BAC BLANC
AVRIL 2022

MATHÉMATIQUES

Coefficient : 5
Durée : 4h
Série : C

Cette épreuve comporte trois(3) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra une (1) feuille de papier millimétré.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1

Écris le numéro de chaque affirmation suivie de VRAI si l'affirmation est vraie ou de FAUX si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	a, b et c sont des entiers relatifs non nuls. Si a divise bc et si a et b sont premier entre eux alors a divise c.
2	La fonction $x \to a^x$ avec $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
3	A, B, C et D sont quatre points du plans d'affixes respectives a, b, c et d. Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement $\frac{a-b}{a-c}\times\frac{d-b}{d-c}$ est un nombre réel non nul.
4	Si a et b sont des nombres réels tels que ab$>$ 0 alors ln(ab) = ln(a) + ln(b).

EXERCICE 2

Pour chacune des affirmations ci-dessous, quatre réponses sont données dont une seule est juste. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses	
1.	On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle et isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :	A	$z=\frac{b-ai}{1-i}$
		B	$z-a=e^{i\frac{\pi}{4}}(b-a)$
		C	$a-z=i(b-z)$
		D	$b-z=\frac{\pi}{2}(a-z)$
2.	ABC est un triangle équilatéral de coté 3cm et de centre de gravité G. L'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M vérifiant : $\frac{1}{2}MA^2+\frac{1}{2}MB^2+\frac{1}{2}MC^2=6$ est :	A	Le cercle de centre G et de rayon 2cm
		B	Le cercle de centre G et de rayon 1cm
		C	L'ensemble vide
		D	La droite (D) d'équation $y = x$
3.	On considère dans $\mathbb{Z}$l'équation (E) :$x^2 - x + 4 \equiv 0[6]$ Les solutions de (E)	A	sont des entiers pairs
		B	vérifient $x \equiv 1[6]$
		C	vérifient$x \equiv 2[6]$
		D	Vérifient $x \equiv 2[6]$ ou $x \equiv 5[6]$
4.	On considère la droite $(\mathcal{D})$ de l'espace passant par A (3, 1, 3) et de vecteur directeur $\vec{u}(1,2,-1)$ et la droite $(\mathcal{D}')$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 3+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$ Les droite $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont	A	parallèles
		B	Sécantes
		C	Non coplanaires
		D	Strictement parallèles

EXERCICE 3

1. u désigne un nombre complexe différent de - 1 de module 1 et d'argument $\theta \in [0; 2\pi[$

   a) En utilisant la notation exponentielle, démontre que :

   $1 - u = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 + u = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

   b) En déduire la forme algébrique de $\frac{1-u}{1+u}$.

2. On pose : $u = \frac{2+iz}{2-iz}$ avec z un nombre complexe différent de $2i$.

   a) Exprime z en fonction de u.

   b) En déduire la forme algébrique de z.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^3 = 1$. (On mettra les résultats sous forme exponentielle)

4. En utilisant ce qui précède, résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(2 + iz)^3 = (2 - iz)^3$

EXERCICE 4

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul par :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n\, e^{-x}dx$$

1. A l'aide d'une intégration par partie calcule I_1.

2. Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$(on pourra utiliser une intégration partie sur I_{n+1}).

3. a) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx$.

   b) En déduire la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 5

On note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie pour tout réel $x \neq -2$

par : $f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

($\mathcal{C}_n$) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), l'unité graphique étant égale à 2 cm**.**

1. a) Calcule la limite de f_n en $-\infty$. Interprète graphiquement le résultat obtenu.

   b) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

   c) Etudie suivant la parité de n, la limite de f_n en -2. Interpréter graphiquement le résultat.

3. On admet que f est dérivable en tout point de

   a) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}; f_n'(x) = \frac{(x+2-n)e^{1+x}}{(x+2)^{n+1}}$

   b) Etudie le signe de $f_n'(x)$ suivant la parité de n.

   c) Dresse le tableau de variations de f_n suivant la parité de n.

4. Démontre que toutes les courbes ($\mathcal{C}_n$) passent par un point fixe A dont on précisera les cordonnées.
5. Dresse les tableaux de variations de f_1 et f_2.
6. a) Démontre que pour tout entier naturel non nul n, et pour tout nombre réel x différent de -2,

   $f_n'(x) = f_n(x) - nf_{n+1}(x)$

   b) En déduire les positions relative des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

   c) Trace $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

EXERCICE 6

Pour protéger ses fichiers confidentiels de travail, ton père veut utiliser le procéder suivant qu'un de ses collègues lui a indiqué :

- A chacune des 26 lettres de l'alphabet, on associe un entier naturel n selon le tableau ci-dessous :
-

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- On calcule le reste de la division euclidienne de : $5n + 2$ par 26 ;
- Ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Préoccupé, ton père s'interroge si ce procédé ne conduit pas au codage de deux lettres distinctes par une même lettre et s'il est possible de décoder la lettre E une fois le codage effectué.

Pour le rassurer, tu décides d'effectuer des calculs.

Réponds aux préoccupations de ton père en fournissant tes arguments.