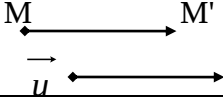
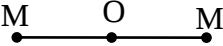
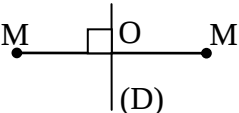
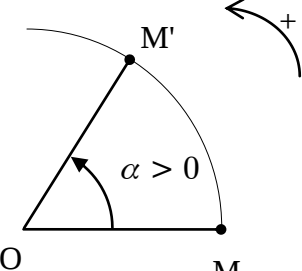


Les transformations. Ce sont des fonctions, l'ensemble de départ est formé de tous les points du plan.

Les notations sont les mêmes que pour les fonctions numériques. Par exemple quand on écrit $T : M \mapsto M'$, cela signifie que T transforme M en M' ou encore M' est l'image de M . On peut aussi écrire $T(M) = M'$.

Quatre transformations à connaître.

Transformation	Pour la définir il faut :	Le point M' image de M est défini par :	Figure
Translation	un vecteur $\vec{u}$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	
Symétrie centrale	un point (le centre) : O	O est le milieu de $[MM']$	
Réflexion (symétrie axiale)	une droite (l'axe) : (D)	(D) est la médiatrice de $[MM']$	
Rotation	un point O (le centre) et une mesure d'angle α . attention : le sens de rotation est donné par le signe de α	$OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$.	

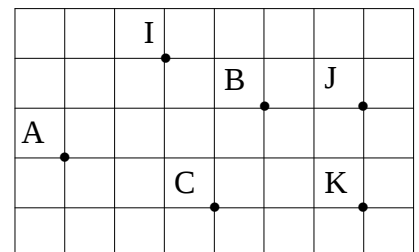
Remarque. Une rotation d'angle 180° est une symétrie centrale.

Exercice 1. On dit qu'un point est invariant pour une transformation T , si T le transforme en lui-même. Donner, si ils existent, les points invariants pour chaque cas suivant :

- a. Une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul. b. Une symétrie de centre O .
c. Une réflexion d'axe (D) . d. Une rotation de centre O et d'angle α .

Exercice 2. Pour chaque question reproduire la figure avec une largeur de carreau de 1 cm et construire l'image du triangle ABC par la transformation donnée.

- a. La translation de vecteur $\vec{IJ}$. b. La symétrie de centre J .
c. La réflexion d'axe (JK) . d. La rotation de centre K et d'angle 60° .



Propriété (admise). Les quatre transformations précédentes conservent les distances.

On dit que ce sont des **isométries**. Cela s'écrit : si $A \mapsto A'$ et si $B \mapsto B'$ alors $AB = A'B'$.

De cette propriété, on peut déduire les propriétés suivantes :

Ces transformations conservent l'alignement, les angles, le parallélisme et les aires.

Exemple. On suppose que la transformation T donne $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ et $C \mapsto C'$.

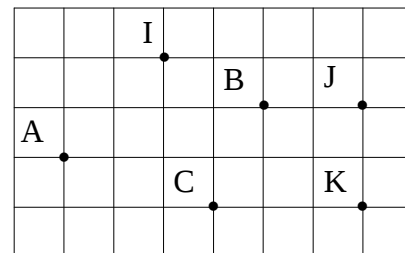
Si $\widehat{ABC} = 35^\circ$ alors $\widehat{A'B'C'} = 35^\circ$ (conservation des angles).

Propriété (admise). Par un quart de tour (rotation d'angle 90° , de sens direct ou indirect), l'image d'une droite est une droite perpendiculaire.

Exercice 1. On dit qu'un point est invariant pour une transformation T , si T le transforme en lui-même.

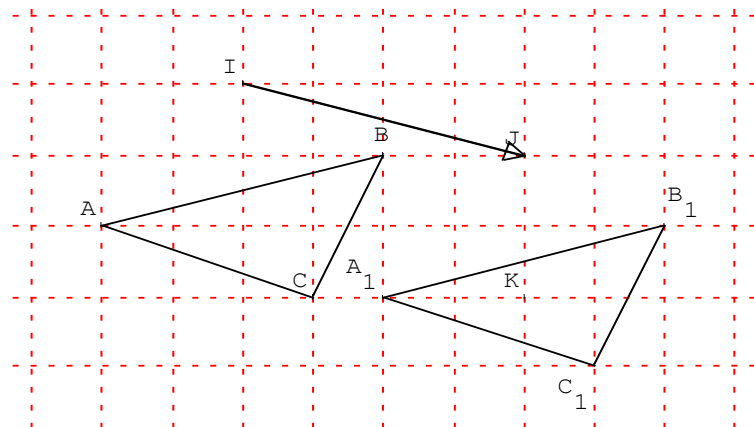
Donnons, si ils existent, les points invariants pour chaque cas suivant :

- a. Une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul. Il n'y a aucun point invariant lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$.
- b. Une symétrie de centre O . Le seul point invariant est le centre de la symétrie O .
- c. Une réflexion d'axe (D) . Les points invariants sont les points situés sur l'axe (D) .
- d. Une rotation de centre O et d'angle α . Lorsque $\alpha \neq 360^\circ, 720^\circ \dots$ le seul point invariant est le centre O de la rotation. Lorsque $\alpha = 360^\circ, 720^\circ \dots$ tous les points du plan sont invariants.

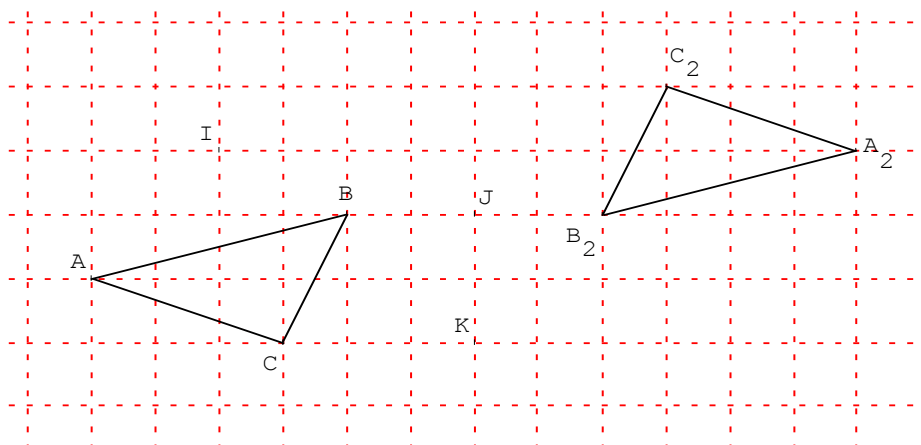


Exercice 2. Pour chaque question reproduisons la figure avec une largeur de carreau de 1 cm et construisons l'image du triangle ABC par la transformation donnée.

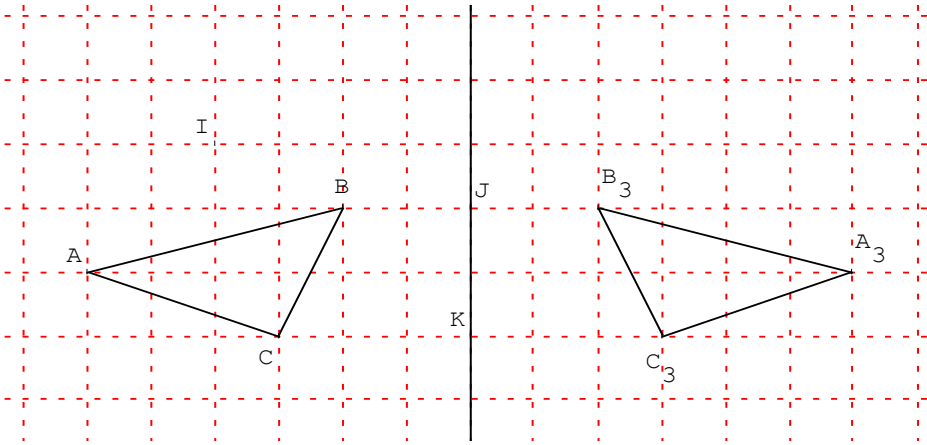
- a. La translation de vecteur $\vec{IJ}$.



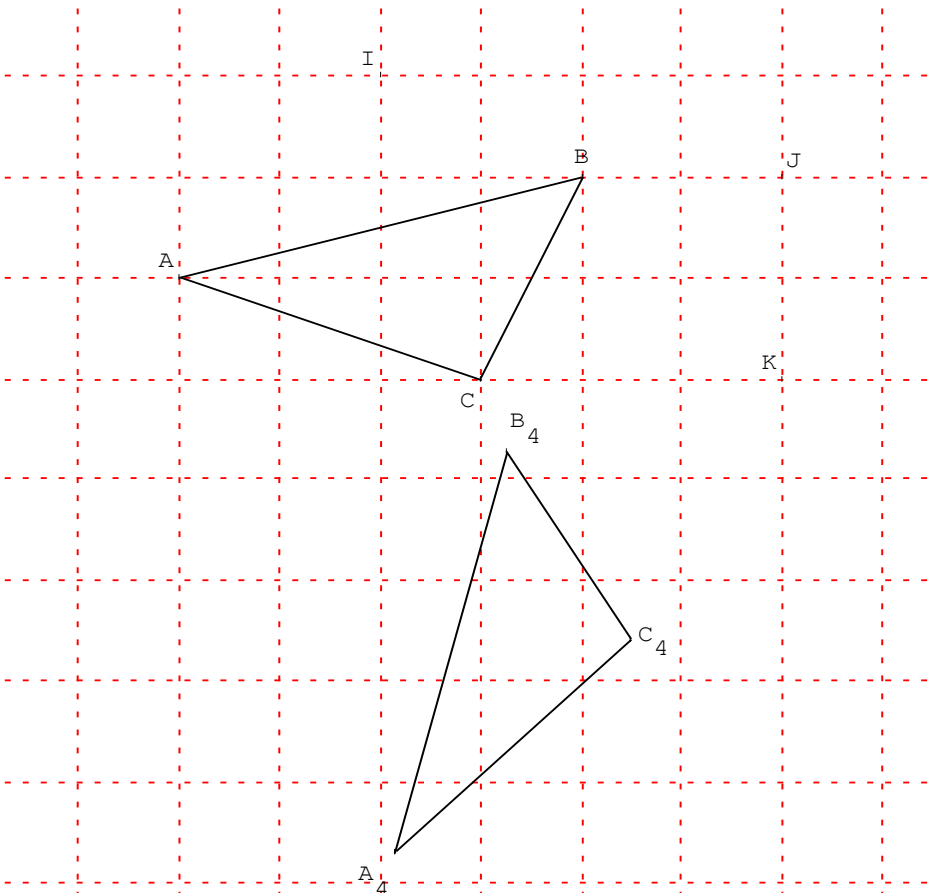
- b. La symétrie de centre J .



c. La réflexion d'axe (JK).



d. La rotation de centre K et d'angle 60°.



Exercice 1.

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral de centre O . Compléter suivant la transformation proposée.

1. Par la symétrie de centre O , $A \mapsto \dots$, $J \mapsto \dots$, $\dots \mapsto C$.

Par la réflexion d'axe (AO) , $B \mapsto \dots$, $H \mapsto \dots$.

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$, $B \mapsto \dots$, $F \mapsto \dots$, $(BI) \mapsto \dots$.

Par la réflexion d'axe (OC) , $B \mapsto \dots$, $E \mapsto \dots$, $\dots \mapsto L$.

2. Par la rotation de centre O et d'angle 120° , $C \mapsto \dots$, $H \mapsto \dots$, $\dots \mapsto F$.

Par la rotation de centre O et d'angle 60° , $B \mapsto \dots$, $\dots \mapsto E$, $O \mapsto \dots$.

Par la rotation de centre O et d'angle -60° , $C \mapsto \dots$, $\dots \mapsto [OA]$, $[JM] \mapsto \dots$.

3. Suivant la transformation (symétrie centrale ou symétrie axiale), compléter :

Ce qui est entre parenthèses après s correspond au centre ou à l'axe de symétrie.

Ce qui est entre parenthèses après R correspond au centre puis à l'angle.

$s(\dots)$, $A \mapsto C$, $O \mapsto O$.

$s(\dots)$, $E \mapsto F$, $(FK) \mapsto \dots$.

$s(\dots)$, $[AF] \mapsto [CG]$, $\dots \mapsto [EH]$.

$s(\dots)$, $F \mapsto G$, $\dots \mapsto [IC]$.

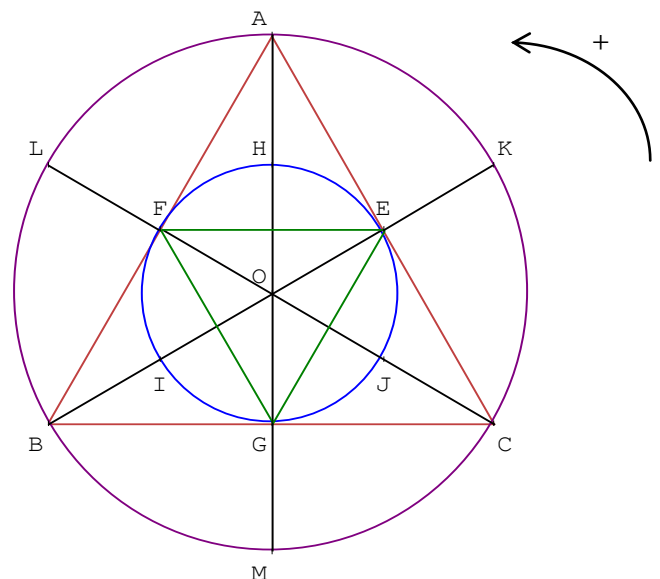
4. Suivant la rotation, compléter.

$R(B, \dots)$, $C \mapsto A$ et $M \mapsto \dots$.

$R(O, \dots)$, $C \mapsto B$ et $G \mapsto \dots$.

$R(E, \dots)$, $G \mapsto A$ et $\dots \mapsto F$.

$R(\dots, \dots)$, $E \mapsto G$ et $K \mapsto O$.



Exercice 2.

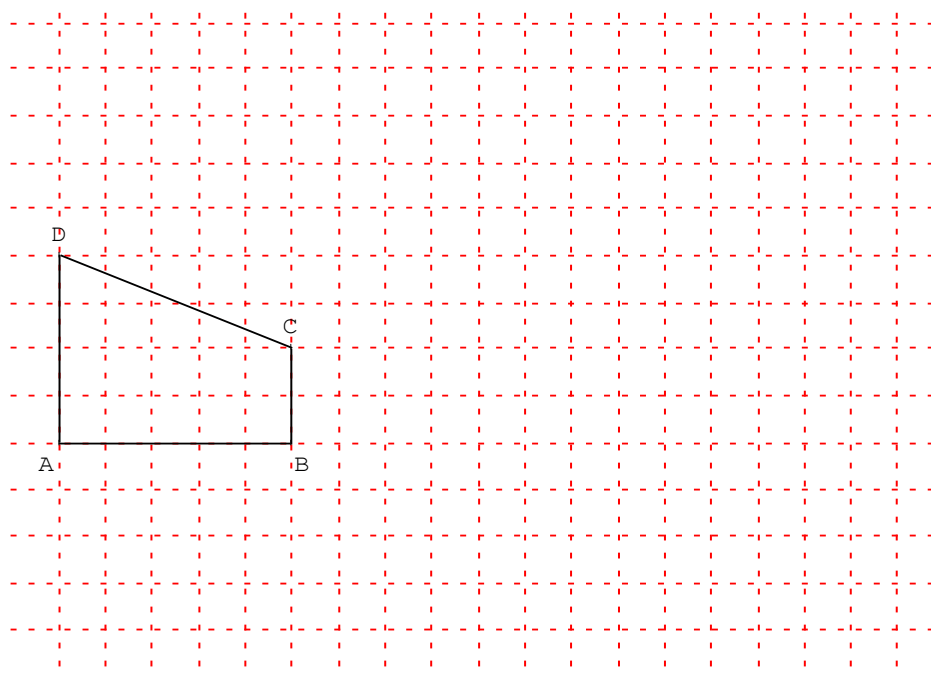
On considère le quadrilatère $ABCD$ suivant. Construire le transformé de $ABCD$ par :

1. La réflexion d'axe (CB) , en bleu.

2. La translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$, en noir (vecteur de même direction et même sens que $\overrightarrow{AB}$ mais deux fois plus long).

3. La symétrie de centre le milieu de $[DC]$, en vert.

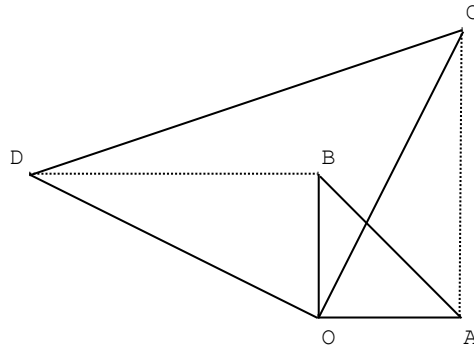
4. Le quart de tour de centre A , de sens indirect, en rouge.



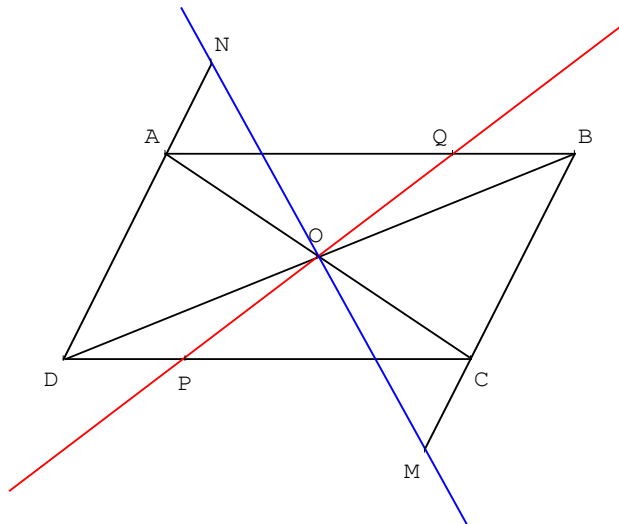
Exercice 3.

OAB et OCD sont deux triangles rectangles isocèles disposés comme l'indique la figure ci-dessous. On note r le quart de tour direct de centre O .

1. Quelle est l'image de A par r ? Justifier.
2. Quelle est l'image de C par r ? Justifier.
3. Montrer en utilisant la transformation r que $AC = BD$ et que $(AC) \perp (BD)$.

**Exercice 4.**

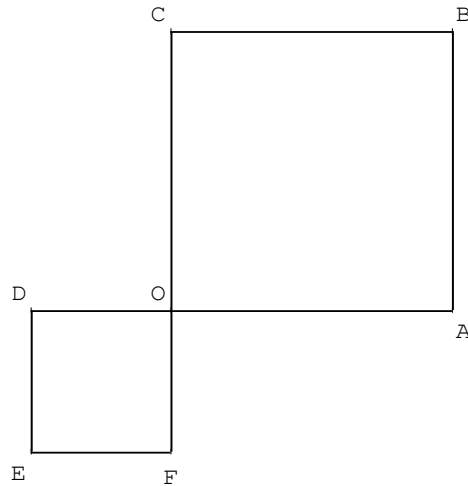
$ABCD$ est un parallélogramme de centre O . Une droite d passant par O coupe les droites (DC) en P et (AB) en Q . Une droite Δ passant par O coupe les droites (AD) en N et (BC) en M .



1. Quelles sont les images des points A, B, C, D par la symétrie de centre O ?
2. Quelles sont les images des droites $d, \Delta, (BC)$ et (CD) par la symétrie de centre O ?
3. Démontrer que le quadrilatère $MPNQ$ est un parallélogramme.

Exercice 5.

Deux carrés $OABC$ et $ODEF$ sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous et $OA \neq OD$.

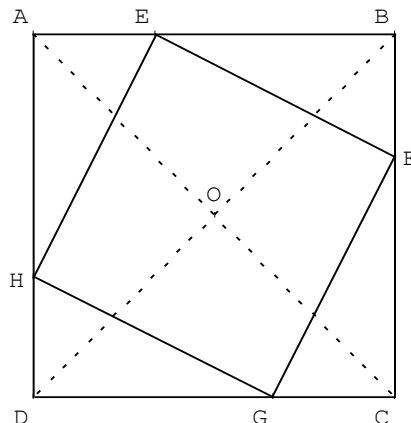


1. a. Démontrer que la droite (EB) est un axe de symétrie de la figure.
 b. En déduire que $\widehat{DCO} = \widehat{OAF}$.
2. I est le milieu du segment $[DC]$ et la droite (OI) coupe la droite (FA) en H .
 a. Démontrer que le triangle DOI est isocèle.
 b. Démontrer que $\widehat{HOA} = \widehat{CDO}$ (angles d'un triangle isocèle, angles opposés par le sommet).
3. En déduire, en utilisant les questions précédentes, que les droites (OI) et (AF) sont perpendiculaires.

Exercice 6.

$ABCD$ est un carré de centre O . E est sur le segment $[AB]$, F sur $[BC]$, G sur $[CD]$ et H sur $[AD]$ avec : $AE = BF = CG = DH$. On note r le quart de tour de centre O qui transforme A en B .

1. a. Justifier la nature des triangles AOB , BOC , COD et DOA .
 b. Quelles sont les images des points B , C , et D par r ?
2. On note temporairement E' l'image de E par r .
 a. Justifier E' appartient à $[BC]$ puis que $BE' = AE$.
 b. Démontrer que F est l'image de E par r .
3. En déduire, en justifiant, la nature du triangle EOF .
4. Les triangles FOG , GOH et HOE sont aussi rectangles isocèles, pourquoi ?
5. En déduire que les points E , O , G et F , O , H sont alignés et que O est le milieu de $[EG]$ et $[FH]$.
6. En déduire que le quadrilatère $EFGH$ est un carré.



Exercice 1.

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral de centre O.
Complétons suivant la transformation proposée.

1. Par la symétrie de centre O, $A \mapsto M$, $J \mapsto F$, $L \mapsto C$.

Par la réflexion d'axe (AO), $B \mapsto C$, $H \mapsto H$.

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$, $B \mapsto G$, $F \mapsto E$, $(BI) \mapsto (GJ)$.

Par la réflexion d'axe (OC), $B \mapsto A$, $E \mapsto G$, $L \mapsto L$.

2. Par la rotation de centre O et d'angle 120° , $C \mapsto A$, $H \mapsto I$, $E \mapsto F$.

Par la rotation de centre O et d'angle 60° , $B \mapsto M$, $J \mapsto E$, $O \mapsto O$.

Par la rotation de centre O et d'angle -60° , $C \mapsto M$, $[OL] \mapsto [OA]$, $[JM] \mapsto [GB]$.

3. Suivant la transformation (symétrie centrale ou symétrie axiale), complétons.

$s((BK))$, $A \mapsto C$, $O \mapsto O$.

$s((AO))$, $E \mapsto F$, $(FK) \mapsto (EL)$.

$s((BK))$, $[AF] \mapsto [CG]$, $[EJ] \mapsto [EH]$.

$s((BK))$, $F \mapsto G$, $[IA] \mapsto [IC]$.

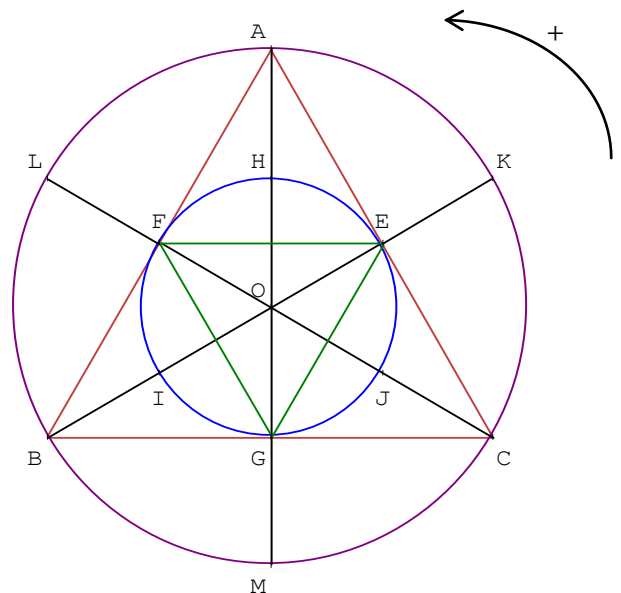
4. Suivant la rotation, complétons.

$R(B, 60^\circ)$, $C \mapsto A$ et $M \mapsto O$.

$R(O, -120^\circ)$, $C \mapsto B$ et $G \mapsto F$.

$R(E, -120^\circ)$, $G \mapsto A$ et $C \mapsto F$.

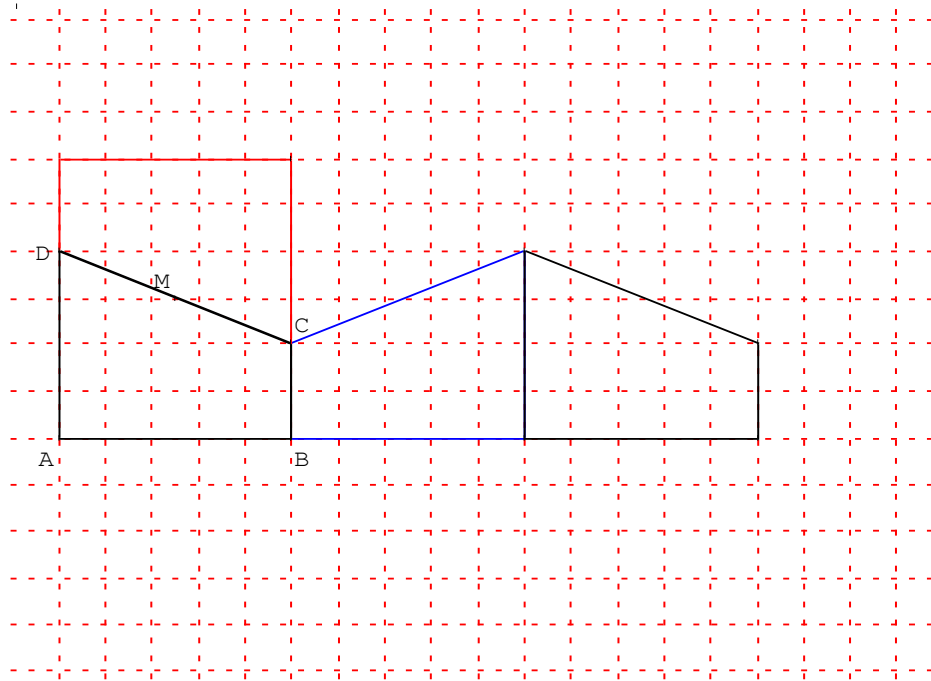
$R(C, 60^\circ)$, $E \mapsto G$ et $K \mapsto O$.



Exercice 2.

On considère le quadrilatère $ABCD$ suivant. Construisons le transformé de $ABCD$ par :

1. La réflexion d'axe (CB) , en bleu.
2. La translation de vecteur $2 \overrightarrow{AB}$, en noir.
3. La symétrie de centre le milieu de $[DC]$, en vert.
4. Le quart de tour de centre A , de sens indirect, en rouge.



Exercice 3.

Par hypothèse, le triangle OAB est rectangle isocèle, donc $OA = OB$ et $\widehat{AOB} = 90^\circ$ dans le sens direct. Ceci prouve, par définition d'un quart de tour direct que $r(A) = B$.

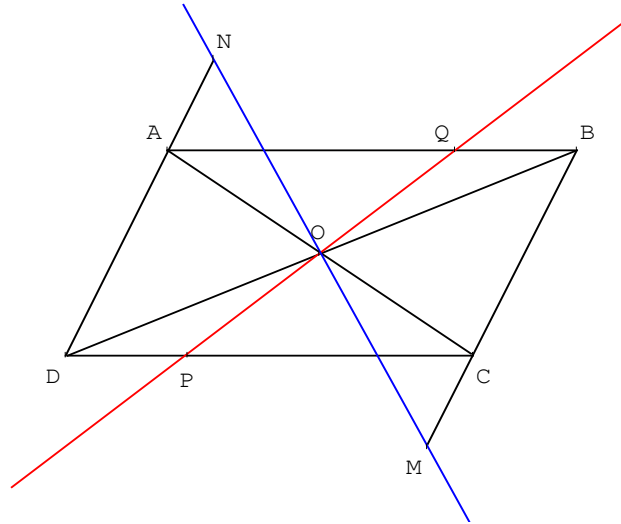
De même, le triangle OCD est rectangle isocèle, donc $OC = OD$ et $\widehat{COD} = 90^\circ$ dans le sens direct. Cela prouve, par définition d'un quart de tour direct que $r(C) = D$.

Puisque $r(A) = B$ et $r(C) = D$, alors $r([AC]) = [BD]$, de plus l'image d'un segment par un quart de tout est un segment de même longueur, donc $AC = BD$.

Puisque $r(A) = B$ et $r(C) = D$, alors $r((AC)) = (BD)$, de plus l'image d'une droite par un quart de tout est une droite perpendiculaire, donc $(AC) \perp (BD)$.

Exercice 4.

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O . Une droite d passant par O coupe les droites (DC) en P et (AB) en Q . Une droite Δ passant par O coupe les droites (AD) en N et (BC) en M .



1. Par la symétrie de centre O , l'image de A est C , l'image de B est D , l'image de C est A , l'image de D est B . En effet, l'intersection des diagonales d'un parallélogramme est un centre de symétrie.

2. Puisque l'image de O est O et que l'image d'une droite est une droite parallèle (par une symétrie centrale), alors l'image de d est d .

Comme l'image de B est D et que l'image de C est A , alors l'image de (BC) est (DA) .

Comme l'image de C est A et que l'image de D est B , alors l'image de (CD) est (AB) .

3. Démontrons que le quadrilatère $MPNQ$ est un parallélogramme.

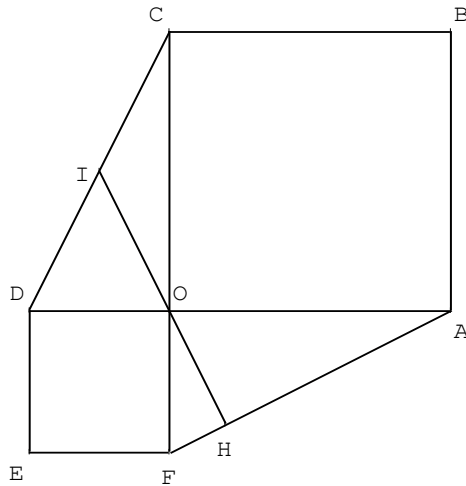
L'image de d est d et l'image de (BC) est (DA) , donc l'image de M intersection de d et (BC) est N intersection de d et (DA) .

L'image de d est d et l'image de (CD) est (AB) , donc l'image de P intersection de d et (CD) est Q intersection de d et (AB) .

Puisque, par la symétrie de centre O , l'image de M est N et l'image de P est Q , alors le quadrilatère $MPNQ$ a un centre de symétrie, c'est donc un parallélogramme.

Exercice 5.

Deux carrés $OABC$ et $ODEF$ sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous et $OA \neq OD$.



1. a. Démontrons que la droite (EB) est un axe de symétrie de la figure.

Les diagonales d'un carré sont des axes de symétrie, donc (EB) est un axe de symétrie du carré $ODEF$ et aussi du carré $OABC$, donc (EB) est un axe de symétrie de la figure.

b. Nous allons en déduire que $\widehat{DCO} = \widehat{OAF}$.

Par la réflexion d'axe (EB) , l'image de D est F , l'image de C est A et l'image de O est O .

Donc l'image de $\widehat{DCO}$ est $\widehat{OAF}$ et ces angles sont égaux car les réflexions conservent les angles.

2. I est le milieu du segment $[DC]$ et la droite (OI) coupe la droite (FA) en H .

a. Démontrons que le triangle DOI est isocèle.

Le triangle DOI est rectangle, donc la médiane $[IO]$ issue de l'angle droit, mesure la moitié de l'hypoténuse. Autrement dit, $IO = ID = IC$. Comme $IO = ID$, le triangle DOI est isocèle en I .

b. Démontrons que $\widehat{HOA} = \widehat{CDO}$ (angles d'un triangle isocèle, angles opposés par le sommet).

Le triangle DOI est isocèle, donc ses deux angles à la base $\widehat{DIO}$ et $\widehat{DOI}$ sont égaux. Les angles $\widehat{DOI}$ et $\widehat{HOA}$ sont opposés par le sommet, donc égaux également. On a donc $\widehat{DIO} = \widehat{DOI} = \widehat{HOA}$. Et donc on a $\widehat{HOA} = \widehat{CDO}$.

3. Nous allons en déduire, en utilisant les questions précédentes, que les droites (OI) et (AF) sont perpendiculaires.

Comme le triangle DOI est rectangle, les angles $\widehat{CDO}$ et $\widehat{DCO}$ sont complémentaires. Comme $\widehat{CDO} = \widehat{HOA}$ et $\widehat{DCO} = \widehat{OAF}$, alors les angles $\widehat{HOA}$ et $\widehat{OAF}$ sont complémentaires également. Ceci prouve que le triangle OAH est rectangle et donc que les droites (OI) et (AF) sont perpendiculaires.

Exercice 6.

$ABCD$ est un carré de centre O . E est sur le segment $[AB]$, F sur $[BC]$, G sur $[CD]$ et H sur $[AD]$ avec : $AE = BF = CG = DH$. On note r le quart de tour de centre O qui transforme A en B .

1. a. Comme les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu, perpendiculairement et sont de même longueur, alors les triangles AOB , BOC , COD , DOA sont isocèles rectangles.

b. Par conséquent, l'image de B est C , l'image de C est D , l'image de D est A par r .

2. a. Justifions que l'image E' de E appartient à $[BC]$ puis que $BE' = AE$.

Comme l'image de A est B et que l'image de B est C , alors l'image de $[AB]$ est $[BC]$ par r .

Comme $E \in [AB]$ et que l'image de $[AB]$ est $[BC]$, alors $E' \in [BC]$.

Puisque l'image de A est B , l'image de E est E' , alors l'image de $[AE]$ est $[BE']$ et comme les rotations conservent les longueurs, alors $AE = BE'$.

b. Démontrons que F est l'image de E par r .

Puisque $E' \in [BC]$ et $AE = BE'$ et que d'autre part $F \in [BC]$ et $BF = AE = BE'$, alors il est clair que E' et F sont confondus. Donc l'image de E est F par r .

3. Nous allons en déduire la nature du triangle EOF .

Puisque $r(E) = F$ et r est un quart de tour de centre O , alors le triangle EOF est isocèle et rectangle.

4. De même, on peut démontrer que $r(F) = G$, $r(G) = H$ et $r(H) = E$ et ceci entraîne que les triangles FOG , GOH et HOE sont aussi rectangles isocèles.

5. Puisque $r(E) = F$ et $r(F) = G$, alors $r^2(E) = G$ où r^2 est la rotation r composée deux fois de suite.

Comme r est un quart de tour de centre O , alors r^2 est la rotation de centre O et d'angle 180° (autrement dit c'est la symétrie de centre O). Par conséquent $r^2(E) = G$ entraîne d'une part que $\widehat{EOG} = 180^\circ$, ce qui prouve que les points E , O et G sont alignés, et d'autre part que $OE = OG$. En résumé O est le milieu de $[EG]$. De même $r^2(F) = H$ ce qui montre que F , O , H sont alignés et que $OF = OH$. Donc O est le milieu de $[FH]$.

6. Les diagonales du quadrilatère $EFGH$ se coupent en leur milieu d'après la question précédente.

D'autre part, on a vu que : $OE = OF = OG = OH$, donc les diagonales de $EFGH$ sont de même longueur.

On a vu aussi que $(OE) \perp (OF)$ donc les diagonales de $EFGH$ sont perpendiculaires.

On en déduit que le quadrilatère $EFGH$ est un carré.

