$.

2.2) si le courant est variable, la membrane a un mouvement de va-et-vient, elle vibre.

3) La membrane vibrante se trouve au contact de l'air. Le mouvement de va-et-vient de cette membrane met l'air environnant en vibration. Une alternance de surpressions et de sous-pressions se propage. Un son se propage dans l'air. L'énergie mécanique a été transformée en énergie sonore.

Leçon

4

Induction électromagnétique

IV. Exercices

Exercice 1

1) Définition du flux magnétique :

On appelle flux magnétique Φ du vecteur magnétique uniforme $\vec{B}$ à travers la surface S , la grandeur algébrique :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B.S.\cos \alpha$$

$$\alpha = (\vec{B} \cdot \vec{S})$$

Φ s'exprime en **weber** (symbole **Wb**).

2) Expression du flux magnétique :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B.S.\cos \alpha$$

Exercice 2

1) Le flux d'un champ magnétique à travers une spire est nul si ce champ est parallèle au plan de la spire. (V) F

2) La position d'équilibre d'un circuit dans un champ magnétique correspond à un flux maximal si le sens de parcours choisi est celui du courant. (V) F

3) Le flux d'un champ magnétique à travers un contour fermé est une grandeur vectorielle. V (F)

4) Le flux d'un champ magnétique à travers un contour fermé est toujours positif. V (F)

Exercice 3

(c) ; (b) ; (d) ; (a)

Exercice 4

Toute variation du flux à travers un circuit s'accompagne de la naissance d'une f.é.m. d'induction.

Cette f.é.m. se traduit par :

- une **tension induite** aux bornes du circuit lorsque le circuit est ouvert ;
- la circulation d'un **courant induit** dans le circuit lorsque le circuit est **fermé**.

Exercice 5

1) Loi de Lenz :

Le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il s'oppose à la cause qui lui donne naissance.

2) Loi de Faraday-Lenz :

La force électromotrice d'induction est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique inducteur.

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Exercice 10

Moyen de déterminer le sens du courant induit :

- Il est tel que le circuit tend à s'opposer au mouvement qu'on lui impose.
- Le vecteur champ $\vec{B}_{ind}$ est toujours de sens contraire au vecteur-variation du champ inducteur $\Delta \vec{B}$.

<p>On approche la bobine : bobine et aimant se repoussent. la bobine présente une face nord</p>	<p>On éloigne l'aimant : bobine et aimant s'attirent. la bobine présente une face sud</p>	<p>On approche l'aimant : bobine et aimant se repoussent. la bobine présente une face sud</p>

e en volts (V), ϕ en webers (Wb) et t en secondes (s).

Exercice 6

- 1) on augmente I dans B_1 V
- 2) on éloigne B_2 de B_1 F
- 3) on fait tourner B_2 autour de son axe Δ_1 F
- 4) on fait tourner B_2 autour de l'axe Δ_2 F
- 5) on déplace le curseur du rhéostat dans le sens I V

Exercice 7

(2) (3) (5)

Exercice 8

- 1) Une force électromotrice d'induction apparaît dans un circuit lorsque le flux du champ magnétique **varie** à travers ce circuit.
- 2) La force électromotrice d'induction est égale à l'**opposé de la dérivée** par rapport au temps du flux magnétique inducteur.
- 3) La tension induite qui apparaît aux bornes d'un circuit, dans lequel l'intensité du courant est nulle, est égale en valeur absolue à la valeur de la **force électromotrice d'induction**.

Exercice 9

Le phénomène d'induction électromagnétique est tel que par ses effets il s'oppose à la cause qui lui donne naissance.

<p>f) </p> <p>rotation de 1/4 de tour de la spire N S fixe</p> <p>S diminue, B diminue $\Delta \vec{B}$: $\vec{B}_{ind}$: </p>	<p>f) </p> <p>uniforme La spire aplatie devient circulaire </p> <p>S augmente, $\Phi = BS$ augmente $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ $e = -\frac{d\Phi}{dt} < 0$ donc $I_{ind} < 0$</p>	<p>g) </p> <p>Le conducteur roule vers le bas </p> <p>S augmente, $\Phi = BS$ augmente $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ $e = -\frac{d\Phi}{dt} < 0$ donc $I_{ind} < 0$</p>
--	---	--

Exercice 11

- Choisir l'orientation du circuit induit.
- Placer une source de tension e dans le même sens que le conducteur.
- La polarité dépend du sens de déplacement.

<p>a) </p> <p>déplacement de l'aimant</p> <p>B augmente, $\Phi = BS$ augmente $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ $e = -\frac{d\Phi}{dt} < 0$ donc $I_{ind} < 0$ $V_B - V_A < 0, V_B < V_A$ D'où A borne + et B borne -</p>	<p>b) </p> <p>déplacement de l'aimant</p> <p>B augmente, $\Phi = BS$ augmente $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ $e = -\frac{d\Phi}{dt} < 0$ donc $U_{ind} = e > 0$ $V_B - V_A > 0, V_B > V_A$ D'où A borne - et B borne +</p>	<p>b) </p> <p>déplacement de l'aimant</p> <p>B diminue, $\Phi = BS$ diminue $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ $e = -\frac{d\Phi}{dt} > 0$ donc $U_{AB} = e > 0$ $V_A - V_B > 0, V_A > V_B$ D'où A borne + et B borne -</p>
--	--	--

Exercice 12

<p>Représentation du vecteur $\vec{n}$</p>
<p>Flux de $\vec{B}$ dans une spire</p>	$\Phi = \vec{B} \cdot S \cdot \vec{n}$ $\Phi = -BS$ $\Phi = -\pi a^2 B$	$\Phi = \vec{B} \cdot S \cdot \vec{n}$ $= BS \cos(180 - \alpha)$ $= -\pi a^2 B \cos \alpha$	$\Phi = \vec{B} \cdot S \cdot \vec{n}$ $= -\pi a^2 B$	$\Phi = \vec{B} \cdot S \cdot \vec{n}$ $= 0$ car $\vec{B} \perp \vec{n}$	$\Phi = \vec{B} \cdot S \cdot \vec{n}$ $= BS \cos \alpha$ $= \pi a^2 B \cos \alpha$
<p>Flux de $\vec{B}$ dans N spires</p>	$\Phi_t = N\Phi$ $\Phi_t = -\pi a^2 NB$	$\Phi_t = -\pi a^2 NB \cos \alpha$	$\Phi_t = \pi a^2 NB$	$\Phi_t = 0$	$\Phi_t = \pi a^2 NB \cos \alpha$

Exercice 13

1) Expression du flux du champ magnétique

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cos \alpha = -BS$$

2)

2.1) Expression de la f.é.m. en fonction de :

$$\frac{dB}{dt}; -e = \frac{d\Phi}{dt} = S \cdot \frac{dB}{dt}$$

2.2) Potentiel V_A du point A :

$$U_{AM} = e \Rightarrow V_A - V_M = e \Rightarrow V_A = S \cdot \frac{dB}{dt}$$

Exercice 14

1) la variation du flux magnétique à travers la bobine en mouvement :

Dans la position initiale :

$$\Phi_1 = N \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha = NBS$$

$$AN : \Phi_1 = 500 \times 0,2 \times \pi \times (0,1)^2 = 3,14 \text{ Wb.}$$

Dans la position finale : $\Phi_2 = 0$ car $\vec{B} \perp \vec{n}$

Au cours du mouvement la variation de flux $\Delta\Phi$ est : $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -3,14 \text{ Wb.}$

2) la f.é.m. e_{moy} induite : $e_{\text{moy}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$

$$AN : e_{\text{moy}} = -\frac{(-3,14)}{0,5} = 6,28 \text{ V.}$$

Le sens du courant induit.

Φ diminue, $\frac{d\Phi}{dt} < 0$

$e = -\frac{d\Phi}{dt} > 0$ donc le courant induit circule dans le sens positif choisi.

Exercice 15

1) Flux d'induction magnétique à travers la bobine

$$\Phi = N_2 \vec{B} \cdot \vec{S}_2 = N_2 B S_2$$

$$\Phi = 80 \times 1,67 \cdot 10^{-2} \times 5 \cdot 10^{-4} = 6,68 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

2) Représentation de la tension e

$$B = \mu_0 n I \quad e = -N_2 S_2 \frac{dB}{dt} = -N_2 S_2 \mu_0 n \frac{dI}{dt}$$

$$t \in [0 ; 0,01 \text{ s}], \quad \frac{dI}{dt} = \frac{6}{0,01} = 600 \text{ A/s}$$

$$e = -80 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 4 \pi \cdot 10^{-7} \times 1000 \times 600$$

$$e = -3 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

$$t \in [0,01 \text{ s} ; 0,015 \text{ s}], \quad \frac{dI}{dt} = -1200 \text{ A/s}$$

$$e = -80 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 4 \pi \cdot 10^{-7} \times 1000 (-1200)$$

$$e = 6 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

Exercice 16

1) Détermination de la f.é.m sur une période de B.

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = Ba^2 \Rightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt} = -a^2 \frac{dB}{dt}$$

Une période T correspond à 50 ms
 $t \in [0 \text{ ms} ; 10 \text{ ms}], \quad \frac{dB}{dt} = \frac{0,5 - 0}{10 \cdot 10^{-3} - 0} = 50 \text{ T/s.}$

$$\Rightarrow e = -3,125 \text{ V}$$

$t \in [10 \text{ ms} ; 30 \text{ ms}], B = 0,5 \text{ T,}$

$$\frac{dB}{dt} = 0 \Rightarrow e = 0 \text{ V.}$$

$$t \in [30 \text{ ms} ; 50 \text{ ms}], \quad \frac{dB}{dt} = \frac{(0 - 0,5)}{(50 - 30) 10^{-3}}$$

$$= -25 \text{ T/s d'où } e = +1,56 \text{ V}$$

2) Représentation de la courbe observée à l'oscilloscope

$$T = 50 \text{ ms} \longrightarrow 4 \text{ cm}$$

$$t \in [0 \text{ ms} ; 10 \text{ ms}],$$

$$t_1 - 0 = 10 \text{ ms} \longrightarrow 0,8 \text{ cm}$$

$$t_2 = 20 \text{ ms} \longrightarrow 1,6 \text{ cm}$$

$$t \in [10 \text{ ms} ; 30 \text{ ms}],$$

$$t_2 - t_1 = 20 \text{ ms} \longrightarrow 1,6 \text{ cm}$$

$$t \in [30 \text{ ms} ; 50 \text{ ms}],$$

$$t_3 - t_2 = 20 \text{ ms} \longrightarrow 1,6 \text{ cm}$$

Exercice 17

1) Définition du flux magnétique :

On appelle flux magnétique Φ du vecteur magnétique uniforme $\vec{B}$ à travers la surface S , la grandeur algébrique :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha ; \alpha = (\widehat{\vec{B}, \vec{S}})$$

Φ s'exprime en weber (symbole Wb).

2) Loi de Lenz :

Le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il s'oppose à la cause qui lui donne naissance.

3) Expression de l'intensité i du courant induit en fonction de B , ℓ et la vitesse v de la barre :

Orientons la normale $\vec{n}$ au plan du circuit dans le sens de $\vec{B}$. Il en résulte un sens positif sur le circuit.

Soit Φ_0 le flux initial de $\vec{B}$ à travers le circuit. Soit Φ le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit après un déplacement x de la barre CD

$$\Phi = \Phi_0 + \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S_n + \Phi_0$$

$$\text{or } S = \ell x, \text{ d'où } \Phi = \Phi_0 + B \ell x$$

$$\text{la fem induite vaut : } e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \ell \frac{dx}{dt}$$

$$\text{soit } e = -B \ell v$$

$$\text{d'où } i = \frac{e}{R} = -\frac{B \ell v}{R}$$

Le courant induit circule de D vers C.

4) Valeur B du champ magnétique dans l'entrefer de l'aimant.

$$B = \frac{Ri}{\ell v} = \frac{200 \times 25 \cdot 10^{-6}}{0,05 \times 1} ; B = 0,1 \text{ T.}$$

Exercice 18

1) Loi de Faraday-Lenz :

La force électromotrice d'induction est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du

flux magnétique inducteur. $e = -\frac{d\phi}{dt}$ avec e en volts (V), ϕ en webers (Wb) et t en secondes (s).

2) Position de la bobine pour que le flux qui la traverse soit maximal :

L'axe de la bobine est perpendiculaire à celui du solénoïde

3) 3.1) Intensité i du courant donnant le champ magnétique au centre du solénoïde :

$$B = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i. \text{ d'où } i = \frac{B \ell}{\mu_0 N_1}$$

$$\text{AN : } i \approx 8 \text{ A}$$

3.2) Flux de $\vec{B}$ dans la bobine :

$$\Phi = N_2 \vec{B} \cdot \vec{S} = N_2 B \cdot S_n$$

$$\text{Or } \alpha = \left(\vec{B}, \vec{S} \right) = \omega t, \text{ alors } \Phi = N_2 B S \cos \omega t$$

$$\text{D'autre part } S = \pi \frac{d^2}{4}$$

$$\text{Au final : } \Phi = \pi \frac{d^2}{4} N_2 B \cos \omega t$$

$$\text{AN : } \Phi = 0,025 \cos 471,2 t$$

4) Expression de la f.é.m. d'induction dans la bobine en fonction de N_2 , d , B , ω et du temps t :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} ; e = \pi \frac{d^2}{4} N_2 \omega B \sin \omega t$$

Exercice 19

1) Définition du flux magnétique :

On appelle flux magnétique Φ du vecteur magnétique

uniforme $\vec{B}$ à travers la surface S , la grandeur algébrique :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha. \quad \alpha = \left(\vec{B}, \vec{S} \right).$$

Φ s'exprime en weber (symbole Wb).

2)

2.1) Expression de la f.é.m. induite :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = -B \cdot S \Rightarrow e = -\frac{d\phi}{dt} = +B \frac{dS}{dt}$$

S surface du circuit OPQ

$$S = (OM \times PQ)/2$$

Or $PQ = PM + MQ$
 et $PM = MQ = OM$
 d'où $PQ = 2OM$
 $S = OM^2 = x^2 = v^2 t^2$ D'où $e = 2Bv^2 t$
 A.N. $e = 0,101 t$ (V)

2.2) Expression du courant induit

$$i = \frac{e}{R}; \text{ or } R = \mu(OP + OG + PQ)$$

$$= \mu(x\sqrt{2} + x\sqrt{2} + 2x)$$

$$R = 2x\mu(\sqrt{2} + 1)$$

avec $x = vt$

$$R = 2vt\mu(\sqrt{2} + 1)$$

$$i = \frac{2Bv^2 t}{2vt\mu\sqrt{2} + 1} = \frac{Bv}{\mu(\sqrt{2} + 1)}$$

3) Représentation :

3.1) $e = f(t)$.

• Durée du parcours OC

$$OC^2 + AC^2 = OA^2 \Rightarrow OC^2$$

$$= OA^2 - AC^2 = a^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{a^2}{2} \Rightarrow OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$t = 0,87 \text{ s}$$

• $t \in]-\infty ; 0]$, $e = 0 \text{ V}$

• $t \in [0 ; 0,87 \text{ s}]$, $e = +0,101 t$

• $t \in [0,87 \text{ s} ; +\infty [$, $e = 0 \text{ V}$

3.2) $i = g(t)$

• $t < 0$

$$i = 0 \text{ A}$$

• $0 < t < 0,087 \text{ s}$,

$$i = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

• $t < 0,87 \text{ s}$,

$$i = 0 \text{ A}$$

4) Intensité et sens du courant induit.

$$i = \frac{0,12 \times 0,65}{1,24\sqrt{2} + 1} = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ A}$$

$i > 0$, donc i a le sens d'orientation choisi c'est-à-dire le sens OQPO.

Exercice 20

1) Rôle du circuit magnétique d'un transformateur :

Dans un transformateur, l'énergie est transférée du primaire au secondaire par l'intermédiaire du circuit magnétique que forme la carcasse du transformateur. Ces deux circuits sont alors magnétiquement couplés. Ceci sert à réaliser un isolement galvanique entre les deux circuits.

2)

2.1) Tension U_2 au secondaire :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow U_2 = \frac{n_2}{n_1} \cdot U_1$$

$$\text{A.N. } U_2 = \frac{40}{1200} \times 220 = 7,33 \text{ V.}$$

2.2) Intensité I_2 du courant dans le secondaire :

On a :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow I_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot I_1$$

$$\Rightarrow \frac{1200}{40} \times 50 = 1500 \Rightarrow I_2 = 1,5 \text{ A}$$

3)

3.1) Type de transformateur :

$U_2 < U_1$: tension appliquée au primaire $\Rightarrow$ le transformateur est abaisseur de tension.

3.2) Bobine possédant le fil de grosse section :

La bobine qui possède le fil de plus grosse section est celle qui est traversée par un courant important c'est donc la bobine du circuit secondaire.

3.3)

• Causes principales des pertes :

- Fuites magnétiques.

- Pertes électromagnétiques dues aux courants de Foucault

• Forme de l'énergie perdue :

L'énergie perdue apparaît sous forme d'énergie électromagnétique.

4) Explication du feuilletage :

Le circuit magnétique est le plus souvent feuilleté pour diminuer les pertes électromagnétiques par courants de Foucault.

Exercice 21

1) Définition du flux magnétique :

On appelle flux magnétique Φ du vecteur magnétique

uniforme $\vec{B}$ à travers la surface S , la grandeur algébrique :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B.S.\cos\alpha. \quad \alpha = (\vec{B}, \vec{S}).$$

Φ s'exprime en weber (symbole Wb).

2)

2.1) Une spire :

$$\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S n.$$

$$\varphi = BS\cos\theta$$

or $\theta = \alpha = (\vec{B}, \vec{S}) = \omega t$, alors $\varphi = BS\cos\omega t$

$$AN : \varphi = 0,054\cos 100\pi t.$$

2.2) le cadre.

$\Phi = N\varphi = NBS\cos\omega t$, N étant le nombre total de spires.

$$AN : \Phi = +8,1\cos 100\pi t.$$

3) Le flux du champ magnétique varie à travers le circuit selon une fonction sinusoïdale. Il apparaît donc une f.é.m. induite sinusoïdale dans le circuit telle que :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}; \quad e = -8,1 \times 100\pi \sin 100\pi t.$$

$$e = -810\pi \sin 100\pi t.$$

4) Amplitude de la f.é.m. induite :

$$e_M = 810 \times \pi = 2544,7 \text{ V}$$

$$e_M \approx 2,5 \text{ kV}$$

Leçon 5 Auto-induction

IV. Exercices

Exercice 1

1) Définition du flux propre ϕ_p :

En l'absence de toute matière ferromagnétique, le flux ϕ d'auto-induction ou flux propre à

travers un circuit parcouru par un courant est proportionnel à l'intensité i de ce courant :

$$\Phi_p = L i.$$

le coefficient L étant appelé inductance du circuit.

2) Expression du flux propre $\Phi_p : \Phi_p = L i$

le coefficient L étant appelé inductance du circuit.

L'auto-induction est le phénomène d'induction électromagnétique qui se produit lorsque l'inducteur et l'induit sont identiques. Il n'a d'effets sensibles que dans les circuits qui comportent des bobines.

Lorsque l'on alimente une bobine par un courant électrique, un champ magnétique se forme. À l'intérieur, il est à peu près constant et suit l'axe des spires. Si le courant est variable, le champ ne change pas de direction mais devient variable. Il en résulte la formation d'un courant induit dans les spires. Celui-ci s'oppose à la création du champ magnétique et est donc de sens opposé à celui fourni par le générateur à la bobine.

Exercice 2

1) L'auto-induction est l'existence d'une f.é.m. d'induction modératrice résultant de **la variation** du flux magnétique que le circuit engendre à travers lui-même.

2) Une bobine placée dans un circuit **s'oppose** à l'établissement d'un courant ou à sa rupture.

Exercice 3

En l'absence de toute matière ferromagnétique, le flux d'auto-induction à travers un circuit parcouru par un courant est proportionnel à l'intensité de ce courant.

Exercice 4

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	L'inductance L d'une portion de circuit dépend du temps et de l'intensité du courant.		×
2	Toute variation du flux propre à travers un circuit engendre une f.é.m. auto-induite	×	
3	La f.é.m. d'auto-induction est proportionnelle à la dérivée de l'intensité du courant par rapport au temps.		×
4	Aux bornes (A, B) d'une bobine d'inductance L et de résistance r , orientée de A vers B et traversée par un courant d'intensité i , la tension est : $u = ri + L \frac{di}{dt}$.	×	
5	L'énergie magnétique emmagasinée par une bobine d'inductance L est proportionnelle au carré de l'intensité du courant qui la traverse	×	

Exercice 5

②

Exercice 6

①

Exercice 7

1) Faux ; 2) Faux ; 3) Vrai

Exercice 8

f.é.m. e d'auto-induction
Inductance L
Énergie magnétique emmagasinée E
Tension u aux bornes d'une bobine

$\frac{\Phi}{i}$
$ri + L \frac{di}{dt}$
$\frac{1}{2} Li^2$
$\frac{L}{r}$
$-L \frac{di}{dt}$

Exercice 9

$$\Phi_p = L i$$

$$\text{AN} : \Phi_p = 0,1 \text{ Wb}$$

Exercice 10

Inductance L de la bobine :

$$\Phi_p = L i \text{ et } \Phi_p = NBS$$

$$\text{D'une part } B = \mu_0 n i \text{ et } S = \pi r^2$$

$$\text{D'autre part } N = n.l$$

$$\text{On obtient } L = \mu_0 \pi r^2 n^2 l$$

$$\text{AN} : L = 0,5 \text{ H}$$

Exercice 11

1) Inductance L de la bobine :

$$\Phi_p = L i \text{ et } \Phi_p = NBS$$

$$\text{D'une part } B = \mu_0 n i$$

$$\text{D'autre part la longueur du tore vaut : } \ell = 2\pi R,$$

$$\text{donc } n = \frac{N}{2\pi R}$$

$$\text{D'où } L = \mu_0 \frac{N^2 S}{2\pi R}$$

$$\text{AN} : L = 4\pi \cdot 10^{-7} \times \frac{1000^2 \times 10 \times 10^{-4}}{2\pi \times 8,33 \cdot 10^{-2}}$$

$$L = 2,4 \text{ mH}$$

2) Valeur moyenne de la f.é.m. d'auto-induction :

$$e_{\text{moy}} = L \frac{\Delta i}{\Delta t_1} = 2,4 \cdot 10^{-3} \times \frac{6}{0,005}$$

$$e_{\text{moy}} = 2,88 \text{ V}$$

3) Énergie magnétique E_m emmagasinée :

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \times 2,4 \cdot 10^{-3} \times 6^2$$

$$E_m = 43,2 \text{ mJ}$$

4) Puissance moyenne P_m restituée :

$$P_m = \frac{E_m}{\Delta t_2} = \frac{0,0432}{432 \cdot 10^{-6}}$$

$$P_m = 100 \text{ W}$$

Exercice 12

1) Intensité I du courant :

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2 \text{ d'où } i^2 = \frac{2E_m}{L}$$

$$i = \sqrt{\frac{2E_m}{L}}$$

$$\text{AN} : i = 2,3 \text{ A}$$

2) Si l'intensité du courant est doublée

$$E_{m1} = \frac{1}{2} L i_2^2 \quad (1)$$

$$E_{m2} = \frac{1}{2} L i_2^2 \text{ avec } i_2 = 2 i_1 \quad (2)$$

$$\text{On obtient } E_{m2} = 4 E_{m1}$$

Exercice 13

1) Retard à l'allumage : Lampe L_1 à cause de la présence d'une bobine dans la branche.

2) Explication :

La bobine placée en série avec L_1 est responsable du retard à l'allumage. En effet, lors de l'établissement du courant, cette bobine crée une force électromotrice induite qui engendre un courant induit. Ce courant, par ces effets, s'oppose à la cause qui lui donne naissance conformément à la loi de Lenz.

3) En régime permanent, les deux lampes ont le même éclat car le phénomène d'induction (qui provoque le retard à l'allumage) ne s'observe qu'en régime variable.

Exercice 14

1) Tensions visualisées :

• Sur la voie A, on visualise la tension u_{AM} ; tension aux bornes du conducteur ohmique.

Or $u_{AM} = Ri \implies i = u_{AM}/R$. On visualise ainsi, par la même occasion les variations de l'intensité i du courant.

• Sur la voie B, On visualise la tension

$$u_{BM} = u_G, \text{ tension aux bornes du générateur G.}$$

2) Correspondance des courbes :

Le générateur G fournit une tension $u_{BM} = u_G$

en créneaux (courbe 2). Le courant s'établit progressivement dans le circuit du fait de la présence de la bobine (courbe 1). D'où, la courbe 1 correspond aux variations de u_{AM} .

Exercice 15

1) Expression de la tension u_{AC} au cours des deux phases pour t variant de 0 à 50 ms.

- Expression de l'intensité i du courant :

• $t \in [0 \text{ ms} ; 40 \text{ ms}]$, $i = at$; avec $a = \frac{\Delta i}{\Delta t} = +50 \text{ A/s} \Rightarrow i = 50t$

• $t \in [40 \text{ ms} ; 50 \text{ ms}]$, $i = a't + b'$; avec $a' = \frac{\Delta i}{\Delta t} = -200 \text{ A/s} \Rightarrow i = -200t + b'$
à $t = 50 \text{ ms}$, $i = 0 = -200 \times 50 \cdot 10^{-3} + b'$
 $\Rightarrow b' = 10 \text{ A}$. $\Rightarrow i = -200t + 10$

- Expression de u_{AC} :

• $t \in [0 \text{ ms} ; 40 \text{ ms}]$, $\frac{\Delta i}{\Delta t} = +50 \text{ A/s}$;

$\Rightarrow e = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = -0,01 \times 50 = -0,5 \text{ V}$

• $t \in [5 \text{ ms} ; 10 \text{ ms}]$, $= -200 \text{ A/s}$; $\Rightarrow$

$e = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = -0,01 \times (-200) = +2 \text{ V}$

2) Courbe $u_{AC} = f(t)$.

Exercice 16

1) Définition du flux propre ϕ_p :

En l'absence de toute matière ferromagnétique, le flux ϕ d'auto-induction ou flux propre à travers un circuit parcouru par un courant est proportionnel à l'intensité i de ce courant :

$$\Phi_p = L i$$

le coefficient L étant appelé inductance du circuit.

2)

2.1) Expression du flux propre Φ_p :

$$\Phi = N \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S$$

2.2) Expression du coefficient d'auto-inductance L :

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \text{ d'où } L = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell} I = LI$$

$$\Rightarrow L = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell}$$

3)

3.1) Valeur numérique de l'auto-inductance L :

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell}$$

$$\text{AN : } L = 1,63 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

3.2) Valeur algébrique de la f.é.m. auto-induite :

- Expression de l'intensité i du courant :

• $t \in [0 \text{ ms} ; 5 \text{ ms}]$, $i = at$; avec $a = \frac{\Delta i}{\Delta t} = +100 \text{ A/s} \Rightarrow i = 100t$

• $t \in [5 \text{ ms} ; 10 \text{ ms}]$, $i = a't + b'$; avec $a' = \frac{\Delta i}{\Delta t} = -100 \text{ A/s} \Rightarrow i = -100t + b'$

à $t = 10 \text{ ms}$, $i = 0 = -100 \times 10 \cdot 10^{-3} + b' \Rightarrow b' = 1 \text{ A}$. $\Rightarrow i = 100t + 1$

- f.é.m. auto-induite :

• $t \in [0 \text{ ms} ; 5 \text{ ms}]$, $\frac{\Delta i}{\Delta t} = +100 \text{ A/s}$;

$\Rightarrow e = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = -1,63 \cdot 10^{-3} \times |100| = -0,163 \text{ V}$

• $t \in [5 \text{ ms} ; 10 \text{ ms}]$, $\frac{\Delta i}{\Delta t} = -100 \text{ A/s}$;

$\Rightarrow e = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{\Delta i}{\Delta t} = -1,63 \cdot 10^{-3} \times (-100) = 0,163 \text{ V}$

4) Représentation de i et e :

Exercice 17

1) Expression de la f.é.m. e d'auto-induction en fonction de L et i : $e = -L \frac{di}{dt}$

2) Sens de variation de $|e| = e = L \frac{di}{dt}$
 $\frac{di}{dt}$ représente la pente de la tangente à la courbe.

• $0 < i < 2 \text{ A}$, i croît, $\frac{di}{dt} > 0$, la pente décroît d'où $|e|$ décroît.

• $i \geq 2 \text{ A}$, $i = \text{cste}$, $\frac{di}{dt} = 0$ d'où $|e| = 0$

3)

3.1) Valeur $|e|$ à la fermeture ($t = 0 \text{ s}$)

À $t = 0 \text{ s}$, $i = 0$, donc $|e| = E = 20 \text{ V}$.

3.2) Inductance L de la bobine.

$$|e| = L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = 40L, \text{ d'où } L = \frac{20}{40};$$

$$L = 0,5 \text{ H}.$$

4)

4.1) Valeur de la f.é.m. e en régime permanent :

En régime permanent, $\frac{di}{dt} = 0$, donc $e = 0$.

4.2) Résistance R de la bobine :

$$E = Ri; \text{ d'où } R = \frac{E}{i} = \frac{20}{2}; R = 10 \Omega.$$

4.3) Énergie magnétique emmagasinée en régime permanent :

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2$$

$$\text{AN : } E_m = 1 \text{ J}$$

Exercice 18

1) Expression de la tension u aux bornes de la bobine :

$$u_{AB} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

Or $i = I_m \sin \omega t$, donc $\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos \omega t$

$$\text{D'où } u_{AB} = RI_m \sin \omega t + L \omega I_m \cos \omega t$$

2) Valeurs maximales $U_{R_{\max}}$ et $U_{L_{\max}}$:

$$u_{AB} = RI_m \sin \omega t + L \omega I_m \cos \omega t$$

La tension aux bornes de la bobine est la somme de deux termes :

$$u_R = RI_m \sin \omega t$$

$$u_L = L \omega I_m \cos \omega t$$

$$U_{R_{\max}} = RI_m = 100 \times 1; U_{R_{\max}} = 100 \text{ V}.$$

$$\omega = 2\pi N \text{ alors } U_{L_{\max}} = L \omega I_m = 0,1 \times 2\pi \times 50 \times 1$$

$$U_{L_{\max}} = 31,4 \text{ V}$$

3) Dates pour lesquelles $u_R = u_L$:

$$u_R = u_L \Rightarrow RI_m \sin \omega t = L \omega I_m \cos \omega t$$

$$\tan \omega t = \frac{L \omega}{R}$$

$$\text{Posons } \theta = \omega t \text{ alors } \tan \theta = \frac{0,1 \times 2 \times \pi \times 50}{100} = 0,314.$$

D'où $\theta = \arctan 0,314 = 0,304 \text{ rad}$ ou $0,304 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\theta}{2\pi N}; t = \frac{0,304 + k\pi}{2\pi N}$$

4) Calcul de la valeur de la fréquence à partir de laquelle la valeur maximale $U_{L_{\max}}$ l'emporte sur $U_{R_{\max}}$.

$$U_{L_{\max}} > U_{R_{\max}} \text{ donc } L \omega > R$$

$$\text{Soit } 2\pi N L > R, \text{ d'où } N > \frac{R}{2\pi L}$$

$$\text{AN : } N > 159,2 \text{ Hz}$$

Exercice 19

1)

1.1) Nature du phénomène mis en évidence :

Il s'agit du phénomène d'auto-induction

1.2) Relation entre u_{AM} , L et i :

$$u_{AM} = -e = L \frac{di}{dt} \quad \text{Loi de Faraday-Lenz}$$

2) Relation $u_{AM} = -\frac{L}{R} \frac{du_{BM}}{dt}$

$$u_{BM} = -Ri \Rightarrow i = \frac{u_{BM}}{R}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{du_{BM}}{dt} \Rightarrow u_{AM} = -\frac{L}{R} \frac{du_{BM}}{dt}$$

3)

3.1) Valeurs extrêmes de la tension u_{AM} :

$$u_{AM} = +1 \times 0,2 = 0,2 \text{ V et } u_{AM} = -0,2 \text{ V.}$$

3.2) la valeur de $\frac{du_{BM}}{dt}$:

Pour la première demi-période :

- Valeur numérique du rapport $\tau = L/R$.

$$\frac{L}{R} = \frac{u_{AM}}{\frac{du_{BM}}{dt}}$$

Pour la première demi-période

$$u_{AM} = -0,2 \text{ V} \Rightarrow \frac{L}{R} = \frac{-(0,2)}{5000} = 4.10^{-5} \text{ SI.}$$

4) Valeur de l'inductance L .

$$L = 4.10^{-5} \cdot R \Rightarrow L = 4.10^{-5} \times 2000 \Rightarrow L = 0,08 \text{ H}$$

Thème 3 : Électricité

Leçon

1

Montages dérivateur et intégrateur

IV. Exercices

Exercice 1

1) La caractéristique d'entrée :

Les impédances des deux entrées sont très élevées : les courants d'entrée sont nuls $i_+ = i_- = 0$.

2) La caractéristique de sortie :

L'impédance de sortie de l'AOP est nulle : la tension u_s est indépendante du courant extrait i_s .

3) La caractéristique de transfert :

La caractéristique $U_s = f(U_d)$ fait apparaître deux domaines :

- Domaine linéaire : $U_s = \alpha U_d$ avec $\alpha \approx 10^5$ où α est l'amplification différentielle, très grande ($>10^5$) donc tendant vers $+\infty$. Dans ce cas, l'AOP est dit « idéal ».

- Zones de saturation : $U_s = cte = V_{sat+}$ ou V_{sat-} , les tensions de saturation, très proches de la tension d'alimentation : $U_s = \pm V_{cc}$.

Exercice 2

- 1) Un montage intégrateur est en électronique un montage qui a pour signal de sortie **la primitive** de son signal d'entrée.
- 2) Un circuit intégrateur de base avec amplificateur opérationnel se fait en mettant **un condensateur** sur **la boucle de rétroaction**.
- 3) Un circuit dérivateur de base avec amplificateur opérationnel se fait en mettant **un condensateur** sur **la liaison d'entrée**.

Exercice 3

1) Schéma de base d'un montage intégrateur

2) Schéma de base d'un montage dérivateur

Exercice 4

- 1) **(b)**
- 2) **(a)**

Exercice 5

- 1) Intérêt d'un montage dérivateur : La tension de sortie est proportionnelle à la dérivée de la tension l'entrée.
- 2) Intérêt d'un montage intégrateur : La tension de sortie est l'intégrale de la tension d'entrée.

Exercice 6

- 1) Passage de u_1 à u_2 : Montage dérivateur.
- 2) Schéma du montage dérivateur :

- 3) Passage de u_2 à u_1 :
 - Montage intégrateur
 - Schéma du montage intégrateur

Exercice 7

- 1) $u_e = 4 \sin 500 \pi t$
 Montage dérivateur $\Rightarrow u_s = -RC \frac{du_e}{dt}$
 Or $\frac{du_e}{dt} = 4 \times 500 \times \pi \times \cos 500\pi t$
 On obtient $u_s = -0,3 \times \pi \times \cos 500\pi t$
 Complétons le tableau :

t(ms)	0	0,2	0,3	0,4
u_e(V)	0	1,23	1,8	2,35
u_s(V)	-0,94	-0,90	-0,83	-0,76
	0,6	1	3,6	3,8
	3,23	4	-2,35	-1,23
	-0,55	0	-0,76	-0,9

- 2) Représentation des variations de u_e et de u_s en fonction de t.

Échelle : 1 ms pour 5 cm ; 1 V pour 1 cm.

Exercice 8

1) Montage intégrateur.

$$\frac{dU_s}{dt} = -\frac{1}{RC} U_e$$

$$U_s = -\frac{1}{RC} \int U_e dt \quad U_e = 2V \text{ et } U_s = -12V$$

sur $t = \frac{T}{2}$ (Voir exercice précédent).

$$U_s = -\frac{1}{RC} \int_0^{\frac{T}{2}} U_e dt = -\frac{1}{RC} [U_e t]_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{U_e}{RC} \cdot \frac{T}{2}$$

$$= -\frac{U_e}{2RCN} \Rightarrow U_s = -\frac{U_e}{2RCN}, \quad N = 500 \text{ Hz}$$

$$C = -\frac{U_e}{2R u_s N}; \quad C = 33,3 \text{ nF.}$$

2) Valeur de la capacité pour que l'A.O. sature :

L'AO sature lorsque $|u_s| = +V_{\text{sat}} = 13V$

$$\text{d'où } C = \frac{-U_e}{2R V_{\text{sat}} \cdot N} = \frac{-V_e}{2R V_{\text{sat}} \cdot N}$$

$$= 3,1 \cdot 10^{-8} = 31 \text{ nF.}$$

Exercice 9

L'AO est parfait : $i^+ = i^- = 0$

L'AO fonctionne en régime linéaire $\mathcal{E} = u_{BA} = 0$

$$\bullet u_1 = \frac{q}{C} \Rightarrow C u_1 = q$$

$$\bullet u_2 = -Ri \quad \text{or } i = \frac{dq}{dt} \quad \text{d'où } u_2 = -RC \frac{du_1}{dt}$$

$$\bullet t \in [0 \text{ ms}; 2 \text{ ms}], u_1 = at + b$$

Les points D (0 s ; -12 V) et E (2.10⁻³ s ; 12 V) vérifient l'équation.

On obtient : $u_1 = 12 \cdot 10^3 t - 12$ et $\frac{du_1}{dt} = 12 \cdot 10^3$.

D'où $u_2 = -RC \times 12 \cdot 10^3 = -10^3 \times 0,5 \cdot 10^{-6} \times 12 \cdot 10^3$.

$$u_2 = -6V$$

• $t \in [2 \text{ ms}; 3 \text{ ms}], u_1 = \text{constante} \Rightarrow u_2 = 0V$

• $t \in [3 \text{ ms}; 5 \text{ ms}], u_1 = a't + b'$.

Par raison de symétrie, le coefficient directeur de FG est l'opposée de celui de DE, donc

$$u_1 = -12 \cdot 10^3 t + b' \quad \text{et} \quad \frac{du_1}{dt} = -12 \cdot 10^3$$

Par suite $u_2 = -RC \times (-12 \cdot 10^3)$

$$u_2 = 6V$$

Ensuite u_s se reproduit identique toutes les

5 ms, d'où la représentation ci-dessous :

Exercice 10

1) Représentation de $u_s(t)$:

Montage dérivateur $\Rightarrow u_s = -RC \frac{du_e}{dt}$

$$u_s = -2 \cdot 10^{-4} \frac{du_e}{dt} \quad \text{soit } u_s = -2 \cdot 10^{-4} \frac{\Delta u_e}{\Delta t}$$

$$\bullet t \in [0 \text{ ms}; 2 \text{ ms}], = \frac{2U_{e\text{max}}}{0,002} = 10^3 u_{e\text{max}}$$

d'où $u_s = -2 \cdot 10^{-4} \times 10^3 u_{e\text{max}}$

$$u_s = -0,2 u_{e\text{max}}$$

$$t \in [2 \text{ ms}; 3 \text{ ms}], = -2 \cdot 10^3 u_{e\text{max}}$$

d'où $u_s = 0,4 u_{e\text{max}}$

u_e est périodique de période $T = 3 \text{ ms}$.

Il en est de même pour u_s , d'où la représentation ci-dessous :

2) Valeur de l'amplitude à partir de laquelle l'AO est à la saturation :

On a $u_s = +V_{sat} = 13 \text{ V}$ et $u_s = 0,4 u_{\text{emax}}$
 $u_{\text{emax}} = \frac{V_{sat}}{0,4} ; u_{\text{emax}} = 32,5 \text{ V}$

Exercice 11

1) Nature du montage :
 Il s'agit d'un montage intégrateur.

2) Branchements de l'oscilloscope bicourbe (voir schéma).

3) Relation entre u_s et u_e :

$u_{PM} = u_{PA} + u_{AM}$ Or $u_{AM} = \mathcal{E} = 0$ d'où $u_e = u_{PM}$
 $= u_{PA} = Ri \Rightarrow i = \frac{u_e}{R}$

$u_{SM} = u_{SA} + u_{AM} \Rightarrow u_s = -\frac{q}{C} + 0 \Rightarrow u_s = -\frac{q}{C}$, or
 or $i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int idt$ d'où $u_s = -\frac{1}{RC} \int u_e dt$
 $\Rightarrow u_s = -\frac{1}{RC} \int u_e dt$ ou $\frac{du_s}{dt} = -\frac{1}{RC} u_e$

4) Représentation du signal observé aux bornes du GBF.

$u_e = -RC \frac{du_s}{dt} \Rightarrow u_e = -0,001 \frac{du_s}{dt}$

soit $u_e = -0,001 \frac{du_s}{dt}$.

• $t \in [0 ; 1 \text{ ms}]$, $\frac{du_s}{dt} = -60 \text{ V/s} \Rightarrow u_e = +60 \text{ mV}$.

• $t \in [1 \text{ ms} ; 2 \text{ ms}]$, $\frac{du_s}{dt} = +60 \text{ V/s} \Rightarrow u_e = -60 \text{ mV}$.

u_s est périodique de période $T = 2 \text{ ms}$.

Il en est de même pour u_e , d'où la représentation ci-dessus.

Exercice 12

1) Caractéristiques d'un amplificateur opérationnel idéal

$i^+ = i^- = 0$

$u_d = 0$

2) Période et fréquence :

Période : $T = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

Fréquence : $N = 1/T = 400 \text{ Hz}$

3) Expression de u_s :

L'AO est parfait : $i^+ = i^- = 0$

L'AO fonctionne en régime linéaire $\mathcal{E} = u_{BA} = 0$

$u_e = \frac{q}{C} \Rightarrow Cu_e = q$

$u_s = -Ri$ or $i = \frac{dq}{dt}$ d'où $u_s = -RC \frac{du_e}{dt}$.

4) Représentation de $u_s(t)$

• $u_s = -0,001 \frac{du_e}{dt}$ soit $u_s = -0,001 \frac{\Delta u_e}{\Delta t}$

• $t \in [0 ; 1 \text{ ms}]$, $\frac{\Delta u_e}{\Delta t} = 2000 \text{ V/s}$ ($u_s = -2 \text{ V}$)

Exercice 13

1) Valeur de u_d :

Le régime est linéaire donc $u_d = 0$ V

2) Expression de l'intensité i du courant

2.1) en fonction de u_2 et R :

Équation de la maille d'entrée : $u_2 - R_1 + u_d = 0$

donc $i = \frac{u_2}{R}$.

2.2) en fonction de C et $\frac{du_c}{dt}$:

$i = C \left(\frac{du_c}{dt} \right)$

2.3) en fonction de C et $\frac{du_1}{dt}$.

$u_1 = -u_c$ (maille de sortie)

d'où $i = -C \frac{du_1}{dt}$

3) $\frac{u_1}{R_3} = -C \frac{du_1}{dt}$ donc $\frac{du_1}{dt} = \frac{-u_2}{RC}$

4)

4.1) Si $u_2 = -u_d$: la dérivée est positive et constante donc u_1 est linéaire et croissant

4.2) Si $u_2 = +u_d$: la dérivée est négative et constante donc u_1 est linéaire et décroissant.

Exercice 14

1) Schéma de base d'un montage dérivateur.

2) Expression de $u_s(t)$ en fonction de R , C et de $u_c(t)$.

$u_s = -RC \frac{du_c}{dt}$.

3)

3.1) Expression de la tension de sortie u_1 ;

D'après ce qui précède $u_1 = -R_1 C_1 \frac{du}{dt}$

Pour $t \in [-1,5 \text{ ms}; +1,5 \text{ ms}]$, $u = -2.10^6 t^2 + 4,5$

$\frac{du}{dt} = -2.10^6 \times 2t = -4.10^6 t$

$u_1 = + 4.10^6 R_1 C_1 t$

$u_1 = 2.10^3 t$

3.2) Expression de la tension de sortie u_2 .

$u_2 = -R_2 C_2 \frac{du_1}{dt}$ or $\frac{du_1}{dt} = 2.10^3$ V/s

$u_2 = -R_2 C_2 \times 2.10^3$

$u_2 = -2.10^{-3} \times 2.10^3$

$u_2 = -4$ V

4) Représentation des tensions u_1 et u_2 .

Leçon

2

Oscillations électriques libres dans un circuit LC

IV. Exercices

Exercice 1

1) Définition d'un oscillateur électrique :

Un oscillateur électrique est un système dont l'évolution est décrite par la variation périodique (ou pseudo-périodique) d'une grandeur électrique.

2) Les caractéristiques des oscillations d'un oscillateur électrique LC :

- la pulsation propre ;
- la période propre ;
- la fréquence propre ;
- l'amplitude ;
- la phase à l'origine des dates.

Exercice 2

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	La décharge d'un condensateur dans un conducteur ohmique est oscillante.		×
2	Dans un circuit LC, l'intensité du courant et la charge du condensateur sont déphasées de $\pi/2$.	×	
3	Dans un circuit LC, si on double L, la période des oscillations double aussi.		×
4	Dans un circuit LC résistif, l'énergie est constante.		×
5	Dans un circuit LC, l'intensité du courant et la charge du condensateur ont la même fréquence.	×	

Exercice 3

1) L'énergie électrique d'un circuit oscillant **non amorti** est constante.

2) L'énergie joule dépensée dans un circuit oscillant **amorti** est égale à la **diminution** de l'énergie totale du circuit.

Exercice 4

Exercice 5

2) $i = I_m > 0, u = 0$

3) $i = 0$

4) $i = -I_m, u = 0$

1) $i = 0$

Exercice 6

1) Équation différentielle

1.1) un oscillateur mécanique non amorti :
 $m\ddot{x} + kx = 0$.

1.2) un circuit LC : $L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$

2) Analogies formelles entre les différentes grandeurs mécaniques et électriques.

Grandeurs électriques	Grandeurs mécaniques
q	x
i	v
L	m
$\frac{1}{C}$	k
U	F

Exercice 7

c)

Exercice 8

① ; ④

Exercice 9

1)

1.1) Charge maximale Q_m du condensateur :
 $Q_m = C U_{AB} = 10^{-6} \times 20 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ C}$

1.2) Fréquence propre N_0 :

$$N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{40 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}} \\ = 795,8 \text{ Hz.}$$

2) Intensité maximale I_m : $I_m = Q_m \cdot \omega_0 = 2\pi N_0 Q_m$

$$I_m = 2\pi \times 795,8 \times 2 \cdot 10^{-5} = 0,1 \text{ A.}$$

Exercice 10

Schéma a

1) Relation entre i et $\frac{dq}{dt}$

2) Tension u_{AB} et u_{MN}

$$u_{AB} = \frac{q}{C};$$

$$u_{MN} = +e = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}.$$

3) Équation différentielle

$$u_{AB} = u_{MN} \Rightarrow -\frac{q}{C} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\Rightarrow +L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

4) Pulsation ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Schéma b

1) Relation entre i et $\frac{dq}{dt}$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

2) Tension u_{AB} et u_{MN}

$$u_{AB} = -\frac{q}{C}; \text{ (convention récepteur)}$$

$$u_{MN} = -e = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$$

3.a) Équation différentielle

$$u_{AB} = u_{MN} \Rightarrow -\frac{q}{C} = +L \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\Rightarrow L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

b) Pulsation ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Exercice 11

1) Justification du signe +

$i = + \frac{dq}{dt}$; i est algébrique et son signe dépend de celui de dq .

si $dq > 0$, $i > 0$; si $dq < 0$, $i < 0$

2) Équation différentielle :

• Aux bornes de la bobine

$$u_c = +e = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2} \quad (1)$$

• Aux bornes du condensateur

$$u_c = u_{AB} = \frac{q}{C}; \Rightarrow q = Cu_c$$

$$(1) \Rightarrow u_c = -L \frac{d^2(Cu_c)}{dt^2}$$

$$\Rightarrow u_c + LC \frac{d^2(u_c)}{dt^2} = 0$$

$$\text{En posant } \ddot{u}_c = \frac{d^2(Cu_c)}{dt^2},$$

$$\text{on a : } LC\ddot{u}_c + u_c = 0 \quad (2)$$

3) Période des Oscillations :

$$(2) \Rightarrow \ddot{u}_c + \frac{1}{LC} u_c = 0 \Rightarrow \ddot{u}_c + \omega_0^2 \cdot u_c = 0.$$

$$\text{On en déduit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

4)

4.1) Raison de l'amortissement :

L'amortissement est dû à la perte d'énergie par effet Joule dans le circuit du fait de la présence d'une résistance non nulle.

4.2) Allure de la courbe (voir Courbe)

Exercice 12

1)

1.1) Schéma du montage :

1.2) Phénomène produit entre le condensateur et la bobine :

Décharge du condensateur à travers la bobine

2)

2.1) Interprétation de l'allure de ce graphe :
Lorsqu'on ferme le circuit le condensateur se décharge. La tension à ses bornes oscille autour de sa valeur maximale avant de s'annuler.

2.2) Évolution de l'énergie électrique du circuit :

L'énergie électrique diminue au cours du temps.

2.3) Valeur de la pseudo période T des oscillations :

$$T = 4 \times 5 = 20 \text{ ms}$$

2.4) Phénomène électrique à l'origine de l'amortissement des oscillations :

La résistance interne de la bobine

2.5) Valeur numérique de l'inductance L :

$$T = 2\pi \sqrt{LC} \Rightarrow L = \frac{T^2}{4\pi^2 C};$$

$$\text{AN : } L = 1 \text{ H}$$

Exercice 13

1) Montage

2)

2.1) Tension représentée par la courbe ① et ②
La courbe ① représente la tension aux bornes du générateur.

La courbe ② la tension aux bornes du condensateur.

2.2) Interprétation

La tension u_G aux bornes du générateur varie constamment entre zéro et une valeur constante E . Pendant ces variations le condensateur se charge et se décharge. Ces charges et décharges sont oscillantes et amorties à cause de la résistance.

Exercice 14

1)

1.1) Équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$u = \frac{q}{C_1} ; u = +e = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{q}{C_1} = -L \frac{d^2q}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC_1} q = 0(1)$$

1.2) Expression littérale de la tension $u(t)$.

La solution de l'équation différentielle (1) est

$$q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Or $u = \frac{q}{C_1}$ d'où $u(t) = \frac{Q_m}{C_1} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ou

$$u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ avec } U_m = \frac{Q_m}{C_1}.$$

2)

2.1) Charge Q_1 :

$$Q_1 = \frac{1}{2} C U_1 = 1,2 \cdot 10^{-6} \times 40 = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ C}$$

2.2) Énergie E_1 emmagasinée :

$$E_1 = \frac{1}{2} C U_1^2 = 9,6 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

2.3) Valeurs de la tension maximale et de la pulsation :

$$U_m \leftrightarrow 2 \text{ div d'où } U_m = 2 \times 20 = 40 \text{ V}$$

$$T_0 \leftrightarrow 4 \text{ div d'où } T_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s d'où } \omega_0 = 1000\pi$$

$$; \omega_0 = 3142 \text{ rad.s}^{-1}$$

2.4) Valeur de l'inductance L de la bobine :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC_1} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 C_1} ;$$

A.N. : $L = 0,084 \text{ H}$

3)

3.1) Énergie emmagasinée dans le condensateur :
Le condensateur :

$$E_c = \frac{1}{2} C_1 u^2 = \frac{1}{2} C_1 U_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$q = C_1 u = C_1 U_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow i = \frac{dq}{dt}$$

$$= -C_1 \omega_0 U_m \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

3.2) Énergie emmagasinée dans la bobine :

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L C_1^2 \omega_0^2 U_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

$$\text{En utilisant } \omega_0^2 = \frac{1}{LC_1},$$

$$\text{on a : } E_L = \frac{1}{2} C_1 U_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

3.3) Énergie totale emmagasinée dans le circuit :

$$E_T = E_c + E_L = \frac{1}{2} C_1 U_m^2 (\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi))$$

$$E_T = E_c + E_L = \frac{1}{2} C_1 U_m^2 ; E_T = 9,6 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

4) On a $E_T = E_1 \Rightarrow L$ 'énergie totale se conserve.

Exercice 15

1) Phénomène mis en évidence :

Charge et décharge du condensateur.

2)

2.1) • Expression de la charge $q(t)$ du condensateur :

$$q(t) = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) ; \text{ on a : } Q_m = C U_m, \text{ or}$$

$$U_m = 3 \times 1 = 3 \text{ V.}$$

$$\text{donc } Q_m = 0,1 \cdot 10^{-6} \times 3 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{8 \times 0,2 \times 10^{-3}} ; \omega_0 = 1250\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

à $t = 0, q_0 = Q_m \cos\varphi = Q_m \Rightarrow \cos\varphi = 1$ donc $\varphi = 0$
d'où l'expression : $q(t) = 3 \cdot 10^{-7} \cos(1250\pi t)$.

• Expression de l'intensité $i(t)$ du courant :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} ; i(t) = -3 \cdot 10^{-7} \times 1250\pi \sin(1250\pi t).$$

$$i(t) \approx -1,2 \cdot 10^{-3} \sin(1250\pi t)$$

2.2) Expression des énergies emmagasinée par la bobine et le condensateur :

• Condensateur :

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{[3.10^{-7} \cos(1250\pi t)]^2}{C}$$

$$E_c = 4,5.10^{-7} \cos^2(1250\pi t)$$

• Bobine :

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} L[-1,2.10^{-6} \sin(1250\pi t)]^2$$

$$\text{Or } T_0 = 2\pi \sqrt{LC} \Rightarrow L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C}$$

$$\text{AN : } L = 0,65 \text{ H}$$

On obtient alors l'expression :

$$E_m = 4,5.10^{-7} \sin^2(1250\pi t)$$

3) Représentation de $E_c(t)$ et $E_m(t)$.

4) Énergie totale du circuit :

$$E_T = E_c + E_m$$

$$E_T = 4,5.10^{-7} \cos^2(1250\pi t) + 4,5.10^{-7} \sin^2(1250\pi t)$$

$$E_T = 4,5.10^{-7} [\cos^2(1250\pi t) + \sin^2(1250\pi t)]$$

$$E_T = 4,5.10^{-7} \text{ J}$$

Exercice 16

1) Définition d'un oscillateur électrique :

Un oscillateur électrique est un système dont l'évolution est décrite par la variation périodique (ou pseudo périodique) d'une grandeur électrique.

2) Les caractéristiques des oscillations d'un oscillateur électrique LC :

- la pulsation propre ;
- la période propre ;
- la fréquence propre ;
- l'amplitude ;

- la phase à l'origine des dates.

3)

3.1) Valeurs entre lesquelles varie la capacité C du condensateur :

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{S_1}{e} = 8,84.10^{-12} \times \frac{3.10^{-4}}{0,4.10^{-3}} ;$$

$$C_1 = 66,3.10^{-13} \text{ F}$$

$$C_2 = \epsilon_0 \frac{S_2}{e} = 8,84.10^{-12} \times \frac{30.10^{-4}}{0,4.10^{-3}} ;$$

$$C_2 = 663.10^{-13} \text{ F}$$

$$66,3.10^{-13} \text{ F} < C < 663.10^{-13} \text{ F}$$

3.2) Domaine de fréquences des ondes pouvant être captées :

• Si $L = 1,5 \text{ mH}$:

$$N_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{1,5.10^{-3} \times 66,3.10^{-13}}} \approx 1,6 \text{ MHz}$$

$$N_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{1,5.10^{-3} \times 663.10^{-13}}} \approx 0,5 \text{ MHz}$$

$$0,5 \text{ MHz} < N < 1,6 \text{ MHz}$$

• Si $L = 35 \text{ mH}$

$$N_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{35.10^{-3} \times 66,3.10^{-13}}} \approx 0,33 \text{ MHz}$$

$$N_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{35.10^{-3} \times 663.10^{-13}}} \approx 0,11 \text{ MHz}$$

$$0,11 \text{ MHz} < N < 0,33 \text{ MHz}$$

Exercice 17

1) Attribuons à chaque courbe, en le justifiant, la valeur de la résistance totale du dipôle :

- Justification : plus R_T est élevé plus les oscillations sont amorties.
- Courbe 1 : $R_T = 2 \Omega$
- Courbe 2 : $R_T = 12 \Omega$
- Courbe 3 : $R_T = 70 \Omega$

2) Valeur de la période théorique T des oscillations :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{LC}$$

$$\text{AN : } T_0 = 2\pi \sqrt{9 \cdot 10^{-3} \times 20 \cdot 10^{-6}}$$

$$T_0 = 2,66 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

3) Valeur de la pseudo-période.

$$T = \frac{4 \times 5}{8}$$

$$T = 2,5 \text{ ms ou } 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

4) Comparaison : $T_0 > T$.

Exercice 18

1) Relation entre u et i :

D'après la loi des mailles : $u + u_d + u_R = 0$

$U_d = 0$ en régime linéaire $\Rightarrow u = -u_R$

Or $u_R = Ri'$ et $i = i'$

Alors $u = -Ri$.

2) Montrons que le montage de la figure 1 constitue une résistance négative :

On a : $u = -Ri$

Cette égalité montre que le dipôle se comporte comme une résistance négative de valeur $-R$.

3) Équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$ dans le cas de la figure 2 :

$$u_B + u_C = -u_G \text{ avec } u_G = u = -Ri$$

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = Ri$$

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt - Ri = 0$$

$$(r - R) \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0$$

4) Condition sur R pour avoir des oscillations sinusoidales :

Pour avoir des oscillations libres, il faut que $r - R = 0$.

Donc $r = R$.

Exercice 19

1) Définition d'un oscillateur électrique :

Un oscillateur électrique est un système dont l'évolution est décrite par la variation périodique (ou pseudo périodique) d'une grandeur électrique.

2)

2.1) Expression de la tension u_{AM} en fonction de i :

$$u_{AS} = R_2 i ; u_{BM} = R_1 i' ; u_{SM} = (R_1 + R_2) i'$$

$$\frac{u_{BM}}{u_{SM}} = \frac{R_1}{R_2 + R_1} \Rightarrow u_{BM} = \frac{R_1}{R_2 + R_1} u_{SM}$$

Or $u_{BM} = u_{AM}$ car l'AO fonctionne en régime linéaire

$$u_{SM} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} u_{AM} \text{ Or } u_{AS} = R_2 i$$

$$u_{AM} + u_{MS} = R_2 i \Rightarrow u_{AM} - \frac{(R_1 + R_2)}{R_1} u_{AM} =$$

$$\Rightarrow \left[1 - \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right]$$

$$u_{AM} = R_2 i \Rightarrow u_{AM} = -R_1 i$$

2.2) Équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur :

$$u_R + u_B + u_C + u_{AM} = 0$$

$$\Rightarrow Ri + ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt - R_1 i = 0$$

$$(R + r - R_1)i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = 0.$$

$$\text{Or } i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int idt$$

$$d'où (R + r - R_1) \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

3) Explication : La relation $u_{AM} = -R_1 i$ correspond à la loi d'ohm appliquée à une résistance de valeur $-R_1$. Le dipôle AM est donc comparable à un conducteur ohmique de résistance négative.

4) Condition sur R_1 pour que le circuit soit oscillateur :

L'équation différentielle devant être de la

$$\text{forme : } L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0, \text{ il faut :}$$

$$R + r - R_1 = 0 \Rightarrow R_1 = R + r.$$

Leçon

3

Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé

IV. Exercices

Exercice 1

1) Définition d'un courant alternatif sinusoïdal : C'est un courant dont l'intensité est une **fonction sinusoïdale** du temps. Son expression est de la forme : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.

2) Caractéristiques d'un courant alternatif sinusoïdal :

I_m : Intensité maximale (amplitude) ;

$(\omega t + \varphi)$: la phase à la date t ;

ω : la pulsation ;

φ : la phase à l'origine des dates.

Exercice 2

1) (b) ; 2) (b) ; 3) (a)

Exercice 3

Dans un circuit RLC série en régime alternatif sinusoïdal de pulsation ω , la phase φ de la tension aux bornes du circuit par rapport à

l'intensité obéit aux relations :

$$\cos \varphi_{wi} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$\text{et } \tan \varphi_{wi} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

Exercice 4

N°	Propositions	Vrai	Faux
1	En courant alternatif sinusoïdal, l'impédance d'un dipôle dépend de la pulsation du courant.	×	
2	L'impédance d'un dipôle RLC se mesure à l'aide d'un ohmmètre.		×
3	Pour un dipôle donné et pour une pulsation donnée, lorsque la tension d'alimentation varie, l'intensité du courant qui traverse le dipôle varie.	×	

4	Lorsqu'on dit que la tension du secteur est 220 V, c'est d'une grandeur efficace qu'il s'agit.	×	
---	--	---	--

Exercice 5

Exercice 6

- Impédance Z radians (rad)
- Capacité henry (H)
- Résistance R farad (F)
- Phase φ ohm (Ω)
- Inductance L

Exercice 7

- 1) La tension u_1 est en avance sur la tension u_2
- 2) Expression de la phase φ en fonction τ et T :
 $|\varphi| = \omega \times \tau = 2\pi N \times \tau = \frac{2\pi \times \tau}{T}$, τ étant le décalage horaire entre les courbes

Exercice 8

- 1) et 2).

Dipôle considéré	Expression de l'impédance	Valeur de l'impédance
Conducteur ohmique de résistance R	$Z_R = R$	$Z_R = 50 \Omega$
Condensateur de capacité C	$Z_C = \frac{1}{C\omega}$	$Z_C = \frac{1}{10^{-6} \times 100\pi} = 3183 \Omega$
Bobine d'inductance L	$Z_B = L\omega$	$Z_B = 2.10^{-3} \times 100\pi = 0,628 \Omega$

Exercice 9

- 1) Intensité efficace I :

$$I = \frac{U}{R} \text{ or } U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \text{ d'où } I = \frac{U_m}{R\sqrt{2}}$$

Figure	1	2	3	4	5
U_m (V)	0,2	0,8	3	1	0,6
I(A)	2.10^{-3}	$8,1.10^{-3}$	3.10^{-2}	10^{-2}	$6,1.10^{-3}$

- 2) Impédance du dipôle RLC :

Figure	1	2	3	4	5
$Z = \frac{U}{I}$ (Ω)	1484,9	370	100	300	492

Exercice 10

- 1)

- 1.1) Intensité I du courant dans le circuit :

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$\text{AN : } I = \frac{5}{\sqrt{200^2 + (0,1 \times 2\pi \times 250 - \frac{1}{10^{-6} \times 2\pi \times 250})^2}}$$

$$I = 9,6.10^{-3} \text{ A ou } 9,6 \text{ mA}$$

- 1.2) Tensions efficaces U_R , U_B et U_C :

$$\bullet U_R = RI$$

$$\text{AN : } U_R = 200 \times 9,6 \cdot 10^{-3}$$

$$U_R = \mathbf{1,92 \text{ V}}$$

$$\bullet U_B = L\omega I = 2\pi NLI$$

$$\text{AN : } U_B = 2\pi \times 250 \times 0,1 \times 9,6 \cdot 10^{-3}$$

$$U_B = \mathbf{1,51 \text{ V}}$$

$$\bullet U_C = \frac{1}{C\omega}$$

$$\text{AN : } U_C = \frac{9,6 \cdot 10^{-3}}{2\pi \times 250 \times 10^{-6}}$$

$$U_C = \mathbf{6,11 \text{ V}}$$

2) Comparons la somme $U_R + U_B + U_C$ à U

$$U_R + U_B + U_C = 1,92 + 1,51 + 6,11 = 9,54 \text{ V}$$

$$U_R + U_B + U_C \neq U$$

Conclusion : Les tensions efficaces ne s'additionnent pas.

3) Impédances Z , Z_R , Z_B et Z_C .

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{5}{9,6 \cdot 10^{-3}} ; Z = 519,6 \Omega$$

$$Z_R = \mathbf{200 \Omega}$$

$$Z_B = L\omega = 2\pi NL$$

$$Z_B = \mathbf{157,1 \Omega}$$

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi NC}$$

$$Z_C = \mathbf{636,62 \Omega}$$

4) Comparons la somme $Z_R + Z_B + Z_C$ à Z .

$$Z_R + Z_B + Z_C = 993,7 \Omega$$

$$Z_R + Z_B + Z_C \neq Z$$

Conclusion : Les impédances ne s'additionnent pas.

Exercice 11

À l'aide des formules suivantes, on obtient le tableau ci-dessous.

$$\text{Tensions maximales } U_{1m} = K_{V1} \times d_{V1} ;$$

$$U_{2m} = K_{V2} \times d_{V2}$$

$$\text{Période : } T = K_H \times d_H$$

K_{V1} , K_{V2} : Sensibilité verticale ; K_H : Sensibilité horizontale

d_{V1} , d_{V2} : déviation verticale (maximale) ;

d_H : étalage d'une période.

Valeurs efficaces des tensions :

$$U_1 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}} ; U_2 = \frac{U_{2m}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Fréquence : } N = \frac{1}{T}$$

$$\text{Pulsation : } \omega = 2\pi N$$

$$\text{Phase : } |\varphi| = 2\pi \frac{\tau}{T} \text{ (rad) ou } |\varphi| = 360 \frac{\tau}{T} \text{ (degré) ;}$$

τ : décalage horaire (en seconde)

Figure	1	2
U_{1m} (V)	2	6
U_{2m} (V)	16	4
U_1 (V)	1,41	4,24
U_2 (V)	11,31	2,83
$\Delta\theta$ (ms)	1	0,04
φ (rad)	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
T(ms)	6	0,16
N(Hz)	166,67	6250
ω (rad ⁻¹)	1047,22	12500 π
u_1 (v)	$2 \cdot \cos(1047,22 \cdot t)$	$4 \cdot \cos(62,83 \cdot t)$
u_2 (v)	$16 \cdot \cos(1047,22t - \frac{\pi}{3})$	$4 \cdot \cos(62,83t + \frac{\pi}{2})$

Exercice 12

1) Impédance Z et $\tan\varphi$:

• Association série d'un conducteur ohmique (R) et d'un condensateur (C) :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \tan\varphi = -\frac{1}{RC\omega}$$

• Association série d'un conducteur ohmique (R) et d'une bobine (L) :

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \quad \tan\varphi = \frac{L\omega}{R}$$

• Association série d'un condensateur (C) et d'une bobine (L) :

$$Z = L\omega - \frac{1}{C\omega} \quad \tan\varphi = +\infty \text{ ou } \tan\varphi = -\infty$$

• Association série d'un conducteur ohmique (R), d'un condensateur (C) et d'une bobine (L) :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} ; \tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

2) Diagramme de Fresnel :

Cas δ (RLC série)

Exercice 13

1) Nature des dipôles :

a) A est une bobine d'inductance L et de résistance r.

Car $I_A(\text{continu}) \neq I_A(\text{alternatif})$ et $I_A \neq 0$

En courant continu

$$r = \frac{U_A}{I_A} = \frac{10}{8} r = 1,25 \Omega \quad r = 1,25 \Omega$$

En courant alternatif $Z = \frac{U_A}{I_A} = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}$

$$\Rightarrow L = \sqrt{\frac{Z - r^2}{\omega^2}}$$

$$L = \sqrt{\frac{\left(\frac{U_A}{I_A}\right)^2 - r^2}{4\pi^2 f^2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{10}{5}\right)^2 - (1,25)^2}{4\pi^2 \cdot 50^2}}$$

$$L = 4,97 \cdot 10^{-3} \text{ H} \approx 5 \text{ mH}$$

b) B est un conducteur ohmique car

$I_B(\text{continu}) = I_B(\text{alternatif})$

$$R = \frac{U_B}{I_B} = \frac{15}{7} \quad R = 2,1 \Omega$$

c) C' est un condensateur car en régime continu

$I_C = 0 \text{ A}$.

$$Z_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow C = \frac{I_C}{\omega U_C} = \frac{I_C}{2\pi f U_C}$$

A.N. $C = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2\pi \times 50 \times 10} \quad C = 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ F}$

2) Diagramme de Fresnel :

$R = 2,1 \Omega \longrightarrow 2,1 \text{ cm}$

$L\omega = 2\pi fL = 7,8 \Omega \longrightarrow 7,8 \text{ cm}$

$r = 1,25 \Omega \longrightarrow 1,25 \text{ cm}$

$\frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi f \cdot C} = 5 \Omega \longrightarrow 5 \text{ cm}$

Exercice 14

1) Diagramme de Fresnel :

Origine des phases : phase de i

Échelle : 1cm pour 10V.

$U_{AC} = 90 \text{ V} \rightarrow 9 \text{ cm}$

$U_{AB} = 50 \text{ V} \rightarrow 5 \text{ cm}$

$U_{BC} = 50 \text{ V} \rightarrow 5 \text{ cm}$

Origine des phases : phase de i

2) • Calcul de r :

Graphiquement :

$rI \rightarrow 3,1 \text{ cm} \rightarrow rI = 31 \text{ V}$

or $I = \frac{U_{AB}}{R} \quad I = \frac{50}{20} = 2,5 \text{ A}$

D'où : $r = \frac{31}{I} = \frac{31}{2,5} \quad r = 12,4 \Omega$

• Calcul de L :

Graphiquement :

$L\omega I \longrightarrow 4 \text{ cm} \longrightarrow L\omega I = 40 \text{ V}$

D'où $L = \frac{40}{\omega I} = \frac{40}{100 \cdot \pi \cdot 2,5}$

$L = 0,05 \text{ H} = 50 \text{ mH}$

Exercice 15

1) Valeurs efficaces :

• Intensité efficace :

$I_{\text{eff}} = I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{AN : } I = \frac{0,5}{\sqrt{2}} ; I = 0,35 \text{ A}$

• Tension efficace :

$U_{\text{eff}} = U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{AN : } U = \frac{25}{\sqrt{2}} ; U = 17,7 \text{ V}$

2) Fréquence du courant : $N = \frac{\omega}{2\pi}$

AN : $N = \frac{100\pi}{2\pi} ; N = 50 \text{ Hz}$

3)

3.1) Phase de la tension par rapport à

l'intensité du courant : $\varphi_{u/i} = + \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

3.2) Phase de l'intensité du courant par rapport à la tension : $\varphi_{i/u} = - \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

4) Impédance Z du circuit :

$Z = \frac{U}{I} = \frac{25}{0,5} ; Z = 50 \Omega.$

Exercice 16

1) Définition de la période T :

La période T de la tension est la plus petite durée pendant laquelle la tension prend la même valeur. C'est une grandeur qui peut s'exprimer en seconde, en heure ou en toute autre unité de temps.

2)

2.1) Période T et pulsation ω :

Période $T : T = 10 \times 1.10^{-3} \text{ s} ; T = 10^{-2} \text{ s}$

Pulsation $\omega : \omega = \frac{2\pi}{T} ; \omega = 628,3 \text{ rad.s}^{-1}$

2.2) Expression de l'intensité i :

• Valeurs de U_m et I_m :

$U_m = 3 \times 1 = 3 \text{ V} \quad U_{1m} = 2 \times 1 ; = 2 \text{ V}$

et $I_m = \frac{U_{1m}}{R_1} \quad I_m = 0,05 \text{ A}$

• Valeur de la phase φ :

$|\varphi| = \frac{2\pi}{T} \cdot \tau$

Or $\tau \longleftrightarrow 1 \text{ div}$ et $T \longleftrightarrow 10 \text{ div}$

d'où $|\varphi| = \frac{2\pi}{10} \times 1 ; |\varphi| = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$

• Expression de i

La tension u est en avance sur l'intensité i du courant. En effet la sinusoïde de la voie B, (u)

atteint son maximum avant la sinusoïde sur la voie A, (i) d'où $\varphi < 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{5}$

$$i = 0,05 \cos(628,3t - \frac{\pi}{5})$$

3) Valeur de l'inductance L de la bobine :

$$Z = \sqrt{(R_1 + R)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \text{ avec } Z = \frac{U}{I}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - (R_1 + R)^2}$$

$$\text{Ou } L = \frac{1}{C\omega^2} - \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - (R_1 + R)^2}$$

$$\text{A.N : } L = 0,56 \text{ H ou } L = 0,45 \text{ H}$$

Exercice 17

1) Complétons le tableau ci-dessus en justifiant l'identification de chaque dipôle.

Dipôles	I_1 (A)	I_2 (A)	$\frac{U_1}{I_1}$ (Ω)	$\frac{U_2}{I_2}$ (Ω)
D_1	3,2	2,4	3,75	2,5
D_2	2,5	1,25	4,8	4,8
D_3	5.10^{-3}	0	$2,4.10^3$	

Justifications :

- En courant continu, D_3 n'est traversé par aucun courant ($I_2 = 0$ A) donc D_3 est à la 4^{ème} ligne du tableau.

- Pour D_2 , on a $\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \text{cste} = 4,8 \frac{V}{A}$.

Donc D_2 est à la 3^{ème} ligne du tableau.

- On déduit que D_1 est à la 2^{ème} ligne.

2)

2.1) Valeur de la résistance R du conducteur ohmique :

$$R = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} ; R = 4,8 \Omega$$

2.2) Valeur de la capacité C du condensateur :

$$Z_c = \frac{1}{C\omega} = \frac{U_1}{I_1} \Rightarrow C = \frac{I_1}{\omega U_1} = \frac{I_1}{2\pi N U_1}$$

$$\text{AN : } C = \frac{5.10^{-3}}{2\pi \times 50 \times 12}$$

$$C = 1,32.10^{-6} \text{ F ou } 1,32 \mu\text{F}$$

2.3)

- Valeur de la résistance r : $r = \frac{U_2}{I_2}$

$$\text{AN : } r = 2,5 \Omega$$

- Valeur de L

$$Z_B = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2} = \frac{U_1}{I_1}$$

$$L = \frac{1}{2\pi N} \sqrt{\frac{U_1^2}{I_1^2} - r^2}$$

$$L = \frac{1}{2\pi 50} \sqrt{3,75^2 - 2,5^2}$$

$$L = 8,9.10^{-3} \text{ H ou } 8,9 \text{ mH}$$

Exercice 18

1)

1.1) Expression de la phase $\varphi_{u/i}$ entre la tension u et l'intensité i :

$$\text{tg } \varphi_{u/i} = \frac{-\frac{1}{C\omega}}{R} = -\frac{1}{RC\omega}$$

1.2) Expression de l'impédance Z du dipôle RC :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

2)

2.1) Valeur de la période T et la fréquence f de la tension d'alimentation :

- Période : $T = 10 \times 1 = 10 \text{ ms ou } 10^{-2} \text{ s}$

- Fréquence : $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-2}} \quad f = 100 \text{ Hz}$.

2.2) Valeur de la phase $\varphi_{u/i}$ entre la tension u et l'intensité i du courant passant dans le circuit :

- La voie 1 permet de visualiser la tension u_R aux bornes du conducteur ohmique et donc l'intensité du courant dans le circuit.

- La voie 2 permet de visualiser la tension u aux bornes du circuit.

En observant les courbes, on constate que le courant i est en avance de phase par rapport à la tension u.

$$\text{Donc } \varphi_{u/i} < 0 ; \varphi_{u/i} = -\frac{2\pi \times \tau}{T}$$

$$\text{AN : } \varphi_{u/i} = -\frac{2\pi \times 2}{10}$$

$$\varphi_{u/i} = -\frac{2\pi}{10} \text{ rad} = -0,628 \text{ rad}$$

2.3) Valeurs maximales de u et u_R .

Valeur maximale de u : $U_{\max} = 5 \times 5 = 25 \text{ V}$

Valeur maximale de u_R : $U_{R\max} = 4 \times 2 = 8 \text{ V}$

3)

3.1) Valeurs efficaces :

- U et U_R de u et u_R :

$$\bullet U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} ; U = 17,68 \text{ V}$$

$$U_R = \frac{U_{R\max}}{\sqrt{2}} ; U_R = 5,66 \text{ V}$$

- I de i :

$$\bullet I_{\max} = \frac{U_{R\max}}{R}$$

$$\bullet I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{U_{R\max}}{R\sqrt{2}}$$

$$I = \frac{8}{40\sqrt{2}} ; I = 0,14 \text{ A}$$

3.2) Valeur de l'impédance Z du dipôle RC :

$$Z = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} = \frac{RU_{\max}}{U_{R\max}}$$

$$\text{AN : } Z = \frac{40 \times 25}{8} ; Z = 125 \Omega$$

4) Représentation de Fresnel :

Expression de $\cos\varphi$ en fonction de R et Z :

$$\cos\varphi = -\frac{RI}{ZI} = -\frac{R}{Z}$$

$$|\cos\varphi| = \frac{R}{Z}$$

Exercice 19

1) Tension alternative sinusoïdale :

Une tension alternative sinusoïdale est une tension représentée par une fonction sinusoïdale du temps de la forme :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

2) Identification des dipôles :

• En courant continu la boîte N°1 ne laisse pas passer le courant électrique ($I = 0\text{A}$), donc elle contient un condensateur.

• Pour la boîte N°2 : $\frac{U}{I} = \text{cte} = 50 \Omega$.

Cette boîte contient un conducteur ohmique.

Pour la boîte N°3 : $\frac{U}{I} = 50 \Omega$ en courant

continu $\frac{U}{I} = 59,11 \Omega$ en courant alternatif.

Le résultat différent suggère que la boîte N°3 contient une bobine.

3) Valeurs de L et de C :

• Valeur de L :

$$Z_B = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2} = \frac{U_3}{I_3}$$

$$L = \frac{1}{2\pi N} \sqrt{\frac{U_3^2}{I_3^2} - r^2} \text{ or } r = \frac{U_2}{I_2} = 50 \Omega$$

$$L = \frac{1}{2\pi \times 50} \sqrt{59,11^2 - 50^2}$$

$L = 0,1 \text{ H}$

• Valeur de C :

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{U_2}{I_1} \Rightarrow C = \frac{I_1}{\omega U_2} = \frac{I_1}{2\pi N U_2}$$

$$\text{AN : } C = \frac{75 \cdot 10^{-3}}{2\pi \times 50 \times 24}$$

$C = 9,95 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ ou $9,95 \mu\text{F}$

Leçon

4

Résonance d'intensité d'un circuit RLC série

IV. Exercices

Exercice 1

- 1) (a) 2) (b)

Exercice 2

- (b)

Exercice 3

1) Si l'on applique une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace constante et de pulsation ω variable à un circuit RLC série, l'intensité efficace traversant le circuit est maximale pour la pulsation ω égale à la **pulsation propre** ω_0 pour laquelle l'impédance du dipôle vaut **la résistance totale du circuit** : c'est la **résonance d'intensité**.

2) La résonance d'intensité d'un circuit RLC série est obtenue lorsque **la tension aux bornes du dipôle RLC** et l'intensité du courant dans le circuit sont en phase.

3) La bande passante est l'intervalle des pulsations pour lesquelles l'**intensité efficace**

I est supérieure ou égale à $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

Exercice 4

Dans un circuit RLC série à la résonance d'intensité, il y a surtension aux bornes de la bobine et du condensateur

Exercice 5

- La pulsation de la tension fournie par le générateur est égale à la pulsation propre du circuit ;
- L'intensité du courant dans le circuit et la tension aux bornes du dipôle RLC sont en phase ;
- L'amplitude de l'intensité et sa valeur efficace sont maximales.

Exercice 6

Exercice 7

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$A.N : \frac{1}{2\pi\sqrt{1 \times 10.10^{-6}}} ; N_0 = 50 \text{ Hz.}$$

Exercice 8

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; C = \frac{1}{L\omega_0^2}$$

$$A.N : \frac{1}{50.10 - 3 \times (100\pi)^2} ;$$

$$C = 2,03.10^{-4} \text{ F} ; C = 203 \text{ } \mu\text{F.}$$

Exercice 9

1) La valeur de la fréquence N_0 du courant électrique pour obtenir la résonance :

$$\text{À la résonance d'intensité, } N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$A.N : N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,25 \times 1,5 \cdot 10^{-6}}};$$

$$N_0 = \mathbf{260 \text{ Hz.}}$$

2)

2.1) Le facteur de qualité Q du circuit:

$$Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad A.N : Q = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{0,25}{1,5 \cdot 10^{-6}}};$$

$$Q = \mathbf{41.}$$

2.2) Le rapport U_c et de U :

$$\frac{U_c}{U} = \frac{I_0}{C} \times \frac{1}{rI_0} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q$$

$$\frac{U_c}{U} = \mathbf{41\sqrt{LC}}$$

3) Conclusion : $U_c = QU$: la tension efficace aux bornes du condensateur d'un circuit RLC est égale au produit de la tension efficace imposée aux bornes du circuit par son facteur de qualité :

Il y a surtension aux bornes du condensateur

Exercice 10

1) La valeur de la capacité C du condensateur qu'il faut utiliser :

$$N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; C = \frac{1}{4\pi^2 LN_0^2}.$$

$$A.N : C = \frac{1}{4\pi^2 \times 1 \times 50^2}; C = 10^{-5} \text{ F}; C = \mathbf{10 \mu\text{F.}}$$

2) Le coefficient de surtension de ce circuit :

$$Q = \frac{2\pi N_0 L}{r}; A.N : Q = \frac{2\pi \times 1 \times 50}{100};$$

$$Q = \mathbf{3,14}$$

3) La tension aux bornes du condensateur $U_c = QU$; $A.N : U_c = 3,14 \times 220$; $U_c = \mathbf{691 \text{ V.}}$

Exercice 11

1) Le phénomène qui est ainsi mis en évidence est le phénomène de résonance d'intensité.

2)

2.1) L'impédance totale Z du circuit dans ce cas : $Z = R = \mathbf{40 \Omega}$.

2.2) la valeur efficace I_0 de l'intensité du courant :

$$I_0 = \frac{U}{R}; A.N : I_0 = \frac{1}{40}; I_0 = \mathbf{0,025 \text{ A}};$$

$$I_0 = \mathbf{25 \text{ mA.}}$$

2.3) La capacité C du condensateur :

$$C = \frac{1}{4\pi^2 LN_0^2}; A.N : C = \mathbf{5,4 \cdot 10^{-7} \text{ F}}; C = \mathbf{0,54 \mu\text{F.}}$$

3)

3.1) Bande passante

$$\Delta N = \frac{R}{2\pi L} = \frac{40}{2\pi \times 0,13} = \mathbf{49 \text{ Hz}}$$

3.2) Facteur de qualité

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{600}{49} = \mathbf{12,24}$$

3.3) Valeurs efficaces de U_R , U_L et U_C

des tensions.

$$\bullet U_R = R \cdot I_0 = 40 \times 0,025; U_R = \mathbf{1 \text{ V.}}$$

$$\bullet U_C = Z_C \cdot I_0 = \frac{I_0}{2\pi N_0 C}$$

$$= \frac{1}{2\pi \times 600 \times 5,410^{-7}}; U_C = \mathbf{12,3 \text{ V.}}$$

$$\bullet U_L = L \omega I_0 = 2\pi L N_0 I_0$$

$$= 2\pi \times 0,13 \times 600 \times 0,025; U_L = \mathbf{12,2 \text{ V.}}$$

Exercice 12

1) La courbe représentée sur le graphique est la courbe de résonance d'intensité.

2)

2.1) La fréquence de résonance N_0 a pour valeur $N_0 = 550 \text{ Hz}$.

2.2) L'intensité I_0 du courant à la résonance a pour valeur $I_0 = 14,8 \text{ mA}$.

2.3) La bande passante à 3 dB d'un circuit RLC série est l'intervalle des fréquences

pour lesquelles $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, I_0 étant l'intensité efficace maximale ou intensité à la résonance. Avec $I_0 = 14,8$ mA, on a : $I \geq \frac{14,8}{\sqrt{2}}$, soit $I \geq 10,46$ mA.

$$\Delta N = N_2 - N_1 = 620 - 480 ; \Delta N = 140 \text{ Hz.}$$

3)

3.1) Valeur de la résistance totale R_{totale} du circuit : $U = R_{\text{totale}} I_0$

$$R_{\text{totale}} = \frac{U}{I_0} = \frac{1}{14,8 \cdot 10^{-3}} ; \Delta N : R_{\text{totale}} = 67,6 \Omega$$

3.2) Valeurs de l'inductance L et de la résistance r de la bobine :

$$\bullet L = \frac{R_{\text{totale}}}{2\pi\Delta N} ; \Delta N : L = \frac{67,6}{2\pi \times 140} ;$$

$$L = 7,68 \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

• Valeur de la résistance r de la bobine :

$$r = R_t - R = 67,6 - 47,3 = 20,3 \Omega.$$

3.3) La valeur de la capacité C du condensateur :

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L N_0^2}.$$

$$\Delta N : C = \frac{1}{4\pi^2 \times 0,0768 \times 550^2} ;$$

$$C = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ F ou } C = 1,1 \mu\text{F}$$

Exercice 13

1) Symboles des éléments constituant le dipôle RLC.

2) Tracé de la courbe de la résonance $I = f(N)$.

3.1) La fréquence de résonance est :

$$N_0 = 2325 \text{ Hz.}$$

3.2) L'intensité efficace maximale I_0 correspondante est : $I_0 = 130$ mA.

4)

4.1) La bande passante à 3 dB d'un circuit RLC série est l'intervalle des fréquences pour lesquelles $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, I_0 étant l'intensité efficace maximale ou intensité à la résonance.

Avec $I_0 = 130$ mA, on a : $I \geq \frac{130}{\sqrt{2}}$, soit $I \geq 91,92$ mA

Ce qui donne $N_2 \approx 2385$ Hz et $N_1 \approx 2265$ Hz
 $\Delta N = N_2 - N_1 = 2385 - 2265 ; \Delta N = 120$ Hz

4.2) L'inductance L de la bobine :

$$L = \frac{1}{4\pi^2 C N_0^2}.$$

$$L = \frac{1}{4\pi^2 \times 0,5 \cdot 10^{-6} - 6 \times 2325^2}$$

$$L = 9,4 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 10^{-2} \text{ H}$$

4.3) Le facteur de qualité Q du circuit :

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N} ; Q = \frac{2325}{120} ; Q = 19,4.$$

4.4) La résistance R du circuit :

$$R = \frac{1}{2\pi Q C N_0}$$

$$\Delta N : R = \frac{1}{2\pi \times 19,4 \times 2325 \times 0,5 \cdot 10^{-6}}$$

$$R = 7 \Omega.$$

Exercice 14

1) Définition d'un circuit inductif :

Un circuit est dit inductif si l'effet d'inductance l'emporte sur l'effet de capacité : $\varphi > 0$ et $\omega > \omega_0$; la tension est en avance sur le courant.

2)

2.1) Valeur de la résistance interne r de la bobine :

$$R + r = \frac{U_0}{I_0} ; r = \frac{U_0}{I_0} - R.$$

$$\Delta N : r = \frac{1}{0,05} ; r = 8 \Omega.$$

2.2) Valeur de la capacité C du condensateur :

$$E = \frac{1}{2} C U_0^2 ; C = \frac{2E}{U_0^2} ; C = \frac{2 \times 5 \cdot 10^{-6}}{1} ;$$

$$C = 10^{-5} \text{ F} ; C = 10 \mu\text{F}.$$

2.3) Valeur de l'impédance Z du circuit :

$$Z = \frac{U}{I}; \quad \text{A.N. : } Z = \frac{5}{0,5};$$

$$Z = 10 \Omega.$$

2.4) Les valeurs possibles L_1 et L_2 de l'inductance avec $L_1 < L_2$:

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$Z^2 = r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = Z^2 - r^2.$$

$$\text{A.N. : } \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 10^2 - 8^2;$$

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 36$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 6; \quad L\omega - \frac{1}{C\omega} = -6;$$

$$L_2 = \frac{6 + \frac{1}{C\omega}}{\omega} \quad \text{ou} \quad L_1 = \frac{-6 + \frac{1}{C\omega}}{\omega}.$$

$$\text{A.N. : } L_1 = \frac{-6 + \frac{1}{10^{-5} \times 2000}}{2000}; \quad L_1 = 0,022 \text{ H}$$

$$\text{et } L_2 = \frac{6 + \frac{1}{10^{-5} \times 2000}}{2000}; \quad L_2 = 0,028 \text{ H}$$

3) Tracé de la courbe $I = f(\omega)$.

4)

4.1) Comparons ω' et ω_0

Lorsqu'on augmente légèrement la pulsation, la valeur efficace de l'intensité décroît. Donc $\omega' > \omega_0$

4.2) Nature du circuit pour $L = L_1$.

$$\text{Pour } L = L_1; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}.$$

$$\text{A.N. : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,022 \times 10^{-5}}}; \quad \omega_0 = 2132 \text{ rad.s}^{-1}.$$

On constate que $\omega' < \omega_0$.
Donc le circuit est capacitif.

Exercice 15

1) Tensions visualisées

1.1) La tension visualisée sur la voie 1 est la tension aux bornes du conducteur ohmique.

1.2) La tension visualisée sur la voie 2 est la tension aux bornes du GBF ou du dipôle RLC.

2)

2.1) La période du signal obtenu est :

$$T = \frac{4 \text{ div} \times 1 \text{ ms}}{1 \text{ div}}; \quad T = 4 \text{ ms} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

2.2) La pulsation ω de la tension variable produite par le GBF :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4 \cdot 10^{-3}}; \quad \omega = 1570,8 \text{ rad.s}^{-1}.$$

2.3) Les amplitudes de la tension u_i et u :

$$U_{im} = \frac{1 \text{ div} \times 0,1 \text{ V}}{1 \text{ div}}; \quad U_{im} = 0,1 \text{ V}$$

$$U_m = \frac{2 \text{ div} \times 0,25 \text{ V}}{1 \text{ div}}; \quad U_m = 0,5 \text{ V}.$$

3) Calcul :

3.1) de l'amplitude de l'intensité i du courant dans le circuit RLC :

$$I_m = \frac{U_{im}}{R}. \quad \text{A.N. : } I_m = \frac{0,1}{4}; \quad I_m = 0,025 \text{ A}.$$

3.2) de l'impédance Z du dipôle RLC :

$$Z = \frac{U_m}{I_m}; \quad \text{A.N. : } Z = \frac{0,5}{0,025}; \quad Z = 20 \Omega.$$

3.3) de la valeur de l'inductance L dans

$$\text{l'expérience (a) : } Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

$$Z^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2. \quad \text{Or } L\omega - \frac{1}{C\omega} > 0$$

car la tension est en avance de phase sur l'intensité i du courant.

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \sqrt{Z^2 - R^2};$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \sqrt{20^2 - 4^2}. \quad L\omega - \frac{1}{C\omega} = 19,6;$$

$$L = \frac{19,6 + \frac{1}{8 \cdot 10^{-6} \times 1570}}{1570}; \quad L = 0,063 \text{ H}.$$

4)

4.1) Dans l'expérience (b), le phénomène physique observé est la résonance d'intensité car la tension u et l'intensité i du courant sont en phase.

4.2) La valeur de l'inductance L dans l'expérience (b) :

$$L = \frac{1}{C\omega^2}.$$

$$\text{A.N. : } L = \frac{1}{8.10^{-6} \times 1570^2};$$

$$L = \mathbf{0,05 \text{ H}} \text{ ou } L = \mathbf{50 \text{ mH}}.$$

Exercice 16

1) Grandeurs physiques :

12 V : valeur efficace de la tension aux bornes du GBF ;

$12\sqrt{2}$ V : amplitude (ou valeur maximale) de la tension aux bornes du GBF ;

$100\pi \text{ rad.s}^{-1}$: pulsation de la tension délivrée par le GBF ;

0,92 rad : phase de la tension u aux bornes du GBF par rapport à l'intensité i courant dans le circuit.

2) Détermination :

2.1) de l'impédance Z du circuit :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{12}{1,2}, \mathbf{Z = 10 \Omega}.$$

2.2) de la valeur de la résistance r de la bobine :

$$r = Z \cos\varphi = 10 \times \cos 0,92; \mathbf{r = 6 \Omega}$$

de la valeur de l'inductance L de la bobine :

$$Z = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}; L = \frac{\sqrt{Z^2 - r^2}}{\omega}.$$

$$\text{A.N. : } L = \frac{\sqrt{10^2 - 6^2}}{100\pi}; \mathbf{L = 0,025 \text{ H}}.$$

3) Détermination de :

3.1) la valeur de la capacité C du condensateur :

À la résonance : $\omega = \omega_0$; $LC\omega_0^2 = 1$;

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2}. \text{ A.N. : } C = \frac{1}{0,025 \times (100\pi)^2};$$

$$\mathbf{C = 4.10^{-4} \text{ F}};$$

3.2) l'intensité efficace I_0 du courant dans le

$$\text{circuit : } I_0 = \frac{U}{r}. \text{ A.N. : } I_0 = \frac{12}{6}; \mathbf{I_0 = 2 \text{ A}}.$$

3.3 La valeur de la tension efficace U_C aux bornes du condensateur :

$$U_C = \frac{I_0}{C\omega}. \text{ A.N. : } U_C = \frac{2}{4.10^{-4} \times 100\pi};$$

$$\mathbf{U_C = 15,92 \text{ V}}.$$

4) Facteur de qualité du circuit :

$$Q = \frac{U_C}{U}. \text{ A.N. : } Q = \frac{15,92}{12}; \mathbf{Q = 1,33}.$$

Leçon

5

Puissance en régime sinusoïdal

Exercices

Exercice 1

1) Le facteur de puissance du circuit RLC série s'écrit : $\cos \varphi$.

2) L'expression de la puissance moyenne en courant alternatif est : $\mathbf{P = U.I \cos \varphi}$.

3) La puissance échangée par le dipôle RLC série est : $\mathbf{P = R.I^2}$; c'est la puissance électrique reçue par le conducteur ohmique.

4) Toute l'énergie consommée dans un dipôle RLC est transformée en **énergie calorifique** par effet Joule.

Exercice 2

Dipôle	Conducteur ohmique
Facteur de puissance	1
Bobine de résistance négligeable	Condensateur parfait
0	0

Exercice 3

On utilise des lignes à haute tension pour transporter l'électricité parce que l'augmentation de la tension limite les pertes d'énergie.

En effet, la perte est définie par la formule $P_j = R I^2$ (avec R résistance). On voit donc que plus l'intensité du courant est grande, plus la perte est importante sur le réseau. Pour une même puissance transportée, les pertes par effet Joule dans les câbles sont d'autant plus faibles que le courant est faible.

Or Pour une puissance donnée, plus la tension est élevée et plus l'intensité du courant est faible.

C'est pourquoi, le producteur d'électricité transporte le courant en haute tension le plus longtemps possible, afin d'avoir moins de perte.

Exercice 4

1) La puissance moyenne mise en jeu dans un circuit électrique a pour expression

$P = U.I \cos \varphi$; $\cos \varphi$ est appelé facteur de puissance du circuit.

2) En plus de l'élévation de la tension électrique lors du transport du courant électrique, il faut également augmenter le **facteur de puissance** de chaque réseau d'utilisation pour **réduire** les pertes en lignes.

Exercice 5

Exercice 6

En régime alternatif sinusoïdal, toute la puissance moyenne consommée par un dipôle RLC est transférée à l'extérieur sous forme de chaleur.

Exercice 7

Dipôle	Valeur de la phase φ de u par rapport à i.
Conducteur ohmique	$\varphi = 0$ rad
Bobine non résistive	$\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad
Condensateur parfait	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad

Expression ou valeur de la puissance consommée	Expression ou valeur de l'énergie consommée
$P = U.I = R.I^2$	$E = U.I.\Delta t = R.I^2.\Delta t$
$P = 0$ W	$E = 0$ J
$P = 0$ W	$E = 0$ J

Exercice 8

1)

U : valeur efficace de la tension aux bornes du dipôle ;

I : valeur efficace de l'intensité du courant qui parcourt le dipôle ;

φ : phase de la tension aux bornes du dipôle par rapport à l'intensité du courant qui le parcourt.

2)

UI : Puissance apparente ;

$\cos \varphi$: Facteur de puissance.

Exercice 9

1) Valeur de la phase : $\varphi = -\frac{\pi}{10}$ rad.

2) Calcul:

2.1) du facteur de puissance :

$$\cos \varphi = \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) ; \cos \varphi = 0,95.$$

2.2) de la puissance moyenne consommée :

$$P = UI \cos \varphi.$$

$$A.N : P = \frac{311}{\sqrt{2}} \times \frac{2,5}{\sqrt{2}} \cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) ;$$

$$P = 370 \text{ W.}$$

3) L'énergie consommée par l'appareil :

$$E = P.\Delta t. \quad A.N : E = 370 \times 10 \times 3600 ;$$

$$E = 13,32.10^6 \text{ J} ; E = 370 \times 10 ; E = 3,7 \text{ kWh.}$$

Exercice 10

1) L'intensité efficace du courant électrique :

$$I = \frac{U}{R+r} \quad \text{A.N : } I = \frac{24}{10+2} ; I = 2 \text{ A.}$$

2) La valeur de la bande passante :

$$\Delta N = \frac{R+r}{2\pi L} \quad \text{A.N : } \Delta N = \frac{12}{2\pi \times 0,1} ;$$

$$\Delta N = 19 \text{ Hz.}$$

3) La valeur du facteur de qualité du circuit :

$$Q = \frac{N_0}{\Delta N} = \frac{\omega_0}{2\pi\Delta N} = \frac{1}{2\pi\Delta N\sqrt{LC}}.$$

$$\text{A.N : } Q = \frac{1}{2\pi \times 19 \times \sqrt{0,1 \times 10^{-6}}} ; Q = 26,5.$$

4) Le facteur de puissance du circuit à la résonance :

À la résonance u et i sont en phase ; $\varphi = 0$ rad ; $\cos \varphi = 1$.

5) La puissance consommée en moyenne dans le circuit :

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi ; P = 24 \times 2 \times 1 ; P = 48 \text{ W.}$$

Exercice 11

1) Expression de la puissance électrique P consommée par l'installation : $P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$.

2) Expression de la puissance P_J perdue par effet Joule dans la ligne de transport :

$$P_J = r I^2 \quad \text{ou} \quad P_J = \frac{P^2}{U^2 \cos^2 \varphi}$$

$$3) \quad \frac{P_J}{P} = r \frac{P}{U^2 \cos^2 \varphi}.$$

Pour $U = 20$ kV,

$$\frac{P_J}{P} = 100 \times \frac{200 \cdot 10^3}{(20 \cdot 10^3)^2 \times (0,9)^2} ; \frac{P_J}{P} = 0,062$$

Pour $U = 220$ V,

$$\frac{P_J}{P} = 100 \times \frac{200 \cdot 10^3}{(220)^2 \times (0,9)^2} ; \frac{P_J}{P} = 510.$$

Les pertes par effet Joule sont plus importantes lorsque le transport de l'électricité se fait sous une tension de 220 V que sous une tension de 20 kV.

4) Le transport de l'énergie électrique se fait sous une tension très élevée par la Compagnie d'électricité pour minimiser les pertes.

5)

$$5.1) \quad \frac{P_J}{P} = 100 \times \frac{200 \cdot 10^3}{(20 \cdot 10^3)^2 \times (0,7)^2} ;$$

$$\frac{P_J}{P} = 0,102.$$

Pour un facteur de puissance égal à 0,9 il y a 6,2% de perte alors que pour un facteur de puissance égal à 0,7 il y a 10,2 % de perte par effet Joule.

5.2) Lorsque le facteur de puissance est faible, la perte d'énergie par la Compagnie est plus importante. C'est pour cette raison qu'elle pénalise les consommateurs dont l'installation a un facteur de puissance faible.

Exercice 12

1)

1.1) Valeur de la puissance moyenne consommée par la bobine.

$P_L = U_B I \cos \varphi_{u/i}$ avec U_B la tension efficace aux bornes de la bobine et $\varphi_{u/i}$ la phase de la tension aux bornes de la bobine par rapport à i .

$$\varphi_{u/i} = + \frac{\pi}{2} \text{ rad. Alors } \cos \varphi_{u/i} = 0 ;$$

d'où $P_L = 0$ J.

1.2) Valeur de la puissance moyenne consommée par le condensateur

$P_C = U_C I \cos \varphi_{u/i}$ avec U_C la tension efficace aux bornes de la bobine et $\varphi_{u/i}$ la phase de la tension du condensateur par rapport à i .

$$\varphi_{u/i} = - \frac{\pi}{2} \text{ rad ; alors } \cos \varphi_{u/i} = 0 ; \text{ d'où } P_C = 0 \text{ W.}$$

2) Expression de la puissance moyenne consommée par le circuit en fonction de R et I :

$P = R I^2$, car le condensateur et la bobine ne consomment pas de puissance.

3) Calcul de :

3.1) la puissance moyenne maximale P_0 consommée par le circuit :

$$P_0 = U I_0 \cos \varphi = U I_0 \quad P_0 = 4 \times 0,02 ;$$

$$P_0 = 0,08 \text{ W soit } 80 \text{ mW} ;$$

3.2) la résistance R du conducteur ohmique :

$$R = \frac{P}{I_0^2} \quad \text{A.N : } R = \frac{0,08}{0,02 \times 0,02} ;$$

$$R = 200 \Omega.$$

4)

4.1) Détermination de la puissance moyenne

consommée pour $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$:

$$P = RI^2 = R \frac{I_0^2}{2} = \frac{P_0}{2} \quad \text{A.N : } P = \frac{0,08}{2} ;$$

P = 0,04 W.

4.2) Détermination du facteur de puissance :

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{P \times \sqrt{2}}{UI_0} .$$

$$\text{A.N : } \cos \varphi = \frac{0,04 \times \sqrt{2}}{4 \times 0,02} \quad \text{cos } \varphi = \mathbf{0,71} .$$

Exercice 13

1) Valeurs efficaces de la tension:

1.1) aux bornes du conducteur ohmique est :

$$U_{AB} = 50 \text{ V}$$

1.2) aux bornes de la bobine est : $U_{BC} = 50 \text{ V}$.

2)

2.1) La valeur efficace de l'intensité du

courant électrique : $I = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{50}{20}$; **I = 2,5 A.**

2.2) Les valeurs des impédances Z du circuit et Z_b de la bobine :

$$Z = \frac{U_{AC}}{I} = \frac{90}{2,5} ; Z = 36 \Omega \quad Z_b = \frac{U_{BC}}{I} = \frac{50}{2,5} ;$$

$$Z_b = 20 \Omega .$$

3) Construction du diagramme de Fresnel :

4)

4.1) Les valeurs de la résistance r et de

l'inductance L de la bobine :

$$rI = 30 ; r = \frac{30}{I} ; r = \frac{30}{2,5} ; r = 12 \Omega .$$

$$L\omega I = 40 ; L = \frac{40}{\omega I} \quad L = \frac{40}{100\pi \times 2,5} ;$$

L = 0,05 H

4.2) Les facteurs de puissance de la bobine et du dipôle AC :

• Bobine : $\cos \varphi_b = \frac{rI}{U_{BC}} .$

$$\cos \varphi_b = 30/50 ; \cos \varphi_{u/i} = \mathbf{0,6}$$

$$\text{Dipôle AC : } \cos \varphi_{u/i} = \frac{U_{AB} + U_r}{U_{AC}}$$

$$\cos \varphi_{u/i} = \frac{50 + 30}{90} ; \cos \varphi_{u/i} = \mathbf{0,89}$$

4.3) La puissance moyenne consommée par le dipôle :

$$P = U_{AC} I \cos \varphi \quad \text{A.N : } P = 90 \times 2,5 \times \frac{8}{9} ;$$

P = 200 W.

Exercice 14

1) Expression de la puissance moyenne consommée par le circuit :

1.1) de l'expérience 1 en fonction de U_1 et I_1 puis en fonction de R et I_1 : $P = U_1 I_1$ et $P = RI_1^2$

1.2) de l'expérience 2 en fonction de U_2 ; I_2 et $\cos \varphi_2$ puis en fonction de R et I_2 :

$$P = U_2 I_2 \cos \varphi_2 \quad \text{et } P = RI_2^2 .$$

2) Calcul de :

2.1) la résistance R du conducteur ohmique :

$$R = \frac{U_1}{I_1} \quad R = \frac{6}{0,2} ; R = 30 \Omega ;$$

2.2) la puissance moyenne P_1 consommée par le circuit de l'expérience 1 :

$$P_1 = 6 \times 0,2 ; P_1 = \mathbf{1,2 W} .$$

2.3) la puissance moyenne P_2 consommée par le circuit de l'expérience 2 :

$$P_2 = 30 \times (0,1)^2 ; P_2 = \mathbf{0,3 W} .$$

3) Détermination :

3.1) du facteur de puissance $\cos \varphi_2$ dans l'expérience 2 :

$$\cos \varphi_2 = \frac{P_2}{U_2 \cdot I_2} \quad \cos \varphi_2 = \frac{0,3}{6 \times 0,1} ; \cos \varphi_2 = \mathbf{0,5} .$$

3.2) de l'inductance L de la bobine :

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = \frac{U_2}{I_2} .$$

$$L = \frac{\sqrt{\left(\frac{U_2}{I_2}\right)^2 - R^2}}{\omega}$$

$$\text{A.N : } L = \frac{\sqrt{\left(\frac{6}{0,1}\right)^2 - 30^2}}{2\pi \times 50} ;$$

L = 0,165 H ; L = 165 mH.

4) Les valeurs possibles de la capacité C du condensateur :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2} \text{ et}$$

$$Z = \frac{R}{\cos\varphi_3} = \frac{30}{0,8} = 37,5 \Omega .$$

$$\left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2 = Z^2 - R^2 = 506,25.$$

$$2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC} = 22,5 \text{ ou } 2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC} = -22,5 ;$$

$$\frac{1}{2\pi fC} = 51,84 - 22,5 \text{ ou } \frac{1}{2\pi fC} = 51,85 + 22,5$$

$$\frac{1}{2\pi fC} = 29,34 \text{ ou } \frac{1}{2\pi fC} = 74,34.$$

$$\text{A.N : } C = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 29,34}$$

$$\text{ou } C = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 74,34}$$

C = 1,08.10⁻⁴ F ou C = 4,3.10⁻⁵ F

soit **C = 108 μF ou C = 43 μF .**

Thème 4 : La lumière : onde ou particule

Leçon

1

Modèle ondulatoire de la lumière

IV. Exercices

Exercice 1

Lorsque la lumière rencontre des obstacles ou des ouvertures de petites dimensions, il se produit un étalement de directions de propagation de la lumière. Il y a apparition de **franges** successivement **brillantes** et **sombres**. On a une interférence lumineuse lorsque la **superposition** de deux ondes ou plus conduit à une intensité lumineuse qui est différente de la **somme** des intensités de chacune des ondes prises séparément.

Exercice 2

Expression de l'interfrange i :

$$i = x_{k+1} - x_k = (k+1) \frac{\lambda D}{\alpha} - k \frac{\lambda D}{\alpha}$$

$$= \frac{\lambda D}{\alpha} \longrightarrow i = \frac{\lambda D}{\alpha}$$

Exercice 3

Calcul de l'interfrange i

$$i = \frac{\lambda D}{\alpha} \quad \text{AN : } i = 2,24.10^{-3} \text{ m}$$

Exercice 4

Une onde électromagnétique est une catégorie d'ondes qui peut se déplacer dans un milieu de propagation comme le vide ou l'air avec une vitesse avoisinant celle de la lumière.

Exercice 5

Trois ondes électromagnétiques : rayons gamma, rayons X, ultraviolet.

Exercice 6

Exercice 7

Longueur d'onde émise :

$$\lambda = \frac{C}{N} \quad \text{AN : } \lambda = 0,2 \text{ m}$$

Exercice 8

Importance des ondes électromagnétiques :

1) Ondes hertziennes :

- Codification des sons et des images ;
- Dans l'air comme dans le vide, elles passent d'antennes en satellites.

2) Rayons X :

Ils sont utilisés en médecine, en radiodiagnostic et en radiothérapie.

3) Rayons γ

- Ils servent à l'identification des éléments radioactifs ;
- Ils sont utilisés en scintigraphie.

Exercice 9

1. 1) Longueur d'onde de la lumière émise :

La distance entre deux franges consécutives est

$$i = \frac{\lambda D}{\alpha} . \text{ D'où } \lambda = \frac{i\alpha}{D} \quad \text{AN : } \lambda = 6.10^{-6} \text{ m}$$

1.2) La fréquence des vibrations lumineuses :

$$N = \frac{C}{\lambda} \quad \text{AN : } N = 5.10^{13} \text{ Hz}$$

2) Expression de δ

$$\delta = (SS_2 - SS_1) + (S_2M - S_1M)$$

$$\text{On a : } (SS_2 - SS_1) = \frac{ay}{d} \text{ et } (S_2M - S_1M) = \frac{ax}{D}$$

$$\text{Donc } \delta = \frac{ay}{d} + \frac{ax}{D} .$$

Exercice 10

1. La distance a :

$$\lambda = \frac{ia}{D} ; a = \frac{\lambda D}{i} , \text{ Or } i = \frac{d}{10} ; \text{ Donc } a = \frac{10\lambda D}{d}$$

$$\text{AN : } a = 0,736.10^{-3} \text{ m}$$

2.1) La longueur d'onde λ'

$$\text{On a : } d' = 6i \text{ c'est-à-dire } i = \frac{d'}{6} .$$

$$\text{D'où } \lambda' = \frac{ad'}{6D} \quad \text{AN : } \lambda' = 0,45.10^{-6} \text{ m}$$

2.2) La fréquence N'

$$N' = \frac{C}{\lambda'} \quad \text{AN : } N' = 6,7.10^{14} \text{ Hz.}$$

Exercice 11

Les valeurs de θ pour lesquelles il y aura une détection maximale de l'onde électromagnétique :
 Dans le triangle S_1S_2H rectangle en H, on a :

$$\sin \theta = \frac{S_2H}{S_1S_2} \text{ avec } S_1S_2 = a, \text{ d'où } \sin \theta = \frac{S_2H}{a}$$

Il y aura une détection maximale de l'onde électromagnétique pour des interférences constructives.

Par conséquent $S_2H = S_2M - S_1M = k\lambda$

$$\text{Donc } \sin \theta = \frac{k\lambda}{a}$$

$$\text{De plus, } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ soit } 0 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$\text{D'où } 0 \leq \frac{k\lambda}{a} \leq 1 \text{ c'ad } 0 \leq k \leq \frac{a}{\lambda}$$

$$\text{Par ailleurs, } \frac{a}{\lambda} = \frac{22}{5} = 4,4$$

Donc $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Les valeurs de θ correspondant sont consignées dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
$\sin \theta$	0	0,227	0,454	0,681	0,908
$\theta (^{\circ})$	0	13	27	43	65

Exercice 121) S doit être à équidistance de S_1 et S_2 .

2) On observe des franges brillantes et sombres de façon alternée.

3.1) La valeur de l'interfrange i

$$i = \frac{CD}{Na} ; \text{ AN : } \frac{3.10^8 \times 1}{6.10^{14} \times 0,5.10^{-3}} ;$$

$$i = 10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$$

3.2) Le nombre de franges sombres

On a des franges sombres pour $x = (k + \frac{1}{2})i$

$$\text{avec } -\frac{16,5.10^{-3}}{2} \leq x \leq +\frac{16,5.10^{-3}}{2}$$

$$-\frac{16,5.10^{-3}}{2} \leq (k + \frac{1}{2})i \leq +\frac{16,5.10^{-3}}{2}$$

$$-\frac{16,5 \cdot 10^{-3}}{2} \leq (k + \frac{1}{2}) \cdot 10^{-3} \leq + \frac{16,5 \cdot 10^{-3}}{2}$$

$$-8,75 \leq k \leq +7,75$$

Soit $k \in \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7\}$

Donc il y a **16 franges sombres**.

Leçon **2**

Modèle corpusculaire de la lumière

IV. Exercices

Exercice 1

L'effet photoélectrique est l'émission d'électrons par la matière frappée par un rayonnement électromagnétique convenable.

Exercice 2

Un photon est une particule de masse nulle, de charge nulle, se déplaçant dans le vide à la célérité c de la lumière, et transportant un quantum d'énergie $E = h\nu$.	V
La théorie des quanta est une théorie physique qui tente de modéliser le comportement de l'énergie à très grande échelle à l'aide des quanta, quantités discontinues.	V
La relation de Planck-Einstein est $E = \frac{h}{\nu}$.	F
L'énergie d'ionisation est l'énergie E_1 qu'il faut fournir à un atome pour le faire passer de l'état fondamental ($n = 1$) à l'état ionisé ($n = \infty$).	V

Exercice 3

1) La longueur d'onde λ
 $\lambda = \frac{hc}{E}$ AN : $\lambda = 1,78 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,178 \mu\text{m}$

2) Le domaine des ondes

La radiation correspondante se situe dans le domaine de l'ultraviolet.

Exercice 4

1) (c) 2) (a) 3) (c)

Exercice 5

Longueur d'onde :

$$E_3 - E_1 = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{soit} \quad \lambda = \frac{hc}{E_3 - E_1}$$

$$hc = 6,63 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8 = 19,89 \cdot 10^{-26} \text{ SI}$$

$$E_3 - E_1 = \frac{-13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{9} + 13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}$$

$$E_3 - E_1 = 19,34 \cdot 10^{-19}$$

$$\lambda = 1,028 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Exercice 6

1) « Niveaux d'énergie quantifiés » signifie que l'énergie d'un atome ne peut prendre que certaines valeurs bien déterminées.

2) Les valeurs des énergies E_2 et E_5 en eV :

$$E_2 = E_3 - \frac{hc}{\lambda_2} \quad \text{AN : } E_2 = -3,032 \text{ eV}$$

$$E_5 = E_1 + \frac{hc}{\lambda_1} \quad \text{AN : } E_5 = -1,37 \text{ eV}$$

Exercice 7

1) Les énergies correspondantes pour :

$$n = 1 ; E_1 = \frac{-13,6}{1^2} = -13,6 \text{ eV}$$

$$n = 2 ; E_2 = \frac{-13,6}{2^2} = -3,4 \text{ eV}$$

$$n = 3 ; E_3 = \frac{-13,6}{3^2} = -1,51 \text{ eV}$$

$$n = \infty ; E_{\infty} = 0 \text{ J}$$

2) Diagramme des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

3) Énergie minimale à fournir :

$$E_2 - E_1 = -3,4 + 13,6 = \mathbf{10,2 \text{ eV}}$$

Exercice 8

- 1) (a) 2) (b)

Exercice 9

- 1) Phénomène d'absorption : b
2) Phénomène d'émission : a

Exercice 10

1) L'énergie du photon émis :

$$\text{On a : } E_n = \frac{-13,6}{n^2}$$

$$\Delta E = E_3 - E_2 = \frac{-13,6}{3^2} + \frac{13,6}{2^2}$$

$$\Delta E = 1,89 \text{ eV} ; \text{ Soit } \Delta E = 3,02 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

2) Longueur d'onde :

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{hc}{\Delta E}$$

$$\text{AN : } \lambda = 6,58 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 658 \text{ nm.}$$

Exercice 11

1)

1. 1) Valeurs numériques des énergies E_1 , E_2 et E_3 en joules

$$E_1 = \frac{-2,18 \cdot 10^{-18}}{1^2} = -2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$E_2 = \frac{-2,18 \cdot 10^{-18}}{2^2} = -0,545 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$E_3 = \frac{-2,18 \cdot 10^{-18}}{3^2} = -0,242 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

1.2) Fréquences des radiations émises :

$$V_{3,1} = \frac{E_3 - E_1}{h} ; \text{ AN : } V_{3,1} = 0,292 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$$

$$V_{2,1} = \frac{E_2 - E_1}{h} ; \text{ AN : } V_{2,1} = 0,247 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$$

1.3) Longueur d'onde correspondante :

$$\lambda_{3,1} = \frac{c}{V_{3,1}} \quad \text{AN : } \lambda_{3,1} = 103 \text{ nm}$$

$$\lambda_{2,1} = \frac{c}{V_{2,1}} \quad \text{AN : } \lambda_{2,1} = 121 \text{ nm}$$

2) Calcul de A

$$A = \frac{2,18 \cdot 10^{-18}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 13,6 \text{ eV}$$

Exercice 12

1) $n = 1$ est la valeur pour laquelle l'énergie de l'atome est minimale : c'est l'état fondamental

2) les valeurs correspondantes de n pour chaque longueur d'onde :

$$\text{De la relation } E_n - E_2 = \frac{hc}{\lambda} ,$$

$$\text{on tire } n = \sqrt{\frac{2,18 \cdot 10^{-18}}{0,545 \cdot 10^{-18} - \frac{hc}{\lambda}}}$$

$$\text{Pour } \lambda_{\alpha} = 656 \text{ nm, } n = 3$$

$$\text{Pour } \lambda_{\beta} = 486 \text{ nm, } n = 4$$

$$\text{Pour } \lambda_{\gamma} = 434 \text{ nm, } n = 5.$$

Exercice 13

1) L'existence de raies dans un spectre d'émission atomique s'explique par le fait que les niveaux d'énergie sont quantifiés. Autrement dit, l'énergie d'un atome ne peut prendre que certaines valeurs.

2) Montrons que les longueurs d'onde λ des radiations émises par l'atome d'hydrogène obéissent à la loi :

$$\frac{1}{\lambda} = R_1 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{m^2} \right) \text{ avec } m > p.$$

L'énergie d'un atome d'hydrogène en joule est :

$$E_n = -\frac{2,18 \cdot 10^{-18}}{n^2}$$

Pour $m > p$ on a : $E_m - E_p = \frac{hc}{\lambda}$

Soit $\frac{1}{\lambda} = \frac{2,18 \cdot 10^{-18}}{hc} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{m^2} \right)$

avec $R_1 = \frac{2,18 \cdot 10^{-18}}{hc}$

3) Valeur de R_1 : $R_1 = 1,094 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

4)

4.1) la vérification numérique revient à vérifier que R_2 reste une constante pour les différentes valeurs de m correspondant respectivement aux inverses des longueurs d'onde.

$$\text{On a : } R_2 = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}$$

m	2	3	4	5
$\frac{1}{\lambda}$	$3,292 \cdot 10^7$	$3,901 \cdot 10^7$	$4,115 \cdot 10^7$	$4,213 \cdot 10^7$
R_2	$4,39 \cdot 10^7$	$4,39 \cdot 10^7$	$4,39 \cdot 10^7$	$4,39 \cdot 10^7$

On constate que R_2 reste constante ; donc les inverses des longueurs d'onde sont compatibles avec la relation précédente.

4.2) $R_2 = 4,39 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ est la valeur de la constante de Rydberg de l'ion He^+ .

4.3) Vérifions que $R_2 = 4R_1$.

$$\text{On a : } \frac{R_2}{R_1} = \frac{4,39 \cdot 10^7}{1,094 \cdot 10^7} = 4$$

Donc $R_2 = 4R_1$

Exercice 14

NB : utiliser les données de l'exercice 13 pour traiter l'exercice 14.

1) Comparons R_2 et R_3 .

$$R_3 = \frac{9}{4} R_2$$

2) Relation simple entre la constante de Rydberg l'ion He^+ .

R et le numéro atomique Z de l'élément correspondant : $R = Z^2 R_1$.

3) He^+ et Li^+ ont en commun le même nombre d'électrons dans leur nuage électronique.

Exercice 15

1) Les longueurs d'onde des radiations émises :

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$$

Radiation 1 :

$$hc = 19,89 \cdot 10^{-26} \text{ et } \Delta E = 780 - 152 = 628 \text{ keV}$$

$$\text{ou } \Delta E = 1,0048 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$\text{Soit } \lambda_1 = 1,98 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 1,98 \text{ pm}$$

Radiation 2 :

$$hc = 19,89 \cdot 10^{-26} \text{ et } \Delta E = 314 - 152 = 162 \text{ keV}$$

$$\text{ou } \Delta E = 259,2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

$$\text{Soit } \lambda_2 = 7,67 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 7,67 \text{ pm}$$

Radiation 3 :

$$hc = 19,89 \cdot 10^{-26} \text{ et } \Delta E = 152 - 0 = 152 \text{ keV}$$

$$\text{ou } \Delta E = 243,2 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

$$\text{Soit } \lambda_3 = 8,18 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 8,18 \text{ pm.}$$

Exercice 16

1) L'énergie d'ionisation est l'énergie à fournir à un atome pour le faire passer de l'état fondamental ($n = 1$) à l'état ionisé ($n = \infty$).

2) Montrons que $E = \frac{1243}{\lambda}$

$$\text{On a } E = \frac{hc}{\lambda} \text{ avec } hc = 19,89 \cdot 10^{-26} \text{ J.m}$$

$$\text{Soit } hc = 1243 \cdot 10^{-9} \text{ eV.m} = 1243 \text{ e.V.m}$$

$$\text{Comme } \lambda \text{ est en nm alors : } E = \frac{1243}{\lambda}$$

3.1) Les énergies des états excités E_1 , E_3 et E_4 :

$$\bullet E_2 - E_1 = \frac{hc}{\lambda_7} \longrightarrow E_1 = E_2 - \frac{hc}{\lambda_7}$$

$$\text{AN : } E_1 = 160.10^3 \cdot 1,6.10^{-19} - \frac{6,63.10^{-34} \cdot 3.10^8}{1,55.10^{-11}}$$

$$E_1 = 127,7.10^{-16} \text{ J} = 79,8 \text{ eV.}$$

$$\bullet E_4 - E_2 = \frac{hc}{\lambda_2} \longrightarrow E_4 = E_2 + \frac{hc}{\lambda_2}$$

$$\text{AN : } E_4 = 160.10^3 \cdot 1,6.10^{-19} + \frac{6,63.10^{-34} \cdot 3.10^8}{4,504.10^{-12}}$$

$$E_4 = 698.10^{-16} \text{ J} = 436,25 \text{ eV.}$$

$$\bullet E_4 - E_3 = \frac{hc}{\lambda_3} \longrightarrow E_3 = E_4 - \frac{hc}{\lambda_3}$$

$$\text{AN : } E_3 = 698.10^{-16} - \frac{6,63.10^{-34} \cdot 3.10^8}{2,34.10^{-11}}$$

$$E_3 = 613.10^{-16} \text{ J} = 383,12 \text{ eV}$$

3.2) Longueurs d'onde des radiations émises :

$$\bullet \lambda_1 = \frac{hc}{E_4 - E_1} \text{ AN : } \lambda_1 = \frac{6,63.10^{-34} \cdot 3.10^8}{(698 - 127,7).10^{-16}}$$

$$\lambda_1 = 3,488.10^{-12} \text{ m}$$

$$\bullet \lambda_4 = \frac{hc}{E_3 - E_1} \text{ AN : } \lambda_4 = \frac{6,63.10^{-34} \cdot 3.10^8}{(613 - 127,7).10^{-16}}$$

$$\lambda_4 = 4,098.10^{-12} \text{ m}$$

$$\bullet \lambda_5 = \frac{hc}{E_3 - E_2} \text{ AN : } \lambda_5 = \frac{6,63.10^{-34} \cdot 3.10^8}{(613 - 256).10^{-16}}$$

$$\lambda_5 = 5,571.10^{-12} \text{ m}$$

$$\bullet \lambda_6 = \frac{hc}{E_2 - E_1} \text{ AN : } \lambda_6 = \frac{6,63.10^{-34} \cdot 3.10^8}{(256 - 127).10^{-16}}$$

$$\lambda_6 = 15,503.10^{-12} \text{ m}$$

$$\lambda_8 = \frac{hc}{E_1 - E_0} \text{ AN : } \lambda_8 = \frac{6,63.10^{-34} \cdot 3.10^8}{127,7.10^{-16} - 0}$$

$$\lambda_8 = 15,576.10^{-12} \text{ m.}$$

Thème 5 : Physique nucléaire

Leçon

1

Réactions nucléaires spontanées

IV. Exercices

Exercice 1

Définitions de quelques termes :

- Élément chimique : c'est ce qui est commun à un corps simple et à tous ses composés.
- Nucléide : c'est un ensemble d'atomes dont le noyau possède le même couple (Z, A).
- Isotope : des atomes de même numéro atomique et de nombres de masse différents sont des isotopes.

Exercice 2

- 1) La radioactivité est la désintégration d'un noyau instable X en son noyau-fils Y avec émission d'autres particules.
- 2) L'activité d'un échantillon est le nombre de désintégrations par seconde.
- 3) La période ou demi-vie d'une substance radioactive est le temps au bout duquel la moitié des noyaux à l'état de départ se sont désintégrés.

Exercice 3

1) F ; 2) V ; 3) V ; 4) F ; 5) F

Exercice 4

Radioactivité α $\rightarrow$ ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He}$
 Radioactivité γ $\rightarrow$ ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_Z X + \gamma$
 Radioactivité β^- $\rightarrow$ ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_{-1} e$
 Radioactivité β^+ $\rightarrow$ ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + {}^0_{+1} e$

Exercice 5

1) Noyaux pères émetteurs α

2) Noyaux pères émetteurs β^-

3) Noyaux pères émetteurs β^+

Exercice 6

c

Exercice 7

1) ${}^{23}_{11} \text{Na}$ comporte 11 protons et 12 neutrons dans son noyau

2.1) Équation de la réaction

2.2) Lois utilisées :

- Loi de conservation des charges ;
- Loi de conservation du nombre total de nucléons.

2.3) Le nucléide obtenu est le néon.

Exercice 8

1) Équation bilan

2) Lois de conservation utilisées :

- Loi de conservation des charges ;
- Loi de conservation du nombre total de nucléons.

Exercice 9

1) Équation bilan

2) Le nombre de désintégrations α et β^-

En appliquant les lois de conservation, on a :

$$238 = 4x + 206 \text{ et } 92 = 2x - y + 82$$

$$\text{Donc : } x = 8 \text{ et } y = 6$$

Il y a 8 désintégrations α et 6 désintégrations β^-

Exercice 10

1) Loi de décroissance radioactive :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

N_0 : nombre de noyaux à $t = 0$;

$N(t)$: nombre de noyaux à $t > 0$

λ : constante radioactive

2) La période radioactive est le temps au bout duquel la moitié des noyaux radioactifs à l'état de départ s'est désintégrée.

3) Calcul de la période radioactive :

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \text{AN : } T = \frac{\ln 2}{5,8 \cdot 10^{-8}}$$

$$T = 11\,950\,813 \text{ s ; } \quad \text{soit } T = 138 \text{ jours.}$$

Exercice 11

1) Composition du noyau de chaque nucléide :

Nucléides	${}^{12}_6 \text{C}$	${}^{12}_7 \text{N}$	${}^{235}_{92} \text{U}$	${}^4_7 \text{N}$	${}^{238}_{92} \text{U}$
Protons	6	7	92	7	92
Neutrons	6	5	143	7	146

2) Les isotopes sont :

3)

3.1) Les rayons des nucléides :

On a $R = R_0 \sqrt[3]{A}$ avec $R_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

Pour ${}^{12}_6\text{C}$: $R = 1,2 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{12} = 2,75 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

Pour ${}^{238}_{92}\text{U}$: $R = 1,2 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{238} = 7,44 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

3.2) Masses volumiques des nucléides :

$$a = \frac{m}{V} = \frac{Au}{V} \text{ avec } V = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ et } R = R_0 \sqrt[3]{A}$$

$$\text{soit } V = \frac{4}{3} \pi R_0^3 A, \text{ d'où : } a = \frac{3u}{4\pi R_0^3}$$

NB : la masse volumique d'un nucléide ne dépend pas du nombre de masse. C'est une constante.

$$\text{AN : } \rho = \frac{3 \times 1,67 \cdot 10^{-27}}{4\pi (1,2 \cdot 10^{-15})^3}; \rho = 2,28 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

Exercice 12

1) Composition du noyau de radium ${}^{226}_{88}\text{Ra}$

Le noyau de radium ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ comporte 88 protons et 138 neutrons.

2) - La désintégration α est une désintégration au cours de laquelle il y a émission d'une particule α c'est-à-dire ${}^4_2\text{He}$.

- La désintégration β^- est une désintégration au cours de laquelle il y a émission d'un électron ${}^0_{-1}\text{e}$.

3) Équation de la première désintégration de radium ${}^{226}_{88}\text{Ra}$:

4) Nombre de désintégrations de types α et β^-

En appliquant les lois de conservation, on a :

$$226 = 4x + 206 \text{ et } 88 = 2x - y + 82$$

On obtient : $x = 5$ et $y = 4$

Il y a donc 5 désintégrations α et 4 désintégrations β^- .

Exercice 13

1) Composition du noyau du polonium ${}^{210}_{84}\text{Po}$
Il y a 84 protons et 126 neutrons dans le noyau du polonium 210

2) Équation bilan de la désintégration

3) Les lois de conservations à respecter sont :

- Loi de conservation du nombre total de nucléons ;

- Loi de conservation de la charge.

4)

4.1) Le graphe $-\ln \frac{N}{N_0} = f(t)$.

t(jrs)	0	40	80	120	160	200
$\frac{N}{N_0}$	1	0,82	0,67	0,55	0,45	0,37
$-\ln \frac{N}{N_0}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

240
0,30
1,2

4.2) Détermination graphique de λ

$$\lambda = \frac{\Delta(-\ln \frac{N}{N_0})}{\Delta t} = \frac{1,2 - 0}{240 \times 86400} = 5,8 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

4.3) La période radioactive T du polonium 210

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} ; \text{AN} : T = \frac{\ln 2}{5,8 \cdot 10^{-8}} = 11950813 \text{ s}$$

Soit T = 138,5 jours

4.4) L'activité a_0 à $t = 0$: $a_0 = \lambda N_0$

$$\text{AN} : a_0 = 5,8 \cdot 10^{-8} \times 2 \cdot 10^{14}$$

$$a_0 = 1,16 \cdot 10^7 \text{ Bq.}$$

Exercice 14

1) Les trois équations bilans des désintégrations 1, 2 et 3.

2) Les lois de conservation utilisées :

- Loi de conservation du nombre total de nucléons ;
- Loi de conservation de charges.

3) Le type de radioactivité pour chaque désintégration :

(1) : radioactivité α

(2) et (3) : radioactivité β^-

4) Nom et symbole de X :

Z = 92 donc il s'agit de l'uranium 234 de symbole ${}_{92}^{235}\text{U}$.

Exercice 15

1) Loi de décroissance radioactive :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

N_0 : nombre de noyaux à l'instant $t = 0$

$N(t)$: nombre de noyaux à l'instant $t > 0$

λ : constant radioactive

2) La période T d'un noyau radioactif est le temps au bout duquel la moitié des noyaux à l'état initial s'est désintégrée.

3) Calcul de la période T : $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$

$$\text{AN} : T = \frac{\ln 2}{5,8 \cdot 10^{-8}} \quad T = 11950813 \text{ s}$$

Soit T = 138,3 jours

4)

4.1) Nombre de noyaux de polonium restant aux temps T, 2T et 3T.

$$\text{À la date T} : N(T) = N_0 e^{-\lambda T} = \frac{N_0}{2}$$

$$\text{À la date 2T} : N(2T) = \frac{N_0}{4}$$

$$\text{À la date 3T} : N(3T) = \frac{N_0}{8}$$

4.2) Allure de la courbe de décroissance radioactive :

Exercice 16

1) Le taux de noyaux désintégrés 30 mn plus tard.

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \quad \text{avec } \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

Pour $t = 30 \text{ min}$ et $T = 10 \text{ min}$: $\frac{N}{N_0} = 0,125$.

Il s'est désintégré 87,5 % de noyaux et il ne reste que 12,5 % de substances radioactives.

2) Comparaison de l'activité de l'échantillon aux instants t et t + 30 min

À l'instant t, $a(t) = a_0 e^{-\lambda t}$ avec $a_0 = \lambda N_0$

À l'instant t + 30 min, c'est-à-dire à l'instant

$$t + 3T \quad a(t + 30) = a_0 e^{-\lambda(t + 3T)}$$

$$\text{soit } a(t + 30) = a_0 e^{-\lambda(t + 3T)} = a(t) e^{-\lambda 3T} ;$$

$$a(t + 30) = \frac{1}{8} a(t).$$

Exercice 17

L'âge du bois ancien :

$$\text{À } t = 0, a_0 = \lambda N_0$$

Dans t années, l'activité sera $a = \lambda N$

Donc $a = a_0 e^{-\lambda t}$ avec $a_0 = 1350$ désintégrations/min

Pour avoir $a = 212$ dés./min, on a :

$$e^{-\lambda t} = \frac{212}{1350} \quad \text{c'est-à-dire } -\lambda t = \ln \frac{212}{1350}$$

$$\text{soit } t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{212}{1350} = -\frac{T}{\ln 2} \ln \frac{212}{1350}$$

$$\text{AN : } t = -\frac{5590}{\ln 2} \ln \frac{212}{1350} ; \quad t = 14930 \text{ ans}$$

Exercice 18

Le temps qui s'est écoulé depuis la mort de l'être vivant.

Le rapport $r = \frac{n(^{14}_6\text{C})}{n(^{12}_6\text{C})} = 10^{-12}$ dans les êtres vivants.

Mais ce rapport devient $r' = \frac{n(^{14}_6\text{C})}{n(^{12}_6\text{C})} = 0,25 \cdot 10^{-12}$

Le carbone 14 est radioactif tandis que le carbone 12 ne l'est pas. Par conséquent le nombre d'atomes de carbone 12 est invariable.

$$\text{On a : } \frac{r}{r'} = \frac{n(^{14}_6\text{C})}{n(^{12}_6\text{C})} = 4 \quad \text{c'est-à-dire } n = 4n'$$

De plus $n' = ne^{-\lambda t}$ soit $n' = 4n' e^{-\lambda t}$

$$\text{D'où } e^{-\lambda t} = \frac{1}{4} \longrightarrow t = \frac{\ln 4}{\lambda}$$

$$\text{Or } \lambda = \frac{\ln 2}{T} \longrightarrow t = T \frac{\ln 4}{\ln 2}$$

$$\text{AN : } t = 5600 \frac{\ln 4}{\ln 2} ; \quad t = 11200 \text{ ans}$$

Exercice 19

Calcul de la constante radioactive λ :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \quad \text{AN : } \lambda = \frac{\ln 2}{1,5 \cdot 10^9} = 4,62 \cdot 10^{-10} \text{ an}^{-1}$$

Exercice 20

Âge de la roche :

Soit : $m_0 = 1$ g la masse de thorium 232 à $t = 0$;

$m = 0,05$ g la masse de plomb 208 formé à la date t ;

N_0 le nombre d'atomes de thorium 232 à $t = 0$;

N le nombre d'atomes de plomb à l'instant t .

$$\text{On a : } N_0 = \frac{m_0}{m_{Th}} \quad \text{et } N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$m = m_{pb}(N_0 - N) = m_{pb} N_0 (1 - e^{-\lambda t})$$

$$m = m_{pb} \frac{m_0}{m_{Th}} (1 - e^{-\lambda t}) = \frac{208}{232} m_0 (1 - e^{-\lambda t})$$

$$(1 - e^{-\lambda t}) = \frac{m}{m_0} \times \frac{232}{208}$$

$$t = -\frac{T}{\ln 2} \ln \left(1 - \frac{232m}{208m_0} \right) \quad t = 1,16 \cdot 10^9 \text{ ans}$$

Exercice 21

1)

1.1) La période radioactive est le temps au bout duquel la moitié à l'état de départ s'est désintégrée.

1.2) Équation bilan

Les lois de conservation utilisées sont :

- loi de conservation de charge ;
- loi de conservation du nombre total de nucléons.

1.3) le noyau-fils est le baryum 137

1.4) Relation entre $N(t)$ et $a(t)$

$$a(t) = \lambda N(t)$$

2) Calcul de la constante radioactive λ .

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

$$\text{Si } T = 30 \text{ ans alors } \lambda = \frac{\ln 2}{30} = 2,31 \cdot 10^{-2} \text{ an}^{-1}$$

$$\text{Si } T = 9,46 \cdot 10^7 \text{ s alors } \lambda = 7,33 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$$

3) Déterminons :

3.1) l'activité de cette source radioactive au bout de 5 ans.

$$a(t) = a_0 e^{-\lambda t}$$

$$\text{AN : } a = 3,7 \cdot 10^5 e^{-\frac{\ln 2}{6}} ; \quad a = 3,3 \cdot 10^5 \text{ Bq}$$

3.2) Nombre de noyaux non désintégrés :

$$N = \frac{a}{\lambda}$$

$$\text{AN : } N = \frac{3,3 \cdot 10^5}{7,33 \cdot 10^{-9}} ; \quad N = 4,5 \cdot 10^{13} \text{ noyaux}$$

4) L'existence du rayonnement γ s'explique par le fait qu'il y a des photons qui accompagnent l'émission des particules α , β^- et β^+ .

Exercice 22

1)

1.1) La période radioactive T est le temps au bout duquel la moitié des noyaux à l'état initial se sont désintégrés.

1.2) La constante radioactive λ est une constante dépendant de la période radioactive telle que $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$.

$$1.3) N = N_0 e^{-\lambda t}$$

2)

2.1) Montrons que $A = \lambda N$.

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \text{ et } N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\text{or } A_0 = \lambda N_0$$

$$\Rightarrow A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow A = \lambda N$$

2.2) Montrons que $A = A_0 e^{-\lambda t}$

$$A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\text{on a : } A_0 = \lambda N_0 \Rightarrow A = A_0 e^{-\lambda t}$$

2.3) Montrons que $\ln A = \ln A_0 - \frac{\ln 2}{T} t$

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln A = \ln A_0 e^{-\lambda t}$$

$$= \ln A_0 + \ln e^{-\lambda t}$$

$$\text{or } \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

$$\text{donc : } \ln A = \ln A_0 + \ln e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$$

$$\Rightarrow \ln A = \ln A_0 - \frac{\ln 2}{T} t$$

3) Courbe de $A = f(t)$. 4) Les valeurs de λ et de T .

$$T = 216 \text{ s.}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{216} = 3.2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Exercice 23

1)

1.1) La période radioactive est le temps au bout duquel la moitié des noyaux à l'état initial se sont désintégrés.

1.2) L'activité radioactive est le nombre de désintégrations par seconde.

2) La signification des grandeurs :

A : l'activité radioactive à l'instant $t > 0$;

A_0 : l'activité radioactive à $t = 0$;

λ : constante radioactive (en s^{-1}).

3) L'âge du bois préhistorique :

$$A = \frac{A_0}{7} = A_0 e^{-\lambda t} \quad t = \frac{T \cdot \ln 7}{\ln 2}$$

$$AN : t = \frac{5600 \times \ln 7}{\ln 2} ; t = 15721 \text{ ans.}$$

Exercice 24

1)

1.1) La période radioactive est le temps au bout duquel la moitié des noyaux à l'état initial se sont désintégrés.

1.2) L'activité radioactive est le nombre de désintégrations par seconde.

2) Équation de désintégration du carbone 14

3) Âge du bois :

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \quad t = -\frac{T \cdot \ln 7}{\ln 2} \ln \frac{A}{A_0} ;$$

$$t = 3420 \text{ ans}$$

Exercice 25

1) Une radioactivité est la désintégration d'un noyau instable X en son noyau-fils Y avec émission d'autres particules.

2) Loi de décroissance radioactive :

Soit un échantillon comportant N noyaux radioactifs à un instant t .

À la date $t + dt$, le nombre de noyaux radioactifs diminue : il devient égal à $N + dN$, où dN est la variation négative du nombre de noyaux radioactifs.

Le nombre de désintégrations est proportionnel au nombre de noyaux instables présents dans un échantillon et à durée dt .

$$\text{Donc : } dN = -\lambda N dt \text{ c'est-à-dire } \frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

Par intégration, et en considérant N_0 le nombre de noyaux radioactifs de l'échantillon à l'origine des dates.

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \int_0^t -\lambda dt \longrightarrow \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

Soit $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

3) L'âge des cailloux lunaires :

Nombre de moles d'argon 40 :

$$\frac{82 \cdot 10^{-4}}{22400} = 3,66 \cdot 10^{-7} \text{ mol.}$$

Nombre de moles de potassium 40 :

$$\frac{1,66 \cdot 10^{-6}}{40} = 4,15 \cdot 10^{-8} \text{ mol.}$$

On sait qu'un noyau de potassium 40 qui se désintègre donne un noyau d'argon. Donc le nombre initial de moles de potassium 40 est :

$$4,15 \cdot 10^{-8} + 3,66 \cdot 10^{-7} = 4,075 \cdot 10^{-7} \text{ mole.}$$

D'après la loi de décroissance radioactive

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \text{ avec } N = 4,15 \cdot 10^{-8} \text{ et}$$

$N_0 = 4,075 \cdot 10^{-7}$ on trouve l'âge t des cailloux :

$$t = -\frac{T}{\ln 2} \ln \frac{N}{N_0}; \quad \text{AN : } t = 4,97 \cdot 10^9 \text{ ans.}$$

Leçon

2

Réactions nucléaires provoquées

IV. Exercices

Exercice 1

1) Le défaut de masse Δm est la différence de masse entre la masse des nucléons pris individuellement et celle du noyau.

2) La fission nucléaire est la cassure d'un noyau lourd fissile en deux noyaux légers, plus stables et avec une émission de neutrons.

3) La fusion nucléaire c'est l'union de deux noyaux légers pour former un noyau plus lourd et plus stable.

Exercice 2

1) L'énergie de liaison d'un noyau au repos est l'énergie qu'il faut **fournir au noyau** pour dissocier les nucléons qui le constituent, ceux-ci se trouvant au repos dans l'état final.

2) L'énergie de liaison d'un noyau est égale à la somme des **énergies** des nucléons qui le constituent diminuée de son énergie de masse.

3) Un nucléide est d'autant plus stable que son énergie de liaison par nucléon est **grande**.

Exercice 3

(b) : c'est une réaction de fission.

Exercice 4

1) Faux ; 2) Faux ; 3) Faux ; 4) Vrai ; 5) Vrai

Exercice 5

Les trois réactions nucléaires successives qui conduisent de ${}_{92}^{238}\text{U}$ au plutonium ${}_{92}\text{Pu}$:

Exercice 6

Exercice 7

1) Le défaut de masse Δm de l'hélium ${}^4_2\text{He}$

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M$$

$$\text{AN : } \Delta m = 2 \times 1,0073 + (4 - 2) \times 1,0087 - 4,0026$$

$$\Delta m = \mathbf{0,0294 \text{ u}}$$

2) Énergie de liaison E_ℓ :

$$E_c = \Delta mc^2$$

$$\text{AN : } E_\ell = 0,0174 \times 931,5 ; \quad \mathbf{E_\ell = 27,4 \text{ MeV}}$$

3) L'énergie de liaison par nucléon :

$$E_a = \frac{E_\ell}{A} = \frac{27,4}{4} ; \quad \mathbf{E_a = 6,85 \text{ MeV/nucléons.}}$$

Exercice 8

Énergie libérée par la transformation d'un noyau de polonium ${}^{210}_{84}\text{Po}$ en plomb ${}^{206}_{82}\text{Pb}$:

$$E_d = \Delta m c^2$$

$$E_d = (m_{\text{pb}} + m_{\text{He}} - m_{\text{po}})c^2$$

$$\text{AN : } E_d = (-1,95595 \cdot 10^5 - 3728,35 + 1,91861 \cdot 10^5)$$

$$\mathbf{E_d = 7462,35 \text{ MeV}}$$

Exercice 9

1) La variation d'énergie ΔE de la réaction nucléaire :

$$\Delta E = [(m_{\text{Xe}} + m_{\text{Sr}} + m_{\text{n}}) - m_{\text{U}}]c^2$$

$$E = [(139,8920 + 93,8945 + 1,0087) - 234,9935] \times 931,5$$

$$\Delta E = \mathbf{-184,7 \text{ MeV.}}$$

2) La réaction est exothermique.

Exercice 10

1) L'énergie de liaison est l'énergie qu'il faut fournir à un noyau pour dissocier les nucléons qui le constituent.

1.2) Valeur de E_ℓ

$$E_\ell = \Delta mc^2 = (Zm_p + (A - Z)m_n - m)c^2$$

$$\text{AN : } E_\ell = 38,1 \text{ MeV.}$$

2)

2.1) Équation de la réaction nucléaire

2.2) Le rayonnement γ provient des photons qui accompagnent l'émission des particules α .

2.3) Énergie libérée :

$$E_d = (m_{\text{Li}} + m_p - 2m_{\text{He}})c^2$$

$$\text{AN : } E_d = 18,7 \text{ MeV}$$

Elle apparaît sous forme thermique.

3)

3.1) Équation de la réaction

Il apparaît un proton ${}^1_1\text{p}$.

3.2) La variation de masse au cours de cette réaction nucléaire

$$\Delta m = (m_{\text{O}} + m_p) - (m_{\text{N}} + m_{\text{He}})$$

AN :

$$\Delta m = (16,9991 + 1,0073) - (14,0031 + 4,0015)$$

$$\Delta m = \mathbf{0,0018 \text{ u ou } \Delta m = 1,6758 \text{ MeV}/c^2}$$

3.2) $\Delta E = \Delta m c^2 > 0$; la réaction est endothermique.

Exercice 11

1) Équation de la réaction nucléaire

2) L'autre particule formée est l'hydrogène ${}^1_1\text{H}$ (proton).

Exercice 12

1) Équation de la réaction nucléaire :

2) Énergie libérée :

$$\Delta E = (m_{\text{pb}} + m_{\text{He}} - m_{\text{po}})c^2$$

$$\Delta E = \mathbf{-5,40 \text{ MeV}}$$

3) Nature de la particule élémentaire :

Il s'agit d'un neutron ${}^1_0\text{n}$.

Exercice 13

1) Montrons que l'équation globale s'écrit :

On multiplie les deux premières équations par 2 et on fait la somme de toutes les équations. Après simplification, on obtient l'équation globale :

2) Énergie libérée au total :

$$\Delta E = E_2 - E_1$$

$$\Delta E = (m_{\text{He}} - 4m_{\text{H}})C^2$$

$$\Delta E = -26,7 \text{ MeV}$$

Exercice 14

1) Classement par ordre de stabilité croissante : La stabilité d'un noyau dépend de son énergie de liaison par nucléon.

$$E_a = \frac{E_l}{A} \quad \text{avec } E_l = \Delta m C^2.$$

Les valeurs des énergies de liaison par nucléon sont consignées dans le tableau ci-dessous

Noyau	Énergie de liaison par nucléon
${}^8_5\text{B}$	3,76 MeV
${}^{10}_5\text{B}$	6,31 MeV
${}^{11}_5\text{B}$	6,82 MeV

Plus l'énergie de liaison par nucléon est grande, plus le noyau est stable. D'où le classement suivant par ordre de stabilité croissante :

$${}^8_5\text{B} < {}^{10}_5\text{B} < {}^{11}_5\text{B}$$

Exercice 15

1) Énergie libérée :

$$\Delta E = (m_{\text{Xe}} + m_{\text{Sr}} - m_{\text{U}})C^2$$

$$\text{AN : } \Delta E = (139,8920 + 94,945 - 234,9935) \times 931,5$$

$$\Delta E = -146 \text{ MeV}$$

2) La réaction est exothermique.

Exercice 16

1) Équation correspondant à cette réaction :

2) Nature de la particule X :

X est un neutron.

3) Le mélange américium-béryllium est utilisé dans les réacteurs nucléaires à fission parce que les neutrons libérés par la fission d'un noyau peuvent à leur tour provoquer d'autres noyaux fissiles et ainsi de suite.

Exercice 17

1) Il s'agit d'une réaction de fission.

Équation-bilan :

2) Les masses des atomes en fonction de m_p et m_n en MeV/ C^2 :

3) L'expression de la masse d'un atome X est :

$$m_X = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{A \cdot E_a(X)}{C^2}$$

$$m_U = 92m_p + 143m_n - 1809,5$$

$$m_{\text{Xe}} = 54m_p + 85m_n - 1167,6$$

$$m_{\text{Sr}} = 38m_p + 57m_n - 826,5$$

4)

4.1) la variation de masse qui se produit avec un atome d'uranium 235 :

$$\Delta m = (m_{\text{Xe}} + m_{\text{Sr}} + m_n - m_U)$$

$$\Delta m = -184,6 \text{ MeV}/C^2$$

4.2) l'énergie libérée par la réaction de 1 mg d'uranium 235.

$$E = 76 \text{ MJ}$$

noyaux fissiles et ainsi de suite.

Exercice 18

1.1) Le défaut de masse est la différence entre la masse d'un noyau et celle de la somme des masses des nucléons qui le contiennent.

1.2) Une fusion nucléaire est une réaction nucléaire au cours de laquelle deux noyaux légers s'unissent pour former un noyau plus lourd et plus stable.

2) Exemples de fissions nucléaires :

3) Masse d'uranium enrichi consommé

Énergie libérée en 6 mois :

$$E = 25 \times 6 \times 30 \times 24 \times 3600 = 388800000 \text{ MJ}$$

$$\text{Soit } E = 2,43 \cdot 10^{27} \text{ MeV}$$

$$\text{Or } E = \Delta m c^2 \text{ c'est-à-dire } \Delta m = \mathbf{2,43 \cdot 10^{27} \text{ MeV}/c^2}.$$

Mise en page : Vallesse Éditions

Tel : 2722410821/0101916125

Achévé d'imprimer en Côte d'Ivoire

3^{ème} trimestre 2021

Dépôt légal : n° 17659 du 09 Juillet 2021