Tehua Kobenan Alexis
facebook: Alexis lil'Ricky kshenho tehua
cel:46234613/57378446/42703981
n°whatsapp: 46234613
UNIVERSITE NANGUI ABROGOUA
Abidjan/côte d'Ivoire

MATHEMATIQUES

I. LIMITES

IRI
ORD
RDI
RIO

$$\left.\begin{array}{c} \frac{0}{0} \\ 0 \times \infty \\ \frac{\infty}{\infty} \\ +\infty + (-\infty) \end{array}\right\} \text{Cas de Forme indéterminée.}$$

ln

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

exp

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- Si $0 < a < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$
- Si $a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
- Si $a > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} x^a = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = +\infty$
- Si $a < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} x^a = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^a = 0$.

NB: $e^x > x^n > a^n > \ln x$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - \ln x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$ $(a>0)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^a - \ln x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$ $(a>0)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^a) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0} x^a \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^a e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

II. METHODES DE CALCUL

$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

$\ln e^x = x$

$e^{\ln x} = x$

$\sqrt{x} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{x}$

$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

$a^0 = 1$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

  d'où $\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$

- Si $\Delta = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$

  d'où $\boxed{f(x) = a(x - x_0)^2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \cos(-\theta) = \cos\theta \\ f(x) = 3 \Leftrightarrow f^{-1}(3) = x \\ (\cos^3 x)' = 3(-\sin x)\cos^2 x \\ (\sin^3 x)' = 3(\cos x)\sin^2 x \end{array}}$$

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) = \cos y \cos x + \sin y \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x. \end{cases}$$

III - DERIVEES ET PRIMITIVES

1. Dérivées

- $(x^r)' = r x^{r-1}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{x'}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
- $(u.v)' = u'v + v'u$
- $\cos x = -\sin x$
- $\sin x = \cos x$.

2. primitives

⚠ $f(x) = \ln x \Rightarrow F(x) = x\ln x - x$

$x^r \Rightarrow \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$

Exemple : $2(2x+1)^2$

$u = 2x+1$

$u' = 2$

$f = u'u^2$

$F(x) = \frac{1}{3}(2x+1)^3 + C$

$$\boxed{F(x) = \frac{(2x+1)^3}{3} + C}$$

NB :

- $f(x) = \cos(ax+b)$
  $F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
- $f(x) = \sin(ax+b)$
  $F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
- $f(x) = e^{ax}$
  $F(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
- $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
  $F(x) = \tan x + C$.

III - INTEGRALE $\Rightarrow b > a$

- $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$
- $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$
- $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$
- $\int_a^b (kf)(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt$

Exple : $\int_1^3 4t\,dt \Rightarrow f(t) = 4t$

$F(t) = 2t^2 + C$

$\int_1^3 4t\,dt = [2t^2]_1^3$

$= 2(3)^2 - 2(1)^2$

$$\boxed{\int_1^3 4t\,dt = 18 - 2 = 16}$$

- integration par partie

$\int_0^1 xe^x\,dx \Rightarrow$ $u'(x) = e^x$; $u = e^x$

$v(x) = x$; $v'(x) = 1$

$\int_0^1 xe^x\,dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 uv'\,dx$

$= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$

$= [xe^x - e^x]_0^1$

$= e^1 - e^1 - 0 + 1$

$$\boxed{\int_0^1 xe^x\,dx = 1}$$

NB : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$F(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

IV - ETUDE DE FONCTIONS

A- Interpretation graphique des limites

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ Asymptôte Verticale $(x = a)$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow$ Asymptôte Horizontale $(y = b)$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - y = 0 \Rightarrow$ Asymptôte Oblique $(y = ax + b)$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty \Rightarrow$ branche parabolique de direction (OJ)
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow$ branche parabolique de direction (OI)

NB: • $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \neq \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow \left(f'_g(a) \neq f'_d(a) \right)$

$\Rightarrow f$ n'est pas derivable en a.

$\Rightarrow C_f$ admet 2 demi-tanyentes au point d'Abscisse a. (reel)

• $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$

$\Rightarrow f$ n'est pas derivable en a

$\Rightarrow$ la droite d'equation $x = a$ est une demi-tangente verticale à C_f. $(\pm\infty)$

⚠ $f(x) = 3x + 1$ (peut-on prolonger f par Continuité en 0)

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ et $f(0) = 1$; Soit $g(x) = 3x + 1$

$$\begin{cases} \forall x \in D_f \; ; \; g(x) = f(x) \\ \quad g(0) = 1 \end{cases}$$

f est prolongeable par Continuité en 0.

B- Demonstrations

1- $x = a$ est un axe de symetrie

$\forall\, a - x \in D_f$ et $a + x \in D_f$; $f(a - x) = f(a + x)$

2- $A(a;b)$ est centre de Symetrie

$\dfrac{f(a + x) + f(a - x)}{2} = b \Rightarrow A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

3- Continuité de f en un point a.

- Si f n'est pas definie en a : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} = b \quad (b \in \mathbb{R})$
- Si f est definie en a : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(a)$

4- Determination des Coordonnées d'un point d'intersection.

a- Axe des Abcisses $(Ox) \Rightarrow$ resoud $f(x) = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x_A \\ 0 \end{pmatrix}$

b- Axe des ordonnées $(OJ) \Rightarrow$ resoud $f(0) = y_A \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} 0 \\ y_A \end{pmatrix}$

C- Avec deux Courbes : $A(X_A ; Y_A)$

$f(x)$ et $g(x)$

$\Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow X_A$

$\Rightarrow$ utiliser la Fonction la plus simple puis : $g(X_A) = Y_A$.

5- Equation de la tangente

$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Rightarrow y = ax + b$.

6- Calcul de nombre dérivé : $(f^{-1})'(a)$

Exemple : $f(x) = x^2 - x$; $[\frac{1}{2} ; +\infty[$

Calculons $(f^{-1})'(0)$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0$ et $x = 1$

$x \in]\frac{1}{2} ; +\infty[$

donc $(f^{-1})(0) = \frac{1}{f'(1)}$

- $f'(1) = 1$

$\boxed{(f^{-1})'(0) = 1}$

7- position relative de Cf et de (D)

$(D) : y = ax + b$

$f(x) - y$ (etude de signe)

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	

- $\forall x\ ]-\infty ; a[$ $f(x) - y < 0$ donc Cf est en dessous de (D)
- $\forall x\ ]a ; +\infty[$ $f(x) - y > 0$ donc Cf est au dessus de (D)

8- démonstration : une fonction realise une bijection

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $g(]-\infty ; +\infty[) = \mathbb{R}$ donc f realise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de plus $0 \in \mathbb{R}$ alors $f(x) = 0$ admet une Unique Solution dans $\mathbb{R}$.

9- signe d'une Fonction (exple)

x	$-\infty$		α		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- $\forall x \in]-\infty ; \alpha[$; $x < \alpha$ et $g(x) < g(\alpha)$ Car g est strictement $\nearrow$ Sur $]-\infty ; \alpha[$ or $g(\alpha) = 0$ donc $g(x) < 0$
- $\forall x \in]\alpha ; -1[$ $x > \alpha$ et $g(x) > g(\alpha)$ Car g est strictement $\nearrow$ Sur $]\alpha ; -1[$ or $g(\alpha) = 0$ donc $g(x) > 0$
- $\forall x \in]-1 ; +\infty[$ g admet pour minimum 1 or $1 > 0$ donc $g(x) > 0$.

Conclusion : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; \alpha[& g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha ; +\infty[& g(x) > 0 \end{cases}$

10- Expression explicite de la bijection reciproque f^{-1} de f.

$y = ax + b \Rightarrow \underbrace{f(x) = y}_{b} \Rightarrow x = b$

Conclure : $f^{-1}(x) = b$.

11- Détermination des abscisses des points communs à c et (D) ; à c et (D')

$y = ax + b$ et $y' = a'x + b'$

- $M(x;y) \in (C) \cap (D) \Leftrightarrow f(x) = y \Rightarrow x = k$.
- $M'(x;y) \in (C) \cap (D') \Leftrightarrow f(x) = y' \Rightarrow x = k'$

$$(T) : y' = f(k')(x - k') + f(k')$$

$$(T) : y = f(k)(x - k) + f(k)$$

12- Détermination d'abscisse des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite (Δ) : $y = -5x + 1 \Rightarrow y = ax + b$

Soit $M\begin{pmatrix} a' \\ f(a') \end{pmatrix}$ et $M \in (C_f)$ $\qquad$ $f(x) = ax^2 + b$.

$(T) : y = f'(a')(x - a') + f(a')$ or $(T) // (\Delta)$ donc $f'(a') = -5$

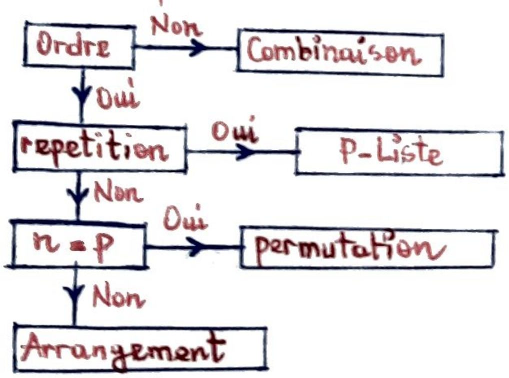
Ensuite resoud $f'(a') = -5$ pour avoir la valeur de "a".

Conclusion : $M\begin{pmatrix} a' \\ f(a') \end{pmatrix}$

NB : $(T) // (\Delta) \Leftrightarrow (T)$ a même coefficient directeur que (D)

V- PROBABILITE.

1- Simple.



- $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ (• simultanement.
- $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ (• Successivement sans remise ← Arrangement; • Successivement avec remise ← P-Liste.

NB : $n > p \Rightarrow A_n^p$ et $n = p \Rightarrow n!$ (permutat°)

$n \geq p \Rightarrow C_n^p$

- et ⇒ multiplication
- ou ⇒ addition.

$$P(B) = \frac{Card\,B}{Card\,\Omega}$$

2- Conditionnelle.

$p(A/B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

3. Even. Independants

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

$P_A(B) = p(B)$.

$P_B(A) = p(A)$

- $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$
- $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$
- $p(B \cap A) = p(A) \times P_A(B)$
- $p(B \cap \bar{A}) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$
- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

- $n^p \Rightarrow$ p-Liste.
- $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

Lecture : $P_B(A)$ = probabilité de A sachant B.

4- Esperience mathematique ⇒ $E(x) = x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_nP_n$

5- Variance ⇒ $V(x) = x_1^2P_1 + x_2^2P_2 + \dots + x_n^2P_n - E(x)^2$

6- Ecart-type ⇒ $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

variable aléatoire → $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$

x_i	0	100	200	T
$p(X=x_i)$	3/10	5/10	2/10	1

$p(X=x_i) = \dfrac{\text{Card } x_i}{\text{Card } \Omega}$

8- Epreuve de Bernoulli ⇒ succès : probabilité p
échec : probabilité $q = 1-p$.

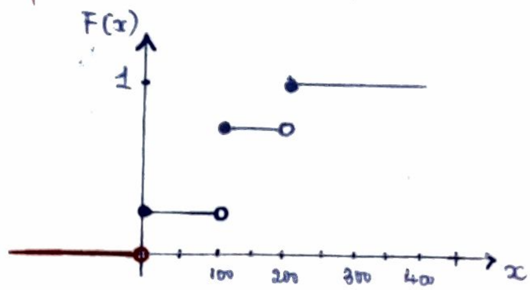
9- loi binomiale ⇒ $0 \leq k \leq n$

- p : succès
- $1-p$: échec

$\left.\right\}$ $p(X=k) = C_n^k\, p^k q^{n-k}$. et $E(X) = n.p$.
$V(X) = np \times (1-p)$.

10- Fonction de repartition : $F(x) = p(X \leq x)$

si $x < 0$ ⇒ $F(x) = 0$
si $0 \leq x < 100$ ⇒ $F(x) = 3/10$
si $100 \leq x < 200$ ⇒ $F(x) = 8/10$
si $200 \leq x$ ⇒ $F(x) = 1$



éch : 10 cm → 1
2 cm → 100

VI. STATISTIQUE

METHODE FETICHE

$\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{mode}}$ $\boxed{2}$

x_i	1	2	3	4
y_i	13	12	20	16

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{13}$ $\boxed{\text{DATA}}$ ⇒ $n = 1$
$\boxed{2}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{12}$ $\boxed{\text{DATA}}$ ⇒ $n = 2$
$\boxed{3}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{20}$ $\boxed{\text{DATA}}$ ⇒ $n = 3$
$\boxed{4}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{16}$ $\boxed{\text{DATA}}$ ⇒ $n = 4$

$\boxed{\text{OFF}}$

$\bar{x} = \boxed{\text{RCL}}\ \bar{x}$
$\bar{y} = \boxed{\text{RCL}}\ \bar{y}$ } moyennes.

$r = \boxed{\text{RCL}}\ \boxed{\div}$ r

$V(x) = \boxed{\text{RCL}}\ \boxed{6}$ σx ⇒ élève le resultat au Carré
$V(y) = \boxed{\text{RCL}}\ \boxed{9}$ σy ⇒ élève le resultat au Carré

$\text{Cov}(x;y) = \boxed{\text{RCL}} \cdot \dfrac{\boxed{\Sigma xy}}{\text{nbre de Carreaux}} - (\bar{x}.\bar{y})$

$a = \boxed{\text{RCL}} . \boxed{)}$
$b = \boxed{\text{RCL}} . \boxed{(}$

- point moyen : $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{N}$; $\bar{y} = \dfrac{\Sigma y_j}{N}$

$G(\bar{x};\bar{y})$

N : Effectif total

- Covariance : $\text{cov}(x;y) = \dfrac{\Sigma n_{ij}\, x_i y_j}{N} - \bar{x}.\bar{y}$
- Ecart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

⇒ Droite de regression de y en x : $y = ax + b$.

$G \begin{cases} a = \dfrac{\text{Cov}(xy)}{V(x)} \\ b = \bar{y} - a\bar{x} \end{cases}$

⇒ Droite de regression de x en y : $x = a'y + b'$

$G \begin{cases} a' = \dfrac{\text{Cov}(xy)}{V(y)} \\ b' = \bar{x} - a\bar{y} \end{cases}$

- Variance

$V(x) = \dfrac{\Sigma n_i x_i^2}{N} - (\bar{x})^2$

$V(y) = \dfrac{\Sigma n_j y_j^2}{N} - (\bar{y})^2$

$\boxed{N = \Sigma n_{ij}}$

Coefficient de Corrélation lineaire

$r = \dfrac{\text{Cov}(xy)}{\sqrt{V(x).V(y)}}$

- si $0{,}87 \leq |r| \leq 1$ ⇒ Corrélation est Forte
- si $r = 1$ ⇒ Corrélation est parfaite

$\boxed{r^2 = aa'}$

VII. NOMBRES COMPLEXES

$z = a + ib \begin{cases} a = Re(z) \\ b = Im(z) \end{cases}$

- module de z : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
- argument de z : $\begin{cases} \cos\theta = Re(z)/|z| \\ \sin\theta = Im(z)/|z| \end{cases} \Rightarrow \theta = ?$
- Ecriture Trigo. : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ Avec $\theta = \arg z$
- Ecriture expo. : $z = |z|e^{i\theta}$

$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

- $z + z' = a' + a + (b + b')i$
- $zz' = aa' - bb' + (ab' + ba')i$
- $z^0 = 1$
- $z^{n+1} = z^n \times z$
- $\frac{1}{z^n} = z^{-n}$

$i^2 = -1$

$i^{4n} = 1$

*** utilisation de Calculatrice**

$\Rightarrow$ Re(z)[2ndF][STO] Im(z)[2ndF][8][2ndF][Exp][÷] 180[2ndF][ab/c] [=]

- Conjugué de z : $\bar{z} = a - ib = |z|e^{-i\theta} = |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

- module de produits et quotients
  - $|zz'| = |z| \times |z'| \Rightarrow \arg(zz') = (\arg z + \arg z') + 2k\pi$
  - $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \Rightarrow \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = [\arg(z) - \arg(z')] + 2k\pi$

$z = 0 \begin{cases} \text{si } z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Rightarrow b = 0 \\ \text{si } z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases}$

- Affixe de M : $z_M = a + ib$

$M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- $|z^n| = |z|^n \Rightarrow \arg z^n = n \arg z$

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$
- $z\bar{z} = a^2 + b^2$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ avec $z' \neq 0$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

EQUATIONS : $az^2 + bz + c = 0$

- si $\Delta > 0 \Rightarrow z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta = 0 \Rightarrow z = -\frac{b}{2a}$
- si $\Delta < 0 \Rightarrow z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exple

* $z^2 - 5z + 9 = 0$

$\Delta = -11 \Rightarrow \Delta = (i\sqrt{11})^2$

$\delta = i\sqrt{11}$

$z_1 = \frac{5-i\sqrt{11}}{2}$ et $z_2 = \frac{5+i\sqrt{11}}{2}$

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{5-i\sqrt{11}}{2} ; \frac{5+i\sqrt{11}}{2}\right\}}$

- z est reel pure
  - avec l'ecriture algebrique : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = a\cos\theta$
  - avec l'argument : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = 0 + k\pi$
  - avec le conjugué : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

- z est imaginaire pue
  - avec l'ecriture algebrique : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = ia\sin\theta$
  - avec l'argument : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$
  - avec le conjugué : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Determination de Racine Carrées

$a+bi$

Soit : $z^2 = a+bi$

posons : $z = x+iy$

$z^2 = x^2 - y^2 + i2y$

$|z^2| = |a+ib|$

- $|a+ib| = T$ avec $T \in \mathbb{R}$
- $|z^2| = x^2+y^2$

Système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ x^2 + y^2 = T & (2) \\ 2xy = b & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow x = u$ ou $x = -u$

- $x = u \Rightarrow y = K \Rightarrow u+iK$
- $x = -u \Rightarrow y = -K \Rightarrow -u-iK$

$u+iK$ et $-u-iK$ sont les racines carrés de $a+ib$.

GEOMETRIE

I - Calcules

- Distances

$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

- Angles Avec des Complexes.

$mes(\widehat{\vec{AB};\vec{CD}}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi$

II - DEMONSTRATIONS

- les deux droites (AB) et (CD) sont $\perp$

$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ = imaginaire pure

- Trois points A; B; C sont alignés

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ = reel ou $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = 0 + 2k\pi$

- ABC est rectangle isocèle en B

$\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = i$ ou $-i \Rightarrow |i| = |-i| = 1$

$|z_B - z_A| = |z_B - z_C|$

$AB = BC$ (Triangle isocèle)

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}\right) = \arg(i) \Rightarrow mes(\widehat{\vec{BC};\vec{BA}}) = \frac{\pi}{2}$ et

$AB = BC$

ABC est un triangle isocèle rectangle en B.

- A; B; C et D sont Cocycliques :

(ABD) ne sont pas alignés

$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} : \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} = X$; $X \in \mathbb{R}^*$

$\mathbb{R}^*$: nbres reels non nul

$\mathbb{R}_+$: nbres reels positifs

- ABC est equilateral

$|z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_A - z_C|$

ou

$\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ENSEMBLE DE POINTS

- $|z - a| = |z + i|$

posons : $z = x+iy$

$|x+iy-a| = |x+iy+i|$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$|(x-a)+iy| = |x+i(y+1)|$

$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$

$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = x^2 + y^2 + 2y + 1$

$\boxed{a^2 - 2ax - 2y - 1 = 0} \Rightarrow$ droite

- $|z - a + i| = c$ $\quad a \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

posons : $z = x+iy$

$|x+iy-a+i| = c$

$\sqrt{(x-a)^2 + (y+1)^2} = c$

$\boxed{(x-a)^2 + (y+1)^2 = c^2}$ Cercle de rayon c

$\Omega\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$

- $x - a = 0 \Rightarrow x = a$
- $y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

$\Rightarrow$ Cosαx et sinαx en Fonction de Cos$x$ et sin$x$ (MOIVRE)

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha}$$

$\cos \alpha x + i \sin \alpha x = (\cos x + i \sin x)^{\alpha} \Rightarrow$ Triangle pascal $\begin{pmatrix} 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \end{pmatrix}$

$\cos \alpha x + i \sin \alpha x = a + ib$

- $\cos \alpha x = a$
- $\sin \alpha x = b$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad \text{et} \quad \sin n\alpha = \dfrac{e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}}{2i} \\ \cos \alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \text{et} \quad \cos n\alpha = \dfrac{e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}}{2} \end{cases}$$

⇒ linéariser $\cos^3 x$ (EULER)

- $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3 \Rightarrow \text{Triangle pascal}$$

$$\boxed{\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x}$$

* Calcul $(1+i\sqrt{3})^{2014}$ ⇒ Moivre.

$|1+i\sqrt{3}| = 2$ et $\arg(1+i\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$

$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$(1+i\sqrt{3})^{2014} = \left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^{2014}$

$= 2^{2014}\left(\cos\dfrac{2014\pi}{3} + i\sin\dfrac{2014\pi}{3}\right)$

$$\boxed{(1+i\sqrt{3})^{2014} = 2^{2014}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)}$$

⇓

$$\boxed{(1+i\sqrt{3})^{2014} = 2^{2014}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

TRANSLATION – HOMOTHETIE – ROTATION – SIMILITUDE

$a \in \mathbb{R}^*$ $\begin{cases} a = 1 \Rightarrow F \text{ est une Translation } (z' = z + a) \\ a \neq 1 \Rightarrow F \text{ est une Homothetie de rapport "a" } (z' - z_{\Omega} = k(z - z_{\Omega})) \end{cases}$

rapport, centre

$a \in \mathbb{C}^*$ $\begin{cases} |a| = 1 \Rightarrow F \text{ est une rotation } (z' - z_{\Omega} = e^{i\theta}(z - z_{\Omega})) \\ |a| \neq 1 \Rightarrow F \text{ est une similitude directe de rapport } |a| \quad (z' - z_{\Omega} = k e^{i\theta}(z - z_{\Omega})) \end{cases}$

centre, centre, centre, angle (θ)

angle (θ), centre, rapport, centre

- Translation : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$
- Rotation : $r(\Omega) = \Omega' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ mes\,(\widehat{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}}) = \alpha \end{cases}$

r = rotation. Ω = centre.

- Similitude : S; $M \mid M'$; $N \mid N'$ $\quad k = \dfrac{M'N'}{MN} \Rightarrow$ rapport

$Mes\,(\widehat{\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}}) = \alpha \Rightarrow$ angle

$F(\Omega) = \Omega' \Rightarrow z_{\Omega'} = a z_{\Omega} + b$

Generale : $z' = az + b$

Affixe du Centre Ω : $z_{\Omega} = \dfrac{b}{1-a}$

avec $a \neq 1$

SUITES NUMERIQUES

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow u(n) \text{ ou } U_n$$

Exple : 4 premiers termes de U_n

$$U_n = 3n - 2$$

$U_0 = 3(0) - 2 = -2$
$U_1 = 3(1) - 2 = 1$
$U_2 = 3(2) - 2 = 4$
$U_3 = 3(3) - 2 = 7$

relation de recurrence $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} ;\ U_{n+1} = U_n + 14 \end{cases}$

1- Calcule.

$U_1 = U_0 + 14 = 13$
$U_2 = U_1 + 14 = 27$
$U_3 = U_2 + 14 = 41$

2- Exprimons U_n en fonct° de n.

$U_{n+1} = U_n + 14$
$U_1 = U_0 + 14$
$U_2 = U_1 + 14 \Rightarrow U_2 = U_0 + 14 + 14 \Rightarrow U_2 = U_0 + 14(2)$
$U_3 = U_2 + 14 \Rightarrow U_2 = U_0 + 14(2) + 14 \Rightarrow U_3 = U_0 + 14(3)$
$\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n = U_0 + 14n$

$$\boxed{U_n = -1 + 14n}$$

Exo : Exprime U_{n+1} en fonct° de U_n
$\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n = (-2)^n$.

$U_n = (-2)^n \Rightarrow U_{n+1} = (-2)^{n+1}$
$= (-2)^n \times (-2)^1 \Rightarrow \boxed{U_{n+1} = -2 \times U_n}$

COMMENT CONSTRUIRE DES TERMES D'UNE SUITE

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} ;\ U_{n+1} = -U_n - 1 \end{cases}$$

Construct° des 4 premiers termes de la suite U_n.

- Definir une Fonct° f tq : $f(x) = -x - 1$
- Construir $(\mathcal{C}f)$ et la droite (Δ) d'equat° $y = x$.

Application

$U_0 = 3$; $U_1 = -4$; $U_2 = 3$; $U_3 = -4$ (sur l'Axe (Ox)) (FAut Bara !!!)

Sens de Variation d'une Suite

- U_n est strictem croissante $\Rightarrow \forall n \geq n_0$; $U_{n+1} > U_n$
- U_n est " decroissante $\Rightarrow \forall n \geq n_0$ $U_{n+1} < U_n$
- U_n est Constante ; $U_{n+1} = U_n$.

• Etude de sens de Variation d'une Suite

- le signe de la differençe : $U_{n+1} - U_n$.
- Comparaison de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1 (si U_n est une suite à termes positifs)
- Etude de la Fonction f lorsque $U_n = f(x)$.
- on peut utiliser le raisonnement par recurrence.

Application ①

$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = \frac{2}{n+1}$

$U_{n+1} - U_n = -\frac{2}{(n+2)(n+1)}$; $n \geq 0$ donc $(n+1)(n+2) \geq 0$ donc $U_{n+1} - U_n \leq 0 \Rightarrow U_n$ est $\searrow$.

Application ②

$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = \frac{e^n}{3}$

$U_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{3} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{e^n \times e}{3}$

$$U_{n+1} = e U_n$$

$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = e \geq 1$ donc $U_{n+1} \geq U_n \Rightarrow U_n$ est Croissante.

Application ③

$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = n^2 + 2n - 2$

Soit $f(x) = x^2 + 2x - 2$; $D_f = \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\forall x \in D_f$; $f'(x) = 2x + 2 = 2(x+1)$

$2 > 0$; $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

- Sur $]-\infty ; -1[$; $f(x)$ est $\searrow$
- Sur $]-1 ; +\infty[$; $f(x)$ est $\nearrow$ donc à partir du rang $n = 0$ la suite U_n est $\nearrow$.

CONVERGENCE

* Suite majorée - Suite minorée

- U_n est majorée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \leq M$.
- U_n est minorée $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \geq m$.

Application

$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = 2 - \dfrac{1}{n+1}$

- $n \geq 0$

$$n+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq 1$$

$$-\frac{1}{n+1} \geq -1$$

$$2 - \frac{1}{n+1} \geq 1$$

$U_n \geq 1$ donc U_n est minorée par 1.

- $\forall n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{1}{n+1} \leq 0 \Rightarrow 2 - \frac{1}{n+1} \leq 2$$

$U_n \leq 2$, donc U_n est majorée par 2.

* limite d'une suite (pas sorcier tjrs identique)

1. $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = \dfrac{1}{2+n}$

soit $f(x) = \dfrac{1}{2+x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2+x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = n - \dfrac{\ln(n)}{n}$

soit $f(x) = \cancel{x}\ x - \dfrac{\ln(x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$

* Suites Convergentes - Suites divergentes

- U_n est dite Convergente $\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \pm\infty} U_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$
- U_n est dite divergente $\Leftrightarrow$ U_n n'est pas Convergente.

RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

soit $\begin{cases} U_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N} ;\ U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 3 \end{cases}$

1/ $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \leq 6$ (par recurrence)

$U_0 \leq 6$ est vraie car $U_0 = -2$

supposons : $U_k \leq 6$; $\forall k \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow U_{k+1} \leq 6$ or $U_{k+1} = \frac{1}{2} U_k + 3$

on sait que $U_k \leq 6$

$\frac{1}{2} U_k \leq 3$

$\frac{1}{2} U_k + 3 \leq 6$

$U_{k+1} \leq 6 \Rightarrow$ Ce qui etablit la propriété à l'ordre $(k+1)$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \leq 6$.

2/ $\forall n \in \mathbb{N}$, montrons que U_n est $\nearrow$ (par recurrence)

- $U_1 \geq U_0$ Car $U_0 = -2$ et $U_1 = 2$

Supposons que $\forall k \in \mathbb{N}$; $U_{k+1} \geq U_k$.

$\Rightarrow U_{k+2} \geq U_{k+1}$

or $U_{k+1} = \frac{1}{2} U_k + 3$ et $U_{k+2} = \frac{1}{2} U_{k+1} + 3$

on sait que $U_{k+1} \geq U_k$.

$\frac{1}{2} U_{k+1} \geq \frac{1}{2} U_k$.

$\frac{1}{2} U_{k+1} + 3 \geq \frac{1}{2} U_k + 3$

$U_{k+2} \geq U_{k+1} \Rightarrow$ Ce qui etablit la propriété à l'ordre $(k+2)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$; U_n est $\nearrow$.

CONVERGENCE D'UNE SUITE MONOTONE

- U_n : croissante et majorée $\rightarrow$ U_n Convergente.
- U_n : decroissante et minorée $\rightarrow$ U_n Convergente.

Application

soit $\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 3 \end{cases}$

U_n est $\nearrow$ et majorée par 6 donc U_n est Convergente.

- U_n est Convergente ; sa limite l est solut° de $f(x) = x$

Applicat°

$\begin{cases} U_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 3 \end{cases}$

U_n est Convergente et Converge vers l, solut° de l'equat° $f(x) = x$

$\frac{1}{2} l + 3 = l \Rightarrow l = 6$ d'où $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 6}$

* SUITES ARITHMETIQUES - SUITES GEOMETRIQUE

- Suites Arithmetiques : $\forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} = U_n + r$
  $r \in \mathbb{R}$ (r = raison)

- $U_{n+1} = U_n - 2$ (suite arithmetique)
  - raison -2
- $V_{n+1} = \frac{V_n}{2} + 1 \Rightarrow$ n'est pas une suite arithmetique.
- Relat° entre 2 termes de rang quelconque.

$\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = U_0 + nr$ ① et $\forall m \in \mathbb{N} ; U_m = U_0 + mr$ ②.

①-② $\Rightarrow U_n - U_m = U_0 + nr - U_0 + mr$.

$U_n - U_m = nr - mr$

$$\boxed{U_n - U_m = (n-m)r}$$

Application

$U_2 = 4$ et $U_9 = -5$

Calculons r et U_0

- $U_2 - U_9 = (2-9)r$

$4+5 = -7r \to \boxed{r = -\frac{9}{7}}$

- $U_2 = U_0 + 2r$

$U_0 = U_2 - 2r$

$= 4 + \frac{18}{7}$

$\boxed{U_0 = \frac{46}{7}}$

- **Sens de Variation**

(suite arithmetique) : raison r

- $r \geq 0$; U_n est $\nearrow$
- $r \leq 0$; U_n est $\searrow$
- $r = 0$; U_n est constante.

Application

$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = U_n - 5$

$U_{n+1} - U_n = -5 < 0$ donc U_n est decroissante.

- **Somme des termes Consecutifs**

Soit $S = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \Rightarrow n = 4$

Calculons S

$$S = \frac{5(U_0 + U_4)}{2}$$

Formule Generale

$$S_n = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}.$$

- **Suites Geometriques** : $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = qU_n$; $q \in \mathbb{R}$ (q = raison)

- $U_{n+1} = -2U_n \to$ suite geometrique
- raison -2
- $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 5 \to$ n'est pas une suite geometrique.

- **Formule explicite (suite geo.)**

U_n une suite geo. de 1er terme U_0 et de raison q.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = U_0 q^n}$$

Application

$U_0 = 4$ et $q = -\frac{1}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$= 2^2 \times \left(-\frac{(1)^n}{2^n}\right)$

$$\boxed{U_n = \frac{(-1)^n}{2^{n-2}}}$$

- **relat° entre 2 termes de rang qlqc**

$\forall n ; p \in \mathbb{N}$; $U_n = U_0 q^n$ et $U_p = U_0 q^p$

$\frac{U_n}{U_p} = \frac{U_0 q^n}{U_0 q^p} \Rightarrow U_n = U_p \frac{q^n}{q^p}$

$U_n = U_p q^{n-p}$.

Applicat° : soit $U_3 = -5$ et $U_6 = 40$

1) Calculons q et U_0

$U_6 = U_3 q^{6-3}$

$U_6 = U_3 q^3 \Rightarrow 40 = -5q^3$

$q^3 = -8 \Rightarrow q = -\sqrt[3]{8} = \boxed{-2}$

- $U_3 = U_0 q^3 \Rightarrow U_0 = \frac{U_3}{q^3} \Rightarrow \boxed{U_0 = \frac{5}{8}}$

2. U_n en Fonct° de n.

$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = U_0 q^n$

$$\boxed{U_n = \frac{5}{8}(-2)^n = 5(-1)^n 2^{n-3} = 5 \times \frac{(-1)^n}{2^{3-n}}}$$

* Convergence d'une Suite Geometrique de raison q.

- $|q| \leq 1$; $U_n \Rightarrow$ Convergente. ($-1 < q < \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$)
- Dans les autres Cas $\Rightarrow$ U_n est divergente. ($-\infty$ ou $+\infty$)

Application ①

$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = 3\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 3\left(\frac{1}{5}\right)^n$ or $\left|\frac{1}{5}\right| \leq 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0}$ U_n est Convergente et Converge vers 0.

Application ②

$\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = 2^n - 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (2^n - 1)$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$

U_n est divergente.

* SOMME DES TERMES CONSECUTIFS

Soit $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

$$\boxed{S_n = U_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)}$$ q^{n+1} avec $q \neq 1$

- Si $q < -1 \Rightarrow U_n$ n'a pas de limite.

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

⇒ Equation de type $y' = ky$

$\forall k \in \mathbb{R}$; $y' = ky \Rightarrow f(x) = Ae^{kx}$

Application : $y' = \frac{1}{2} y$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = Ae^{\frac{1}{2}x}$

⇒ $y' = ky$ admet une Unique Solution sur $\mathbb{R}$ / $f(x_0) = y_0$

Application : Determinons la solut° f de (E) qui prend la valeur 1 en 2.

$(E) : y' = -2y$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = Ae^{-2x}$

$f(2) = Ae^{-4}$

$f(2) = 1 \Rightarrow Ae^{-4} = 1$

$A = e^4$

$\boxed{f(x) = e^{4-2x}}$

⇒ Equation du type $y'' + ky = 0$

- $y'' = \omega^2 y$ avec $\omega \neq 0$

$f(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

Application : soit $(E) : y'' = 25y$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = Ae^{5x} + Be^{-5x}$

- $y'' = -\omega^2 y$ avec $\omega \neq 0$

$f(x) = A\cos \omega x + B\sin \omega x$

Application ① soit $(E) : y'' + 4y = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $\boxed{f(x) = A\cos 2x + B\sin 2x}$

Applicat° ② : Soit $(E) : f'' + f = 0$

1/ Solut° de (E)

$\forall x \in \mathbb{R}$; $\boxed{f(x) = A\cos x + B\sin x}$

2/ Solut° q vérifie la solut° $f(\pi) = 3$ et $f'(\pi) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = -A\sin x + B\cos x$

$f'(\pi) = -A\sin \pi + B\cos \pi$

$f'(\pi) = -B$

$f'(\pi) = 0 \Rightarrow -B = 0$

$\Rightarrow B = 0$

$f(\pi) = A\cos \pi + B\sin \pi$

$f(\pi) = -A$

$f(\pi) = 3 \Rightarrow -A = 3$

$A = -3$

Donc $\boxed{f(x) = -3\cos x}$

• si $\Delta = 0$ de type $f'' + af' + bf = 0$ (avec $\Delta = a^2 - 4b$)

• si $\Delta = 0 \Rightarrow r_0 = -\frac{a}{2}$ et $f(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

2 • si $\Delta > 0 \Rightarrow r_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$; $f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$

• si (E) admet 2 solut° Complexes Conjuguées : $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.

$f(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$

$A \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{R}$; $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Application ①

$f'' = 0$

$r^2 = 0$

$\Delta = 0 - 4 \times 0 = 0$ d'où $r_0 = \frac{0}{2} = 0$ donc $\boxed{f(x) = Ax + B}$

Application ②

$f'' - 16f = 0$

$r^2 - 16 = 0$

$r^2 - (4)^2 = 0 \Rightarrow (r - 4)(r + 4) = 0$

$r = 4$ et $r = -4$

Donc : $\boxed{f(x) = Ae^{4x} + Be^{-4x}}$ $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$

Application ③ • $\Delta < 0$

$f'' - 2f' + 5f = 0$

$r^2 - 2r + 5 = 0$

$\Delta = (-2)^2 + 4(1)(5)$

$\Delta = -16 \Rightarrow \Delta = 16i^2$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16i^2} = 4i$

$r_1 = 1 - 2i$ et $r_2 = 1 + 2i$ Donc $\boxed{f(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)e^{x}}$

$f'(x) = (-2A\sin x + 2B\cos 2x)(e^{x}) + e^{x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

CORRECTION TRAVAUX DIRIGEE N°8

EXERCICE 1 : primitives

$f(x) = -4x^3 + 3x^2 - 6x + 12 \quad I = \mathbb{R}$

Soit F une primitive de f :

$F(x) = -4\left(\frac{1}{4}x^4\right) + 3\left(\frac{1}{3}x^3\right) - 6\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 12x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

$\boxed{F(x) = -x^4 + x^3 - 3x^2 + 12x + C}$

$g(x) = \frac{10}{3}x^4 - \frac{3}{2x^2} + x - 1 \quad I = \mathbb{R}.$

$g(x) = \frac{10}{3}x^4 - \frac{3}{2}x^{-2} + x - 1$

Soit G une primitive de g :

$G(x) = \frac{10}{3}\left(\frac{1}{5}x^5\right) - \frac{3}{2}\left(-x^{-1}\right) + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$\boxed{G(x) = \frac{10}{15}x^5 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}x^2 - x + C} \Rightarrow \boxed{G(x) = \frac{2}{3}x^5 + \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}x^2 - x + C}$

$h(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + \frac{1}{x^2} \quad I = \mathbb{R}^*$

$h(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + x^{-2}$

Soit H une primitive de h :

$H(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3\left(\frac{1}{3}x^3\right) - 5\left(\frac{1}{2}x^2\right) - x^{-1} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$\boxed{H(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{x} + C}$

$i(x) = -2x^5 - x^3 + \frac{3}{\sqrt{x}} + 2 \quad I =]0; +\infty[$

$i(x) = -2x^5 - x^3 + 3x^{-1/2} + 2$

Soit I une primitive de i :

$I(x) = -2\left(\frac{1}{6}x^6\right) - \frac{1}{4}x^4 + 3\left(2x^{1/2}\right) + 2x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

$\boxed{I(x) = -\frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + 6\sqrt{x} + 2x + C}$

$j(x) = \frac{3}{2}x^5 - \frac{6}{7}x^3 + \frac{1}{3\sqrt{x}} - 3 \quad I =]0; +\infty[$

$j(x) = \frac{3}{2}x^5 - \frac{6}{7}x^3 + \frac{1}{3}x^{-1/2} - 3$

Soit J une primitive de j :

$$J(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}x^6\right) - \frac{6}{7}\left(\frac{1}{4}x^4\right) + \frac{1}{3}\left(2x^{1/2}\right) - 3x + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{J(x) = \frac{1}{4}x^6 - \frac{3}{14}x^4 + \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x} - 3x + c}$$

$$l(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{6\sqrt{x}} - 3 \qquad I =]0; +\infty[$$

$$l(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{6}\cdot x^{-1/2} - 3$$

Soit L une primitive de l.

$$L(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x^5\right) - \frac{7}{3}\left(\frac{1}{4}x^4\right) + 3\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{5}{6}\left(2x^{1/2}\right) - 3x + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{L(x) = -\frac{1}{10}x^5 - \frac{7}{12}x^4 - \frac{3}{x} - \frac{5}{3}\sqrt{x} - 3x + c}$$

$$m(x) = \frac{14}{3}x^6 - \frac{5}{3}x^4 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 5 \qquad I =]0; +\infty[$$

$$m(x) = \frac{14}{3}x^6 - \frac{5}{3}x^4 - \frac{2}{x^2} - x^{-1/2} + 5$$

Soit M une primitive de m.

$$M(x) = \frac{14}{3}\left(\frac{1}{7}x^7\right) - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{5}x^5\right) + 2\left(\frac{1}{x}\right) - 2x^{1/2} + 5x + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{M(x) = \frac{2}{3}x^7 - \frac{1}{3}x^5 + \frac{2}{x} - 2\sqrt{x} + 5x + c}$$

Exercice 2 : Primitives

$f(x) = 3(3x+1)$

posons : $u(x) = 3x + 1$

$u'(x) = 3$

$f(x) = u'(x)\,u(x)$

Soit F une primitive de f :

$$F(x) = \frac{1}{2}[u(x)]^2 + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2}(3x+1)^2 + c}$$