

# ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

## Compétences à atteindre

- Résoudre des équations simples qui servent par exemple à l'étude des fonctions et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
- Résoudre des inéquations qui servent par exemple à l'étude des fonctions et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

## ACTIVITÉS POUR DÉCOUVRIR

- 1** a) Dessine un cercle trigonométrique et l'angle  $\widehat{EOM}$  d'amplitude égale à  $\frac{\pi}{3}$  radians<sup>•</sup>.  
b) Quel angle a même sinus que l'angle de  $\frac{\pi}{3}$  radians ?

Dessine ces angles. Quel nom donnes-tu à ces deux angles ? Montre sur le dessin la propriété des sinus<sup>•</sup>. Résous les équations  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Porte sur un cercle trigonométrique les angles solutions de la 1<sup>re</sup> équation et sur un autre ceux de la 2<sup>e</sup> équation.

- 2** Quel angle a même cosinus que l'angle de  $\frac{2\pi}{3}$  radians ? Dessine ces angles et nomme les deux angles ayant même cosinus<sup>•</sup>. Résous l'équation  $\cos x = -\frac{1}{2}$  et porte ses solutions sur un cercle trigonométrique.

Agis de même avec l'équation  $\cos 3x = -\frac{1}{2}$ .

- 3** Quel angle a même tangente<sup>•</sup> que l'angle de  $\frac{2\pi}{3}$  radians ? Dessine ces angles et nomme-les.

Résous l'équation  $\tan x = -\sqrt{3}$ . Cite les conditions d'existence. Porte sur un cercle trigonométrique les valeurs interdites pour  $x$  ainsi que les solutions trouvées.

Confronte-les. Conclus !

Agis de même avec l'équation  $\tan 2x = -\sqrt{3}$ .

- 4** a) Pour déterminer les angles d'amplitude  $x$  en radians tels que  $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

– trace un cercle trigonométrique  $\mathbb{C}$  ;

– sur l'axe des abscisses, place le point d'abscisse  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ainsi que les points dont

l'abscisse est strictement inférieure à  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ;

– sur le cercle trigonométrique, sélectionne les angles convenables ;

– écris ensuite l'ensemble des solutions.

- b) Agis de même pour résoudre les inéquations

$\sin x > \frac{1}{2}$  et  $3 \tan x - \sqrt{3} > 0$ .

## EXERCICES

## POUR APPLIQUER

## 2.1

(Les solutions comprises entre 0 et  $2\pi$  seront portées sur un cercle trigonométrique).

## ÉQUATIONS ÉLÉMENTAIRES

1. Résous dans  $\mathbb{R}$  :

- 1)  $\sin 4y - \sin 2y = 0$
- 2)  $\cos\left(3\gamma - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2\gamma + \frac{\pi}{3}\right) = 0$
- 3)  $\sin 2x = -\sin x$
- 4)  $\tan 2z + \tan z = 0$
- 5)  $\cos 2x = -\cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$
- 6)  $\tan 2x = \cot x$ .

## RÈGLE DU PRODUIT NUL

## ÉQUATIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ

## ÉQUATIONS A TRANSFORMER À L'AIDE DE FORMULES

2. Résous dans  $\mathbb{R}$  :

*1<sup>re</sup> série*

- 1)  $2\cos^2 x = 1$
- 2)  $\tan^2 x + 4\tan x + 3 = 0$
- 3)  $2\cos^2 x = \sin^2 x - \frac{1}{4}$ .

*2<sup>e</sup> série*

- 1)  $2\sin^2 x - \cos x = 0$
- 2)  $\tan x - \cot x = 1$
- 3)  $\cos^2 x - \sin 2x = 0$ .

*3<sup>e</sup> série*

- 1)  $\sin \gamma + \sin 3\gamma = \cos \gamma$
- 2)  $\cos w + \cos 5w = \cos 3w + \cos 7w$
- 3)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ .

## EXERCICES MÉLANGÉS

(Certains de ces exercices peuvent être résolus par diverses méthodes)

3. Résous dans  $\mathbb{R}$  :

- 1)  $\tan^2 3x - 1 = 0$
- 2)  $\cos x + \cos 3x + 2\cos 2x = 0$
- 3)  $\tan 2\varphi = 2\tan \varphi$
- 4)  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$
- 5)  $\sin \beta + \sin 3\beta = 1 + \cos 2\beta$
- 6)  $\sin\left(4z - \frac{\pi}{5}\right)\cos\left(2z + \frac{\pi}{15}\right) = \sin\left(2z + \frac{\pi}{15}\right)\cos\left(4z - \frac{\pi}{5}\right)$

- 7)  $\tan \beta = 4 - 3\cot \beta$
- 8)  $2(1 + \cos 2\alpha) = \sin \alpha$
- 9)  $\tan x + \tan 3x = 2\sin 2x$
- 10)  $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$ .

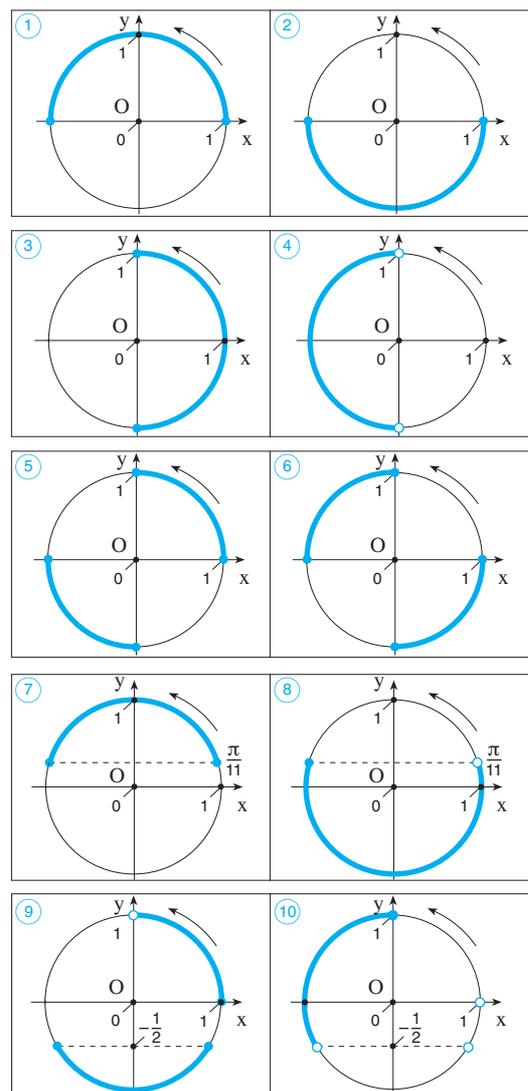
## DOMAINE ET RACINES D'UNE FONCTION CIRCULAIRE

4. Cherche le domaine de définition et l'ensemble des racines des fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \rightarrow f(x)$ , telles que  $f(x)$  égale

- 1)  $\frac{1}{2\cos 3x + 1}$
- 2)  $\frac{x+1}{\cos 3x + \cos x}$
- 3)  $\frac{\cos 2x + \cos x}{2|\sin x| - 1}$
- 4)  $\frac{\cos^2 x - \cos 2x}{\sin^2 x - \sin 2x}$
- 5)  $\frac{\tan 2x}{\cot 2x + \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}$
- 6)  $\frac{\tan 2x}{3\tan 2x - \tan x}$ .

## 2.2

5. Décris, en termes d'intervalles de réels, les parties de cercle trigonométrique données dans les figures suivantes :



6. Résous dans  $\mathbb{R}$  et porte sur un cercle trigonométrique les solutions comprises entre 0 et  $2\pi$  :

- 1)  $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 2)  $3 \tan y - \sqrt{3} \geq 0$
- 3)  $1 - 3 \sin z \leq 0$
- 4)  $2 \sin 3t + 1 < 0$
- 5)  $\tan \frac{3\pi}{5} - \tan 2k \geq 0$
- 6)  $\sin^2 x \leq \frac{3}{4}$
- 7)  $2|\cos v| - 1 > 0$
- 8)  $|\cot 2x| + 1 \leq 0$

7. Détermine le domaine de définition et l'ensemble des racines de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :

- 1)  $x \rightarrow \sqrt{x}$
- 2)  $x \rightarrow \sqrt{\tan x + 1}$
- 3)  $x \rightarrow \sqrt{2 \cos 3x - 1}$

## POUR S'AUTOCONTRÔLER

### 2.1

8. Résous dans  $\mathbb{R}$  :

- 1)  $\tan 4x + 1 = 0$
- 2)  $\cos 4z - \cos z = 0$
- 3)  $\sin t = \sin(3t - \frac{\pi}{2})$
- 4)  $\cos 2x = \sin(x - \frac{\pi}{4})$
- 5)  $\cos 2x + \cos x = 0$
- 6)  $\tan 4v + \tan 3v = 0$
- 7)  $\sin 3k + \sin(2k + \frac{\pi}{3}) = 0$
- 8)  $(\tan 2x + 1)(\cot x - 2) = 0$
- 9)  $\sin^2 x - 1 = 0$
- 10)  $12 \cos^2 \alpha = 5 + 8 \sin \alpha$
- 11)  $\sin^2 \beta - \cos 2\beta + 1 = 0$
- 12)  $\sin 2t + \sin 4t - \sin 3t = 0$

9. Détermine le domaine de définition et l'ensemble des racines des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :

- 1)  $x \rightarrow \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$
- 2)  $t \rightarrow \frac{\sin^2 2t - 1}{\tan 2t}$
- 3)  $x \rightarrow \tan x - 2 \sin x$
- 4)  $u \rightarrow \frac{\cot u - 1}{\cos^2 u + \cos 2u - 2}$
- 5)  $w \rightarrow 4 \cos w - \frac{5}{\cos w} - 4 \tan w$

### 2.2

10. Résous dans  $\mathbb{R}$  :

- 1)  $\sin 2x < 0$
- 2)  $1 - 2 \cos 5y < 0$
- 3)  $3 \tan 3z - \sqrt{3} \leq 0$
- 4)  $|\tan 2t| - \sqrt{3} \geq 0$
- 5)  $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 < 0$

11. Détermine le domaine de définition et l'ensemble des racines des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :

- 1)  $x \rightarrow \sqrt{\tan x + 1}$
- 2)  $y \rightarrow \sqrt{2 \cos 2y - \sqrt{2}}$

## SOLUTIONS DES EXERCICES POUR S'AUTOCONTRÔLER

### 2.1

8. 1)  $x = -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$  (CE :  $x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ )
- 2)  $z = 2k\frac{\pi}{3}$  ou  $z = 2k\frac{\pi}{5}$
- 3)  $t = \frac{\pi}{4} + k\pi$  ou  $t = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$
- 4)  $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{3}$  ou  $\alpha = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$
- 5)  $x = k\frac{\pi}{3}$
- 6)  $v = k\frac{\pi}{7}$  (CE :  $v \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$  et  $v \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$ )
- 7)  $k = -\frac{\pi}{15} + 2k\frac{\pi}{5}$  ou  $k = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
- 8)  $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$  ou  $x = 0, 46365\dots + k\pi$  (CE :  $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$  et  $x \neq k\pi$ )
- 9)  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- 10)  $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  ou  $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
- 11)  $\beta = k\pi$
- 12)  $t = k\frac{\pi}{3}$

9.	Domaine	Ensemble des racines
	1) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\left\{ -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
	2) $\mathbb{R} \setminus \left( \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$	$\emptyset$ car $\pm \frac{\pi}{4} + k\pi$ sont à écarter, elles n'appartiennent pas au domaine.
	3) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
	4) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
	5) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

## 2.2

10. 1)  $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 2)  $\left\{ y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{15} + 2k\frac{\pi}{5} < y < \frac{\pi}{15} + 2k\frac{\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 3)  $\left\{ z \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} < z \leq \frac{7\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 4)  $\frac{1}{2} < \sin x < 1. \quad \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$   
 5)  $\tan 2t \geq \sqrt{3}$  ou  $\tan 2t \leq -\sqrt{3}. \quad \left\{ t \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

11.	Domaine	Ensemble des racines
	1) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
	2) $\left\{ y \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{8} + k\pi \leq y \leq \frac{\pi}{8} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\left\{ \pm \frac{\pi}{8} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

## POUR CHERCHER

## 2.1 et 2.2

## ÉQUATIONS (méthodes diverses)

12. Résous dans  $\mathbb{R}$  et porte sur un cercle trigonométrique les solutions comprises entre 0 et  $2\pi$

- 1)  $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$
- 2)  $\cos 2y + \cos y + 1 = \sin 3y + \sin 2y + \sin y$
- 3)  $9 \sin^4 \gamma - 13 \sin^2 \gamma + 4 = 0$
- 4)  $\cos^2 x - \sin^2 x + \tan^2 x = \frac{5}{6}$
- 5)  $\tan^4 x + \tan^3 x - 7 \tan^2 x - \tan x + 6 = 0$
- 6)  $2 \tan^3 2z + \tan^2 2z - 8 \tan 2z - 4 = 0$
- 7)  $\sin 2x \tan x - \tan x - \sin 2x + 1 = 0$
- 8)  $2 \sin x \sin 3x = 1$
- 9)  $4 \tan^2 w + 4 \sin^2 w = 15$
- 10)  $\frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta} = \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta}$ .
- 11)  $\sin 3x = 8 \sin^3 x$ .

ÉQUATIONS HOMOGENES en  $\sin x$  et  $\cos x$ 

13. Une équation est homogène en  $\sin x$  et  $\cos x$ , de degré  $n$  si, pour **chacun de ses termes**, la somme des puissances de  $\sin x$  et de  $\cos x$  égale  $n$ .

**Pour résoudre une équation homogène en  $\sin x$  et  $\cos x$**  dont les termes ne comportent plus aucun facteur commun en  $\cos x$  ou en  $\sin x$ ,

- on divise les deux membres de l'équation par la plus haute puissance de  $\cos x$  (ou de  $\sin x$ ); on vérifiera que les solutions de  $\cos x = 0$  (ou de  $\sin x = 0$ ) ne sont pas des solutions de l'équation homogène;
- on prend ensuite  $\tan x$  (ou  $\cot x$ ) comme *inconnue auxiliaire*;
- on résout l'équation en  $\tan x$  (ou  $\cot x$ ) obtenue.

a) Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

- 1)  $\sin x + 2 \cos x = 0$
- 2)  $3 \sin x + 2 \cos x = 0$
- 3)  $2 \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x = 0$
- 4)  $\cos^4 x + \sin^4 x = 4 \cos^2 x \sin^2 x$ .

b) Comment pourrais-tu rendre l'équation suivante homogène, du second degré, en  $\sin t$  et  $\cos t$  :

$$2 \sin^2 t - 4 \sin t \cos t - 4 \cos^2 t = -3?$$

Résous-la ensuite.

ÉQUATION DU TYPE  $a \cos x + b \sin x = c$  ( $a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R}_0$ )

14.

**Pour résoudre une équation du type  $a \cos x + b \sin x = c$ ,**

- si  $c = 0$ ,  
l'équation est alors homogène en  $\sin x$  et  $\cos x$ , du premier degré (voir l'exercice 13);
- si  $c \neq 0$  et  $a = 1$ ,  
Dans  $\cos x + b \sin x = c$ , on calcule  $\varphi$  tel que  $\tan \varphi = b$ ,  
on remplace ensuite  $b$  par  $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$  et on réduit au même dénominateur;
- si  $c \neq 0$  et  $b = 1$ ,  
on fait de même en posant  $\tan \varphi = a$ ;
- si  $c \neq 0, a \neq 1$  et  $b \neq 1$ ,  
on divise les deux membres par  $a$ , on calcule  $\varphi$  tel que  $\frac{b}{a} = \tan \varphi$  et on poursuit comme dans les cas précédents.

Résous dans  $\mathbb{R}$  :

- 1)  $2 \cos x + 2 \sin x + 1 = 0$       3)  $2 \sin z + 3 \cos z = 3$   
2)  $3 \cos t + 2 \sin t = 2$       4)  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

15. Soit à résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation

$$3 \cos x + \sin x + 3 = 0$$

- 1) par la méthode de factorisation du premier membre comme dans l'exercice 14;  
2) en substituant  $\cos x$  et  $\sin x$  en fonction de  $\tan \frac{x}{2}$ .

La deuxième méthode est-elle aussi performante que la première? Pourquoi?

16. En substituant  $\cos t$  et  $\sin t$  en fonction de  $\tan \frac{t}{2}$ , résous l'équation dans  $\mathbb{R}$  :

$$2 \cos t \sin t + 2 \sin t + \cos t + 1 = 0.$$

17. Si  $I(t)$  est l'intensité (en ampères) du courant électrique à l'instant  $t$  (en secondes), calcule la plus petite valeur de  $t$  pour laquelle  $I(t) = 2$  lorsque  $I(t) = 4 \sin(100\pi t - 6\pi)$ .

18. La force de pesanteur varie selon les latitudes.

Si  $\alpha$  est la latitude, l'accélération  $g$  due à la pesanteur est donnée, par exemple, par la formule

$$g = 9,81(1 - 0,00264 \cos 2\alpha).$$

Calcule la latitude  $\alpha$  en laquelle  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

19. Une masse est suspendue à un ressort. Si elle est tirée de  $y_0$  mètres vers le bas et si elle est lâchée avec une vitesse initiale de  $v_0 \text{ m/s}$ , alors la position  $y$  de cette masse est exprimée par l'égalité

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

( $t$  étant le temps en secondes,  $\omega$  une constante positive).

- a) Si  $\omega = 1, y_0 = 2 \text{ m}$  et  $v_0 = 3 \text{ m/s}$ , factorise l'expression de  $y$  (voir exercice 67, page 34).  
b) Calcule les temps pour lesquels  $y$  s'annule c.-à-d. les temps pour lesquels la masse passe par sa position d'équilibre.

## VENUS D'AILLEURS

20. Résoudre et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique :

- 1)  $2 \tan x - \cot \left( \frac{\pi}{2} + x \right) = -\sqrt{3}$  (ERM, 2001)  
2)  $\sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x = 1$  (FPM)  
3)  $1 - \cos^2 2x = \sin 2x \cos x$  (UCL, 2001)  
4)  $\cos 2x + \sqrt{3} \cos \left( 2x + \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{3}$  (ULB, 2003)  
5)  $\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$  (ULg, 2003)

21. Résoudre les systèmes et disposer les solutions sur un cercle trigonométrique pour vérifier leur validité :

- 1) 
$$\begin{cases} x + y = \frac{4\pi}{3} \\ \frac{\cos x}{\cos y} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$
 (UCL, 2001)  
2) 
$$\begin{cases} 2 \sin x = \cos y \\ \sin^2 x + \sin^2 y + \cos y + 0,75 = 0 \end{cases}$$
 (ULg, 2001)