**CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE DU SERVICE DE SANTE DES
ARMEES DE LOME 2013**

EPREUVE DE MATHS

DUREE : 4 H ; Coef. : 3

Exercice I (4,5 points)

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A est le point d'affixe $2i$ et P^* le plan P privé de A .

Soit T la transformation qui au point M d'affixe $z \neq 2i$ associe le point M' d'affixe $z' = \frac{2iz - 5}{z - 2i}$.

1. Montrer que pour tout point M de P^* , le point M' est distinct de A .
2. Démontrer que T est une bijection de P^* sur lui-même. Déterminer sa réciproque T^{-1} .
3. a- Montrer qu'un point M de P^* est invariant par T si et seulement si son affixe vérifie la relation

$$z^2 - 4iz + 5 = 0$$

b- Trouver le réel α tel que $z^2 - 4iz + 5 = (z-2i)^2 + \alpha$.

c- Montrer alors que T admet deux points invariants B et C .

4. On appelle (D) la droite passant par O et dirigée par $\vec{v}$ et (D^*) la droite (D) privée de A .
Montrer que (D^*) est globalement invariante par T .

5. a- Montrer que pour $z \neq 2i$, $|z' - 2i| \cdot |z - 2i| = 9$.

b- Soit (Γ) le cercle de centre A et rayon 3 .

Montrer que (Γ) est globalement invariant par T .

Exercice II (3,5 points)

1. Soient f , g et h les fonctions numériques de la variable réelle définies sur $[0; 1]$ par

$$f(x) = xe^{x^2} ; \quad g(x) = xe - \frac{1}{2} \text{ (où } e \text{ est la base du logarithme népérien)} ; \quad h(x) = xe^{2x}.$$

$$\text{Montrer que } \int_0^1 f(x) dx = \frac{e-1}{2} ; \quad \int_0^1 g(x) dx = \frac{e-1}{2} ; \quad \int_0^1 h(x) dx = \frac{e^2+1}{4}.$$

2. On joue avec deux dés, un blanc et un rouge, cubiques et non truqués. Les faces du dé blanc sont marquées f, f, g, g, h et h , celles du dé rouge f, f, g, g, g et h .

On lance le dé blanc et on appelle k la fonction dont le nom apparaît sur la face supérieure du dé.

Puis on le dé rouge et on note l la fonction dont le nom apparaît sur la face supérieure du dé.

Soit X la variable aléatoire réelle qui à chaque événement (k, l) on associe le réel $\int_0^1 [k(x) + l(x)] dx$.

a- Quelles sont les valeurs prises par X ?

b- Déterminer la loi de probabilité de X .

c- Calculer l'espérance mathématique de X .

Problème (12 points)

A- Préliminaire

Démontrer que pour tout réel x on a: $\sqrt{x^2 + 3} > |x|$.

En déduire le signe de $\sqrt{x^2 + 3} + x$ et celui de $\sqrt{x^2 + 3} - x$ sur $\mathbb{R}$.

B- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - |x - 1|$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a- Montrer que f est continue en $x_0 = 1$.

b- Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$

c- Etudier le sens de la variation de f sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. On pourra utiliser les résultats de la partie A.

d- Compléter l'étude des variations de f .

e- Préciser le comportement de la courbe (C) en $x_0 = 1$ et construire (C).

2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 1[$.

a- Montrer que g admet une application réciproque notée g^{-1} .

b- Définir explicitement g^{-1} .

c- Construire la courbe (Γ) représentative de g^{-1} dans le même plan que (C).

d- Déterminer la fonction G primitive de g^{-1} et telle que $G(0) = 0$.

e- Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = -1$ et $x = 1$.

Calculer A en utilisant la courbe (Γ).

C- On désigne par I l'intervalle $[1; 2]$.

On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = f(U_n)$

1. a- Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I .

b- Démontrer que pour tout x de I on a $f(x)$ dans I .

c- Démontrer que pour tout x de I on a: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

d- En déduire que pour tout x de I on a: $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

2. a- Démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$.

b- Démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

c- Etablir que: $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$.

d- Déduire de 2.c que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
 $|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$
 $U_{n+1} = U_n - \frac{1}{2^n}$
 $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$