Annales corrigees

TOPCHRONO

Réussir en toute sérénité

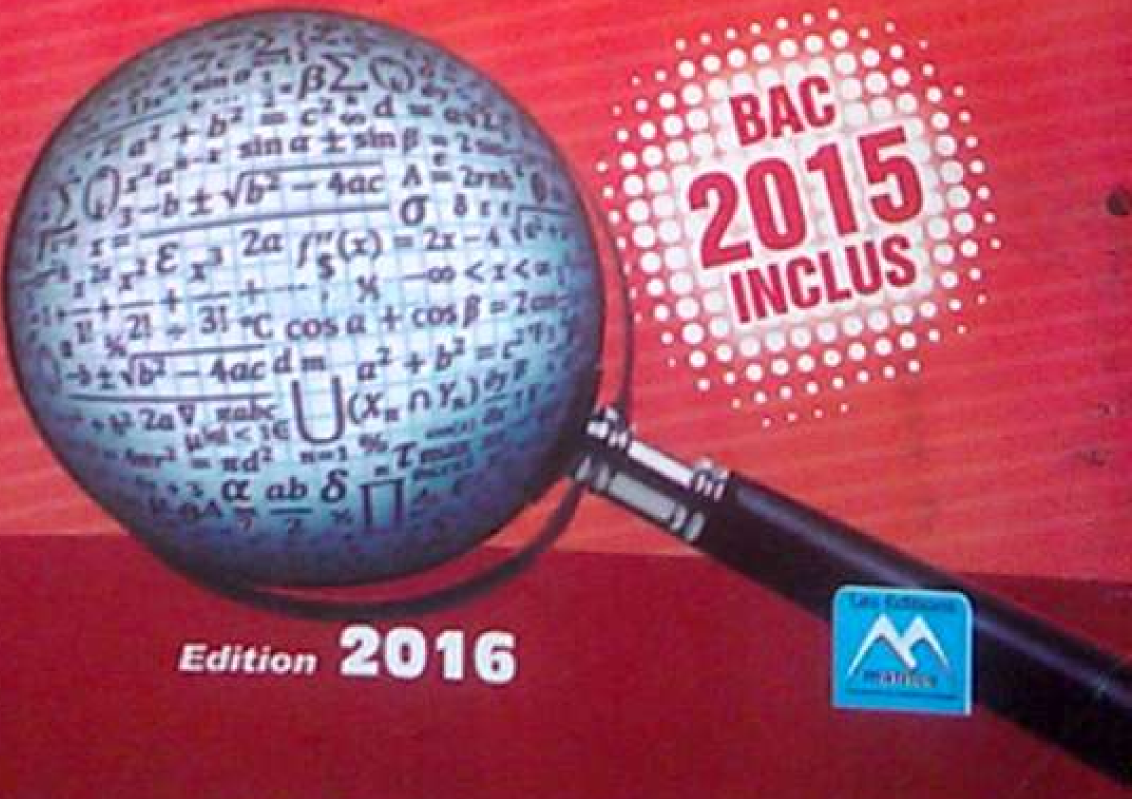
Je m'améliore en

Maths

YAO Denis

- **Rappels** de cours
- **Méthodes** pratiques
- **Exercices** et **Problèmes** résolus
- **10 derniers** sujets du **BAC** entièrement résolus

BAC D



BAC 2015 INCLUS

Edition **2016**

Scanned by CamScanner

Collection le TOP CHRONO

Sous la coordination de YAO Denis

Professeur de lycée

MATHEMATIQUES

Baccalauréat série D

YAO Denis

Les éditions Matrice
23 BP 2605 Abidjan 23
(00225) 58 22 45 08 / 07 25 49 25 / 03 07 20 90
Email: matrice.editions@gmail.com
Site web: www.topmatrice.com

Scanned by CamScanner

AVANT PROPOS

La collection le **TOP CHRONO** a été conçue pour répondre au besoin, maintes fois, exprimé par les élèves de disposer d'un outil pratique et performant à moindre coût, pour préparer efficacement leur examen de fin d'année.

La première partie de votre ouvrage est à la fois un aide mémoire, une fiche efficace et synthétique, un résumé de cours simple mais très fourni qui rappelle les principaux résultats de chaque chapitre ainsi que les méthodes à connaître.
Elle vous permet de réviser rapidement vos leçons.
Cette partie comporte une gamme assez *élargie d'exercices corrigés* et des exercices de perfectionnement permettant au candidat au bac de s'auto-évaluer.

La deuxième partie de **TOP Chrono Mathématiques Bac D édition 2016** est consacrée aux 10 derniers sujets entièrement corrigés du baccalauréat **(2015 ; 2014 ; 2013 ; 2012 ; 2011 ; 2010 ; 2009 ; 2008 ; 2007 et 2006)**.

Le **TOP CHRONO** est conforme au programme officiel en vigueur en Côte d'Ivoire.

Nous espérons avoir rendu cet ouvrage assez attrayant pour qu'il soit un précieux auxiliaire de votre travail personnel tout au long de l'année.

Nous osons croire que cet ouvrage contribuera à l'amélioration des résultats de fin d'année des candidats au baccalauréat de la série D.

L'auteur remercie d'avance toutes les bonnes volontés pour leurs remarques et suggestions qui permettront d'améliorer à l'avenir le contenu de ce document et en faire un outil incontournable pour le succès au BAC.

Nous adressons un profond remerciement à l'ensemble de nos collègues pour leurs encouragements, leurs conseils, leur soutien et leurs contributions de toutes sortes.

Les auteurs.

Scanned by CamScanner

SOMMAIRE

Scanned by CamScanner

CHAPITRE I: LIMITES ET CONTINUITE

Karl Theodor **WEIERSTRASS, né le 31 octobre 1815 à Ostenfelde,** était, aux dires de son collègue Hermite, le législateur de l analyse.

Ce qualificatif de législateur est associé à la rigueur nouvelle qu'il a imposée.

Au lycée. **WEIERSTRASS** est très brillant en mathématiques. En dépit de cela, son père le contraint à suivre des études de droit et d'économie.

Après 4 ans à l'université de Bonn, il ressort sans le moindre diplôme.

A compter de 1842, Karl **WEIERSTRASS** est professeur dans le secondaire.

Il poursuit seul des recherches sur les fonctions elliptiques.

Ce n'est qu'en 1854, à près de 40 ans que **WEIERSTRASS** accède d'un coup à la célébrité grâce à son article ***Zur Theorie des Abelschen Functionen*** qu'il publie dans le prestigieux ***Journal de Crelle***.

Il y résume l'essentiel des découvertes qu'il a faites au cours des 15 dernières années. En 1856, il obtient une chaire à Berlin, tandis qu'il publie la version complète de son premier article.

L'œuvre mathématique de **WEIERSTRASS** commence par la théorie des fonctions abéliennes et elliptiques. **WEIERSTRASS** se signale aussi par sa volonté d'algébrisation de l'analyse.

Les principes de la théorie des fonctions doivent reposer selon lui sur des principes algébriques clairs. **C'est ainsi que WEIERSTRASS donne les premières définitions claires et rigoureuses des nombres réels, de la continuité.**

En passant, il découvre une fonction continue nulle part dérivable, ce qui choquera beaucoup l'intuition des analystes de l'époque.

WEIERSTRASS contribue également grandement à la théorie des fonctions analytiques. Il y démontre les théorèmes de dérivation terme à terme, le principe du prolongement analytique.

En 1861, il est victime d'une attaque qui l'éloigne de ses cours pendant un an. Il passe ses 3 dernières années dans un fauteuil roulant, et décède le 19 février 1897 à Berlin.

Scanned by CamScanner

FICHE DE COURS

LIMITES

Limite de fonctions élémentaires

Quelques propriétés sur les limites

Propriété 1

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

Propriété 2

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

Propriété 3

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Propriété 4

n étant un entier naturel

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair} \\ -\infty & \text{si n est impair} \end{cases}$$

Fonctions polynômes, fonctions rationnelles

Propriété 4

Une fonction polynôme a même limite en $+\infty$ (ou $-\infty$) que son monôme de plus haut degré

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

Propriété 5

Une fonction rationnelle a même limite en $+\infty$ (ou $-\infty$) que le quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_p x^p}{b_q x^q}$$

Scanned by CamScanner

Opération sur les limites

Somme

f	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	forme indéterminée

Produit

f	ℓ	$\ell\neq 0$	0	∞
g	ℓ'	∞	∞	∞
$f\times g$	$\ell\times\ell'$	∞ règle des signes	forme indéterminée	∞ règle des signes

Quotient

f	ℓ	ℓ	0	ℓ	∞	∞
g	$\ell'\neq 0$	0	0	∞	ℓ	∞
$\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	+/- ∞ à gauche/à droite	forme indéterminée	0	∞ règle des signes	forme indéterminée

Limite de la composée de deux fonctions

Soit la fonction composée $f\circ g$ définie sur un intervalle I contenant a (ou dont a est une borne).

$$\lim_{x\to a} g(x)=\ell \quad \text{et} \quad \lim_{x\to \ell} f(x)=\ell' \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} f\circ g(x)=\ell'$$

Limite de la racine carrée

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\ell\ (\ell\geq 0)$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)}$	$\sqrt{\ell}$	$+\infty$

Limite de la puissance

$\lim_{x\to a} f(x)$	ℓ	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} f^n(x)$	ℓ^n	0	$+\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair

Scanned by CamScanner

Limite à gauche, limite à droite.

Définition

• On appelle limite de f à gauche en a, la limite de f quand x tend vers a tout en gardant des valeurs inférieures à a. On la note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x)$.

• On appelle limite de f à droite en a, la limite de f quand x tend vers a tout en gardant des valeurs supérieures à a. On la note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$.

Propriété 6

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell$$

Formes indéterminées

On appelle formes indéterminées, les cas où lon ne peut conclure.
On distingue 4 types de formes indéterminées :

$$+\infty + (-\infty) \ ; \ 0 \times (\pm\infty) \ ; \ \frac{0}{0} \ ; \ \frac{\infty}{\infty}$$

ASYMPTOTES

limite	interprétation
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$	La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à (C_f).
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$	La droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à (C_f) en l'infini.
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	La droite d'équation : $y = ax + b$ est asymptote oblique à (C_f) en l'infini.

Scanned by CamScanner

CONTINUITE

Définition

Soit a un nombre réel et f une fonction définie en a.

f est continue en a $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Remarque

Graphiquement, lorsque f n'est pas continue en a, on constate que lorsqu'on parcourt la courbe de f, on est obligé de lever la main au point d'abscisse a.

Propriété 7

Soient f et g deux fonctions continues en a.

- $f+g$, $f \times g$, kf ($k \in \mathbb{R}$) sont continues en a.
- Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.
- Si $f(a) \geq 0$ alors $\sqrt{f(a)}$ est continue en a.

Propriété 8

Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

Scanned by CamScanner

METHODES PRATIQUES

M1 : Comment calculer des limites aux points qui annulent le dénominateur ?

Calculer la valeur prise par le numérateur.
- Si elle est différente de 0, la limite est infinie ; étudier alors le signe du dénominateur.
- Si elle est égale à 0, factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier.

M2 : Comment calculer des limites à l'infini ?

- Penser lors d'une forme indéterminée, à mettre en facteur le terme de plus haut degré.
- Si les théorèmes des opérations sur les limites ne s'appliquent pas, lorsque la fonction f est une fonction irrationnelle : multiplier et diviser par l'expression conjuguée.

Remarque : On retiendra les principes suivants :

$+\infty-\infty$: factoriser le terme dominant

$\frac{\infty}{\infty}$: factoriser le terme dominant au numérateur et au dénominateur puis simplifier

$\frac{0}{0}$: factoriser le terme tendant vers 0 au numérateur et au dénominateur puis simplifier

$0\times\infty$: se ramener en général à l'une des formes $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

M3: Comment démontrer qu'une droite est asymptote oblique?

La fonction f est représentée par (C_f) et la droite (D) a pour équation $y=ax+b$

- Démontrer que la différence $f(x)-(ax+b)$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini.
- L'étude du signe de cette différence donne la position de (C_f) par rapport à (D).

Scanned by CamScanner

EXERCICES RESOLUS

LIMITES AUX POINTS QUI ANNULENT LE DÉNOMINATEUR

EXERCICE 1: calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x-3}{x^2-1}$ b. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{2x+5}{x^2-x-2}$ c. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}$

d. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$ e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ f. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{2x}$

LIMITES À L'INFINI

EXERCICE 2: calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to +\infty} -2x^3-3x^2+1$ b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+2x}{x^2+6}$

c. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x-2}-\sqrt{x-3},\quad x\geq 3$ d. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{2x^2+3}-5x$

LIMITES DE LA COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

EXERCICE 3: calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{-6x^3+7x^2-5}$ b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{2x+7}{x-4}}$ c. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

ASYMPTOTES

EXERCICE 4

On donne : $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$

Démontrer que la droite (D) d'équation: $y=x+2$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

EXERCICE 5

On donne $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-3}$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
3. En déduire l'existence d'asymptotes à la courbe représentative de f, parallèles aux axes des coordonnées, et indiquer leurs équations.

Scanned by CamScanner

CONTINUITÉ

EXERCICE 6

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{|x|}{|x|}$ et $g(x)=\frac{x^2+|x|}{|x|}$

1. Calculer les limites à gauche et à droite de f et g en 0.
2. Les fonctions f et g admettent-elles une limite au point 0 ?
3. Etudier la continuité de f et g en 0.

EXERCICE 7

Soit les fonctions numériques f et g définies respectivement par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} & f(x)=\frac{x^2-4}{x-2} \\ & f(2)=4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \forall x \in]-\infty;2[& g(x)=x-1 \\ \forall x \in [2;+\infty[& g(x)=2 \end{cases}$$

Etudier la continuité des fonctions f et g en 2.

PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

EXERCICE 8

1. Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction f et déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité de cette fonction en x_0.

a. $f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $x_0=0$; *b.* $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ $x_0=0$

2. Vérifier que la fonction g définie par $g(x)=\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$ est le prolongement par continuité en 0 de la fonction f définie par : $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES - BIJECTION

EXERCICE 9

1. Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$ réalise une bijection de l'intervalle $[-2;+\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera.
2. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f. Expliciter f^{-1}

Scanned by CamScanner

EXERCICE 10

Soit la fonction f dérivable et définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$

1. Démontrer que f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.
2. Démontrer que f est une bijection de $]-1;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
3. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f.

a. Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

b. Expliciter f^{-1}.

EXERCICE 11

Soit la fonction g dérivable et définie sur $]-\infty;3[$ par $g(x)=x^2-6x+5$

1. Etudier le sens de variation de g sur $]-\infty;3[$.
2. Démontrer que g est une bijection de $]-\infty;3[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
3. Soit g^{-1} la bijection réciproque de g.

a. Dresser le tableau de variation de g^{-1}.

b. Expliciter g^{-1}.

EXERCICE 12

Soit $f(x)=x^3+3x-7$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Etudier le sens de variation de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
5. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que $1<\alpha<2$
6. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

EXERCICE 13

Recherher les extremums relatifs des fonctions définies par :

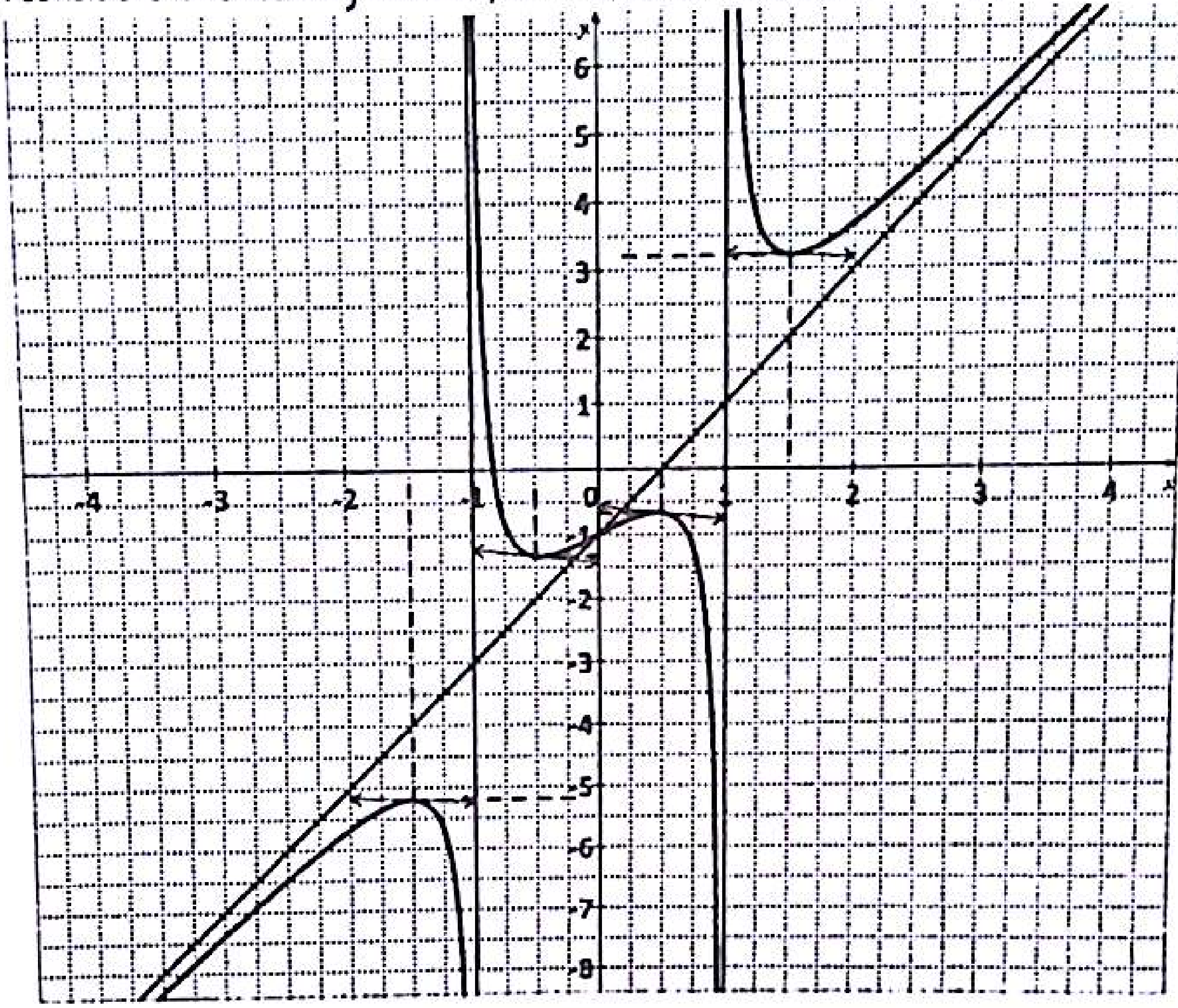
1. $f(x)=x^3-6x^2+2$
2. $f(x)=3x^4-4x^3$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 14

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

On considère la fonction f définie par la représentation graphique (C) ci- dessous.



Par lecture graphique :

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

2. Préciser les valeurs de la dérivée f' de f aux points d'abscisses :
-1,5 ; - 0,5 ; 0,5 et 1,5.

3. Dresser le tableau de variation de f

4. (C) admet trois asymptotes dont une oblique et deux verticales.
Déterminer les équations de chacune de ces asymptotes.

Scanned by CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

LIMITES AUX POINTS QUI ANNULENT LE DÉNOMINATEUR

EXERCICE 1. Calculer la limite de la fonction f lorsque x tend vers 1.

a. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-5}{x^2-5x+4}$ b. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4}$ c. $f(x)=\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1}$

EXERCICE 2. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}}\dfrac{3x-4}{x-2}$ b. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-1}$ c. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$

d. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}$ e. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-2x}{\sqrt{x}-1}$ f. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{5-x}}$

g. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1-\sqrt{x+3}}{x+3}$ h. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2}-x}{x^2-4}$ i. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x}$

j. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \pi x}{x}$ k. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ l. $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{2}\\ <}}\dfrac{1}{\cos x}$

EXERCICE 3

Etudier la limite de la fonction f en x_0

(On calculera éventuellement les limites à gauche et à droite en x_0).

a. $f(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ $x_0=4$; b. $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$ $x_0=4$

LIMITE À GAUCHE, LIMITE À DROITE

EXERCICE 4

On donne la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } x<0 & f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+2} \\ \text{pour } x>0 & f(x)=\dfrac{2x^2+x+3}{x^2+5x-2} \\ & f(0)=0 \end{cases}$$

1. Calculer la limite à gauche et la limite à droite en 0 de f.
2. La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

Scanned by CamScanner

LIMITES À L'INFINI

EXERCICE 5

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3+5x^2+7x+2$	b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x+3}{2x+6}$	c. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}$
d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+x}{3x^3-1}$	e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+3}{x-2}$	f. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}$
g. $\lim\limits_{x\to+\infty} -5x+\sqrt{x+2}$	h. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{x^2+2}$	i. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^3-1}$

LIMITES DE FONCTIONS COMPOSÉES

EXERCICE 6

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$	b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$	c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x-7)^5$
d. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x^3)^2$	e. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \left(\frac{2x-1}{x-2}\right)^5$	f. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^5$
g. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)$	h. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{4}{2x-3}\right)$	i. $\lim\limits_{x\to 0} \cos\sqrt{x}$
j. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\tan x)^2$	k. $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ >}} \left(\frac{1}{1+\cos x}\right)$	l. $\lim\limits_{x\to\pi} \cos(\sin x)$

ASYMPTOTES

EXERCICE 7

1. $f(x)=\frac{-3x+2}{2x-3}$	2. $f(x)=\frac{4x^2-2x-1}{x^2-x-12}$	3. $f(x)=\frac{x^2-x+3}{x^2+x+1}$
4. $f(x)=\frac{2x+1}{x}$	5. $f(x)=\frac{5x^2-2x+1}{x^2-4}$	6. $f(x)=\frac{2x^3-3x}{x^3-x^2}$

a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

b. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

c. En déduire l'existence d'asymptotes à la courbe représentative de f , parallèles aux axes des coordonnées, et indiquer leurs équations.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 8

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{1}{2}x-1+\frac{2}{(x-1)^2}$ pour tout $x\in]1;+\infty[$

Soit C la courbe représentative de f.

1. Etudier les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude.
2. Montrer que la droite D d'équation $y=\frac{1}{2}x-1$ est asymptote à C.
3. Quelle est l'équation de la deuxième asymptote ?
4. Etudier la position de C par rapport à la droite D d'équation $y=\frac{1}{2}x-1$.

CONTINUITÉ

EXERCICE 9

1. Etudier la continuité en -1 de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x\in]-\infty;-1[& f(x)=x^2+4x+3 \\ \forall x\in[-1;+\infty[& f(x)=x^3 \end{cases}$$

2. Etudier la continuité en 1 de la fonction f définie par :

a. $\begin{cases} \forall x\in]-\infty;1[& f(x)=x \\ \forall x\in]1;+\infty[& f(x)=\frac{1}{x} \\ f(1)=1 & \end{cases}$

b. $\begin{cases} \forall x\in]-\infty;1[& f(x)=x^2 \\ \forall x\in[1;+\infty[& f(x)=x+1 \end{cases}$

PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

EXERCICE 10

Peut-on prolonger la fonction f suivante par continuité en a ?
Si oui, précisez le prolongement.

1. $f(x)=\frac{3-\sqrt{2x+5}}{x-2}$ $\quad a=2$
2. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+13}-4}$ $\quad a=3$
3. $f(x)=\frac{x^2+x}{x^2-|x|}$ $\quad a=0$

Scanned by CamScanner

FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x-5$

1. Montrer que f est une bijection de $[1;2]$ dans un intervalle J que l'on déterminera.
2. Montrer que l'équation $x^3+x-5=0$ admet une unique solution comprise entre 1 et 2.

EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de f.

En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans I

1. $f(x)=x^3-3x+1$ $\quad I=[0;1]$
2. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1$ $\quad I=[-1;1]$

EXERCICE 13

On considère l'équation: $x^3-9x^2+24x-17=0$.

1. Montrer que cette équation admet trois solutions et encadrer chacune d'elles par deux entiers consécutifs.
2. Trouver une valeur approchée de la plus grande solution, à 0,1 près.

EXERCICE 14

La fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$		-2			1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$		-2	$\nearrow$	3

a) Donner en utilisant le tableau le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ et de l'équation $f(x)=5$.
b) Donner les limites de f correspondant à ce tableau.

EXERCICE 15

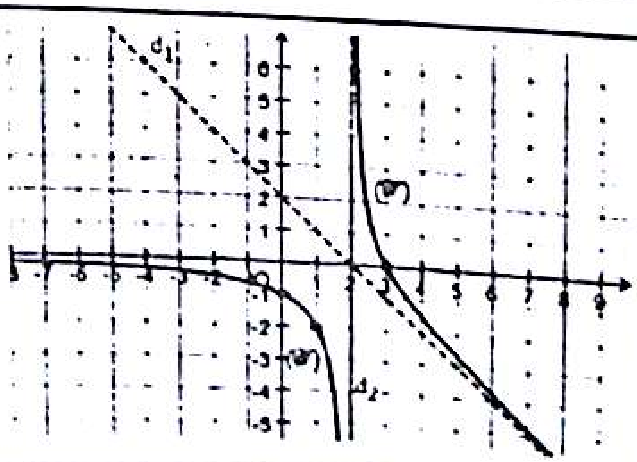
Sur le dessin ci-contre sont représentées la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de f et deux droites d_1 et d_2.
En utilisant ce graphique

1°) Donner les valeurs de (sans justification)

$f(1)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$

2°) Déterminer les asymptotes à la courbe (sans justification)

3°) Donner les solutions de l'équation (justifier) $f(x)=-2$



Scanned by CamScanner

PROBLEMES DE SYNTHESE

EXERCICE 16. Bac blanc 2009. Groupe scolaire les anges de Yopougon

1. On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=-\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$

On désigne par $\left(C_f\right)$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

b. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

2. Montrer que les droites (D) et (D') d'équations respectives $y=1$ *et* $y=-x+1$ sont asymptotes à $\left(C_f\right)$ respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$

3. Construire $\left(C_f\right)$.

4.a. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble K que l'on précisera.

b. Soit f^{-1} la bijection réciproque de . Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

c. Calculer $f(0)$ et en déduire $(f^{-1})'(\frac{3}{2})$

d. Représenter graphiquement f^{-1}.

EXERCICE 17

Soit la fonction numérique f dérivable et définie de $\mathbb{R}$ vers $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

1. Trouver l'intervalle J tel que : $J=f\left(\left[0;+\infty\right[\right)$.

2. Montrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ sur J.

3. a. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

b. Représenter graphiquement $\left(C_f\right)$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. Sans expliciter l'application réciproque f^{-1}

a. Représenter graphiquement $\left(C_{f^{-1}}\right)$ la courbe de f^{-1}.

b. Calculer $(f^{-1})'(\frac{3}{4})$

Scanned by CamScanner

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1. Calculons les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{x-3}{x^2-1}$

Quand x tend vers 1, le numérateur est non nul alors que le dénominateur tend vers 0.
Il convient dans ce cas d'étudier le signe du dénominateur.

On constate que $\forall x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[,\ x^2-1>0$ et $\forall x \in \left]-1;1\right[,\ x^2-1<0$

• $\forall x \in \left]-1;1\right[,\ x^2-1<0$ et $\lim\limits_{x \to 1} x^2-1=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$

Or $\dfrac{x-3}{x^2-1}=(x-3)\dfrac{1}{x^2-1}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}}(x-3)\dfrac{1}{x^2-1}=+\infty$

car $\lim\limits_{x \to 1}(x-3)=-2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$

• $\forall x \in \left]1;+\infty\right[,\ x^2-1>0$ et $\lim\limits_{x \to 1} x^2-1=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{1}{x^2-1}=+\infty$

Or $\dfrac{x-3}{x^2-1}=(x-3)\dfrac{1}{x^2-1}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}}(x-3)\dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$

car $\lim\limits_{x \to 1}(x-3)=-2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{1}{x^2-1}=-\infty$

b. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \dfrac{2x+5}{x^2-x-2}$

Quand x tend vers 2, le numérateur est non nul alors que le dénominateur s'annule.
Il convient dans ce cas d'étudier le signe du dénominateur.

On constate que $\forall x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]2;+\infty\right[,\ x^2-x-2>0$

et $\forall x \in \left]-1;2\right[,\ x^2-x-2<0$

• $\forall x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]2;+\infty\right[,\ x^2-x-2>0$ *et* $\lim\limits_{x \to 2} x^2-x-2=0$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \dfrac{1}{x^2-x-2}=+\infty$

Or $\dfrac{2x+5}{x^2-x-2}=(2x+5)\dfrac{1}{x^2-x-2}$

Scanned by CamScanner

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{2x+5}{x^2-x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (2x+5)\frac{1}{x^2-x-2} = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to 2}(2x+5) = 9$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x^2-x-2} = +\infty$

• $\forall x \in]-1;2[,\ x^2-x-2<0$ et $\lim\limits_{x \to 2} x^2-x-2=0$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x^2-x-2} = -\infty$

Or $\frac{2x+5}{x^2-x-2} = (2x+5)\frac{1}{x^2-x-2}$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{2x+5}{x^2-x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (2x+5)\frac{1}{x^2-x-2} = -\infty$

car $\lim\limits_{x \to 2}(2x+5) = 9$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x^2-x-2} = -\infty$

c. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}$

• *Première méthode*:

Quand x tend vers 0, le numérateur est non nul alors que le dénominateur s'annule. Il convient dans ce cas d'étudier le signe du dénominateur.

On constate que $\forall x \in]0;+\infty[,\ x+\sqrt{x}>0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x+\sqrt{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x+\sqrt{x}} = +\infty$

$\forall x \in]0;+\infty[,\ \sqrt{x}>0$ *et* $\lim\limits_{x \to 0}\sqrt{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}}+1 = +\infty$

Or $\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)\frac{1}{x+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)\frac{1}{x+\sqrt{x}} = +\infty$

car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x+\sqrt{x}} = +\infty$

Scanned by CamScanner

• *Deuxième méthode :(factorisation puis simplification)*

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{x}}{x}+1}{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+1\right)}=\frac{\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+1\right)\times 1}{x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+1\right)}=\frac{1}{x}$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$$

d. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$

Quand x tend vers 2, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0.

Il convient, dans ce cas, de factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-2)$ puis de les simplifier par ce facteur commun.

On a: $\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)}=\frac{x+3}{x-3}$

Donc $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+3}{x-3}=\frac{2+3}{2-3}=\frac{5}{-1}=-5$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

Quand x tend vers 0, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0.

Cependant, la factorisation ne convient pas.

Ici, il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du numérateur.

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-(1)^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$=\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{0}{2}=0$$

car $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}+1=2$

Scanned by CamScanner

f. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

Ici, l'astuce consiste à faire apparaître la limite de référence $\lim\limits_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$

$$\frac{\sin 5x}{2x}=\frac{\sin 5x}{2x}\times\frac{5}{5}=\frac{\sin 5x}{5x}\times\frac{5}{2}$$

On pose $X=5x$; quand x tend vers 0, X tend vers 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\times\frac{5}{2}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\quad\text{car}\quad\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$$

EXERCICE 2. Calculons les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3-3x^2+1$

la fonction $x\to -2x^3-3x^2+1$ *est une fonction polynôme,*

on a alors: $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3-3x^2+1=\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3=-\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ *et* $-2<0$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x}{x^2+6}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x}{x^2+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3},\quad x\geq 3$

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}=\frac{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}=\frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-\left(\sqrt{x-3}\right)^2}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}$$

$$=\frac{(x-2)-(x-3)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}=\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}=0$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}=+\infty$

Scanned by CamScanner

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2+3} - 5x$

$\sqrt{2x^2+3} - 5x = \sqrt{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)} - 5x = \sqrt{x^2}.\sqrt{2+\frac{3}{x^2}} - 5x = |x|.\sqrt{2+\frac{3}{x^2}} - 5x$

$\forall x \in]0;+\infty[,\ |x| = x$

(Remarque: ici, on prend x sur $]0;+\infty[$ car la limite se calcule en $+\infty$)

$\sqrt{2x^2+3} - 5x = |x|\cdot\sqrt{2+\frac{3}{x^2}} - 5x = x\cdot\sqrt{2+\frac{3}{x^2}} - 5x = x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}} - 5\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2+3} - 5x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}} - 5\right) = -\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}} - 5\right) = \sqrt{2} - 5 < 0$ $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x^2} = 0\right)$

EXERCICE 3: calculons les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-6x^3+7x^2-5}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -6x^3+7x^2-5 = \lim\limits_{x \to -\infty} -6x^3 = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $-6<0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-6x^3+7x^2-5} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x+7}{x-4}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+7}{x-4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x+7}{x-4}} = \lim\limits_{X \to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin\frac{1}{x}$

On pose $f(x) = \frac{1}{x}\sin x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ on a alors $f \circ g(x) = x\sin\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\sin x = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} f \circ g(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

EXERCICE 4

$f(x) - (x+2) = \frac{x^2-3}{x-2} - (x+2) = \frac{(x^2-3)-(x-2)(x+2)}{x-2} = \frac{(x^2-3)-(x^2-4)}{x-2} = \frac{1}{x-2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

Donc la droite (D): $y = x+2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 5. On donne $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-3}$.

1.
$$x\in D_f \Leftrightarrow x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3 \Leftrightarrow D_f=\mathbb{R}\setminus\{3\}=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$$

2. $D_f=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

$$f(x)=\frac{2x-4}{x-3}=(2x-4)\times\frac{1}{x-3}$$

• $\forall x<3,\ x-3<0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{2x-4}{x-3}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}(2x-4)\times\dfrac{1}{x-3}=-\infty$

car $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}(2x-4)=2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$

• $\forall x>3,\ x-3>0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{2x-4}{x-3}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}(2x-4)\times\dfrac{1}{x-3}=+\infty$

car $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}(2x-4)=2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{1}{x-3}=+\infty$

3. • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

donc (D): $y=2$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x)=+\infty$

donc la droite d'équation $x=3$ est asymptote verticale à (C)

EXERCICE 6

1. Calculons la limite à gauche et la limite à droite de f et g en 0.

• $f(x)=\dfrac{|x|}{|x|}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{-x}{x}=-1;$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{x}{x}=1$

Scanned by CamScanner

- $g(x)=\dfrac{x^2+|x|}{|x|}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x^2+|x|}{|x|}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x^2+(-x)}{-x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x^2-x}{-x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x(x-1)}{-x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} -(x-1)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} -x+1=1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x^2+|x|}{|x|}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x^2+(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x^2+x}{x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x(x+1)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x+1=1$$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)\neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 0.

   $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=1$ donc g admet une limite en 0 et $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$.

3. f et g ne sont pas définies en 0 donc f et g ne sont pas continues en 0.

EXERCICE 7

- Etude de la continuité en 2 de la fonction f définie par $\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}\ f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}\\ f(2)=4\end{cases}$

$D_f=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2} x+2=4$$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4=f(2)$ *donc f est continue en 2.*

- Etude de la continuité en 2 de la fonction g définie par

$$\begin{cases}\forall x\in\,]-\infty;2[& g(x)=x-1\\ \forall x\in[2;+\infty[& g(x)=2\end{cases}$$

On a $D_g=\mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} x-1=1;\quad \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} g(x)=g(2)=2$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} g(x)=g(2)=2$ donc g est continue à droite en 2.

Cependant : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} g(x)\neq \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} g(x)$ donc g n'est pas continue en 2.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 8

1. a. $f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $\quad x_0=0$

Ensemble de définition

$x\in D_f \Leftrightarrow x\geq 0$ et $\sqrt{x}\neq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$ et $x\neq 0 \Leftrightarrow x>0$ donc $D_f=]0;+\infty[$

Prolongement par continuité

$0\notin D_f=]0;+\infty[$

$f(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{x-2}=\sqrt{x}-1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}-1=-1$

donc f peut être prolongée par continuité en 0.

Soit g le prolongement par continuité de f en 0.

$\begin{cases} g(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \forall x\in]0;+\infty[\\ g(0)=-1 \end{cases}$ ou $g(x)=\sqrt{x}-1\ \forall x\in[0,+\infty[$

b. $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ $\quad x_0=0$

Ensemble de définition

$x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 0$ *et* $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ *et* $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$

Prolongement par continuité

$0\notin D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$

$f(x)=\frac{\tan x}{x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{x}=\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}=1\ car \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\ \ car\ \ \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1\end{cases}$

Donc f est prolongeable par continuité en 0.

Soit g le prolongement par continuité de f en 0.

$\begin{cases} g(x)=\frac{\tan x}{x} & \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\ avec\ k\in\mathbb{Z} \\ g(0)=1 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

2. Vérifions que $g(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$ **est le prolongement par continuité en 0 de**

$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

$$x\in D_f \Leftrightarrow 1+x\geq 0\ et\ x\neq 0 \Leftrightarrow x\geq -1\ et\ x\neq 0 \Leftrightarrow D_f=[-1;+\infty[\setminus\{0\}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-(1)^2}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$$

$$=\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=g(x)$$

Cette fonction g est définie sur $[-1;+\infty[$.

Donc g est le prolongement par continuité en 0 de la fonction f.

EXERCICE 9. Bijection

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.

Elle est dérivable, donc continue, sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{x+2}=0=f(-2)$ donc f est également continue en -2.

On en déduit que f est continue sur $[-2;+\infty[$.

$\forall x\in\,]-2;+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$ d'où $f'(x)>0$ et $f(x)>f(-2)$

Dressons le tableau de variations de f :

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.

f réalise donc une bijection de $[-2;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.

EXERCICE 10

Soit la fonction f dérivable et définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

1. Démontrons que f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

$$\forall x\in\,]-1;+\infty[,\ f'(x)=\frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+2}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$\forall x\in\,]-1;+\infty[,\ \frac{3}{(x+1)^2}>0 \Rightarrow f'(x)>0$$

donc f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

Scanned by CamScanner

2. Démontrons que f est une bijection de $]-1;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

f *est continue et strictement croissante sur* $]-1;+\infty[$

donc f *est une bijection de* $]-1;+\infty[$ *sur* K

avec $K=f(]-1;+\infty[)=]\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[=]-\infty;1[$

car $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

3. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f.

a. Dressons le tableau de variation de f^{-1}.

x	$-\infty$	1
$(f^{-1})'(x)$	$+$	
$(f^{-1})(x)$	-1 ↗	$+\infty$

b. Explicitons f^{-1}.

Soit $x\in]-1;+\infty[$ *et* $y\in]-\infty;1[$ *tel que* $f(x)=y$.

on a : $f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1}=y \Leftrightarrow y(x+1)=x-2$

$\Leftrightarrow yx+y=x-2 \Leftrightarrow yx-x=-y-2$

$\Leftrightarrow x(y-1)=-y-2 \Leftrightarrow x=\frac{y+2}{1-y}$ *car* $1-y\neq 0$

Donc $f^{-1}(x)=\frac{x+2}{1-x}$

EXERCICE 11

Soit la fonction g dérivable et définie sur $]-\infty;3[$ par $g(x)=x^2-6x+5$

1. Etudions le sens de variation de g sur $]-\infty;3[$.

$\forall x\in]-\infty;3[,\ g'(x)=2x-6=2(x-3)$

$\forall x\in]-\infty;3[,\ x-3<0 \Rightarrow g'(x)<0$

donc g *est strictement décroissante sur* $]-\infty;3[$.

2. Démontrons que g est une bijection de $]-\infty;3[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

g *est continue et strictement décroissante sur* $]-\infty;3[$

donc g *est une bijection de* $]-\infty;3[$ *sur* K

avec $K=g(]-\infty;3[)=]\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} g(x);\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)[=]-4;+\infty[$

car $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} g(x)=g(3)=-4$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

Scanned by CamScanner

3. Soit g^{-1} la bijection réciproque de g.

a. Dressons le tableau de variation de g^{-1}.

x	-4		$+\infty$
$(g^{-1})'(x)$		$-$	
$(g^{-1})(x)$	3	$\searrow$	$-\infty$

b. Expliciter g^{-1}.

Soit $x\in]-\infty;3[$ *et* $y\in]-4;+\infty[$ *tel que* $g(x)=y$.

on a: $g(x)=y \Leftrightarrow x^2-6x+5=y \Leftrightarrow (x-3)^2-9+5=y$

$\Leftrightarrow (x-3)^2-4=y \Leftrightarrow (x-3)^2=y+4$

$\Leftrightarrow x-3=-\sqrt{y+4}$ *car* $y+4>0$ *et* $x-3<0$

$\Leftrightarrow x=3-\sqrt{y+4}$

Donc $g^{-1}(x)=3-\sqrt{x+4}$

EXERCICE 12. $f(x)=x^3+3x-7$

1. calcul de $f'(x)$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=3x^3+3=3(x^2+1)$

2. Etude du sens de variation.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=3(x^2+1)>0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

4. Calcul de $f(1)$ **et** $f(2)$

$f(1)=1^3+3\times1-7=4-7=-3$

$f(2)=2^3+3\times2-7=8+6-7=7$

5. f est continue et strictement croissante sur $[1;2]$ et $f(1)\times f(2)<0$ donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $]1;2[$.

6. Valeur approchée de α **à** 10^{-2} **près.**

Déterminons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} par la méthode de balayage.

Scanned by CamScanner

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
Signe de f(x)	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+

Donc 1,3 < α < 1,4

x	1,3	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	1,38	1,39	1,40
Signe de f(x)	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+

Donc 1,33 < α < 1,34, par conséquent une valeur approchée de α à 10^{-2} près est 1,33 .

EXERCICE 13. Recherchons les extremums locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x)=x^3-6x^2+2 \qquad D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x-4)=0 \Leftrightarrow 3x=0$ ou $x-4=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=4$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	-30	$\nearrow$	

$f'(x)$ s'annule et change de signe en 0 et en 4.

$f(0)=2$ et $f(4)=-30$

On déduit que : 2 est un maximum relatif de f et -30 est un minimum relatif de f.

2. $f(x)=3x^4-4x^3 \qquad D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow 12x^2=0$ ou $x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

Scanned by CamScanner

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

$f'(x)$ s'annule en 0 mais n'y change pas de signe ;

f n'admet pas d'extremum en 0.

$f'(x)$ s'annule et change de signe en 1.

$f(1)=-1$ donc -1 est un minimum relatif de la fonction f.

EXERCICE 14.

1. $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

2. $f'(-1,5)=0;\ f'(-0,5)=0;\ f'(0,5)=0;\ f'(1,5)=0$

3. Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$-1,5$		-1		$-0,5$		$0,5$		1		$1,5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

4. Déterminons les équations des 3 asymptotes.

Les asymptotes verticales ont pour équation $x=-1$ et $x=1$

L'asymptote oblique passe par les points de coordonnées $(-1;3)$ et $(2;3)$

$y=ax+b$

$$\begin{cases}-3=a(-1)+b\\3=a\times2+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3=-a+b\\3=2a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3+a=b\\3-2a=b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ -3+a=3-2a\ \Leftrightarrow\ a+2a=3+3\ \Leftrightarrow\ 3a=6\ \Leftrightarrow\ a=\frac{6}{3}=2$$

$$-3=-a+b\ \Rightarrow\ -3+a=b\ \Rightarrow\ -3+2=b\ \Rightarrow\ -1=b$$

$a=2$ et $b=1$

$y=2x+1$ est l'équation de l'asymptote oblique.

Scanned by CamScanner

CHAPITRE II: DERIVEES ET PRIMITIVES

Le mathématicien suisse, **Leonhard EULER**, est né en 1707 près de Bâle en Suisse.
Il entre à l'Université de Bâle à 13 ans pour y étudier la philosophie et le droit et obtient son diplôme à 16 ans.
Il s'installe ensuite en 1727 à Saint-Pétersbourg en Russie se marie et devient père de 13 enfants.
Emmené par sa passion et son acharnement au travail, EULER laisse une œuvre gigantesque de 886 livres et articles qui abordent presque tous les domaines des mathématiques et des sciences en général.

EULER établit la célèbre constante, notée γ (gamma), qui porte aujourd'hui son nom :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) - \ln n = 0{,}5772156649015328606 0\ldots$$

On ne sait toujours pas s'il s'agit d'un nombre rationnel ou irrationnel.
Il propose le célèbre π pour le <u>**nombre Pi**</u>, la lettre <u>**i pour la racine carrée de -1**</u> et le fameux <u>**e**</u> base des logarithmes népériens.

Il établit à ce sujet, une formule liant ces trois nombres : $e^{i\pi}+1=0$ et une seconde mettant en relation la trigonométrie et l'analyse complexe : $e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

EULER fonde ***l'analyse fonctionnelle*** en donnant une définition précise de la notion de fonction. Nous lui devons la notation $f(x)$ et l'utilisation de la lettre grecque Σ comme symbole de sommation.

Ainsi, $1+2+3+\ldots+1000=\sum_{k=1}^{1000} k$

EULER ***développe également le calcul différentiel et la méthode des fluxions et met en place la notion d'équation aux dérivées partielles et le calcul des variations par la recherche des extrema sur les courbes.***

On lui a attribué la célèbre <u>***droite d'EULER***</u> (passant par le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle).
Euler écrit aussi des ouvrages de physiques (1765).
Il y définit le centre d'inertie, les moments d'inertie et les axes principaux d'inertie et traite de la mécanique du point matériel.
EULER s'intéresse également à des problèmes d'astronomie tels que l'étude des orbites des planètes ou la trajectoire des comètes.
EULER s'occupe également de philosophie dans « Lettres à une princesse d'Allemagne » écrites de 1760 à 1762.
EULER meurt à Saint-Pétersbourg en 1783 alors âgé de 76 ans.

Scanned by CamScanner

FICHE DE COURS

DERIVATION

Nombre dérivé en x_0

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0.

On dit que f est dérivable en x_0 si la quantité $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0.

Cette limite est appelée nombre dérivé en x_0 et notée $f'(x_0)$.

Nombre dérivé à droite. Nombre dérivé à gauche

Définition

Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie, on dit que f est dérivable à droite en x_0.

On note alors $f_d'(x_0)$ cette limite, appelée « nombre dérivé à droite » en x_0.

On définit de façon similaire le nombre dérivé à gauche $f_g'(x_0)$.

Théorème

f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f_d'(x_0)=f_g'(x_0)$.

Interprétation graphique

Propriété

Si f est dérivable en x_0 alors sa courbe représentative admet au point M_0 d'abscisse x_0 une tangente de coefficient directeur $f'(x_0)$.

Remarque

Si $f_d'(x_0)$ et $f_g'(x_0)$ existent et sont finis mais sont différents, la courbe admet deux demi-tangentes en M_0 et fait un « angle » en ce point.

Scanned by CamScanner

FONCTIONS DERIVEES

Dérivées de fonctions élémentaires

Fonction f	Fonction dérivée f'
$x \longrightarrow k$	$x \longrightarrow 0$
$x \longrightarrow ax$	$x \longrightarrow a$
$x \longrightarrow \frac{1}{x}$	$x \longrightarrow \frac{-1}{x^2}$
$x \longrightarrow x^r$	$x \longrightarrow r\,x^{r-1}$
$x \longrightarrow \frac{1}{x^r}$	$x \longrightarrow \frac{-r}{x^{r+1}}$
$x \longrightarrow \sqrt{x}$	$x \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \longrightarrow \cos x$	$x \longrightarrow -\sin x$
$x \longrightarrow \sin x$	$x \longrightarrow \cos x$

Opérations sur les dérivées

fonction	Fonction dérivée
$f+g$	$f'+g'$
kf	kf'
$f\times g$	$f'\times g+g'\times f$
$\frac{1}{g}$	$\frac{-g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$
$f\circ g$	$g'\times f'\circ g$
f^n	$nf'\times f^{n-1}$
$\frac{1}{f^n}$	$\frac{-nf'}{f^{n+1}}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Scanned by CamScanner

APPLICATIONS DE LA DERIVATION

Équation de la tangente

Une équation de la tangente (T) à (C_f) au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

Étude des variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert K.

f' est positive sur K $\Leftrightarrow$ f est croissante sur K.

f' est négative sur K $\Leftrightarrow$ f est décroissante sur K.

f' est nulle sur K $\Leftrightarrow$ f est constante sur K.

Extremums relatifs

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle] a ; b [et x_0 un élément appartenant à] a ; b [.

Si f' s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un extremum relatif en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

f admet un maximum relatif M en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

f admet un minimum relatif m en x_0.

Dérivation et continuité

Propriété 9

Si une fonction est dérivable sur un intervalle K, alors elle est continue sur K.

Remarque

La réciproque n'est pas toujours vraie.

En effet, une fonction peut être continue sur un intervalle K sans y être dérivable.

Scanned by CamScanner

LES PRIMITIVES

1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I; on appelle primitive de f sur I toute fonction F définie sur I telle que $F' = f$.

2. Propriétés

- Toute fonction définie et continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
- Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et k un nombre réel.
La fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ est encore une primitive de f sur I.
- Parmi toutes les primitives d'une fonction sur un intervalle I, il en existe une et une seule prenant une valeur donnée y_0 pour une valeur x_0 de la variable.

Scanned by CamScanner

3 - Tableaux des primitives

Tableau 1: Primitives de fonctions usuelles

f(x)	F(x)
0	$k \quad (k \in \mathbb{R})$
1	$x+k$
a	$ax+k$
x	$\frac{x^2}{2}+k$
x^2	$\frac{x^3}{3}+k$
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}+k$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$
$\cos(x)$	$\sin(x)+k$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+k$
$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\tan x+k$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+k$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+k$

Tableau 2 : Opérations et Compositions

F et G sont des primitives respectives de f et g a et b sont 2 réels quelconques.

FONCTION	PRIMITIVE
$f+g$	$F+G$
af	aF
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$
$f'\times\cos f$	$\sin f$
$f'\times\sin f$	$-\cos f$
$\frac{f'}{f^2}$	$\frac{-1}{f}$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}$
$f'\times f^n$	$\frac{f^{n+1}}{n+1}$
$\frac{f'}{f^n}$	$\frac{-1}{(n-1)f^{n-1}}$

Scanned by CamScanner

METHODES PRATIQUES

M1: Comment étudier la dérivabilité en un point?

Etudier l'existence de $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

M2: Comment calculer la dérivée de la réciproque d'une fonction continue et strictement monotone?

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et f^{-1} la bijection réciproque de f.

Pour calculer $(f^{-1})'(\beta)$, on peut procéder comme suit :

- On détermine α, la solution de l'équation $f(x)=\beta$
- On calcule $f'(\alpha)$ et on vérifie que $f'(\alpha)\neq 0$
- On conclue : $(f^{-1})'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}$

M3 : Comment calculer une primitive ?

- **On peut lire le tableau des primitives et utiliser les théorèmes sur les opérations et primitives.**
- On peut décomposer la fonction en somme de fonctions dont on connaît des primitives.
- On peut linéariser les fonctions trigonométriques.

Scanned by CamScanner

EXERCICES RESOLUS

DÉRIVABILITÉ

EXERCICE 1 : Etudier la dérivabilité de f en a.

a. $f(x)=x^2+1$ $\quad a=1$

b. $f(x)=|x|$ $\quad a=0$

c. $\begin{cases} f(x)=2x+1 & \text{si } x\leq 0 \\ f(x)=x^2+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ $\quad a=0$

CALCUL DE FONCTIONS DÉRIVÉES

EXERCICE 2

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions numériques f définies par :

a) $f(x)=x^3+\frac{1}{x}$ b) $f(x)=x^3(x^2+4)$ c) $f(x)=\sin x.\cos x$; d) $f(x)=5\sqrt{x}$

e) $f(x)=\frac{x}{3}$; f) $f(x)=7(x^2-1)$; g) $f(x)=2x^3-3x^2+6x-7$.

h) $f(x)=x^{17}$; i) $f(x)=(x^2-3x+1)^{10}$; j) $f(x)=\sin^3x.\cos^2x$

EXERCICE 3

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions numériques définies par :

$a) f(x)=\frac{1}{x^2+3x-2}; b) f(x)=2x-1+\frac{3}{4x^2+1}; c) f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}; d) f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x-1}}$

e) $f(x)=\sin(-2x+10)$ f) $f(x)=\cos 7x . \sin(-3x+1)$ g) $f(x)=\cos^2(5x-1)$

RECHERCHE DE PRIMITIVES

EXERCICE 4. Primitives de fonctions polynômes

1. Déterminer des primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$x\mapsto x$; $\quad x\mapsto x^2$; $\quad x\mapsto x^3$; $\quad x\mapsto -5$

2. Déterminer des primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions :

$x\mapsto 2x$; $\quad x\mapsto -3x^2$; $\quad x\mapsto 8x^3$

3. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x\mapsto 8x^3-3x^2+2x-5$

EXERCICE 5. Primitives immédiates

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

f : $x\mapsto 0$; $\quad$ g : $x\mapsto 2$; $\quad$ h : $x\mapsto x^5$

2. Déterminer toutes les primitives sur $]0;+\infty[$ de chacune des fonctions suivantes: i : $x\mapsto \frac{1}{x^2}$; $\quad$ j : $x\mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

3. Déterminer deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $f:\ x\mapsto 2x^3+3x-1$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 6. Fonctions simples

Déterminer deux primitives sur $]0;+\infty[$ de chacune des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \frac{3}{x^2} + \frac{1}{3}x^2$;　　$g : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{2}$

EXERCICE 7. Fonction rationnelle

Déterminer deux primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{3x^3+2x^2+1}{x^2}$

EXERCICE 8. Puissance

Déterminer deux primitives sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 5(4x-1)^6$:

et deux primitives sur $]1;+\infty[$ de $g : x \mapsto \frac{7}{(3x+2)^5}$.

EXERCICE 9. Fonction Racine carrée

Déterminer une primitive sur $]-1;+\infty[$ de $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+5}}$,

et une primitive sur $]2;+\infty[$ de $g : x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}$.

EXERCICE 10. Primitives et dérivées

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x\sqrt{x}$.

Calculer la dérivée de g sur $]0;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

Déduire de la première question une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

PRIMITIVES DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

EXERCICE 11.

Déterminer une primitive F de la fonction f

1. $f(x)=\cos^3 x$　;　2. $f(x)=\sin^4 x$

RECHERCHE DE PRIMITIVES SOUS CONDITIONS

EXERCICE 12.

Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant la condition indiquée :

1. $f(x)=2x+1$	$I=\mathbb{R}$	$F(1)=2$
2. $f(x)=(x+1)(x^2+2x+3)^3$	$I=\mathbb{R}$	$F(0)=1$

Scanned by CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

DÉRIVABILITÉ

EXERCICE 1

Etudiez la dérivabilité en a de la fonction f.

1. $f(x)=|x^2-4|$ $a=2$; 2. $f(x)=x\sqrt{x}$ $a=0$

3. $f(x)=\sqrt{\sin x}$ $a=0$; 4. $f(x)=x\sqrt{\sin^2 x}$ $a=0$

5. $f(x)=\sqrt{x-2}$ $a=2$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=x^2-1, & si \quad x\leq 1 \\ f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}, & si \quad x>1 \end{cases}$

1. Démontrer que f est continue en 1.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1.
3. Interpréter graphiquement le résultat

CALCUL DE FONCTIONS DÉRIVÉES

EXERCICE 3

Indiquer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, puis calculer sa dérivée :

1. $f(x)=(x^4-7)^3$ 2. $f(x)=(3x+4)^5$ 3. $f(x)=(3x^2+2x-4)^{-4}$

4. $f(x)=\dfrac{x^2+x}{3x^3-1}$ 5. $f(x)=\left(\dfrac{3x-4}{x-1}\right)^2$ 6. $f(x)=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2-3}\right)^3$

7. $f(x)=\sqrt{x^2+7x-1}$ 8. $f(x)=\sqrt{3+\cos 2x}$ 9. $f(x)=\sqrt{1+\sin 3x}$

10. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ 11. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 12. $f(x)=\dfrac{x}{2+\cos 4x}$

13. $f(x)=\cos^3 2x$ 14. $f(x)=(1+\sin x)^2$ 15. $f(x)=\sin(\pi x^2)$

16. $f(x)=\sin(\dfrac{\pi}{x})$ 17. $f(x)=\sin\sqrt{x}$ 18. $f(x)=\sin^4(\pi x)$

19. $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x}$ 20. $f(x)=\sin 3x\cdot\cos 2x$ 21. $f(x)=(\sin^3 x)\cdot\tan x$

22. $f(x)=\dfrac{x\cdot\sqrt{x+1}}{2x-3}$ 23. $f(x)=(x^3-1)^2\cdot\sqrt{x^2+1}$ 24. $f(x)=\dfrac{\tan x}{x^2+3}$

Scanned by CamScanner

APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

EXERCICE 4

Pour chacune des fonctions suivantes, écrire une équation de la tangente au point A d'abscisse a de la représentation graphique de la fonction f.

1. $f : x \to 3x^2 - 5x + 1$ Pour a = -1, a = 2 et a = 3
2. $f : x \to x - 1 + \dfrac{1}{x+2}$ Pour a = - 4, a = 1 et a = 2
3. $f : x \to \tan x$ Pour a = 0, a = $\dfrac{\pi}{6}$ et a = $\dfrac{\pi}{4}$
4. $f : x \to 5\sqrt{2x-3}$ Pour a = 6

EXERCICE 5

Etudier le signe de la dérivée et donner le tableau de variations de f.

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$; 2. $f(x) = x^2(x-1)^3$; 3. $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-1}{x^2+1}$

4. $f(x) = \sqrt{2-x}$ sur $I =]-\infty; 2]$; 5. $f(x) = \sin 2x$ sur $I = [0; \pi]$

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+4}$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

   En déduire l'équation de l'asymptote à (C_f).

2. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation.
3. Déterminer une équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse 0.

   Etudier la position de (C_f) par rapport à sa tangente T.

DÉRIVÉE DE LA RÉCIPROQUE

EXERCICE 7

1. Montrer que f est une bijection.
2. Calculer $(f^{-1})'(x_0)$ le nombre dérivé en x_0 de la fonction réciproque f^{-1}.

a. $f : \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \to [0;1]$, $x \mapsto \sin x$ $\quad x_0 = \dfrac{1}{2}$; b. $f :]0; +\infty[\to \left]-\dfrac{1}{3}; 2\right[$, $x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+3}$ $\quad x_0 = 1$

Scanned by CamScanner

RECHERCHE DE PRIMITIVES

EXERCICE 8 Déterminer une primitive de f

1. $f(x)=x^2-3x+5$
2. $f(x)=2x(x^2+3)^4$
3. $f(x)=18(3x-2)^5$
4. $f(x)=(x+1)(x-3)^4$
5. $f(x)=3(3x^2-6)(x^3-6x)^2$
6. $f(x)=(x-3)^{\frac{2}{3}}$
7. $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$
8. $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^3}$
9. $f(x)=\dfrac{4x^3+5x^2+1}{x^2}$
10. $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$
11. $f(x)=\dfrac{5}{(3x+4)^3}$
12. $f(x)=\dfrac{\frac{3}{2}x^2+1}{(x^3+2x)^3}$
13. $f(x)=\sqrt{3-2x}$
14. $f(x)=(x-1)\sqrt{x^2-2x-3}$
15. $f(x)=x\sqrt{(x^2-1)^5}$
16. $f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
17. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
18. $f(x)=\dfrac{-4x+6}{\sqrt{-x^2+3x+1}}$
19. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}$
20. $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{(x^3-1)^3}}$
21. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$

EXERCICE 9

Soit $f(x)=\dfrac{3x^3-7x^2+5x+1}{(x-1)^2}$ sur $]1;+\infty[$

1. Déterminer a, b et c réels tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-1)^2}$
2. En déduire une primitive de f sur $]1;+\infty[$

EXERCICE 10

Soit $f(x)=\dfrac{4x-5}{x^2-1}$

1. Déterminer a et b tels que $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-1}$
2. En déduire une primitive de f sur $]1;+\infty[$

EXERCICE 11

Soit $g(x)=(x+2)\sqrt{x+2}$ sur $]-2;+\infty[$

1. Calculer $g'(x)$.
2. En déduire une primitive de $f(x)=\sqrt{x+2}$ sur $]-2;+\infty[$

Scanned by CamScanner

RECHERCHE DE PRIMITIVES VÉRIFIANT UNE CONDITION

EXERCICE 12

Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant la condition indiquée :

1. $f(x)=x^3-x^2-1 \quad I=\mathbb{R} \quad et \quad F(0)=7$
2. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2} \quad I=\left]0;+\infty\right[\quad et \quad F(1)=0$
3. $f(x)=(2x-3)\left(x^2-3x-6\right)^2 \quad I=\mathbb{R} \quad et \quad F(-1)=9$
4. $f(x)=\frac{3x}{\left(x^2+1\right)^2} \quad I=\mathbb{R} \quad et \quad F(\sqrt{2})=-2$
5. $f(x)=(x-3)^6 \quad I=\mathbb{R} \quad et \quad F(3)=0$
6. $f(x)=\frac{2}{(3-x)^3} \quad I=\left]-\infty;3\right[\quad et \quad F(0)=0$
7. $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} \quad I=\left]-\infty;1\right[\quad et \quad F(0)=\sqrt{5}$
8. $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \quad I=\mathbb{R} \quad et \quad F(0)=1$
9. $f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) \quad I=\mathbb{R} \quad et \quad F(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{6}$
10. $f(x)=\sin x\cos^4 x \quad I=\mathbb{R} \quad et \quad F(\pi)=0$
11. $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x} \quad I=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\quad et \quad F(\frac{\pi}{3})=1$
12. $f(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2} \quad I=\left]0;+\infty\right[\quad et \quad F(\frac{\pi}{4})=1$

PRIMITIVES DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

EXERCICE 13. Déterminer une primitive de f

1. $f(x)=\cos x+\sin x$	2. $f(x)=2\cos x\cdot\sin x$	3. $f(x)=\cos(2x+3)$
4. $f(x)=\cos 2x\cdot\cos 3x$	5. $f(x)=\cos x\cdot(\sin x-2)$	6. $f(x)=\cos 2x-2\cos x$
7. $f(x)=\sin x\,\cos^2 x$	8. $f(x)=\sin^4 x\cdot\cos x$	9. $f(x)=\cos x\cdot\sin^3 x$
10. $f(x)=\cos^2 x\sin^3 x$	11. $f(x)=\sin^4 x\cdot\cos x$	12. $f(x)=\cos x\cdot\sin^3 x$
13. $f(x)=\cos^3 x$	14. $f(x)=\cos^5 x$	15. $f(x)=\sin^6 x$
16. $f(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}$	17. $f(x)=\frac{1}{3}(5x^4+1)\sin\left(x^5+x\right)$	18. $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

Scanned by CamScanner

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1. **Etudions la dérivabilité de f en a.**

a. $f(x)=x^2+1 \qquad a=1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2+1-2}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x+1=2$$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ existe et est finie donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=2$

b. $f(x)=|x| \qquad a=0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|-0}{x-0}=\frac{|x|}{x}$$

- $\forall x\in\left]-\infty;0\right[,\ |x|=-x$

On a alors: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie donc f est dérivable à gauche en 0

et $f_g'(0)=-1$

- $\forall x\in\left]0;+\infty\right[,\ |x|=x$

On a alors: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie donc f est dérivable à droite en 0

et $f_d'(0)=1$

$f_g'(0)\neq f_d'(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

Scanned by CamScanner

c. $\begin{cases} f(x)=2x+1 & \text{si } x\leq 0 \\ f(x)=x^2+1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ $\quad a=0$

• $\forall x\in\left]-\infty;0\right], f(x)=2x+1$

On a alors : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{2x+1-1}{x}=\dfrac{2x}{x}=2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie donc f est dérivable à gauche en 0

et $f_g'(0)=2$

• $\forall x\in\left[0;+\infty\right[, f(x)=x^2+1$

On a alors : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x^2+1-1}{x}=\dfrac{x^2}{x}=x$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}x=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie donc f est dérivable à droite en 0

et $f_d'(0)=0$

$f_g'(0)\neq f_d'(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

EXERCICE 2. Calculons la fonction dérivée :

a. $f'(x)=\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)'=3x^2+\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=3x^2-\dfrac{1}{x^2}$

b. $f'(x)=\left[x^3\left(x^2+4\right)\right]'=3x^2\left(x^2+4\right)+x^3(2x)=3x^4+12x^2+2x^4=5x^4+12x^2$

c. $f'(x)=\left[\sin x.\cos x\right]'=\cos x.\cos x+\sin x(-\sin x)=(\cos x)^2-(\sin x)^2$

d. $f'(x)=\left[5\left(\sqrt{x}\right)\right]'=5\left(\sqrt{x}\right)'=5\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$

e. $f'(x)=\left[\dfrac{x}{3}\right]'=\dfrac{1}{3}(x)'=\dfrac{1}{3}\times 1=\dfrac{1}{3}$

Scanned by CamScanner

f. $f'(x) = \left[7\left(x^2-1\right)\right]' = 7\left(x^2-4\right)' = 7\left(2x\right) = 14x$

g. $f'(x) = \left[2x^3-3x^2+6x-7\right]' = 6x^2-6x+6$

h. $f'(x) = \left[x^{17}\right]' = 17x^{16}$

i. $f'(x) = \left[\left(x^2-3x+1\right)^{10}\right]' = 10\left(x^2-3x+1\right)'\left(x^2-3x+1\right) = 10\left(2x-3\right)\left(x^2-3x+1\right)$

j. $f'(x) = \left[\sin^3 x.\cos^2 x\right]' = \left[\sin^3 x\right]'\cos^2 x + \sin^3 x\left[.\cos^2 x\right]'$

$= \left(3\cos x\sin^2 x\right).\cos^2 x + \sin^3 x.\left(-2\sin x\cos x\right)$

$= \left(3\cos^3 x\sin^2 x\right) + \left(-2\sin^4 x\cos x\right)$

$= 3\cos^3 x\sin^2 x - 2\sin^4 x\cos x$

EXERCICE 3. Calculons la fonction dérivée

$$a.\ f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+3x-2}\right)' = \frac{-\left(x^2+3x-2\right)'}{\left(x^2+3x-2\right)^2} = \frac{-(2x+3)}{\left(x^2+3x-2\right)^2} = \frac{-2x-3}{\left(x^2+3x-2\right)^2}$$

$$b.\ f'(x) = (2x-1)' + \left(\frac{3}{4x^2+1}\right)' = 2+3\frac{-\left(4x^2+1\right)'}{\left(4x^2+1\right)^2} = 2+3\frac{-8x}{\left(4x^2+1\right)^2} = 2-\frac{24x}{\left(4x^2+1\right)^2}$$

$$c.\ f'(x) = \left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)' = \frac{-\left(x\sqrt{x}\right)'}{\left(x\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-\left[(x)'.\sqrt{x} + x.\left(\sqrt{x}\right)'\right]}{(x)^2\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-\left[1\times.\sqrt{x} + x.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]}{x^2 x}$$

$$= \frac{-\left[\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right]}{x^3} = \frac{-\left[\frac{2x+x}{2\sqrt{x}}\right]}{x^3} = \frac{-\left[\frac{3x}{2\sqrt{x}}\right]}{x^3} = -\frac{3x}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{x^3} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

$$d.\ f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{4x-1}}\right)' = \frac{-\left(\sqrt{4x-1}\right)'}{\left(\sqrt{4x-1}\right)^2} = \frac{-\frac{4}{2\sqrt{4x-1}}}{4x-1}$$

$$= -\frac{4}{2\sqrt{4x-1}}\times\frac{1}{4x-1} = -\frac{4}{2(4x-1)\sqrt{4x-1}} = -\frac{2}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}$$

Scanned by CamScanner

e. $f'(x)=\left[\sin(-2x+10)\right]'=-2\cos(-2x+10)$

f) $f'(x)=\left[\cos 7x.\sin(-3x+1)\right]'$

$=(\cos 7x)'.\sin(-3x+1)+\cos 7x.\left[\sin(-3x+1)\right]'$

$=(-7\sin 7x).\sin(-3x+1)+\cos 7x.\left[-3\cos(-3x+1)\right]$

$=-7\sin 7x.\sin(-3x+1)-3\cos 7x.\cos(-3x+1)$

g) $f'(x)=\left[\cos^2(5x-1)\right]'=\left[\left(\cos(5x-1)\right)^2\right]'=2\left[\cos(5x-1)\right]'.\cos(5x-1)$

$=2\left[-5\sin(5x-1)\right].\cos(5x-1)=-10\sin(5x-1).\cos(5x-1)$

EXERCICE 4. Primitives de fonctions polynômes

1. Des primitives de $x\mapsto x$ sont de la forme: $x\mapsto \frac{1}{2}x^2+k$ où $k\in\mathbb{R}$

Des primitives de $x\mapsto x^2$ sont de la forme: $x\mapsto \frac{1}{3}x^3+k$ où $k\in\mathbb{R}$

Des primitives de $x\mapsto x^3$ sont de la forme: $x\mapsto \frac{1}{4}x^4+k$ où $k\in\mathbb{R}$

Des primitives de $x\mapsto -5$ sont: $x\mapsto -5x+k$ où $k\in\mathbb{R}$

2. Des primitives de $x\mapsto 2x$ sont de la forme $x\mapsto x^2+k$ où $k\in\mathbb{R}$

Des primitives de $x\mapsto -3x^2$ sont de la forme $x\mapsto -x^3+k$ où $k\in\mathbb{R}$

Des primitives de $x\mapsto 8x^3$ sont de la forme $x\mapsto 2x^4+k$ où $k\in\mathbb{R}$

3. A l'aide des questions précédentes, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto 8x^3-3x^2+2x-5$ est par exemple : $x\mapsto 2x^4-x^3+x^2-5x$

EXERCICE 5. Primitives immédiates

1. Les primitives sur $\mathbb{R}$ de f : $x\mapsto 0$ sont $x\mapsto k$ où $k\in\mathbb{R}$

Une primitive de g : $x\mapsto 2$ est G : $x\mapsto 2x$

Une primitive de h : $x\mapsto x^5$ est H : $x\mapsto \frac{1}{6}x^6$

2. Les primitives de i : $x\mapsto \frac{1}{x^2}$ sont I : $x\mapsto -\frac{1}{x}+k$ où $k\in\mathbb{R}$

Les primitives de j : $x\mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sont J : $x\mapsto 2\sqrt{x}+k$ où $k\in\mathbb{R}$

3. Deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f : $x\mapsto 2x^3+3x-1$ sont :

Scanned by CamScanner

$x \mapsto \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x + 2$ et $x \mapsto \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x + 18$

EXERCICE 6. Fonctions simples

Deux primitives de f sont par exemple : $x \mapsto -\frac{3}{x} + \frac{1}{9}x^3$ et $x \mapsto -\frac{3}{x} + \frac{1}{9}x^3 - 12$

Deux primitives de g sont par exemple :

$x \mapsto 4\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$ et $x \mapsto 4\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + 7$

EXERCICE 7. Fonction rationnelle

La fonction f peut s'écrire : $f : x \mapsto 3x + 2 + \frac{1}{x^2}$

Deux primitives de la fonction f sont par exemple :

$x \mapsto \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{x} + 1$

EXERCICE 8. Puissance

- On utilise la formule suivante $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ avec $u(x) = 4x - 1$ et $n = 7$.

Deux primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc : $x \mapsto \frac{5}{28}(4x-1)^7$ et

$x \mapsto \frac{5}{28}(4x-1)^7 - 1$

- On utilise la formule suivant : $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$ avec $u(x) = 3x + 2$ et $n = 4$.

Deux primitives de g sur $]1;+\infty[$ sont donc : $x \mapsto -\frac{7}{12(3x+2)^4}$ et

$x \mapsto -\frac{7}{12(3x+2)^4} - 7$

EXERCICE 11. Racine carrée

On utilise la formule $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

- Avec $u(x) = 3x + 5$ Une primitive sur $]-1;+\infty[$ de f est donc :

$x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{3x+5}$

- Avec $u(x) = x^2 + 2x - 8$ Une primitive sur $]2;+\infty[$ de g est donc :

$x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x - 8}$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 12. Primitives et dérivées

1. g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et : $g(x)'=(x\sqrt{x})'=\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3x}{2\sqrt{x}}$

2. A l'aide de la question précédente, on remarquant que :

$$f(x)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\sqrt{x}=\frac{2}{3}\cdot g'(x)$$

Une primitive de f sur $]0;+\infty[$ est donc: $x\mapsto\frac{2}{3}x\sqrt{x}$

EXERCICE 13.

Déterminer une primitive F de la fonction f

1. $f(x)=\cos^3 x$

La puissance de la fonction trigonométrique est impaire.
Il convient de transformer l'expression comme suit:

$$\cos^3 x=\cos x\cdot\cos^2 x=\cos x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)=\cos x-\cos x\cdot\sin^2 x$$

$$F(x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}$$

2. $f(x)=\sin^4 x$

La puissance de la fonction trigonométrique est paire.
Il convient de linéariser l'expression en utilisant une formule d' EULER.
(Voir le cours sur les nombres complexes)

On obtient: $f(x)=\sin^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3)$

$$F(x)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 4x-4\times\frac{1}{2}\sin 2x+3x\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 4x-2\sin 2x+3x\right)$$

EXERCICE 14.

Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant la condition indiquée :

1. $f(x)=2x+1$ $\quad I=\mathbb{R}$ $\quad F(1)=2$

$F(x)=x^2+x+k$

$F(1)=2\Leftrightarrow 1^2+1+k=2\Leftrightarrow 2+k=2\Leftrightarrow k=0$ donc $F(x)=x^2+x$

Scanned by CamScanner

2. $f(x)=(x+1)(x^2+2x+3)^3 \qquad I=\mathbb{R} \qquad F(0)=1$

$$f(x)=\frac{1}{2}\times 2(x+1)(x^2+2x+3)^3=\frac{1}{2}\times(2x+2)(x^2+2x+3)^3$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{(x^2+2x+3)^4}{4}+k=\frac{1}{8}\times(x^2+2x+3)^4+k$$

$$F(0)=1\Leftrightarrow\frac{1}{8}\times(0^2+2\times0+3)^4+k=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{81}{8}+k=1\Leftrightarrow k=1-\frac{81}{8}\Leftrightarrow k=\frac{8}{8}-\frac{81}{8}\Leftrightarrow k=-\frac{73}{8}$$

Donc $F(x)=\frac{1}{8}\times(x^2+2x+3)^4-\frac{73}{8}$

Scanned by CamScanner

CHAPITRE III: FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

John **NAPIER**, plus connu sous le nom de **NEPER**, a laissé son nom dans la postérité mathématique pour son invention des logarithmes.
Né en 1550, il est issu d'une riche famille écossaise.
A 13 ans, il est envoyé à l'Université de Saint Andrews, dont les archives révèlent qu'il n'y a obtenu aucun diplôme.
On pense qu'il a poursuivi ses études peut-être à Paris ou en Italie.
En 1571, il est de retour en Ecosse. Il gère activement sa propriété, commerce beaucoup, et développe une approche scientifique de l'agriculture.
Par ses contemporains, John **NAPIER** est surtout connu comme théologien. Il est un fervent protestant. Il écrit en 1593 son ouvrage le plus célèbre, « a Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John ». Il y fait une lecture du livre des Révélations. Cet ouvrage lui vaudra une certaine réputation jusque sur le continent.
Les activités mathématiques ne constituaient donc qu'un passe-temps pour Neper.
On le connait pour avoir popularisé la notation du point pour séparer la partie entière et la partie fractionnaire d'un nombre en écriture décimale. Surtout, il est passionné par le fait de rendre le plus simple et le plus rapide possible les calculs portant sur les multiplications, les divisions et les extractions de racine carrée de grands nombres. Cela le conduit d'une part à l'invention des os de Neper, des petits bâtons de bois sur lesquels sont inscrits les tables de multiplication, et qui permettent de simplifier ces opérations. Surtout, cela le conduit à l'invention des logarithmes.
Le logarithme transforme donc multiplications en additions, racines carrées en division par 2... Napier publie son invention dans Mirifici logarithmorum canonis descriptio (description de la règle magnifique des logarithmes). C'est Briggs, un mathématicien anglais, qui publia des tables très complètes de ces logarithmes, car Napier s'éteint le 4 avril 1617, apparemment des suites d'une crise de goutte. Les logarithmes se propageront très rapidement, sous l'impulsion des astronomes comme des commerçants. Deux cents ans après leur invention, Laplace dira que les logarithmes, en abrégeant leurs labeurs, "doublait la vie des astronomes". Terminons cette biographie par une petite anecdote. Dans ces temps un peu irrationnels, les esprits brillants comme Napier étaient souvent vus comme des magiciens. La légende rapporte que, confronté à des problèmes de vols, Napier aurait annoncé pouvoir reconnaitre le voleur parmi ses serviteurs grâce à son coq magique. Chaque serviteur est envoyé dans une pièce obscure caresser l'animal. Napier l'a malicieusement enduit de suie noire et le voleur, qui n'ose caresser le coq de peur d'être démasqué, est le seul à revenir la main propre!

Scanned by CamScanner

FICHE DE COURS

Définition

On appelle fonction **logarithme népérien**, notée ln, la fonction f telle que

$D_f =]0;+\infty[$. $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$

Propriétés Algébriques

- $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$
- $\ln(a^r) = r\ln a$
- $\ln\frac{1}{b} = -\ln b$
- $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Limites de référence

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
4. $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$
5. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
6. $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 0$

Dérivée et sens de variation

Dérivée

$\forall x \in]0;+\infty[$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Variation

$\forall x \in]0;+\infty[$, $\frac{1}{x} > 0 \Rightarrow (\ln x)' > 0$ donc la fonction ln est continue et strictement croissante

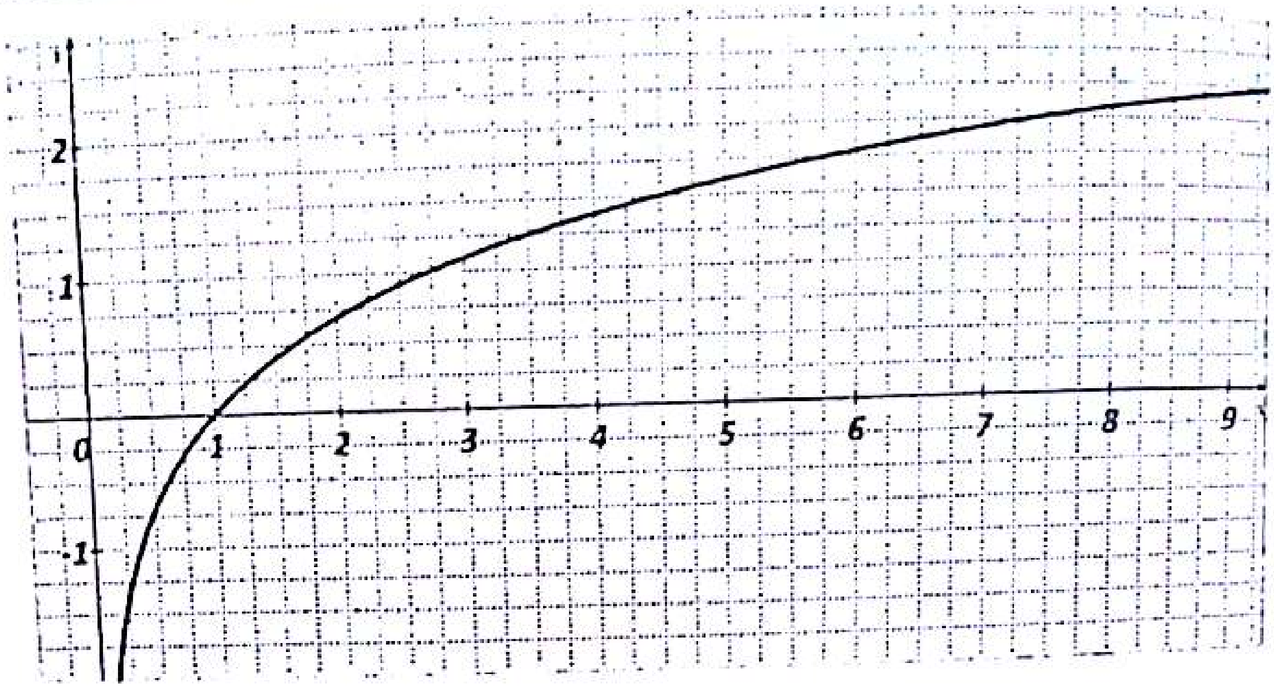
Le nombre e

Le nombre e est l'unique nombre réel appartenant à $]2;3[$ tel que $\ln e = 1$.

$e \simeq 2,718$

Scanned by CamScanner

Représentation Graphique



Conséquences des variations de la fonction ln

❶ $\forall a>0$ et $b>0$, $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$

❷ $\forall a>0$ et $b>0$, $\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$

Cas Particuliers

❶ $\forall a>0$, $\ln a=0 \Leftrightarrow a=1$

$\forall a>0$, $\ln a>0 \Leftrightarrow a>1$

❷ $\forall a>0$, $\ln a=1 \Leftrightarrow a=e$

$\forall a>0$, $\ln a>1 \Leftrightarrow a>e$

Ensemble de définition de fonctions de type $f(x)=\ln(u(x))$

$x\in D_f \Leftrightarrow u(x)>0$

Dérivée de $f(x)=\ln(u(x))$

Propriété :

si une fonction u est positive et ne s'annule pas sur un intervalle I, alors $\ln(u)$ est dérivable sur I et, pour tout x de I : $(\ln u)'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Scanned by CamScanner

METHODES PRATIQUES

M1 : Résolution d'équation

Pour résoudre une équation contenant des fonctions de la forme $\ln(ax+b)$, on peut procéder comme suit :

- Déterminer V l'ensemble de validité de l'équation

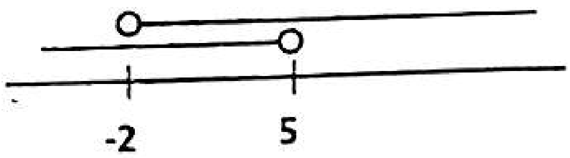
V est l'intersection des ensembles de définition de toutes les fonctions contenues dans l'équation.

- Mettre l'équation sous la forme $\ln A = \ln B$.
- Utiliser la propriété : " $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ "
- Puis résoudre l'équation équivalente obtenue.
- Déterminer S l'ensemble des solutions en tenant compte de l'ensemble de validité V.

Exemple 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(x+2)=\ln(-x+5)$

- On détermine V l'ensemble de validité de l'équation:

$$\begin{aligned} x \in V &\Leftrightarrow x+2>0 \ et -x+5>0 \\ &\Leftrightarrow x>-2 \ et \ -x>-5 \\ &\Leftrightarrow x>-2 \ et \ x<5 \end{aligned}$$



$$V =]-2;5[$$

- Equations équivalentes

$$\ln(x+2)=\ln(-x+5) \Leftrightarrow x+2=-x+5 \Leftrightarrow x+x=-2+5$$
$$\Leftrightarrow 2x=3 \qquad \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

- Ensemble de solution

$$\frac{3}{2} \in V =]-2;5[\Rightarrow S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

Scanned by CamScanner

M2 : Résolution d'inéquation

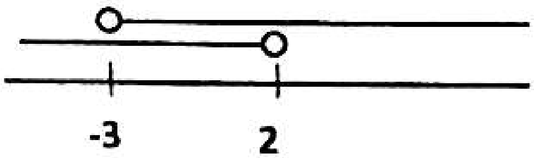
Pour résoudre une inéquation contenant des fonctions de la forme $\ln(ax+b)$, on peut utiliser le même procédé que pour les équations:

- Déterminer **V** l'ensemble de validité.
- Mettre l'équation sous la forme $\ln A > \ln B$.
- Utiliser la propriété : " $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$ "
- Résoudre l'inéquation équivalente obtenue.
- Déterminer **S** l'ensemble des solutions en tenant compte de l'ensemble de validité **V**.

__Exemple 2.__ Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(x+3)=\ln(-x+2)$.

- On détermine **V** l'ensemble de validité de l'équation:

$$\begin{aligned} x\in V &\Leftrightarrow x+3>0 \text{ et} -x+2>0 \\ &\Leftrightarrow x>-3 \text{ et } -x>-2 \\ &\Leftrightarrow x>-3 \text{ et } x<2 \end{aligned}$$

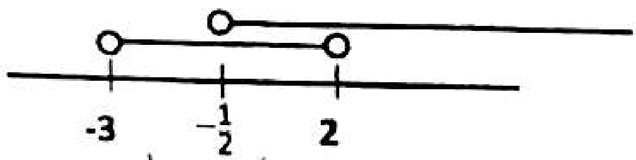


$$V=\left]-3;2\right[$$

- Equations équivalentes

$$\ln(x+3)>\ln(-x+2) \Leftrightarrow x+3>-x+2 \Leftrightarrow x+x>-3+2$$
$$\Leftrightarrow 2x>-1 \qquad \Leftrightarrow x>\frac{-1}{2}$$

- Ensemble de solution :



$$\Rightarrow \quad S_{\mathbb{R}}=\left]-\frac{1}{2};2\right[$$

Scanned by CamScanner

M3: Comment déterminer les primitives d'une fonction en faisant apparaître $\frac{u'}{u}$?

- Faire apparaître, dans l'expression de la fonction, $\frac{u'}{u}$ où u est une fonction strictement positive.
- Les primitives de $\frac{u'}{u}$ sont les fonctions de la forme $\ln u + k$

M4: Comment déterminer les primitives de certaines fonctions rationnelles ?

- Ecrire la fonction rationnelle sous la forme d'une somme de fonctions dont on connait des primitives.
- Pour calculer les coefficients des termes de la somme, on procède par identification.
- On détermine la primitive de chaque fonction de la somme.

Scanned by CamScanner

EXERCICES RESOLUS

UTILISATION DES PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

EXERCICE 1. Ecrire en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$

$\ln 6$; $\ln 8$; $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$; $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$; $\ln\left(\frac{8}{9}\right)$; $\ln\sqrt{3}$

EXERCICE 2.

a. Exprimer, en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

$A=\ln 36$; $B=\ln\frac{9}{8}$; $C=\ln\frac{2}{27}$; $D=\ln\sqrt{6}$; $E=\ln\left(3e^5\right)$

b. Simplifier :

$F=\ln\left(\sqrt{3}+1\right)+\ln\left(\sqrt{3}-1\right)$; $G=\ln\left(\sqrt{5}+1\right)-\ln\left(\sqrt{5}-1\right)$

CALCUL DE LIMITES ET DE DÉRIVÉES

EXERCICE 3. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} x+5+\ln x$
2. $\lim\limits_{x\to 0} x^3\ln x$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x-\ln x$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1+\ln x}{2-\ln x}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x)$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x-1}$

EXERCICE 4.

Déterminer D_f l'ensemble de définition de f puis calculer $f'(x)$ la fonction dérivée de $f(x)$

1. $f(x)=\ln(-5x+10)$.
2. $f(x)=\ln(x+7)$.
3. $f(x)=\ln|x^2+x-2|$.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

EXERCICE 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $\ln(2x+8)=\ln(x-2)$
2. $\ln(3x-9)=0$
3. $\ln(-2x+4)=\ln(x)$

EXERCICE 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $\ln(2x+1)<\ln(x+4)$
2. $\ln(-2x+2)>0$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 7.

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=8x^3-10x^2-x+3$

1. a. Calculer $f(1)$

   b. Ecrire le polynôme $f(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes.

2. Résoudre l'équation : $x\in\mathbb{R},\ f(x)=0$

3. Résoudre l'équation : $x\in\mathbb{R},\ 8(\ln x)^3-10(\ln x)^2-\ln x+3=0$

EXERCICE 8.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $x^2+2x-24=0$
2. Utiliser le résultat da la 1ère question pour résoudre les équations suivantes :

a. $\ln(x-3)+\ln(x+5)=2\ln 3$ b. $\ln|(x-3)(x+5)|=2\ln 3$

CALCUL DE PRIMITIVES

EXERCICE 9. Déterminer une primitive des fonctions f suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ $\left(I=\left]1;+\infty\right[\right)$; 2. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+5}$ $(I=\mathbb{R})$

3. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$ $\left(I=\left]1;+\infty\right[\right)$

EXERCICE 10. Extrait du bac D 2006. Session normale.

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $f(x)=x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). L'unité est 4 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ).

(D) est la droite d'équation $y=x$.

Calculer A l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations respectives $x=e^{-2}$ et $x=1$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

UTILISATION DES PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

EXERCICE 1.

1. Exprimer, en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

$\ln 72$; $\ln\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}\ln 256$; $\ln 216$; $\ln 243$; $\ln 288$; $\ln 6{,}75$

2. Exprimer, en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$:

$\ln 250$; $\ln 200$; $\ln 2000$; $\ln\left(10^{-4}\right)$; $\ln 1{,}25$

3. Exprimer, en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$: $\ln 1000$; $\ln\frac{625}{16}$; $\ln\sqrt{8}$; $\frac{1}{2}\ln 400$

EXERCICE 2.

1. Simplifier les expressions suivantes :

$A=\ln e^2+\ln\sqrt{e}$; $B=\ln\left(e\sqrt{e}\right)$; $C=\ln e+\ln\frac{1}{e}$; $D=\ln e^2-\ln e^{-2}$

2. Simplifier les sommes :

$E=\ln\left(2+\sqrt{2}\right)+\ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)+\ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$; $F=\ln 5+\ln 52+\ln\sqrt{5}$

$G=\ln 567-\ln 72-\ln\frac{7}{8}+\ln\frac{1}{27}$; $H=\ln\sqrt{135}-\ln 15+\ln\sqrt{75}-\ln\sqrt{27}$

CALCUL DE LIMITES

EXERCICE 3. Calculer les limites des fonctions suivantes en 0 et en $+\infty$:

$f(x)=(\ln x)^2$; $g(x)=\ln\left(x^2\right)$; $h(x)=\ln x+(x-7)$;

$i(x)=\frac{1}{x}+\ln x$; $j(x)=\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$; $k(x)=\frac{4x\ln x}{x+1}$

EXERCICE 4. Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x)$ (poser $X=1-x$) ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}$ (poser $X=1+x^2$)

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; 3. $\lim\limits_{x\to 1}x\ln(x)^2$ (poser $X=\sqrt{x}$)

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (poser $X=\frac{1}{x}$) ; 6. $\lim\limits_{x\to 0}x\ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$ (poser $X=1+\frac{1}{x}$)

Scanned by CamScanner

EXERCICE 5. Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1+x^2)$; 2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1-x)$; 3. $\lim\limits_{x \to 1} \ln(1-x)$; 4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

5. $\lim\limits_{x \to -3} \ln(3-2x-x^2)$; 6. $\lim\limits_{x \to -3} \ln(x^2+x+1)$. 7. $\lim\limits_{x \to -1} \ln\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)$

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)$; 9. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(\cos x)$; 10. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)$

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\ln x)$; 1. $\lim\limits_{x \to 1} \ln(\ln x)$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \ln\left(\frac{x\ln x}{x+1}\right)$. 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x\ln x}{x+1}\right)$

CALCUL DE DÉRIVÉES

EXERCICE 6. Déterminer $f'(x)$ la fonction dérivée de la fonction f

1. $f(x)=x\ln x$. 2. $f(x)=(\ln x)^2$. 3. $f(x)=\sqrt{\ln x}$. 4. $f(x)=\frac{1}{\ln x}$

5. $f(x)=x^2\ln x$. 6. $f(x)=(\ln x)^3$. 7. $f(x)=\sqrt{x}\ln x$; 8. $f(x)=\left(\frac{1}{\ln x}\right)^2$

9. $f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$; 10. $f(x)=\frac{\ln x}{1+\ln^2 x}$; 11. $f(x)=\frac{1}{\ln(x-1)}$. 12. $f(x)=\frac{\ln x}{2-3x}$

EXERCICE 7. Déterminer $f'(x)$ la fonction dérivée de la fonction f

1. $f(x)=\ln(-x)$; 2. $f(x)=\ln(x^2+1)$; 3. $f(x)=\ln(\sqrt{x})$; 4. $f(x)=\ln(\ln x)$

5. $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$; 6. $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$; 7. $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; 8. $f(x)=\ln(\tan x)$

CALCUL DE PRIMITIVES

EXERCICE 8. Déterminer, sur l'intervalle I, une primitive de f

1. $f(x)=\frac{1}{3x+1}$ $\left(I=\left]\frac{1}{3};+\infty\right[\right)$; 2. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ $(I=\mathbb{R})$

3. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ $(I=]0;+\infty[)$; 4. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ $(I=]1;+\infty[)$

5. $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ $(I=]0;\pi[)$; 6. $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x-2)^2}$ $(I=]2;+\infty[)$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 9.

Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+4x+3}{(1+x)^2}$

1. Déterminer 4 nombres réels a, b, c et d tels que : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{1+x}+\dfrac{d}{(1+x)^2}$

2. En déduire une primitive F de f sur $]-1;+\infty[$

EXERCICE 10. Bac Blanc 2006. Lycée Municipal de Yopougon

Le but de l'exercice est de trouver une primitive F sur $]-\infty;1[$ de la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

On pose alors $g(x)=\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$, $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $k(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

1. a. Démontrer que : $\forall x\in]-\infty;1[$, $g(x)=\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x-1}$

b. En déduire une expression de $G(x)$ où G est une primitive de g sur $]-\infty;1[$

2. a. Calculer $k'(x)$.

b. En déduire une primitive de h sur $]-\infty;1[$.

3. En utilisant les résultats précédents, trouver une expression de $F(x)$.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

EXERCICE 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

$a.\ln(x+1)=\ln(2x-3)$; $b.\ln(2x+1)=\ln(x^2-1)$. $c.2\ln(x+2)=\ln(5x+6)$

$d.\ln(x(x+1))=0$. $e.\ln(x+1)=\ln(5x+1)$; $f.\ln(7-2x)=\ln(3x+1)$

$g.\ln(x+4)+\ln(x-2)=\ln(5x-4)$. $h.\ln(2x-3)-\ln(x-2)=\ln x$;

$i.\ln(x+5)+\ln(x-2)=\ln 8$; $j.\ln(x-1)+\ln(x+1)=\ln(-2x-2)$.

$k.\ln(x-1)+\ln(x+1)=\ln(-2x-2)$. $l.\ln(5x+2)-\ln(x+2)=\ln(x-2)$.

EXERCICE 12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1. $\ln(x)=2$; 2. $\ln(x)=-3$; 3. $\ln(x^2)=9$; 4. $(\ln(x))^2=16$; 5. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=7$;

6. $\ln(1-x)=1$; 7. $\ln(x-2)=-4$; 8. $\ln(|2-5x|)=1$. 9. $\ln\left(\dfrac{x+1}{2x+5}\right)=0$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

$a.\ \ln x > \ln(2x-1)$. $b.\ 2\ln x \leq \ln(5x-6)$. $c.\ 2\ln x + 1 \leq 0$. $d.\ (\ln x)^2 - 4 \geq 0$

$e.\ \ln(|2x-1|) \leq 0$. $f.\ \ln(x+1) \leq 0$ $g.\ \ln(x+1)^2 \leq 0$ $h.\ \ln(x^2-4x+7) \leq \ln 4$.

$i.\ \ln(2-x) + \ln(x+4) > \ln(3x+2)$. $j.\ \ln(x-3) + \ln(x-1) < \ln(2x+3)$

EXERCICE 14.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $x^2 - 3x - 4 = 0$
2. $2\ln(1-x) = \ln(5+x)$
3. $\ln(3x+4) = 2\ln(x)$

Scanned by CamScanner

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1. Ecrivons en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$

$\bullet \ln 6=\ln(3\times 2)=\ln(3)+\ln(2)$ $\bullet \ln 8=\ln(2^3)=3\ln 2$

$\bullet \ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln 3$ $\bullet \ln\left(\frac{2}{3}\right)=\ln 2-\ln 3$

$\ln\left(\frac{8}{9}\right)=\ln 8-\ln 9=\ln(2^3)-\ln(3^2)=3\ln 2-2\ln 3$

$\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3$

EXERCICE 2.

a. Expression en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

$A=\ln 36=\ln\left(3^2\times 2^2\right)=\ln 3^2+\ln 2^2=2\ln 3+2\ln 2$

$B=\ln\frac{9}{8}=\ln 9-\ln 8=\ln 3^2-\ln 2^3=2\ln 3-3\ln 2$

$C=\ln\frac{2}{27}=\ln 2-\ln 27=\ln 2-\ln 3^3=\ln 2-3\ln 3$

$D=\ln\sqrt{6}=\frac{1}{2}\ln 6=\frac{1}{2}\ln(2\times 3)=\frac{1}{2}(\ln 2+\ln 3)=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3$

$E=\ln\left(3e^5\right)=\ln 3+\ln e^5=\ln 3+5\ln e=\ln 3+5\times 1=5+\ln 3$

b. Simplification :

$F=\ln(\sqrt{3}+1)+\ln(\sqrt{3}-1)=\ln[(\sqrt{3}+1)\times(\sqrt{3}-1)]=\ln\left(\sqrt{3}^2-1^2\right)=\ln(3-1)=\ln 2$

$G=\ln(\sqrt{5}+1)-\ln(\sqrt{5}-1)=\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\ln\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\ln\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}=2\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

EXERCICE 3. Calculons les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} x+5+\ln x=-\infty$

Car $\lim_{x\to 0} x+5=5$ *et* $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$.

2. $\lim_{x\to 0} x^3\ln x=\lim_{x\to 0} x^2.x\ln x=0$

car $\lim_{x\to 0} x^2=0$ *et* $\lim_{x\to 0} x\ln x=0$

3. $\lim_{x\to+\infty} x-\ln x=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

car $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

Scanned by CamScanner

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\ln x}{2-\ln x}$

On pose: $X=\ln x$ *quand* $x\to+\infty$, $X\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{2-\ln x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1+X}{2-X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{-X}=-1$$

5. $\lim\limits_{x\to1}\ln(1-x)$

$$\lim_{x\to1}1-x=1-1=0$$

$$\lim_{x\to1}\ln(1-x)=\lim_{X\to0}\ln X=-\infty$$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x-1}$

$$\frac{\ln x}{x-1}=\frac{\ln x}{x-1}\times\frac{x}{x}=\frac{\ln x}{x}\times\frac{x}{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\frac{x}{x-1}=0$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$

EXERCICE 4. Déterminons D_f puis calculons $f'(x)$

1. $f(x)=\ln(-5x+10)$.

$x\in D_f \Leftrightarrow -5x+10>0\Leftrightarrow -5x>-10\Leftrightarrow 5x<10\Leftrightarrow x<2$

$D_f=]-\infty;2[$

$$f'(x)=\frac{(-5x+10)'}{-5x+10}=\frac{-5}{-5x+10}=\frac{-5}{-5(x-2)}=\frac{1}{x-2}$$

2. $f(x)=\ln(x+7)$.

$x\in D_f \Leftrightarrow x+7>0 \Leftrightarrow x>-7$

$D_f=]-7;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{(x+7)'}{x+7}=\frac{1}{x+7}$$

3. $f(x)=\ln|x^2+x-2|$.

Scanned by CamScanner

$x\in D_f \Leftrightarrow |x^2+x-2|>0 \Leftrightarrow x^2+x-2\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 1$ et $x\neq -2$ donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$

$$f'(x)=\frac{(x^2+x-2)'}{x^2+x-2}=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$$

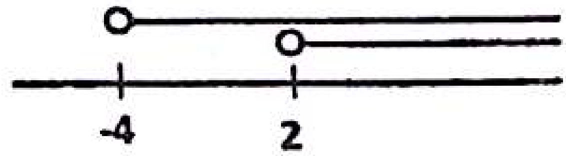
EXERCICE 5. Résolvons dans $\mathbb{R}$

1. $\ln|2x+8|=\ln|x-2|$

• Ensemble de validité V

$x\in V \Leftrightarrow 2x+8>0$ et $x-2>0 \Leftrightarrow 2x>-8$ et $x>2$

$\Leftrightarrow x>\frac{-8}{2}$ et $x>2 \Leftrightarrow x>-4$ et $x>2$



$V=]2;+\infty[$

• Equations équivalentes :

$\ln|2x+8|=\ln|x-2| \Leftrightarrow 2x+8=x-2$

$\Leftrightarrow 2x-x=-8-2 \Leftrightarrow x=-10$

$-10\notin V$ donc $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$

2. $\ln|3x-9|=0$

• Ensemble de validité V

$x\in V \Leftrightarrow 3x-9>0 \Leftrightarrow 2x>9 \Leftrightarrow x>\frac{9}{3} \Leftrightarrow x>3$

$V=]3;+\infty[$

• Equations équivalentes :

$\ln|3x-9|=0 \Leftrightarrow \ln|3x-9|=\ln 1$

$\Leftrightarrow 3x-9=1 \Leftrightarrow 3x=10 \Leftrightarrow x=\frac{10}{3}$

$\frac{10}{3}\simeq 3{,}33\in V$ donc $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{10}{3}\right\}$

Scanned by CamScanner

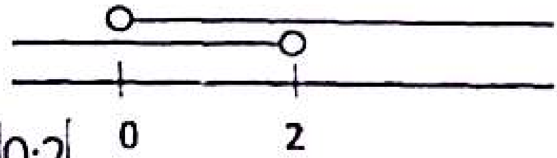
3. $\ln(-2x+4)=\ln(x)$

- Ensemble de validité V

$$x\in V \Leftrightarrow -2x+4>0 \quad et \quad x>0 \Leftrightarrow -2x>-4 \quad et \quad x>0$$

$$\Leftrightarrow 2x<4 \quad et \quad x>0 \Leftrightarrow x<\frac{4}{2} \quad et \quad x>0$$

$$\Leftrightarrow x<2 \quad et \quad x>0$$



$V=]0;2[$

- Equations équivalentes

$$\ln(-2x+4)=\ln x \Leftrightarrow 2x+4=x \Leftrightarrow -2x-x=-4$$

$$\Leftrightarrow -3x=-4 \Leftrightarrow 3x=4 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$$

$\frac{4}{3}\in V$ *donc* $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{4}{3}\right\}$

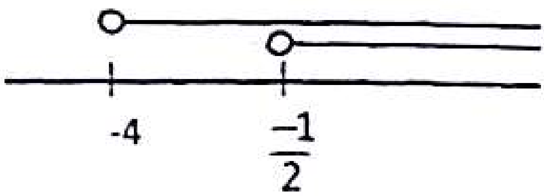
EXERCICE 6. Résolvons dans $\mathbb{R}$

1. $\ln(2x+1)<\ln(x+4)$

- Ensemble de validité V

$$x\in V \Leftrightarrow 2x+1>0 \quad et \; x+4>0 \Leftrightarrow 2x>-1 \quad et \quad x>-4$$

$$\Leftrightarrow x>\frac{-1}{2} \quad et \quad x>-4$$

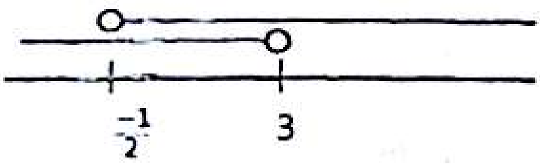


$V=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

- Inéquations équivalentes

$$\ln(2x+1)<\ln(x+4) \Leftrightarrow 2x+1<x+4 \Leftrightarrow 2x-x<4-1$$

$$\Leftrightarrow x<3$$



$S_{\mathbb{R}}=\left]-\frac{1}{2};3\right[$

Scanned by CamScanner

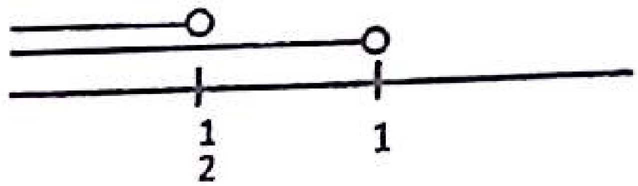
2. $\ln|-2x+2|>0$

• Ensemble de validité V

$$x\in V \Leftrightarrow -2x+2>0 \Leftrightarrow -2x>-2 \Leftrightarrow 2x<2$$
$$\Leftrightarrow x<\frac{2}{2} \Leftrightarrow x<1 \Leftrightarrow V=]-\infty;1[$$

•Equations équivalentes

$$\ln|-2x+2|>0 \Leftrightarrow \ln|-2x+2|>\ln 1 \Leftrightarrow -2x+2>1$$
$$\Leftrightarrow -2x>1-2 \Leftrightarrow -2x>-1 \Leftrightarrow 2x<1$$
$$\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$$



$$S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$$

EXERCICE 7.

1. a. Calculons $f(1)$

$$f(1)=8(1)^3-10(1)^2-1+3=8-10-1+3=11-11=0$$

b. Ecrivons $f(x)$ sous forme d'un produit de deux polynômes.

$$f(x)=(x-1)(ax^2+bx+c)$$

Factorisation par la division euclidienne

$$\begin{array}{l|l}
8x^3-10x^2-x+3 & x-1 \\ \hline
\underline{-8x^3+8x^2} & 8x^2-2x-3 \\
\quad -2x^2-x & \\
\quad \underline{2x^2-2x} & \\
\qquad -3x^2+3 & \\
\qquad \underline{3x^2-3} & \\
\qquad\ \ 0 \quad 0 &
\end{array}$$

$a=8; b=-2$ et $c=-3$

$$f(x)=(x-1)(8x^2-2x-3)$$

2. Résolvons l'équation : $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=0$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(8x^2-2x-3)=0$$
$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ou } 8x^2-2x-3=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \quad \text{ou } 8x^2-2x-3=0$$

Scanned by CamScanner

Résolvons : $8x^2-2x-3=0$

$\Delta=(-2)^2-4\times8(-3)=4+96=100>0$

$\Delta=\sqrt{100}=10$

$x_1=\frac{2-10}{2\times8}=\frac{-8}{16}=-\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{2+10}{2\times8}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{1;-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right\}$

3. Résolvons l'équation :

$x\in\mathbb{R},\ 8(\ln x)^3-10(\ln x)^2-\ln x+3=0$

• Ensemble de validité

$x\in V\Leftrightarrow x>0$ donc $V=]0;+\infty[$

• Equation équivalentes :

On pose : $X=\ln x$

L'équation devient : $8X^3-10X^2-X+3=0$

$\Leftrightarrow X=1$ ou $X=-\frac{1}{2}$ ou $X=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \ln x=1$ ou $\ln x=-\frac{1}{2}$ ou $\ln x=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x=e^1=e$ ou $x=e^{-\frac{1}{2}}$ ou $x=e^{\frac{3}{4}}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{e;\ e^{-\frac{1}{2}};\ e^{\frac{3}{4}}\right\}$

EXERCICE 8

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation : $x^2+2x-24=0$

$\Delta=2^2-4\times1(-24)=4+96=100 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=10$

$x_1=\frac{-2-10}{2\times1}=\frac{-12}{2}=-6$; $x_2=\frac{-2+10}{2\times1}=\frac{8}{2}=4$

$S_{\mathbb{R}}=\{-6;\ 4\}$

2. Résolvons les équations suivantes :

a . $\ln(x-3)+\ln(x+5)=2\ln3$

• Ensemble de validité V

$x\in V\Leftrightarrow x-3>0$ et $x+5>0$

$\Leftrightarrow x>3$ et $x>-5$

$V=]3;+\infty[$

• Equations équivalentes :

$$\ln(x-3)+\ln(x+5)=2\ln3 \Leftrightarrow \ln[(x-3)(x+5)]=\ln3^2$$
$$\Leftrightarrow \ln[(x-3)(x+5)]=\ln9$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x+5)=9$$
$$\Leftrightarrow x^2+5x-3x-15=9$$
$$\Leftrightarrow x^2+5x-3x-15-9=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x-24=0$$
$$\Leftrightarrow x=-6 \quad ou \quad x=4$$

$-6\notin V \quad et \quad 4\in V$

$S_{\mathbb{R}}=\{4\}$

b. $\ln|(x-3)(x+5)|=2\ln3$

• Ensemble de validité V

$x\in V \Leftrightarrow (x-3)(x+5)>0$

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$(x-3)(x+5)$		+	0	−	0	+	

$x\in V \Leftrightarrow x\in]-\infty;-5[\quad ou \quad x\in]3;+\infty[$

$donc \ V=]-\infty;-5[\cup]3;+\infty[$

•Equations équivalentes

$$\ln(x-3)+\ln(x+5)=2\ln3 \Leftrightarrow \ln|(x-3)(x+5)|=\ln3^2$$
$$\Leftrightarrow \ln|(x-3)(x+5)|=\ln9$$
$$\Leftrightarrow |(x-3)(x+5)|=9$$
$$\Leftrightarrow x^2+5x-3x-15=9$$
$$\Leftrightarrow x^2+5x-3x-15-9=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2x-24=0$$
$$\Leftrightarrow x=-6 \quad ou \quad x=4$$

$-6\in V \quad et \quad 4\in V \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{-6;4\}$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 9. Déterminons une primitive des fonctions f suivantes :

1° $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ $\quad \left(I=\left]1;+\infty\right[\right)$

$$f(x)=\frac{(x-1)'}{x-1}\Rightarrow F(x)=\ln|x-1|+k=\ln(x-1)+k$$

2° $f(x)=\dfrac{x}{x^2+5}$ $\quad (I=\mathbb{R})$

$$f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+5}=\frac{1}{2}\times\frac{\left(x^2+5\right)'}{x^2+5}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\times\ln\left|x^2+5\right|+k=\frac{1}{2}\times\ln\left(x^2+5\right)+k$$

3° $f(x)=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$ $\quad \left(I=\left]1;+\infty\right[\right)$

$$f(x)=\frac{(x+3)'}{x+3}+\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}\Rightarrow F(x)=\ln|x+3|-\frac{1}{x-1}+k=\ln(x+1)-\frac{1}{x-1}+k$$

EXERCICE 10. Extrait du bac D 2006. Session normale.

$$A=\int_{e^{-2}}^{1}(f(x)-y)dx=\int_{e^{-2}}^{1}\left(\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx.UA=\int_{e^{-2}}^{1}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x}\times\ln x\right)dx.UA$$

$$A=\left[2\ln x+\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_{e^{-2}}^{1}UA=2\times UA=2\times 8\ cm^2=16\ cm^2$$

Scanned by CamScanner

CHAPITRE IV: FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE - FONCTIONS EXPONENTIELLE ET PUISSANCE

Isaac **NEWTON** est né le 25 décembre 1642 d'une famille modeste.
Elève plutôt médiocre, il manifeste cependant un goût marqué pour les inventions mécaniques.
Il exécute divers modèles avec des outils qu'il achète sur ses économies.
C'est à 21 ans seulement que **NEWTON** généralise la fameuse formule connue aujourd'hui sous le nom de ***binôme de*** NEWTON.

En 1665, NEWTON conçoit ***le calcul différentiel et intégral*** qu'il appelle le calcul des fluxions. Il généralise les méthodes déjà utilisées pour la construction de tangentes à une courbe et pour le calcul de surfaces délimitées par une courbe.
Mais la paternité de l'invention du calcul infinitésimal est un sujet de contestation qui oppose Isaac **NEWTON** et le philosophe et mathématicien allemand Gottfried Von LEIBNIZ.
Cependant, la postérité ne croit au plagiat ni de l'un ni de l'autre.

La légende raconte que, un jour, assis sous un pommier, la chute d'une pomme attire son attention sur la pesanteur. Il conçoit ***la théorie de la gravitation universelle***.
Il explique que tout corps, dans l'espace et sur la Terre, subit les effets d'une force appelée gravité. Poursuivant les travaux de *Kepler*, il se demande si c'est la même cause qui retient la lune dans l'orbite qu'elle décrit autour de la Terre, et les planètes dans leurs orbites autour du soleil.
En hommage à ses travaux, son nom est donné à une unité de mesure de force utilisée en physique, le **NEWTON**.

NEWTON entreprend des expériences sur la réfraction de la lumière à travers les prismes. Il découvre la composition de la lumière, calcule les différents effets de réfraction, et fonde sa théorie sur cette matière.
En 1672, il entre à la Royal Society de Londres, en lui présentant la description d'un télescope qui porte son nom. **NEWTON** a l'idée de remplacer une lentille par un miroir concave (forme d'une cuillère) qui réfléchit la lumière sans la décomposer.
Le télescope de **NEWTON** long d'à peine 20 cm grossit 40 fois.
En 1705, il est anobli par la *Reine Anne* d'Angleterre pour se faire appeler *Sir Isaac* **NEWTON**.
En 1707, il fait publier en latin un ouvrage de mathématique, l'*Arithmétique universelle*, qui n'était que le texte des cours d'algèbre qu'il dispense.
Il laisse de nombreux écrits sur des questions théologiques qui présentent en particulier ses réflexions sur les Prophéties ou des travaux sur l'interprétation de l'Apocalypse **NEWTON** meurt le 20 mars 1727.

Scanned by CamScanner

FICHE DE COURS

DEFINITION

On appelle fonction exponentielle neperienne notée $\exp(x)$ ou e^x, la fonction réciproque de la fonction $\ln(x)$.

$$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$
$$x \mapsto e^x$$

Conséquences de la définition

- ❶ $\forall x \in \mathbb{R}$, e^x est définie c'est à dire $D_{\exp} = \mathbb{R}$.
- ❷ $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$
- ❸ $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b > 0$, $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$
- ❹ $\forall a \in \mathbb{R}$, $\ln e^a = a$
- ❺ $\forall b > 0$, $e^{\ln b} = b$

Propriétés algébriques

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$

- ❶ $e^{a+b} = e^a \times e^b$;
- ❷ $e^{na} = (e^a)^n$;
- ❸ $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$;
- ❹ $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$

Remarque 1 : $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

Remarque 2 : Les propriétés algébriques de e^x, ci-dessus, sont les mêmes que celles de la fonction puissance.

En effet, on rappelle que : $\forall n \in \mathbb{R}$ et $\forall m \in \mathbb{R}$

❶ $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$ ❷ $x^{nm} = (x^n)^m$ ❸ $x^{n-m} = \dfrac{x^n}{x^m}$ ❹ $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

Ensemble de définition

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ existe toujours, donc $D_f = \mathbb{R}$.

Scanned by CamScanner

Limites de référence

1. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ 2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

3. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ 4. $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$ 5. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

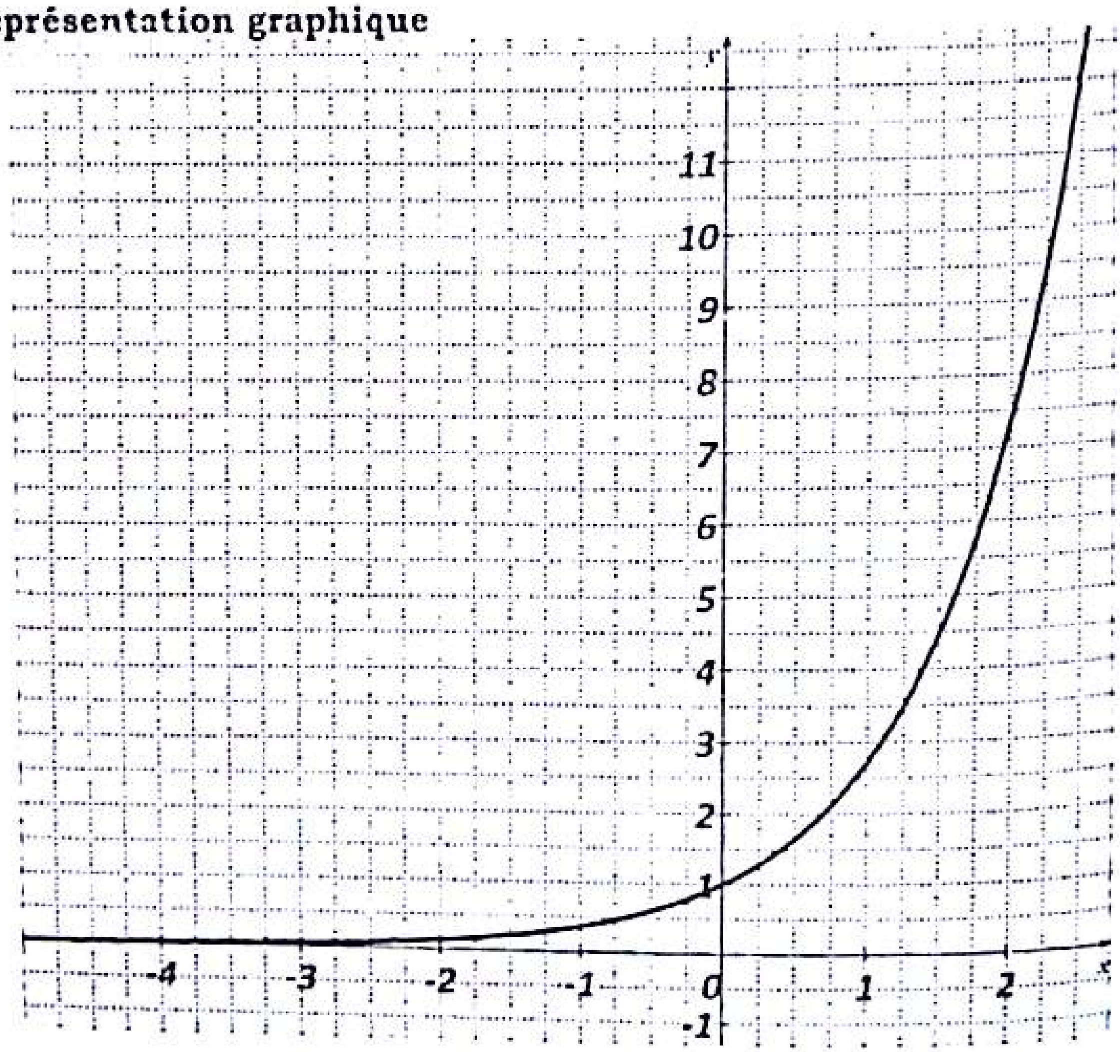
Remarque 3: on constate ici, que :

- les limites en $+\infty$ donnent $+\infty$
- les limites en $-\infty$ donnent 0.

DERIVATION ET SENS DE VARIATION

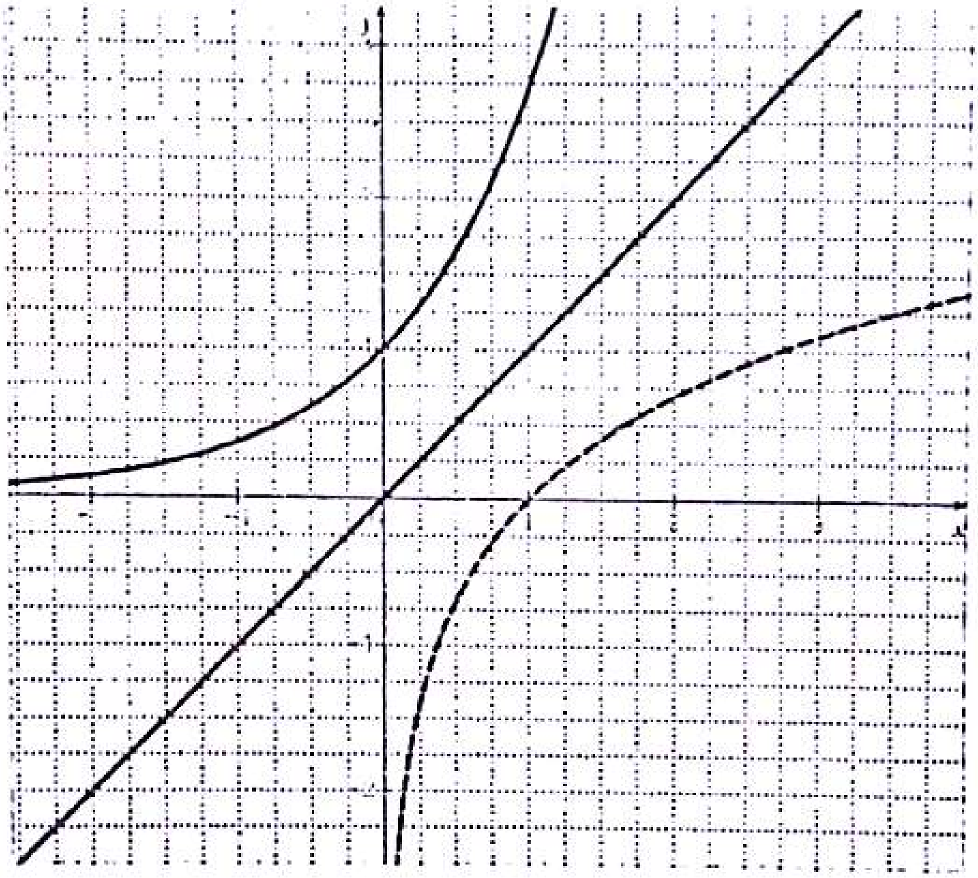
- e^x est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$
- $e^x > 0$ donc e^x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Représentation graphique



Scanned by CamScanner

Remarque 4. Les fonctions $\ln x$ et e^x sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Donc (C_{exp}) peut être obtenue à partir de (C_{ln}) par la symétrie orthogonale d'axe (Δ) : $y = x$.



Conséquences des variations de exp(x)

• $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$	• $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
• $e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$	• $e^a < 1 \Leftrightarrow a < 0$

Ensemble de définition et dérivée

Propriété 1:

Soit $f(x) = e^{ax+b}$

- $D_f = \mathbb{R}$
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (e^{ax+b})' = a \times e^{ax+b}$

Le signe de f' dépend du signe de a.

- si $a > 0$ alors f est strictement croissante.
- si $a < 0$ alors f est strictement décroissante.

Scanned by CamScanner

Propriété 2:

Soit u une fonction d'ensemble de définition D_u.

La fonction $f=e^u$ a pour ensemble de définition $D_f=D_u$

- Si u est dérivable sur un intervalle K alors f est dérivable sur K et on a :

$$f'=u'\times e^u$$

Primitive de $u'\times e^u$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle K.

La fonction $f=u'\times e^u$ a pour primitive sur K, la fonction $F=e^u$.

Fonction exponentielle de base a

Définition :

Soit a un nombre réel strictement positif.

On appelle fonction exponentielle de base a la fonction notée:

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

On a: $\forall x\in\mathbb{R},\ a^x=e^{x\ln a}\ (a>0)$.

Croissance comparée

Au voisinage de $+\infty$, la fonction exponentielle (e^x) l'emporte sur la fonction puissance $(x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}_+^*)$; et la fonction puissance l'emporte sur la fonction logarithme $(\ln)$.

Limites de référence

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}=+\infty\ (\alpha>0)$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha e^{-x}=0$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0\ (\alpha>0)$ 4. $\lim\limits_{x\to0}x^\alpha\ln x=0\ (\alpha>0)$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}x^\alpha e^x=0$

Scanned by CamScanner

METHODES PRATIQUES

M1 : Résolution d'équation

Pour résoudre une équation de la forme $e^A = e^B$, prendre le logarithme népérien des deux membres de l'équation

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $e^{4x+1} = e^{2x+7}$

$$\begin{aligned} e^{4x+1} = e^{2x+7} &\Leftrightarrow \ln e^{4x+1} = \ln e^{2x+7} \\ &\Leftrightarrow 4x+1 = 2x+7 \\ &\Leftrightarrow 4x-2x = 7-1 \\ &\Leftrightarrow 2x = 6 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{3\}$$

M2: Résolution d'une inéquation

On peut procéder comme suit :

- Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle pour se ramener à une inéquation de la forme $e^A < e^B$
- Utiliser la propriété : $e^A < e^B \quad \Leftrightarrow \quad A < B$
- Effectuer, éventuellement, le changement de variable $X = e^x$.
- Résoudre l'inéquation équivalente obtenue.
- Déterminer S l'ensemble des solutions.

M3: Comment déterminer les primitives d'une fonction comportant des exponentielles ?

- Faire apparaître une expression de la forme $u'e^u$
- En déduire les primitives de la forme $e^u + k \ (k \in \mathbb{R})$

Scanned by CamScanner

EXERCICES RESOLUS

UTILISATION DES PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

EXERCICE 1.

a. Ecrire plus simplement les expressions suivantes:

$A=(e^x+1)(e^x-1)$; $B=e^{2x}\cdot e^{1-2x}$; $C=\frac{e^{2x}}{e^x}$; $D=e^{-2x}-\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}$

b. Vérifier les égalités suivantes:

A. $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=1$; B. $\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

CALCUL DE LIMITES

EXERCICE 2. Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to 0} x+e^x=1$ 2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-5)$

EXERCICE 3. Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-e^x)$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}$ 3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$

CALCUL DE DÉRIVÉES

EXERCICE 4. Déterminer $f'(x)$ la fonction dérivée de $f(x)$.

1. $f(x)=7x+2+e^x$ 2. $f(x)=e^{-2x+1}$ 3. $f(x)=e^{\frac{x-1}{2x+7}}$

CALCUL DE PRIMITIVES

EXERCICE 5. Déterminer une primitive des fonctions f suivantes :

1. $f(x)=e^x-2$ 2. $f(x)=e^{2x+5}$ 3. $f(x)=xe^{x^2}$

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

EXERCICE 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^{5x+1}=e^{x+4}$ 2. $e^{4x+2}=7$ 3. $e^{3x+1}=0$

EXERCICE 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1. $x^2+2x-3=0$ 2. $(\ln x)^2+2\ln x-3=0$ 3. $e^{2x}+2e^x-3=0$

EXERCICE 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $\ln|x+2|=0$ 2. $\ln|x+3|<2$ 3. $(\ln x)^2+\ln x-2=0$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{5x+1} < e^{2x+3}$
2. $e^{x+2} > 4$
3. $e^{x+1} > -3$
4. $e^{x+1} < -5$

EXERCICE 10.

On considère la fonction polynôme définie par : $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

1. Calculer $P(2) = 0$.

2. a. Vérifier que $P(x) = (x-2)(x^2 + x - 2)$.

b. En déduire les solutions de l'équation (E) : $P(x) = 0$.

3. Utiliser les résultats de la question 2. pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. (E_1) : $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 4\ln x + 4 = 0$.

b. (E_2) : $e^{3x} - e^{2x} - 4e^{x} + 4 = 0$.

EXERCICE 11.

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$

1. Vérifier que 1 et -1 sont des racines de $P(x)$.

2. a. Factoriser $P(x)$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$

3. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation.

$e^{3x} + 2e^{2x} - 16e^{x} - 2 + 15e^{-x} = 0$

EXERCICE 12.

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{x} - 1 = 12e^{-x}$
2. $e^{3x+6} \leq 1$
3. $\ln(3x - 1) > 2$

EXERCICE 13.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2X - Y = 7 \\ 3X + 4Y = 5 \end{cases}$

2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants

a. $\begin{cases} 2e^{x} - e^{y} = 7 \\ 3e^{x} + 4e^{y} = 5 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 7 \\ 3\ln x + 4\ln y = 5 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

UTILISATION DES PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

EXERCICE 1.

Simplifier les expressions suivantes :

$A=\ln e^2+\ln\sqrt{e}$; $B=\ln(e\sqrt{e})$; $C=\ln e+\ln\frac{1}{e}$; $D=\ln e^2-\ln e^{-2}$

EXERCICE 2.

1. Simplifier les expressions suivantes :

$A=e^{\ln 5}$; $B=e^{1+\ln 3}$; $C=\ln e^{-3}$; $D=e^{2\ln 7}$; $E=3\ln(\ln e)+e^{\ln 3}$

2. Factoriser et simplifier les expressions suivantes :

$F=\dfrac{e^{x+y}-e^{2y}}{e^x}$; $G=\dfrac{e^{2x+2y}}{e^x.e^{2y}}$

EXERCICE 3. Demontrer pour tout nombre réel x, les relations suivantes:

1. $\ln(e^x+e^{-x})=x+\ln(1+e^{-2x})$ 2. $x+\ln(1+e^{-x})=\ln(e^x+1)$

3. $e^{-x}-e^{-2x}=\dfrac{e^x-1}{e^{2x}}$ 4. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ 5. $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

CALCUL DE LIMITES

EXERCICE 4. Calculer les limites suivantes en $-\infty$ et en $+\infty$

1. $f(x)=x-2+e^x$. 2. $f(x)=(x^2+4)e^{-x}$; 3. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

4. $f(x)=2x+1-xe^{-x}$; 5. $f(x)=(-2x^2+3x).e^x$; 6. $f(x)=x.(e^{-x}+1)$

EXERCICE 5. Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2+1}$. 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}$; 3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x\ln x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} e^{-x\ln x}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-e^x$; 6. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-e^x$; 7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x+1)e^x}{x}$; 8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xe^x}{x+1}$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$. 10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x}$. 11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x+1)$; 12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+1)$

Scanned by CamScanner

CALCUL DE DÉRIVÉES

EXERCICE 6. Déterminer $f'(x)$ la fonction dérivée de la fonction f :

1. $f(x)=(x^2+5x)e^x$; 2. $f(x)=e^x\ln x$; 3. $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-x^2}$. 4. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

5. $f(x)=\sin x\cdot e^x$; 6. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}$; 7. $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+3}$; 8. $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

EXERCICE 7. Déterminer $f'(x)$ la fonction dérivée de la fonction f :

1. $f(x)=e^{3x+2}$; 2. $f(x)=e^{\sqrt{x}}$; 3. $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$; 4. $f(x)=e^{\cos x}$

5. $f(x)=e^{\frac{1}{3}x}-e^{-3x}$; 6. $f(x)=\ln(1+e^{-x})$; 7. $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^{-x}-1}{e^x+1}\right)$

CALCUL DE PRIMITIVES

EXERCICE 8.

Déterminer, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, une primitive de f :

1. $f(x)=3xe^{x^2}$; 1. $f(x)=\sin x\cdot e^{\cos x}$; 1. $f(x)=e^{-2x}+e^{-x}+1$

2. $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$; 1. $f(x)=(x+1)e^{3x^2+6x+1}$; 2. $f(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x+2x}$

1. $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+e^{-2x}+2$; 2. $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; 2. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

EXERCICE 9.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x^2e^{2x}$

a. Déterminer les nombres réels a, b, c pour que la fonction G : $G(x)=(ax^2+bx+c)e^{2x}$ vérifie $G'(x)=f(x)$

b. En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$

2. Mêmes questions avec $f(x)=x^2e^{-x}$ et $G(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$

3. Mêmes questions avec $f(x)=e^{-x}.\sin x$ et $G(x)=(a\cos x+b\sin x)e^{-x}$

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

EXERCICE 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a. $e^{2x-1}=e^{3-2x}$; b. $e^{x^2+7}=e^{-3x+5}$; c. $e^{x+1}=e^{2x}$; d. $e^{3x-1}=e^{2x+4}$

e. $e^x=3$; f. $e^x=-5$; g. $e^x-e^{-x}=0$; h. $e^{|2x-1|}=5$; i. $e^{3x+2}=4$

EXERCICE 11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a. $e^{3x-1}\leq e^{2x+4}$; b. $e^{\frac{1}{x}}>e^{x-2}$; c. $e^{x^2}<e^{2x+3}$; d. $e^{x-1}\leq e^{5x+7}$

e. $e^x>5$; f. $e^{-x}\leq 7$; g. $e^{-x}\leq 0$; h. $e^{|3x-1|}\geq 5$; i. $e^{2x+3}<3$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 12. Bac blanc 2006. Cours Secondaire Méthodiste de Yopougon

On donne la fonction polynôme : $f(x)=8x^3-10x^2-x+3$

1. a. Calculer $f(1)$

   b. Factoriser $f(x)$

   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x)=0$

2. En déduire dans $\mathbb{R}$, l'équation :

(E): $8e^{3x+2}-10e^{2x+2}-e^{x+2}+3e^2=0$

EXERCICE 13.

On considère la fonction polynôme définie par : $P(x)=x^3-x^2-4x+4$

1. Calculer $P(2)$.

2. a. Vérifier que : $P(x)=(x-2)(x^2+x-2)$.

   b. En déduire les solutions de l'équation (E) : $P(x)=0$

3. Utiliser les résultats de la question 2. pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation:

(E): $e^{3x}-e^{2x}-4e^x+4=0$

Scanned by CamScanner

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1.

a. Ecrivons plus simplement les expressions suivantes:

$$A=(e^x+1)(e^x-1)=(e^x)^2-(1)^2=e^{2x}-1$$

$$B=e^{2x}\times e^{1-2x}=e^{2x+1-2x}=e^1=e\ ;\ C=\frac{e^{2x}}{e^x}=e^{2x-x}=e^x$$

$$D=e^{-2x}-\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}=e^{-2x}-\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)=e^{-2x}-\left(1+e^{-2x}\right)=-1$$

b. Vérifions les égalités suivantes:

$$A.\ \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]$$

$$=\left[\frac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2}\right]\left[\frac{e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}}{2}\right]=\left[\frac{2e^{-x}}{2}\right]\left[\frac{2e^x}{2}\right]$$

$$=e^{-x}\times e^x=e^{-x+x}=e^0=1$$

$$B.\ \frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x(1-\frac{1}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}=\frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

EXERCICE 2.

1. $\lim\limits_{x\to 0} x+e^x=1$ *car* $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} e^x=e^0=1$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty}(e^x-5)=-5$ *car* $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x=0$

3. $x-e^x=x\left(1-\frac{e^x}{x}\right)$

$$\lim_{x\to +\infty}(x-e^x)=\lim_{x\to +\infty} x\left(1-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$$

car $\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty,\ \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 3.

Calcul des limites suivantes :

1• $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-e^x)$

$x-e^x=x(1-\frac{e^x}{x})$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-\frac{e^x}{x})=-\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{e^x}{x})=-\infty\end{cases}$

2• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}$

$\frac{e^x}{x-1}=\frac{x\left(\frac{e^x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\frac{e^x}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x}}{1-\frac{1}{x}}=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1\end{cases}$

3• $\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}$

$\frac{e^x-e}{x-1}=\frac{e^x-e^1}{x-1}$

Soit $f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-e^1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=e^1=e$

4• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{3e^x+2}$

On pose $X=e^x$

Quand $x\to+\infty$; $X\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{3e^x+2}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X-1}{3X+2}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{3X}=\frac{1}{3}$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 4.

1. $f'(x)=[7x+2+e^x]'=[7x+2]'+[e^x]'=7+e^x$

2. $f'(x)=\left[e^{-2x+1}\right]'=[-2x+1]'\times\left[e^{-2x+1}\right]=-2e^{-2x+1}$

3. $f'(x)=\left[e^{\frac{x-1}{2x+7}}\right]'=\left[\dfrac{x-1}{2x+7}\right]'\times e^{\frac{x-1}{2x+7}}=\dfrac{1\times 7-(-1\times 2)}{(2x+7)^2}e^{\frac{x-1}{2x+7}}$

$f'(x)=\dfrac{7+2}{(2x+7)^2}e^{\frac{x-1}{2x+7}}=\dfrac{9}{(2x+7)^2}e^{\frac{x-1}{2x+7}}$

EXERCICE 5. Déterminons une primitive des fonctions f suivantes :

1• $f(x)=e^x-2 \Rightarrow F(x)=e^x-2x+k$

2• $f(x)=e^{2x+5}=\frac{1}{2}\times 2e^{2x+5}=\frac{1}{2}\times[2x+5]'e^{2x+5}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+5}+k$

3• $f(x)=xe^{x^2}=\frac{1}{2}\times 2xe^{x^2}=\frac{1}{2}\times[x^2]'e^{x^2} \Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}+k$

EXERCICE 6.

1. $e^{5x+1}=e^{x+4}$

$$e^{5x+1}=e^{x+4} \Leftrightarrow 5x+1=x+4 \Leftrightarrow 5x-x=4-1$$
$$\Leftrightarrow 4x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

2. $e^{4x+2}=7$

$$e^{4x+2}=7 \Leftrightarrow \ln e^{4x+2}=\ln 7 \Leftrightarrow 4x+2=\ln 7$$
$$\Leftrightarrow 4x=-2+\ln 7 \Leftrightarrow x=\frac{-2+\ln 7}{4}$$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\dfrac{-2+\ln 7}{4}\right\}$

3. $e^{3x+1}=0$

$\forall x\in\mathbb{R},\ e^{3x+1}>0$ *donc* $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 7. Résolvons dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

1. $x^2+2x-3=0$

$\Delta=2^2-4\times1\times(-3)=4+12=16 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{16}=4$

$x_1=\dfrac{-2-4}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$; $x_2=\dfrac{-2+4}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{-3;1\}$

2. $(\ln x)^2+2(\ln x)-3=0$

$x\in V \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow V=]0;+\infty[$

On pose $X=\ln x$. l'équation devient alors: $X^2+2X-3=0$

$\Leftrightarrow X=-3$ ou $X=1 \Leftrightarrow \ln x=-3$ ou $\ln x=1$

$\Leftrightarrow x=e^{-3}$ ou $x=e^1=e \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{e^{-3};e\}$

3. $e^{2x}+2e^x-3=0$

On pose $X=e^x$. l'équation devient alors: $X^2+2X-3=0$

$\Leftrightarrow X=-3$ ou $X=1 \Leftrightarrow e^x=-3_{\text{impossible}}$ ou $e^x=1 \Leftrightarrow e^x=1$

$\Leftrightarrow x=\ln 1=0 \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{0\}$

EXERCICE 8.

1. $\ln(x+2)=0$

• *Ensemble de validité V*

$x\in V \Leftrightarrow x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$

$V=]-2;+\infty[$

• *Equations équivalentes*

$\ln(x+2)=0 \Leftrightarrow \ln(x+2)=\ln 1 \Leftrightarrow x+2=1$

$\Leftrightarrow x=1-2 \Leftrightarrow x=-1$

$-1\in V \Rightarrow S_{\mathbb{R}}=\{-1\}$

2. $\ln(x+3)<2$

• *Ensemble de validité V*

$x\in V \Leftrightarrow x+3>0 \Leftrightarrow x>-3 \Rightarrow V=]-3;+\infty[$

• *Equation équivalente*

$\ln(x+3)<2 \Leftrightarrow e^{\ln(x+3)}<e^2 \Leftrightarrow x+3<e^2 \Leftrightarrow x<-3+e^2$

or $-3+e^2>-3 \Rightarrow -3+e^2\in V$ donc $S_{\mathbb{R}}=]-3+e^2[$

Scanned by CamScanner

3. $|\ln x|^2+\ln x-2=0$

• *Ensemble de validité V*

$x\in V \Leftrightarrow x>0 \Rightarrow V=]0;+\infty[$

• *Equations équivalentes:*

On pose $X=\ln x$

L'équation devient: $X^2+X-2=0$

$\Delta=1^2-4\times(-2)=1+8=9 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

$X_1=\frac{-1-3}{2\times 2}=\frac{-4}{4}=-1 \quad ; \quad X_2=\frac{-1+3}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \ln x=-1 \quad ou \quad \ln x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{-1} \quad ou \quad e^{\ln x}=e^{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x=e^{-1} \quad ou \quad x=e^{\frac{1}{2}}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{e^{-1};e^{\frac{1}{2}}\right\}$

EXERCICE 9.

1. $e^{5x+1}<e^{2x+3}$

$e^{5x+1}<e^{2x+3} \Leftrightarrow 5x+1<2x+3 \Leftrightarrow 5x-2x<3-1$

$\Leftrightarrow 2x<2 \Leftrightarrow x<\frac{2}{3}$

$S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$

2. $e^{x+2}>4$

$e^{x+2}>4 \Leftrightarrow \ln e^{x+2}>\ln 4 \Leftrightarrow x+2>\ln 4 \Leftrightarrow x>-2+\ln 4$

$S_{\mathbb{R}}=]-2+\ln 4;+\infty[$

3. $e^{x+1}>-3$

Cette relation est TOUJOURS VRAIE sur $\mathbb{R}$, car $\forall x\in\mathbb{R}, e^x>-3$

donc $S_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$

4. $e^{x+1}<-5$

Cette relation n'est pas possible sur $\mathbb{R}$, car $\forall x\in\mathbb{R}, e^x>0$

donc $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 10.

$P(x)=x^3-x^2-4x+4$

1. $P(2)=2^3-2^2-4\times2+4=8-4-8+4=8+4-8-4=0$

   $P(2)=0$

2.a. Vérifions que $P(x)=(x-2)(x^2+x-2)$

$$
\begin{aligned}
(x-2)(x^2+x-2) &= x^3+x^2-2x-2x^2-2x+4\\
&= x^3+x^2-2x^2-2x-2x+4\\
&= x^3-x^2-4x+4 = P(x)
\end{aligned}
$$

donc $P(x)=(x-2)(x^2+x-2)$

b. En déduisons les solutions de $P(x)=0$

$$
\begin{aligned}
P(x)=0 &\Leftrightarrow (x-2)(x^2+x-2)=0\\
&\Leftrightarrow x-2=0 \quad ou\ x^2+x-2=0\\
&\Leftrightarrow x=2 \quad ou \quad x^2+x-2=0
\end{aligned}
$$

Résolvons: $x^2+x-2=0$

$\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=1+8=9 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

$x_1=\frac{-1-3}{2\times1}=-\frac{4}{2}=-2 \quad ; \quad x_1=\frac{-1+3}{2\times1}=\frac{2}{2}=1$

$S_{\mathbb{R}}=\{2;-2;1\}$

3.a. $(\ln x)^3-(\ln x)^2-4\ln x+4=0$

• Ensemble de validité V

$x\in V \Leftrightarrow x>0\ ,\quad V=]0;+\infty[$

• Résolution

On pose $X=\ln x$

l'équation devient $X^3-X^2-4X+4=0$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow X_1=2 \quad ou \quad X_2=-2 \quad ou \quad X_3=1\\
&\Leftrightarrow \ln x=2 \quad ou \quad \ln x=-2 \quad ou \quad \ln x=1\\
&\Leftrightarrow e^{\ln x}=e^2 \quad ou \quad e^{\ln x}=e^{-2} \quad ou \quad e^{\ln x}=e^1\\
&\Leftrightarrow x=e^2 \quad ou \quad x=e^{-2} \quad ou \quad x=e
\end{aligned}
$$

$S_{\mathbb{R}}=\{e^2;e^{-2};e\}$

Scanned by CamScanner

b. $e^{3x}-e^{2x}-4e^{x}+4=0$

$(e^x)^3-(e^x)^2-4e^x+4=0$

On pose $X=e^x$ avec $X>0$

On a: $X^3-X^2-4X+4=0$

$X=2$ ou $X=-2$ ou $X=1$

On retient: $X=2$ ou $X=1$

On a: $e^x=2$ ou $e^x=1$

$\ln e^x=\ln 2$ ou $\ln e^x=\ln 1$

$x=\ln 2$ ou $x=\ln 1=0$

$S_{\mathbb{R}}=\{\ln 2;0\}$

EXERCICE 11.

1. $P(1)=(1)^4+2(1)^3-16(1)^2-2(1)+15$

$P(1)=1+2-16-2+15=18-18=0$

$P(-1)=(-1)^4+2(-1)^3-16(-1)^2-2(-1)+15$

$P(-1)=1-2-16+2+15=18-18=0$

Factorisation de $P(x)=x^4+2x^3-16x^2-2x+15$ par $(x-1)$ au moyen de la division euclidienne

$$\begin{array}{l|l}
x^4+2x^3-16x^2-2x+15 & x-1 \\
\underline{-x^4+x^3} & x^3+3x^2-13x-15 \\
0 \quad 3x^3-16x^2 & \\
\quad \underline{-3x^3+3x^2} & \\
\qquad -13x^2-2x & \\
\qquad \underline{13x^2-13x} & \\
\qquad\quad -15x+15 & \\
\qquad\quad \underline{15x-15} & \\
\qquad\quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^3+3x^2-13x-15)$

Factorisation de $x^3+3x^2-13x-15$ par $(x-1)$

Scanned by CamScanner

Factorisation de $P(x)=x^3+3x^2-13x-15$ *par* $(x+1)$ *au moyen de la division euclidienne*

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2-13x-15 & x+1 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^3-x^2} & x^2+2x-15 \\
\quad 2x^2-13x & \\
\quad \underline{-2x^2-2x} & \\
\qquad -15x-15 & \\
\qquad \underline{15x+15} & \\
\qquad\ 0 \quad\ 0 &
\end{array}
$$

$x^3+3x^2-13x-15=(x+1)(x^2+2x-15)$

donc $P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+2x-15)$

$\Delta=2^2-4\times1\times2(-15)=4+60=64 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta}=\sqrt{64}=8$

$x_1=\dfrac{-2-8}{2\times1}=\dfrac{-10}{2}=-5 \quad ; \quad x_2=\dfrac{-2+8}{2\times1}=\dfrac{6}{2}=3$

$S_{\mathbb{R}}=\{1;-1;-5;3\}$

3. $(e^{3x})+2e^{2x}-16e^x-2+15e^{-x}=0$

$e^x\left[(e^{3x})+2e^{2x}-16e^x-2+15e^{-x}\right]=0$

$e^{4x}+2e^{3x}-16e^{2x}-2e^x+15=0$

$(e^x)^4+2(e^x)^2-16(e^x)^2-2e^x+15=0$

On pose: $X=e^x$ *avec* $X>0$

$X^4+2X^3-16X^2-2+15=0$

$X=1$ *ou* $X=-1$ *ou* $X=-5$ *ou* $X=3$

On retient: $X=1$ *ou* $X=3$ *car* $X>0$

$\Leftrightarrow\ e^x=1$ *ou* $e^x=3$

$\Leftrightarrow\ \ln e^x=\ln1$ *ou* $\ln e^x=\ln3$

$\Leftrightarrow\ x=\ln1$ *ou* $x=\ln3$

$S_{\mathbb{R}}=\{0;\ln3\}$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 12

1. $e^x-1=12e^{-x} \Leftrightarrow e^x-1-12e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^x(e^x-1-12e^{-x})=0$

$\Leftrightarrow e^{2x}-e^x-12e^x\times e^{-x}=0 \Leftrightarrow e^{2x}-e^x-12=0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2-e^x-12=0$

On pose : $X=e^x$, $X>0$

$(X)^2-X-12=0$

$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-12)=1+48=49 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=7$

$X_1=\frac{-1-7}{2\times1}=\frac{-8}{2}=-4$; $X_2=\frac{-1+7}{2\times1}=\frac{6}{2}=3$

On retient : $X=3$ *car* $X>0$

$X=3 \Leftrightarrow e^x=3 \Leftrightarrow \ln e^x=\ln3 \Leftrightarrow x=\ln3$

$S_{\mathbb{R}}=\{\ln3\}$

2. $e^{3x+6}\leq1$

$e^{3x+6}\leq1 \Leftrightarrow \ln e^{3x+6}\leq\ln1 \Leftrightarrow 3x+6\leq0$

$\Leftrightarrow 3x\leq-6 \Leftrightarrow x\leq-\frac{6}{3} \Leftrightarrow x\leq-2$

$S_{\mathbb{R}}=]-\infty;-2]$

3. $\ln(3x-1)>2$

• *Ensemble de validité V*

$x\in V \Leftrightarrow 3x-1>0 \Leftrightarrow 3x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3} \Rightarrow V=]\frac{1}{3};+\infty[$

• *Inéquations équivalentes*

$\ln(3x-1)>2 \Leftrightarrow e^{\ln(3x-1)}>e^2 \Leftrightarrow 3x-1>e^2 \Leftrightarrow 3x>e^2+1 \Leftrightarrow x>\frac{e^2+1}{3}$

$S_{\mathbb{R}}=]\frac{e^2+1}{3};+\infty[$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 13.

1. $\begin{cases} 2X - Y = 7 \\ 3X + 4Y = 5 \end{cases}$

En multipliant la première équation par 4 on obtient : $\begin{cases} 8X - 4Y = 28 \\ 3X + 4Y = 5 \end{cases}$

La somme membre à membre des deux équations donne 11 X = 33 d'où

X = 3

De 2X - Y = 7, on tire Y= 2X - 7ou Y = 6-7 = -1

$S = \{(3;-1)\}$

2. a. $\begin{cases} 2e^{x} - e^{y} = 7 \\ 3e^{x} + 4e^{y} = 5 \end{cases}$

Posons $X = e^{x}$ et $Y = e^{y}$.

Le système d'équations devient : $\begin{cases} 2X - Y = 7 \\ 3X + 4Y = 5 \end{cases}$

Ce système a été résolu dans la question 1).

On a, d'après la question 1., les solutions $e^{x} = 3$ et $e^{y} = -1$.

Comme $e^{y} > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, $e^{y} \neq -1$ donc le système n'admet pas de solutions.

$S = \emptyset$

b. $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 7 \\ 3\ln x + 4\ln y = 5 \end{cases}$

Posons $X = \ln x$ et $Y = \ln y$

D'après 1) on obtient :

$\ln x = 3$ soit $x = e^{3}$; $\ln y = -1$ soit $y = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$S = \{(e^{3}; e^{-1})\}$

Scanned by CamScanner

CHAPITRE V: CALCUL INTEGRAL

Gottfried LEIBNIZ est né le 1 juillet 1646 à Leipzig.

LEIBNIZ met au point à Paris sa découverte mathématique fondamentale, **l'invention du calcul différentiel et intégral**. **LEIBNIZ** montre notamment que l'intégration et la dérivation sont des opérations inverses l'une de l'autre, invente la notation $\int f(x)dx$, trouve les formules de dérivation d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.

LEIBNIZ se querella violemment avec Newton qui l'accusait de plagiat.

L'Histoire a retenu les deux noms comme inventeurs du calcul infinitésimal, et ce sont plutôt les notations symboliques de **LEIBNIZ** qui se sont imposés.

En 1699, il entre à l'Académie des Sciences de Paris, puis il travaille à fonder des sociétés savantes en Allemagne : en 1700 voit le jour la Société des Sciences de Brandenburg, qui deviendra plus tard l'Académie de Berlin.

La fin de la vie de **LEIBNIZ** est assez triste.

Une grande partie de son énergie est absorbée par sa querelle de priorité avec Newton.

Il décède le 14 novembre 1716 à Hanovre, dans la solitude.

Scanned by CamScanner

FICHE DE COURS

1. Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b des éléments de I.
Le nombre réel $F(b)-F(a)$ est appelé intégrale de a à b de f et est noté $\int_a^b f(x)dx$.

On a : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

2. Propriétés

Propriété 1

Si f une fonction continue sur un intervalle I ; et si $a \in I$, la fonction F définie sur I par : $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a

Propriété 2

f et g étant deux fonctions continues sur un intervalle I ;
a, b et c étant trois éléments de I et λ un réel, on a :

$\int_a^a f(t)dt=0$; $\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt$

$\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt=\int_a^c f(t)dt$ (Relation de Chasles)

$\int_a^b (f+g)(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_a^b g(t)dt$

$\int_a^b (\lambda f)(t)dt=\lambda\int_a^b f(t)dt$

Propriété 3 : (Intégration par parties)

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, dont les dérivées f' et g' sont continues sur I.
Soient a et b deux éléments de I.
On a : $\int_a^b f(t)\cdot g'(t)dt=\left[f(t)\cdot g(t)\right]_a^b-\int_a^b f'(t)\cdot g(t)dt$

Scanned by CamScanner

Propriété 4 : (calcul d'aires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (D) la droite d'équation $y=ax+b$

L'aire A de la partie du plan limitée par la courbe de f, la droite (D) et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$, est donnée par :

$$A=\int_a^b (f(x)-(ax+b))dx \cdot Ua \quad si \quad f(x)\geq ax+b \quad \forall x\in[a,b]$$

$$A=-\int_a^b (f(x)-(ax+b))dx \cdot Ua \quad si \quad f(x)\leq ax+b \quad \forall x\in[a,b]$$

Propriété 5 : Interprétation graphique de l'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ $(a<b)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonale (O, I, J).

$\int_a^b f(x)dx$ est l'aire en unités d'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe (OI) et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

METHODES PRATIQUES

M1 : Comment calculer une intégrale par primitivation ?

- Connaître le tableau des primitives usuelles.
- Mettre en évidence la forme correspondant à une primitive connue.
- Utiliser, éventuellement, une (ou plusieurs) propriété(s) du calcul intégral.

M2: Comment calculer une intégrale par intégration par parties ?

- Dans le produit de fonctions à intégrer, choisir la fonction à dériver avec précaution (souvent, on cherchera à diminuer le degré du polynôme) ; dans certains cas, ce choix s'impose.
- Appliquer le théorème de l'intégration par parties.

Scanned by CamScanner

EXERCICES RESOLUS

CALCUL D'INTÉGRALES PAR PRIMITIVATION

EXERCICE 1. Calculer les intégrales suivantes :

$I_1=\int_0^{\pi}\cos t\,dt$; $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$; $I_3=\int_0^{1}\left(t^3+2t^2+4t+1\right)dt$

$I_4=\int_{-3}^{3}\left(12t^{17}+2t^3-t\right)dt$; $I_5=\int_{-\ln 2}^{\ln 3}\left(1-2e^t\right)dt$; $I_6=\int_0^{1}\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}dt$

CALCUL D'INTÉGRALES À L'AIDE DE LA DÉRIVÉE

EXERCICE 2.

Soit $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

1. Calculer la dérivée de la fonction $g:x\mapsto\sqrt{x^2+2}$.
2. En déduire la dérivée de la fonction f définie sur [0; 1] par $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+2})$.
3. Calculer I.

CALCUL D'INTÉGRALES À L'AIDE D'UNE INTÉGRATION PAR PARTIES

EXERCICE 3.

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

$A=\int_0^{\pi}(x\sin x)dx$; $B=\int_1^{e}\ln t\,dt$; $C=\int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}dx$

CALCUL D'INTÉGRALES À L'AIDE DE DEUX INTÉGRATIONS PAR PARTIES

EXERCICE 4.

Déterminer par 2 intégrations par parties les intégrales suivantes :

$A=\int_0^{\pi}(x^2\sin x)dx$; $B=\int_0^{1}(x+1)^2e^xdx$

CALCUL D'INTÉGRALES EN UTILISANT DES RELATIONS ENTRE INTÉGRALES

EXERCICE 5.

On donne : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\cos^2x\,dx$; $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\sin^2x\,dx$

1. Calculer $I+J$
2. a. Montrer que $\cos^2X-\sin^2X=\cos 2X$
   b. Calculer $I-J$ à l'aide d'une intégration par parties
3. En déduire les valeurs de I et de J

Scanned by CamScanner

CALCUL D'AIRES

EXERCICE 6 **Extrait de bac D 2006**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}$

Soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 4cm sur (OI) et 2cm sur (OJ)).

On donne (D) la droite d'équation : $y=x$

Calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x=e^{-2}$ et $x=1$.

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

CALCUL D'INTÉGRALES PAR PRIMITIVATION

EXERCICE 1 **Calculer les intégrales suivantes**

1. $\int_0^3 (x^3-x^2-1)\,dx$ 2. $\int_0^3 (x+4)\,dx$ 3. $\int_{-1}^1 (2x^2-1)\,dx$ 4. $\int_0^1 x(x^2-3)^7\,dx$

5. $\int_2^{-1} (3x^3)\,dx$ 6. $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2x-1+\frac{1}{x^2}\right)dx$ 7. $\int_0^1 (2x+3)(x^2+3x-5)\,dx$

8. $\int_2^1 \left(\frac{1}{x^6}\right)dx$ 9. $\int_1^2 \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$ 10. $\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^3}\,dx$ 11. $\int_0^1 \left(\frac{x^4+x^2+1}{x^2}\right)dx$

12. $\int_0^1 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$ 13. $\int_2^3 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$ 14. $\int_1^2 \left(\frac{3-x}{x^2-6x+1}\right)dx$

15. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}\,dx$ 16. $\int_{-1}^1 \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)dx$ 17. $\int_{-1}^0 \left(\frac{e^x}{e^x+2}\right)dx$

INTÉGRALES DE FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

EXERCICE 2 **Calculer les intégrales suivantes**

1. $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)dx$ 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x+3\cos x)\,dx$ 5. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos 2x)\,dx$ 6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)^2\,dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$ 8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\cos x)}\,dx$ 9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^3}\,dx$ 10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 3

Soit $f(x)=x\sin x$

1. Calculer $f'(x)$

2. En déduire les valeurs de :

a. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+x\cos x)\,dx$

b. $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos x)\,dx$

CALCUL D'INTÉGRALES À L'AIDE D'UNE INTÉGRATION PAR PARTIES

EXERCICE 4

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

1. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ 3. $\int_1^2 x\ln x\,dx$ 4. $\int_1^2 \ln x\,dx$

5. $\int_1^2 xe^{2x}\,dx$ 6. $\int_0^1 (2x+1)e^x\,dx$ 7. $\int_0^1 (x^3+1)\ln x\,dx$ 8. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

9. $\int_1^2 x\sqrt{1-x}\,dx$ 10. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

CALCUL D'INTÉGRALES À L'AIDE DE DEUX INTÉGRATIONS PAR PARTIES

EXERCICE 5

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties :

1. $\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$ 2. $\int_0^1 (x+1)^2 e^x\,dx$ 3. $\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$ 4. $\int_{-\pi}^0 x^2\sin 2x\,dx$

5. $\int_{-\pi}^0 e^{2x}\sin x\,dx$ 6. $\int_0^1 (x+1)^2 e^{-x}\,dx$ 7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$ 8. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx$

CALCUL D'AIRES

EXERCICE 6 Extrait de bac D 2002

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{-2x}+x-1$

Soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O; I, J). (Unité : 3cm).

On donne (D) la droite d'équation $y=x-1$ et soit t un nombre réel supérieur à α.

Calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x=t$ et $x=\alpha$.

Scanned by CamScanner

PROBLEMES DE SYNTHESE

EXERCICE 7.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$

1. a. Vérifier que, pour tout nombre réel x : $f(x)+f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$ (1)

b. Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout nombre réel x : $\frac{1}{1+e^x}=a+\frac{be^x}{1+e^x}$

2. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

On désigne par (C) la représentation graphique de F dans un plan muni d'un repère orthonormal.

a. En utilisant la relation (1) et le résultat de la question **1.b.**, démontrer que :

$F(x)=x+2\ln 2-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}-\ln(1+e^x)$ (2)

b. Utiliser la définition de F donnée au début de la question 2. pour démontrer le sens de variation de la fonction F.

c. Justifier que : $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}=1$, puis prouver que : $\lim_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$

d. Déterminer $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

e. Dresser le tableau de variation de la fonction F.

3. a. Démontrer que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y=2\ln 2$ et $y=x-1+2\ln 2$ sont asymptotes à la courbe (C).

b. Tracer la courbe (C) et ses deux asymptotes ((C) est toujours au dessous de (D_2)).

EXERCICE 8. Bac Blanc 2001. Lycée Classique d'Abidjan

L'objectif de cet exercice est de calculer les intégrales suivantes :

$I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx$; $J=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$; $K=\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,dx$

1. Calcul de I

Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

a. Calculer la dérivée de la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2+2}$

b. En déduire la dérivée f' de f

c. Calculer la valeur de I.

2. Calcul de J et de K

Scanned by CamScanner

a. Sans calculer explicitement J et K, vérifie que : $J+2I=K$.

b. A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, démontrer que : $K=\sqrt{3}-J$

c. En déduire les valeurs de J et de K.

EXERCICE 9. Bac Blanc 2000. Collège Moderne Ségbé de Yopougon

1. a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $\dfrac{1}{(1+e^x)^2}=1-\dfrac{e^x}{1+e^x}-\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

b. Calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}dx$

2. a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $f(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^3}$

b. Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$

EXERCICE 10.

On pose $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$, $A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$ et $J=I+A$

1. Calculer J puis I
2. En déduire A.

EXERCICE 11.

On pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$

1. Calculer $I+J$ et $I-J$ en effectuant une intégration par parties.
2. En déduire I et J.

EXERCICE 12. Bac Blanc 2006. Cours Secondaire Méthodiste de Yopougon

1. Soit l'intégrale $K=\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx$.

A l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que : $K=\dfrac{e^\pi-1}{5}$.

2. Soient $I=\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx$ et $J=\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x\,dx$

a. Démontrer que $I+J=e^\pi-1$

b. Démontrer que $I-J=\dfrac{e^\pi-1}{5}$

c. En déduire les valeurs de I et J.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 13.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$$

1. Calculer I_0 et J_0

2. Soit n un entier naturel non nul.

a. En intégrant par parties I_n , puis J_n prouver que I_n et J_n vérifient le système : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$.

b. En déduire, pour tout n naturel non nul, les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$

EXERCICE 14.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

On désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J) (unité graphique : 2cm).

1. Etudier les variations de f et son comportement en $-\infty$ et en $-\infty$.

2. Soit F la primitive de f qui s'annule en 1.

a. Exprimer $F(x)$ en utilisant le symbole de l'intégration.

b. Calculer $F(x)$ à l'aide de deux intégrations par parties successives.

3. Soit a un nombre réel strictement positif et $\mathcal{A}$ la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$.

a. Utiliser le résultat de la question 2. pour calculer l'aire $\mathcal{A}$.

b. Calculer $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathcal{A}$.

Scanned by CamScanner

CORRECTION 6

EXERCICE 1.

$$I_1=\left[\sin t\right]_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0$$

$$I_2=\left[-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\dots$$

$$=-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$I_3=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3+2t^2+t\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+2+1\dots$$

On remarque que la fonction $t\mapsto 12t^{17}$ … $I_4=0$

$$I_5=\left[t-2e^t\right]_{-\ln 2}^{\ln 3}=\ln 3-2e^{\ln 3}-(-\ln 2\dots$$

$$=\ln 3-6+\ln 2+1=\ln 3+\ln 2-5=\ln(\dots$$

$$I_6=\left[2\sqrt{1+t^2}\right]_0^1=2\sqrt{2}-2$$

EXERCICE 2.

1. $\left(\sqrt{x^2+2}\right)'=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

2. A l'aide de la question précédente : $f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

3. On déduit des questions précédentes que :

$$I=\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-\ln\sqrt{2}$$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 3.

- $A=\int_0^{\pi}(x\sin x)\,dx$

On pose : $u(x)=x \qquad \int_0^{\pi} u'(x)=1$

$v'(x)=\sin x \qquad v(x)=-\cos x$

On a alors : $\int_0^{\pi}(x\sin x)\,dx=[-x\cos x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-\cos x\,dx$

$$=[-x\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$

$$=[-x\cos x]_0^{\pi}+[\sin x]_0^{\pi}=[-x\cos x+\sin x]_0^{\pi}$$

$$=(-\pi\cos\pi+\sin\pi)-(-0\cos 0+\sin 0)=\pi$$

$A=\int_0^{\pi}(x\sin x)\,dx=\pi$

- $B=\int_1^{e}\ln t\,dt=\int_1^{e}1\times\ln t\,dt$

On pose : $u(t)=\ln t \qquad u'(t)=\frac{1}{t}$

$v'(t)=1 \qquad v(t)=t$

On a alors : $\int_1^{e}\ln t\,dt=[t\ln t]_1^{e}-\int_1^{e}\frac{1}{t}\times t\,dt=[t\ln t]_1^{e}-\int_1^{e}1\,dt=[t\ln t]_1^{e}-[t]_1^{e}$

$$B=[t\ln t-t]_1^{e}=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)=0+1=1$$

- $C=\int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}\,dx$

On pose : $u(x)=2x+1 \qquad u'(t)=2$

$v'(t)=e^{-x} \qquad v(t)=-e^{-x}$

Scanned by CamScanner

On a alors : $\int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}\mathrm{d}x=\left[-(2x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0}-\int_{1}^{e}-2e^{-x}\mathrm{d}x$

$$=\left[-(2x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\int_{1}^{e}2e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=\left[-(2x+1)e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\left[-2e^{-x}\right]_{-1}^{0}$$

$$=\left[-(2x+1)e^{-x}-2e^{-x}\right]_{-1}^{0}=\left[(-2x-3)e^{-x}\right]_{-1}^{0}$$

$$=(-2\times 0-3)e^{-0}-(-2\times(-1)-3)e^{-(-1)}=-3+e$$

$C=\int_{-1}^{0}(2x+1)e^{-x}\mathrm{d}x=-3+e$

EXERCICE 4.

- $A=\int_{0}^{\pi}\left(x^2\sin x\right)\mathrm{d}x$

On pose : $u(x)=x^2 \qquad u'(x)=2x$

$v'(x)=\sin x \qquad v(x)=-\cos x$

On a alors : $\int_{0}^{\pi}\left(x^2\sin x\right)\mathrm{d}x=\left[-x^2\cos x\right]_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}-2x\cos x\,\mathrm{d}x$

$$=\left[-x^2\cos x\right]_{0}^{\pi}+2\int_{0}^{\pi}x\cos x\,\mathrm{d}x$$

Intégrons à l'aide d'une intégration par parties $\int_{0}^{\pi}x\cos x\,\mathrm{d}x$

On a alors : $\int_{0}^{\pi}(x\cos x)\mathrm{d}x=\left[x\sin x\right]_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\left[x\sin x\right]_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}-\sin x\,\mathrm{d}x$

$$=\left[x\sin x\right]_{0}^{\pi}+\left[\cos x\right]_{0}^{\pi}=\left[x\sin x+\cos x\right]_{0}^{\pi}$$

$$=(\pi\sin\pi+\cos\pi)-(0\sin 0+\cos 0)=-2$$

On pose : $u(x)=x \qquad u'(x)=1$

$v'(x)=\cos x \qquad v(x)=\sin x$

$\int_{0}^{\pi}(x\cos x)\mathrm{d}x=-2$

Scanned by CamScanner

$$A=\int_0^{\pi}\left(x^2\sin x\right)dx=\left[-x^2\cos x\right]_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}x\cos x\,dx=\left[-x^2\cos x\right]_0^{\pi}+2\times(-2)$$

$$=\left[-x^2\cos x\right]_0^{\pi}-4=\left(-\pi^2\cos\pi\right)-\left(-0^2\cos 0\right)-4=\pi^2-4$$

$$A=\int_0^{\pi}\left(x^2\sin x\right)dx=\pi^2-4$$

- $B=\int_0^1 (x+1)^2 e^x\,dx$

On pose : $u(x)=(x+1)^2$ $\quad u'(x)=2(x+1)$

$v'(x)=e^x$ $\quad v(x)=e^x$

On a alors : $\int_0^1 (x+1)^2 e^x\,dx=\left[(x+1)^2e^x\right]_0^1-\int_0^1 2(x+1)e^x\,dx$

$$=\left[(x+1)^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$$

Intégrons à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$

On pose : $u(x)=(x+1)$ $\quad u'(x)=1$

$v'(x)=e^x$ $\quad v(x)=e^x$

On a alors : $\int_0^1 (x+1)e^x\,dx=\left[(x+1)e^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$

$$=\left[(x+1)e^x\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1=\left[(x+1)e^x-e^x\right]_0^1=\left[xe^x\right]_0^1$$

$$=1\times e^1-0\times e^0=e$$

$$\int_0^1 (x+1)e^x\,dx=e$$

$$B=\int_0^1 (x+1)^2 e^x\,dx=\left[(x+1)^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1 (x+1)e^x\,dx=\left[(x+1)^2e^x\right]_0^1-2e$$

$$=(1+1)^2e^1-(0+1)^2e^0-2e=4e-1-2e=2e-1$$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 5.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\cos^2 x\,dx \quad ; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\sin^2 x\,dx$$

1. Calculons $I+J$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\cos^2 x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)dx$$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\times 1\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\,dx \qquad \left(\text{car } \cos^2 x+\sin^2 x=1\right)$$

$$I+J=\left[x^2+x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}.$$

2. a. Montrons que $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos^2 x-(1-\cos^2 x) \qquad \left(\text{car } \cos^2 x+\sin^2 x=1\right)$$

$$=\cos^2 x+\cos^2 x-1=2\cos^2 x-1$$

Linéarisons $\cos^2 x$

$$\cos x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$$

$$\Rightarrow \cos^2 x=\left[\frac{1}{2}(z+\bar{z})\right]^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2(z+\bar{z})^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left[z^2+\bar{z}^2+2z\cdot\bar{z}\right]$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left[z^2+\bar{z}^2+2\right] \qquad (\text{car}: z\cdot\bar{z}=1)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\left[z^2+\bar{z}^2\right]+1\right)=\frac{1}{2}\times(\cos 2x+1) \quad \left[\text{car } \frac{1}{2}\left[z^n+\bar{z}^n\right]=\cos nx\right]$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=2\times\frac{1}{2}\times(\cos 2x+1)-1=\cos 2x$$

b. Calcul de $I-J$ **à l'aide d'une intégration par parties**

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\cos^2 x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\cos 2x\,dx \qquad \left(\text{car } \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x\right)$$

Scanned by CamScanner

Calculons $I-J$ par une intégration par parties

On pose $u(x)=2x+1$ $\quad u'(x)=2$

$$v'(x)=\cos 2x \qquad v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)(\cos 2x)dx=\left[\frac{1}{2}(2x+1)\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,dx$$

$$I-J=\left[\frac{1}{2}(2x+1)\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left[\frac{1}{2}(2x+1)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}.$$

$$I-J=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\left(\frac{1}{2}\sin 0+\frac{1}{2}\cos 0\right)$$

$$I-J=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi+2}{2}\right)\times 1+\frac{1}{2}\times 0-\left(\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi+2}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\pi+2-2}{4}=\frac{\pi}{4}$$

3. En déduisons les valeurs de I et de J

Résolvons le système : $\begin{cases} I+J=\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\pi}{4} & (1) \\ I-J=\dfrac{\pi}{4} & (2) \end{cases}$

$$(1)+(2)\Rightarrow 2I=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow I=\frac{\pi^2}{32}+\frac{\pi}{4}$$

$$(1)-(2)\Rightarrow 2J=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{16} \qquad \Rightarrow J=\frac{\pi^2}{32}$$

EXERCICE 6. **Extrait du bac D 2006. Session normale.**

$$A=\int_{e^{-2}}^{1}(f(x)-y)dx=\int_{e^{-2}}^{1}\left(\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx \qquad A=\int_{e^{-2}}^{1}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x}\times\ln x\right)dx.UA$$

$$A=\left[2\ln x+\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_{e^{-2}}^{1}UA=2\times UA=2\times 8\,cm^2=16\,cm^2$$

Scanned by CamScanner

CHAPITRE VI: ETUDE DE FONCTIONS

René DESCARTES, le plus célèbre mathématicien français, est né le 31 mars 1596.

A 20 ans, il accède à la *faculté de Poitiers* pour y étudier le Droit et obtient une licence.

De 1629 à 1633, **DESCARTES** écrit ***"Le Monde"***.

Il y présente une théorie physique de l'Univers et affirme pouvoir démontrer scientifiquement l'existence de Dieu.

En 1637, il publie ***La géométrie*** où **DESCARTES** présente en particulier des constructions à la règle et au compas de la multiplication et de la division en s'appuyant sur le théorème de Thalès.

La même année, il publie ***Le Discours de la Méthode*** dans lequel il explique les ***Règles pour la conduite de l'esprit humain***.

Citons également son célèbre : ***"Je pense, donc je suis"***

L'empreinte que nous laisse **DESCARTES** dans l'univers des sciences est considérable. C'est lui qui met en place les notations modernes que nous connaissons en algèbre, comme par exemple l'exposant pour les puissances. Il propose d'utiliser les premières lettres de l'alphabet (a, b ou c) pour des quantités connues et les dernières (x, y ou z) pour les inconnues.

Descartes est aussi à l'origine du repère du plan.

On parle de ***repère cartésien***.

Une anecdote raconte qu'observant une mouche qui se promenait sur les carreaux d'une fenêtre, il aurait pensé à définir, à l'aide des carreaux, des coordonnées du plan. **DESCARTES** explique ainsi qu'il est possible de traiter les problèmes de géométrie en problèmes numériques.

Cette géométrie porte aujourd'hui un nom : **la géométrie analytique.**

Pour étudier les propriétés d'une courbe, il passe par une équation déterminée par une relation liant ses coordonnées. Celle-ci contient implicitement toutes les propriétés de la courbe.

L'œuvre philosophique que laisse **DESCARTES** est considérable et exprime une nouvelle approche des sciences et des mathématiques en particulier.

Pour DESCARTES, un scientifique ne reconnait comme vrai que ce qui est clairement démontré.

La résolution d'un problème se fait consciencieusement, étape par étape, sans rien négliger. On voit là naitre un esprit nouveau, qu'on qualifiera plus tard de « ***cartésien*** » c'est-à-dire qui présente des qualités de clarté, de logique et de méthode.

Le 11 février 1650, à Stockholm, **DESCARTES** meurt d'une infection pulmonaire à l'âge de 53 ans.

Notons enfin que le village natal de **DESCARTES**, la Haye, a été rebaptisé au nom de « ***Descartes*** ».

Ce n'est pas ordinaire tout de même. Imaginez une seule seconde que la ville où vous êtes né, prenne un jour votre nom !!!

Scanned by CamScanner

FICHE DE COURS

REDUCTION DE L'INTERVALLE D'ETUDE

On considère une fonction f définie sur un ensemble D.

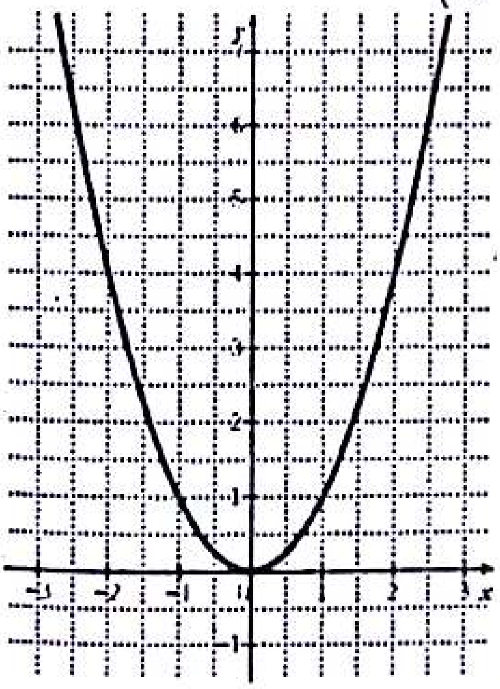
On note $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

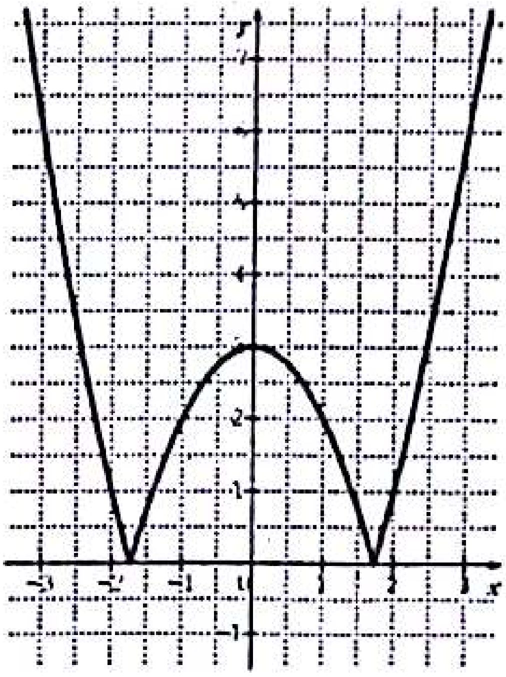
Fonction Paire

$$f \text{ est paire} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f,\ -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Propriété :

f est paire si et seulement si $\left(C_f\right)$ est symétrique par rapport à l'axe (OJ).





Remarque 1

Si la fonction f est paire, on peut étudier f seulement sur D $\cap$ [0, +∞ [

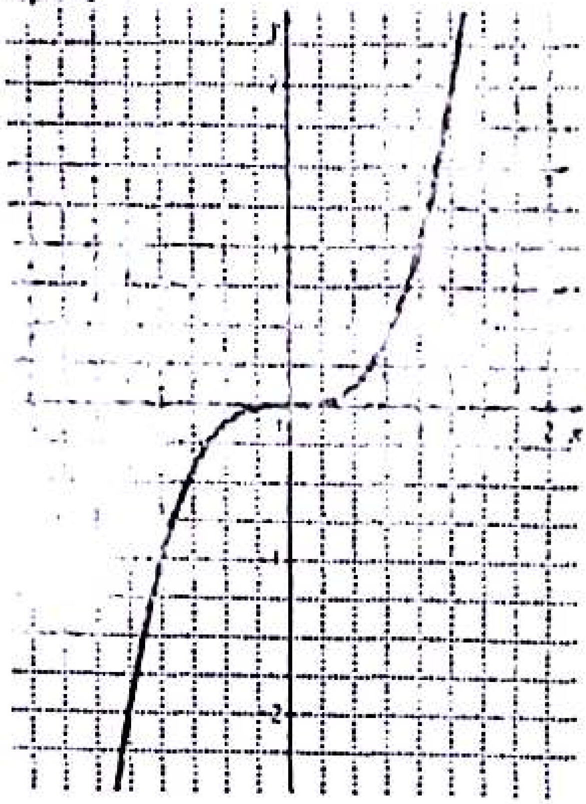
Scanned by CamScanner

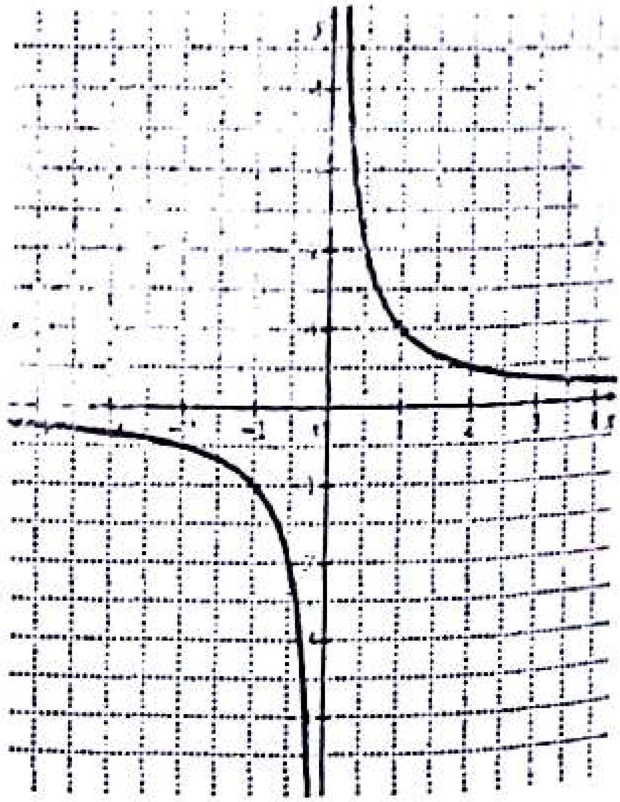
Fonction Impaire

$$f \text{ est impaire} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{array} \right.$$

Propriété :

f est impaire si et seulement si $\left(C_f\right)$ est symétrique par rapport à l'origine O du repère.





Remarque 2

Si la fonction f est impaire, on peut étudier f seulement sur D $\cap [0,+\infty[$

Remarque 3

De nombreuses fonctions ne sont ni paires, ni impaires.

Scanned by CamScanner

ELEMENTS DE SYMETRIE

On considère une fonction f définie sur un ensemble A.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J).

Axe de Symétrie

Pour montrer que la droite (D): $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f).

on peut procéder comme suit :

1ère Méthode :
On montre que la fonction g: $x \mapsto f(x+a)$ est paire.

2ème Méthode :
On montre que : $\forall x \in \mathbb{R},\ (a-x) \in A \Leftrightarrow (a+x) \in A$
et on vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(a-x) = f(a+x)$

Centre de Symétrie

Pour montrer que le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de (C_f).

on peut procéder comme suit :

1ère Méthode :
On montre que la fonction g: $x \mapsto f(x+a) - b$ est impaire.

2ème Méthode :
On montre que : $\forall x \in \mathbb{R},\ (a-x) \in A \Leftrightarrow (a+x) \in A$
et on vérifie que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{f(a+x)+f(a-x)}{2} = b$

Scanned by CamScanner

METHODES PRATIQUES

M1 : Comment étudier les positions relatives d'une courbe et d'une droite ?

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f,

(D) la droite d'équation $y = ax + b$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour étudier les positions relatives de (C_f) par rapport à (D), on peut procéder comme suit :

1. On calcule la différence $f(x) - (ax + b)$
2. On étudie le signe de cette différence
3. On conclue :

- Si sur I, $[f(x) - (ax + b)] > 0$ alors (C_f) est au-dessus de (D) sur I.
- Si sur I, $[f(x) - (ax + b)] < 0$ alors (C_f) est en dessous de (D) sur I.
- Si en x_0, $[f(x) - (ax + b)] = 0$ alors (C_f) et (D) se coupent au point A d'abscisse x_0.

M2 : Comment encadrer une solution de l'équation $f(x) = 0$ par les méthodes de balayage et de dichotomie ?

Méthode de dichotomie

Cette méthode consiste à scinder l'intervalle initial en 2 intervalles égaux afin d'affiner l'encadrement de α.

Méthode de balayage

Cette méthode consiste à balayer tout l'intervalle sélectionné afin d'affiner encore mieux l'encadrement de α.

Scanned by CamScanner

M3 : Comment étudier le signe d'une fonction sur un intervalle I?

1. Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Les cas 4 les plus courants :

- Le minimum absolu est positif

x		a	
$f(x)$	↘	$+\dots$	↗

$f(x)>0 \ \forall x \in I$

- Le maximum absolu est négatif

x		a	
$f(x)$	↗	$-\dots$	↘

$f(x)<0 \ \forall x \in I$

- f est croissante d'une valeur négative à une valeur positive

x		a	
$f(x)$	↗	0	↗

$f(x)<0$ avant a
$f(x)>0$ après a

- f décroissante d'une valeur positive à une valeur négative

x		a	
$f(x)$	↘	0	↘

$f(x)>0$ avant a
$f(x)<0$ après a

2. Pour les autres expressions

Soit $f(x)$ une expression qui n'est ni une fonction polynôme du premier degré, ni du second degré.

Pour étudier le signe de $f(x)$, on peut procéder comme suit :

- On factoriser $f(x)$ au maximum
- On résout l'équation $f(x)>0$
- On détermine ainsi l'intervalle sur lequel $f(x)>0$ et on déduit l'intervalle sur lequel $f(x)<0$

Scanned by CamScanner

Exemple : Etudier sur $]0;+\infty[$ le signe de $f(x)=2-\ln x$

$f(x)>0 \Leftrightarrow 2-\ln x>0 \Leftrightarrow -\ln x>-2 \Leftrightarrow \ln x<2$

$\Leftrightarrow e^{\ln x}<e^2 \Leftrightarrow x<e^2$

Donc $f(x)>0 \Leftrightarrow x<e^2$

x	0		e^2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$f(x)>0$ sur $]0;e^2[$

$f(x)<0$ sur $]e^2;+\infty[$

Scanned by CamScanner

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1.

Etudier la parité des fonctions suivantes :

(1). $f(x)=x^2$ (2). $f(x)=x^3$ (3). $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

EXERCICE 2.

Soit $f(x)=(x-2)^2+1$. Montrer que (D): $x=2$ est axe de symétrie de (C_f).

EXERCICE 3.

Soit $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$. Montrer que A (1 : 2) est centre de symétrie de (C_f).

EXERCICE 4.

Soit $f(x)=2x-1+\frac{2}{(x-1)^2}$ et (D) la droite d'équation $y=2x-1$

1. Montrer que (D) est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

2. Etudier les positions relatives de (C_f) et (D).

EXERCICE 5.

Soit $f(x)=3x+2+\frac{\ln x}{x}$ et (D) la droite d'équation $y=3x+2$

1. Montrer que (D) est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

2. Etudier les positions relatives de (C_f) et (D).

EXERCICE 6.

Soit $f(x)=x^3-2$

1. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α comprise entre 1 et 2.
2. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près, en alternant la méthode de dichotomie et la méthode de balayage.

Scanned by CamScanner

PROBLEMES RESOLUS

PROBLEME 1. Bac 2005 session normale

PARTIE A

Soit g la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x)=\frac{2}{3}x^3+1-2\ln x$.

1. a. Démontrer que : $\forall x\in]0;+\infty[,\ g'(x)=\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x}$.

   b. Déterminer le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

   c. En déduire les variations de g.

2. a. Dresser le tableau de variation de g.

   b. Démontrer que : $\forall x\in]0;+\infty[,\ g(x)>0$.

PARTIE B

Soit f la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $f(x)=\frac{2}{3}x-1+\frac{\ln x}{x^2}$.

On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2cm.

1. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   b. En déduire que (C) admet une asymptote verticale.

2. a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y=\frac{2}{3}x-1$ est une asymptote oblique à (C).

   b. Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3. a. Démontrer que : $\forall x\in]0;+\infty[,\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

   b. Déterminer les variations de f. (On pourra utiliser **A.2.b**)

   c. Dresser le tableau de variation de f.

4. a. Démontrer que l'équation : $x\in]0;+\infty[,\ f(x)=0$ admet une solution unique α.

   b. Démontrer que : $1{,}15<\alpha<1{,}3$

   c. Construire (D) et (C) dans le même repère. (On prendra $\alpha=1{,}2$).

5. λ est un nombre réel strictement supérieur à 1.
   $A(\lambda)$ désigne l'aire de la partie du plan limitée par (D), (C) et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=\lambda$.

   a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $A(\lambda)$.

   b. Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque tend vers $+\infty$.

Scanned by CamScanner

PROBLEME 2. Bac 2004 session normale

PARTIE A

On donne la fonction P définie par : $P(x)=e^{2x}-5e^{x}+4$.

1. Résoudre l'équation : $x\in\mathbb{R}$, $P(x)=0$.

2. Démontrer que : $\forall x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]\ln 4;+\infty\right[$, $P(x)>0$.

$\forall x\in\left]0;\ln 4\right[$, $P(x)<0$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-1+\dfrac{1}{e^{x}-2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité : 2 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Calculer les limites de f en $+\infty$; en $-\infty$; à gauche et à droite en ln2.

3. On admet que f est dérivable en tout point de son ensemble de définition et on note f' sa dérivée.

a. Vérifier que : $\forall x\in\left]-\infty;\ln 2\right[\cup\left]\ln 2;+\infty\right[$, $f'(x)=\dfrac{P(x)}{(e^{x}-2)^{2}}$

b. Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

c. Dresser le tableau de variation de f.

4. Démontrer que la droite d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

5. Etudier la position de (C) par rapport à (D) sur l'intervalle $\left]\ln 2;+\infty\right[$

6. Démontrer que : $\forall x\in\left]-\infty;\ln 2\right[\cup\left]\ln 2;+\infty\right[$, $f(x)=x-\dfrac{3}{2}+\dfrac{e^{x}}{2(e^{x}-2)}$.

7. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x-\dfrac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

8. Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty;\ln 2\right[$.

9. Construire (C).

PARTIE C

Soit λ un nombre réel strictement négatif.

1. Exprimer en fonction de λ, l'aire $A(\lambda)$ en cm² de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OJ), la droite (Δ) et la droite d'équation $x=\lambda$.

2. a. Calculer la limite A de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

b. Hachurer, sur la figure, la partie du plan dont l'aire est égale à A.

Scanned by CamScanner

PROBLEME 3. Bac 2003 session normale

PARTIE A

Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x)=3+(x-1)e^{-x}$.

1. Calculer les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Démontrer que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $h'(x)=(2-x)e^{-x}$.
3. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation.
4. a. Démontrer que sur l'intervalle $]-\infty;2]$ l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α.

   b. Démontrer que $-1<\alpha<0$.
5. En déduire que, pour tout nombre réel x :

- si $x<\alpha$, alors $h(x)<0$
- si $x>\alpha$, alors $h(x)>0$

PARTIE B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x+1-xe^{-x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (unité : 2cm).

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   (On pourra mettre x en facteur dans l'expression de $f(x)$).
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=h(x)$.
3. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=3x+1$ est asymptote à (C) en $+\infty$
5. Etudier la position relative de (Δ) et (C).
6. Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
8. Tracer (Δ), (T) et (C). (On prendra : $\alpha \simeq 0.6$ et $f(\alpha)=0.3$).
9. Soit λ un nombre réel strictement positif.

a. Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale : $\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx$.

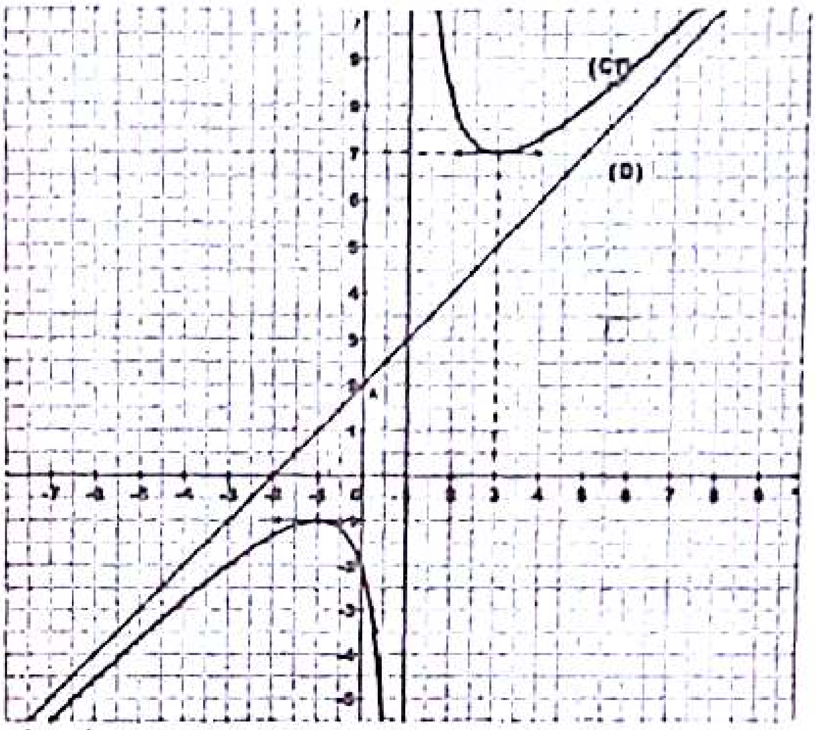
b. Calculer l'aire $A(\lambda)$ en cm² de la partie du plan limitée par (C), (Δ) et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\lambda$.

c. Calculer la limite Λ de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Scanned by CamScanner

PROBLEME 4. **Bac 2000 Session normale**

Sur la figure ci-après, (C_f) est la représentation graphique sur $]-6;0,5[\cup]1,5;8[$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ de fonction dérivée f'.



1. Sachant que (C_f) admet une tangente horizontale aux points $A(-1;-1)$ et $B(3;7)$, donner $f'(-1)$ et $f'(3)$.

2. Recopier et compléter le tableau suivant par lecture graphique.

x	-3		0	2
$f(x)$		-1		

3. Résoudre graphiquement l'équation: $x\in]-6;0,5[\cup]1,5;8[, f(x)=8$

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. On admet que $f(x)$ est de la forme: $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$

a. Vérifier que f coïncide sur les intervalles $]-6;0,5[$ et $]1,5;8[$ avec la fonction g définie par: $g(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$.

Scanned by CamScanner

b. Justifier que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à la représentation graphique de g.

c. Démontrer que le point $C(1;3)$ est centre de symétrie de la courbe (C)

PROBLEME 5. Bac 2000 session de remplacement

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$. par : $f(0)=0$ et pour $x>0$: $f(x)=-x+x\ln x$

(ln désigne la fonction logarithme népérien).

On désigne par (Γ) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 2cm)

1. Calculer $f(1)$ *et* $f(e)$.

2. Etude des branches infinies :

a. Calculer la limite de f en $+\infty$.

b. Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$

c. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Etude de la dérivabilité de f en 0.

a. Démontrer que f est continue à droite en 0.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

c. Préciser la tangente à (Γ) en O.

4. La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et on note f' sa dérivée.

a. Déterminer $f'(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Donner une équation de la tangente (D) à (Γ) au point d'abscisse e.

5. Construire (D) et (Γ).

6. Soit t un nombre réel tel que : 0 < t <1.

a. En utilisant une intégration par parties, démontrer que l'aire **A(t)** de la partie du plan limitée par la courbe (Γ), la droite (OI) et les droites d'équations x = t et x = e est égale à $\frac{1}{4}e^2+\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln t\right)t^2$

b. Calculer la limite de **A (t)** quand t tend vers 0.

Scanned by CamScanner

PROBLEMES DE PERFECTIONNEMENT

PROBLEME 1. Devoir Surveillé N°1.2005. Lycée Municipal Attécoubé.

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$

1. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

2. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α

b. Vérifier que : $\alpha \in]-1;0[$

3. Démontrer que $\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\alpha[& g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[& g(x) > 0 \end{cases}$

PARTIE B

Soit la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty;1[& f(x) = 2x^2 - x - \dfrac{2}{x-1} \\ \forall x \in]1;+\infty[& f(x) = x - \dfrac{2}{x-1} \end{cases}$$

(C1) et (C2) sont respectivement les courbes représentatives de f sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité : 2cm)

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Démontrer que pour tout réel x de $]-\infty;1[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]-\infty;1[$.

b. Etudier le sens de variation de f sur $]1;+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

3. a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation y = x est asymptote à (C2) en $+\infty$.

b. Etudier la position relative de (C2) par rapport à (Δ).

4. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat.

5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection

a. de (C1) avec l'axe des ordonnées.

b. de (C2) avec l'axe des abscisses.

6. Représenter f dans le repère (O, I, J).

7. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$

a. Justifier que h est une bijection de $]1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

b. Dresser le tableau de variation de h et celui de h^{-1} sa bijection réciproque.

c. Calculer $(h^{-1})'(0)$

d. Représenter h^{-1} dans le même repère que f.

Scanned by CamScanner

PROBLEME 2. Bac D Sénégal 2006

PARTIE A.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x(1+e^{2-x})$

On note (C) sa courbe représentation dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(Unite : 2 cm).

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=1+(1-x)e^{2-x}$

a. Etudier les variations de h
(on ne déterminera pas de limites aux bornes de D_h).

b. En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. a. Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

b. Préciser la nature de la branche infinie de f en $-\infty$

c. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)-x]$, puis interpréter le résultat obtenu.

d. Préciser la position de (C) par rapport à la droite (Δ) $y=x$

3. a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

c. f^{-1} est elle dérivable en 4 ?

d. Etudier la position de (C) par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

e. Construire (C) (On tracera la tangente à (C) au point d'abscisse 2.

f. Construire (C) courbe de f^{-1} dans le repère précédent.

PARTIE B.

Soit λ un réel strictement positif.

R_λ est la région du plan délimitée par les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\lambda$ et le courbe (C) et la droite (Δ) d'équation $y=x$.

Soit $A(\lambda)$ l'aire de R_λ en cm^2

1. Calculer $A(\lambda)$ en fonction de λ

2. Déterminer $A=\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Scanned by CamScanner

PROBLEME 3. Bac D Sénégal 2005

PARTIE A.

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$

1. a. Etudier les variations de f.

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+x\right]=0$

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

Tracer cette courbe (Unité : 2 cm).

c. Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty;+\infty[$ sur $]-\infty;0[$

2. soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$

a. Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$

b. Montrer que quel que soit le réel x, $g'(x)=e^{-x}f(x)$

c. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$

d. Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative dans le repère précédent.

3. a. Montrer que $\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

b. A tout réel λ, on associe le réel $I(\lambda)=\int_0^\lambda g(x)dx$.

Justifier l'existence de $I(\lambda)$.

Calculer $I(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

c. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}I(\lambda)=0$

PARTIE B.

1. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.

2. a. Calculer $g(0)$.

b. Montrer que g^{-1} est dérivable au point d'abscisse $\ln 2$.

c. Déterminer l'équation de la tangente à $\left(C_{g^{-1}}\right)$ au point d'abscisse $\ln 2$.

Scanned by CamScanner

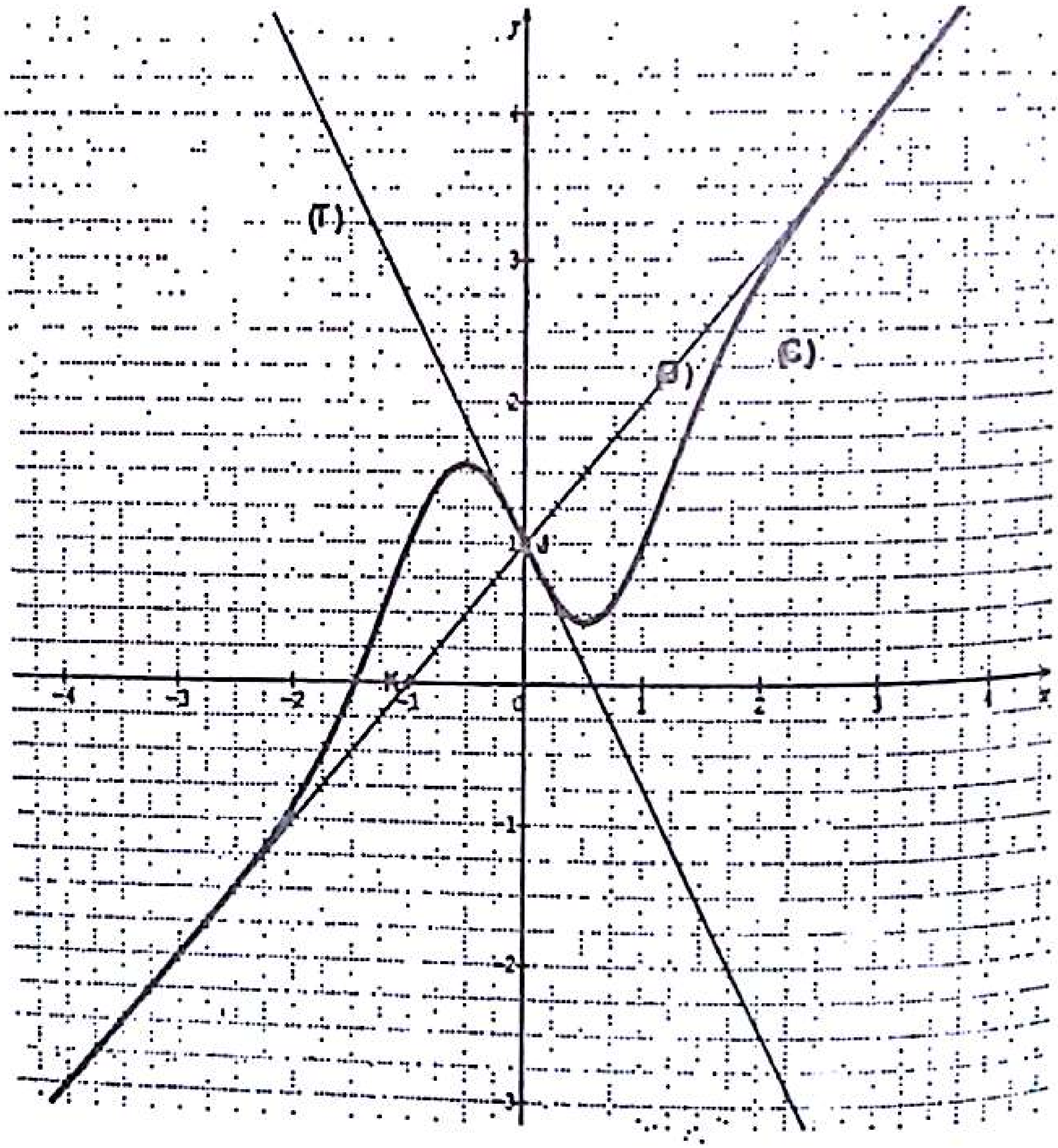
PROBLEME 4. **Bac Blanc 2008. Lycée municipal d'Attécoubé.**

On a représenté la courbe (C) dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que son asymptote (D) et sa tangente (T) au point d'abscisse 0.

L'unité graphique est 1 cm.

On sait que :

- Le point J (0 ; 1) est le centre de symétrie de la courbe
- L'asymptote (D) passe par les points K (-1 ; 0) et J,
- La tangente (T) a pour équation $y = (1 - e)x + 1$.



Scanned by CamScanner

PARTIE A.

1. Déterminer une équation de la droite (D).

2. On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(x) = mx + p + g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

a. Déterminer les réels m et p.

b. Démontrer que, pour tout réel x, on a : $f(x) + f(-x) = 2$

c. En déduire que la fonction g est impaire puis que la fonction f', dérivée de f, est paire.

3. On suppose maintenant que, pour tout réel x, $g(x) = (ax + b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.

a. En utilisant la relation $g(-x) = -g(x)$, déterminer le réel b.

b. Justifier que $g'(0) = -e$ et en déduire la valeur du réel a.

PARTIE B.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + x - xe^{-x^2+1}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2. a. Démontrer que pour tout réel x, la dérivée f' de f vérifie :

$$f'(x) = 1 + \left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2+1}$$

b. Calculer $f'(0)$ et retrouver l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

3. Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de f sur l'intervalle [0 ; 1]

a. Calculer la dérivée f'' de f', étudier son signe sur [0 ; 1] et dresser le tableau de variation de f' sur [0 ; 1].

b. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur [0 ; 1].

c. Justifier que $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$

d. Dresser le tableau de variation f de sur $\mathbb{R}$

Scanned by CamScanner

PROBLEME 5. **Bac Blanc 2006. Lycée Municipal de Yopougon.**

PARTIE A.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (ax + b)e^{-x} + 2$, où a et b sont des réels.

Le tableau de variation de g se présente comme suit :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$e^{-2}+2$	$\searrow$	2

1. a. Calculer $g'(x)$ en fonction de a et b.

b. En utilisant les données numériques du tableau de variation de g, déterminer a et b.

2. On admet que $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

a. Démontrer que l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une solution unique, qu'on notera α.

b. Vérifier que $-0.4 < \alpha < -0.3$.

c. Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha ; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

PARTIE B.

On considère à présent, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 1 - xe^{-x}$.

On désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 2cm).

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$

3. Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

4. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5. a. Démontrer que la droite (D) : $y = 2x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

b. Etudier la position relative de (C) et (D).

Scanned by CamScanner

6. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C') au point d'abscisse 0.

7. a. Démontrer que $f(\alpha)=2\alpha+1+\frac{2}{\alpha-1}$.

b. En déduire, en utilisant l'encadrement de α donné à la question 2b) de la PARTIE A, que $-1,40 < f(\alpha) < -1,02$

8. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

x	-1 ,5	-1,1	-1	-0,4	0	0,7	1	2
Arrondi d'ordre 1 de f(x)								

9. Construire avec précision (C'), (D), (T) dans le repère (O, I, J).

On prendra : $f(\alpha)\approx-1,2$.

PARTIE C.

1. Expliciter $h(x)=2x-1-f(x)$.

2. Montrer que $H(x)=-(x+1)e^{-x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h.

3. Soit $b\in\mathbb{R}^{*}$

a. Calculer en fonction de b le réel $A(b)=H(b)-H(0)$

b. Calculer $\lim_{b\to+\infty} A(b)$.

Scanned by CamScanner

PROBLEMES DE SYNTHESE TYPE BAC

PROBLEME 6. BAC D 2015. Burkina Faso/ 1er tour

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(1-x)e^{x}-1$.

1. Etudier les variations de g.
2. Calculer $g(0)$. En déduire que pour tout $x \neq 0$, on a $g(x)<0$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-1}+2 & si \quad x \neq 0 \\ f(0)=3 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

On admettra que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

1.a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Etablir que $\dfrac{x}{e^{x}-1}=\dfrac{x}{e^{x}}\times\dfrac{1}{1-e^{-x}}$ puis déterminer la limite de f en $+\infty$.

En déduire que (C) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ dont on donnera l'équation.

2. Montrer que la droite (D) d'équation $y=-x+2$ est une asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$.

3. Calculer, pour tout $x \neq 0$, $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-1)^{2}}$.

4.a) Donner le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

5. Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse nulle, écrire l'équation de (T).

6. Tracer (D), (T) et (C).

PARTIE C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=f(x)-x$.

1. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]2;2,5[$.

2. On pose $I=[2;2,5]$.

a) Démontrer que pour tout $x \in I$, on a : $g(x) \geq -20$ et $(e^{x}-1)^{2} \geq 40$.

b) En déduire que si $x \in I$, $-\dfrac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$.

3. Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=2$ et $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer par recurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \in I$.

Scanned by CamScanner

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ et que $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$.

c) En déduire que (U_n) converge vers α.

d) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

On donne : $\ln 2 \simeq 0,69$; $\ln 10 \simeq 2,3$; $e^2 \simeq 7,39$; $e^{2,5} \simeq 12,18$

$\frac{1}{e^2 - 1} \simeq 0,15$; $\frac{1}{e^{2,5} - 1} \simeq 0,09$; $(e^2 - 1)^2 \simeq 40,83$; $(e^{2,5} - 1)^2 \simeq 125$

PROBLEME 7. BAC D 2014. Burkina Faso/ 2nd tour

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + (x+1)e^{-2x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

PARTIE A . Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie par $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Etudier les sens de variations de g et dresser son tableau de variations.
   b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.

PARTIE B: Etude de et construction de (C)

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$. Préciser la position relative de (C) et (Δ).

3.a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer à l'aide de $g(x)$. En déduire le signe de $f'(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.

4. Calculer $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5.a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Construire (C), (Δ) et la courbe (Γ) de f^{-1}, réciproque de f.

PARTIE C: Calcul d'aire

Soit α un réel strictement supérieur à -1.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer en cm2, l'aire $A(\alpha)$ du domaine du plan limité par (C), (Δ) et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = \alpha$.
2. Calculer $\lim_{\alpha \to -\infty} A(\alpha)$

Scanned by CamScanner

PROBLEME 8. BAC D 2012. Burkina Faso/ 1er tour

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x+\ln|1-x|}{1-x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

PARTIE A

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les asymptotes à (C).
2. Soit f' la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$ puis étudier son signe.
   En déduire le sens de variation de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que le point $I(1;-1)$ est un centre de symétrie pour (C).
5. Tracer (C) et les asymptotes.

PARTIE B

Soit les fonctions u et v définies sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $u(x)=\dfrac{-1}{1-x}$ et $v(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$.

1. Déterminer une primitive de chacune des fonctions u et v sur $]1;+\infty[$.
2. Vérifier que pour tout réel $x>1$, $-1-f(x)=u(x)+v(x)$.
3. Calculer, en cm2, la valeur exacte de l'aire S du domaine du plan compris entre (C) et les droites d'équations respectives $y=-1$, $x=2$ et $x=3$.

PARTIE C

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=4-e^{-U_n} \end{cases}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. Montrer, par recurrence, que pour tout entier naturel non nul n, $3<U_n<4$.

2.a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $U_{n+1}-U_n$ et U_n-U_{n-1} sont de même signe.

b) Etudier le sens de variation de la suite (U_n).

3. Etudier la convergence de la suite (U_n).

NB : On donne $e^{-3}\simeq 0{,}05$; $e^{-4}\simeq 0{,}02$

Scanned by CamScanner

PROBLEME 9. BAC D 2011. Burkina Faso/ 2nd tour

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,$
l'unité est 2 cm. On placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'a
ordonnés sur le bord gauche de la feuille.

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(2-\frac{2}{x})(\ln x-1)$.

(C) désigne sa courbe représentative relative au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$.
3. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2\ln x+2x-4$.

a) Etudier le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$ puis dresser son tat
variation.

b) Montrer que l'équation admet $g(x)=0$ une unique solution α dans [1

c) En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.

4.a) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de va
$]0;+\infty[$.

b) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

c) Calculer $f(1)$ et $f(e)$.

5.a) Etudier le signe f de sur $]0;\mp\infty[$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation du résultat

c) Construire (C). On prendra $\alpha=1,75$ et $f(\alpha)=-0,6$.

6. Soit h la fonction définie par $h(x)=-f(x)$,
représentative. Sans étudier h, construire (C') da
Justifier la construction de (C').

PARTIE B

Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x$

(Γ) désigne sa courbe représentative dans un re

1.a) Que représente F pour f.

b) Sans calculer F(x), donner le sens de variatior

c) Que peut-on dire des tangentes à (Γ) aux poin

2.a) Le nombre réel x est strictement positif, calcule
intégration par parties)

Scanned by CamScanner

b) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f(x) = 2\ln x - 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} - 2$.

c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

3. Calculer l'aire A en cm2 du domaine du plan limité par (C), (C') et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

On donne : $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \sim 1,1$

PROBLEME 10. BAC D 2004. Burkina Faso/ Remplacement

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm).

PARTIE A

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2e^{x} - (x+2)$.

1. Calculer les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer l'expression $h'(x)$ de la fonction dérivée de h, étudier son signe puis dresser le tableau de variation de h.

3.a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty; -\ln 2[$. Vérifier que $\alpha \in]-2; -1[$.

b) Calculer $h(0)$ puis déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

PARTIE B

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{1-2e^{x}}{1+2xe^{x}}$.

(C) est la courbe représentative de g.

1. Soit t la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $t = 1+2xe^{x}$.

a) Calculer l'expression $t'(x)$ de la fonction dérivée de t, déterminer le sens de variation de t.

b) Calculer $t(-1)$ puis, déterminer le signe de $t(x)$ suivant les valeurs de x.

c) En déduire que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

3.a) Calculer $g'(x)$ l'expression de la fonction dérivée de g.

Exprimer $g'(x)$ en fonction de $h(x)$.

b) En déduire le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x, dresser le tableau de variations de g.

4.a) Etablir une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $-\ln\alpha$.

b) Construire (C), ses asymptotes et (T).

(Pour α, on prendra comme valeur -1,6 et pour $g(\alpha)$ on prendra la valeur 1,7).

PARTIE C

Soit F l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z + \frac{2-2i}{1+i}$

1.a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de F.

b) En posant z=x+iy et z'=x'+iy' (où x, y, x', y' sont des réels) exprimer x' et y' en fonction de x et de y.

2.a) Quelles sont les images par F des droites d'équations respectives $y=0$ et $y=1$.

b) Soit (T') l'image de (T) par F. Déterminer une équation cartésienne de (T').

3. Soit (C') l'image de (C) par F.

On appelle f la fonction dont la courbe représentative est (C').

a) Déterminer l'expression de f.

b) Sans étudier f, contruire (C') dans le même repère que (C).

(On donne : $\ln 2 \simeq 0{,}69$; $e \simeq 2{,}72$; $e^{-1} \simeq 0{,}37$)

Scanned by CamScanner

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1. Etudions la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x)=x^2$

$D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

Pour tout $x\in D_f$, $-x\in D_f$ | Donc f est paire.

$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

2. $f(x)=x^3$

$D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

Pour tout $x\in D_f$, $-x\in D_f$ | Donc f est impaire.

$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$

3. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

$x\in D_f \Leftrightarrow x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

$-1\in D_f$, $1\notin D_f$ Donc f n'est ni paire, ni impaire.

EXERCICE 2.

Soit $f(x)=(x-2)^2+1$

Montrons que (D) : $x=2$ est axe de symétrie de (C_f).

Première méthode :

Soit $g(x)=f(x+a)$

$g(x)=f(x+2)=(x+2-2)^2+1=x^2+1$

* Montrons que $g(x)=x^2+1$ est paire.

$D_g=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

Pour tout $x\in D_g$, $-x\in D_g$

$g(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=g(x)$

$g(x)=f(x+2)$ *est paire*

donc $(D):x=2$ *est un axe de symétrie de* (C_f)

Deuxième méthode :

$D_f=\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$

$2-x\in D_f,\ 2+x\in D_f$

$f(2-x)=(2-x-2)^2+1=(-x)^2+1=x^2+1$

$f(2+x)=(2+x-2)^2+1=x^2+1$

$f(2-x)=f(2+x)$

donc $(D):x=2$ *est un axe de symétrie de* (C_f)

EXERCICE 3.

Première méthode :

Soit $g(x)=f(x+a)-b$

$g(x)=f(x+1)-2=f(x)=\dfrac{(x+1)^2+3}{(x+1)-1}-2=\dfrac{x^2+2x+1+3}{x}-2$

$g(x)=\dfrac{x^2+2x+4-2x}{x}=\dfrac{x^2+4}{x}$

Montrons que $g(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$ *est impaire.*

$x\in D_g \Leftrightarrow x\neq 0$

$D_g=\mathbb{R}\setminus\{0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

Pour tout $x\in D_g,\ -x\in D_g$

$g(-x)=\dfrac{(-x)^2+4}{-x}=\dfrac{x^2+4}{-x}=-\dfrac{x^2+4}{x}=-g(x)$

$g(x)=f(x+1)-2$ *est impaire*

donc $A(1;2)$ *est un centre de symétrie de* (C_f)

Scanned by CamScanner

Deuxième méthode :

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

$1-x\in D_f \Leftrightarrow 1-x\neq 1 \Leftrightarrow -x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \Leftrightarrow 1+x\neq 1 \Leftrightarrow 1+x\in D_f$

$\forall x\in\mathbb{R},\ 1-x\in D_f \Leftrightarrow 1+x\in D_f$

$$f(1-x)=\frac{(1-x)^2+3}{(1-x)-1}=\frac{1-2x+x^2+3}{-x}=\frac{x^2-2x+4}{-x}=\frac{-x^2+2x-4}{x}$$

$$f(1+x)=\frac{(1+x)^2+3}{(1+x)-1}=\frac{1+2x+x^2+3}{x}=\frac{x^2+2x+4}{x}$$

$$f(1-x)+f(1+x)=\frac{-x^2+2x-4}{x}+\frac{x^2+2x+4}{x}=\frac{4x}{x}=4$$

$$\frac{f(1-x)+f(1+x)}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$\dfrac{f(1-x)+f(1+x)}{2}=2$ *donc* $A(1;2)$ *est un centre de symétrie de* (C_f)

EXERCICE 4.

1. Montrons que (D) est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

$$f(x)-(2x-1)=2x-1+\frac{2}{(x-1)^2}-(2x-1)=\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left|f(x)-(2x-1)\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left|f(x)-(2x-1)\right|=0$ *donc* $(D): y=2x-1$ *est asymptote oblique à* (C_f) *en* $+\infty$

2. Etudions les positions relatives de (C_f) et (D).

$f(x)-(2x-1)=\dfrac{2}{(x-1)^2}>0$ *pour tout* $x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

donc (C_f) *est au dessus de* (D) *sur* $]-\infty;1[$ *et sur* $]1;+\infty[$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 5.

1. Montrons que (D) est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

$f(x)-(3x+2)=3x+2+\frac{\ln x}{x}-(3x+2)=\frac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-(3x+2)|=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-(3x+2)|=0$ *donc* $(D): y=3x+2$ *est asympote oblique à* (C_f) *en* $+\infty$

2. Etudions les positions relatives de (C_f) et (D).

$f(x)-(3x+2)=\frac{\ln x}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$\frac{\ln x}{x}$		$-$	0	$+$	

(C_f) *est en dessous de (D) sur* $]0;1[$

(C_f) *est au dessus de (D) sur* $]1;+\infty[$

(C_f) *et (D) se coupent au point d'abscisse* 1

EXERCICE 6.

1. Démontrons que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α comprise entre 1 et 2.

$f'(x)=3x^2>0 \Rightarrow$ *f est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et en particulier sur* $]1;2[$

$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^3-2=1-2=-1 \\ f(2)=2^3-2=8-2=6 \end{array}\right|$ $f(1)\times f(2)<0$ *donc l'équation* $f(x)=0$ *admet une solution unique* α *comprise entre* 1 *et* 2.

Scanned by CamScanner

2. Déterminons un encadrement de α à 10^{-2} près, en alternant la méthode de dichotomie et la méthode de balayage.

NB : α se trouve entre 2 nombres consécutifs dont les images n'ont pas le même signe.

On a montré que : $\alpha \in]1 ; 2[$

Méthode de dichotomie

x	1	1,5	2
Signe de f(x)	-	+	+

$\alpha \in]1 ; 1,5[$

Méthode de balayage

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
Signe de f(x)	-	-	-	+	+	+

$\alpha \in]1,2; 1,3[$: Encadrement à 10^{-1} près.

Méthode de dichotomie

x	1,2	1,25	1,3
Signe de f(x)	-	-	+

$\alpha \in]1,25; 1,30[$

Méthode de balayage

x	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	1,3
Signe de f(x)	-	+	+	+	+	+

$\alpha \in]1,25;1,26[$

Finalement, $1,25 < \alpha < 1,26$ est l'encadrement de α à 10^{-2} près.

Remarque :
On peut continuer ainsi pour obtenir un encadrement à 10^{-3} près, puis à 10^{-4} près et ainsi de suite...

Scanned by CamScanner

CORRECTION DES PROBLEMES

PROBLEME 1. Bac 2005 session normale

PARTIE A

1.a. Vérifions que : $\forall x \in]0;+\infty[, g'(x) = \dfrac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x}$.

$$g'(x) = \left(\frac{2}{3}x^3 + 1 - 2\ln x\right)' = 2x^2 - \frac{2}{x} = \frac{2x^3-2}{x} = \frac{2(x^3-1)}{x} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x}$$

b.

$\forall x \in]0;+\infty[, x > 0$ et $x^2+x+1>0$

le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $(x-1)$ or $x-1>0 \Rightarrow x>1$

donc $g'(x)>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

$g'(x)<0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

c. g est strictement décroissante sur $]0\,;1[$

g est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$

2.a. Tableau de variation de g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

b. Déterminons le signe de $g(x)$.

$\frac{5}{3}$ est le minimum absolu de g sur $]0;+\infty[$.

Donc: $\forall x \in]0;+\infty[,\ g(x) \geq \frac{5}{3} > 0$ d'où $g(x)>0$

PARTIE B

1.a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \times \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{3}x - 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{3}x - 1 + \dfrac{1}{x^2} \times \ln x = -\infty$

Scanned by CamScanner

b. La droite d'équation x = 0 est asymptote verticale car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

2. a. $(f(x)-y) = \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)-y) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} = 0$

donc $(D): y = \frac{2}{3}x - 1$ est asymptote oblique à (C)

b. $(f(x)-y) = \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}$ le signe de $(f(x)-y)$ dépend du signe de $\ln x$

or $\ln x < 0$ sur $]0;1[$ et $\ln x > 0$ sur $]1;+\infty[$

(C) est en dessous de (D) sur $]0;1[$

(C) est au dessus de (D) sur $]1;+\infty[$

3.a. $f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{\frac{2}{3}x^4 + x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{\frac{2}{3}x^3 + 1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$

b) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$ car on a montré que

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

c. Tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4.a. Justification de la solution unique.

f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0;+\infty[$.

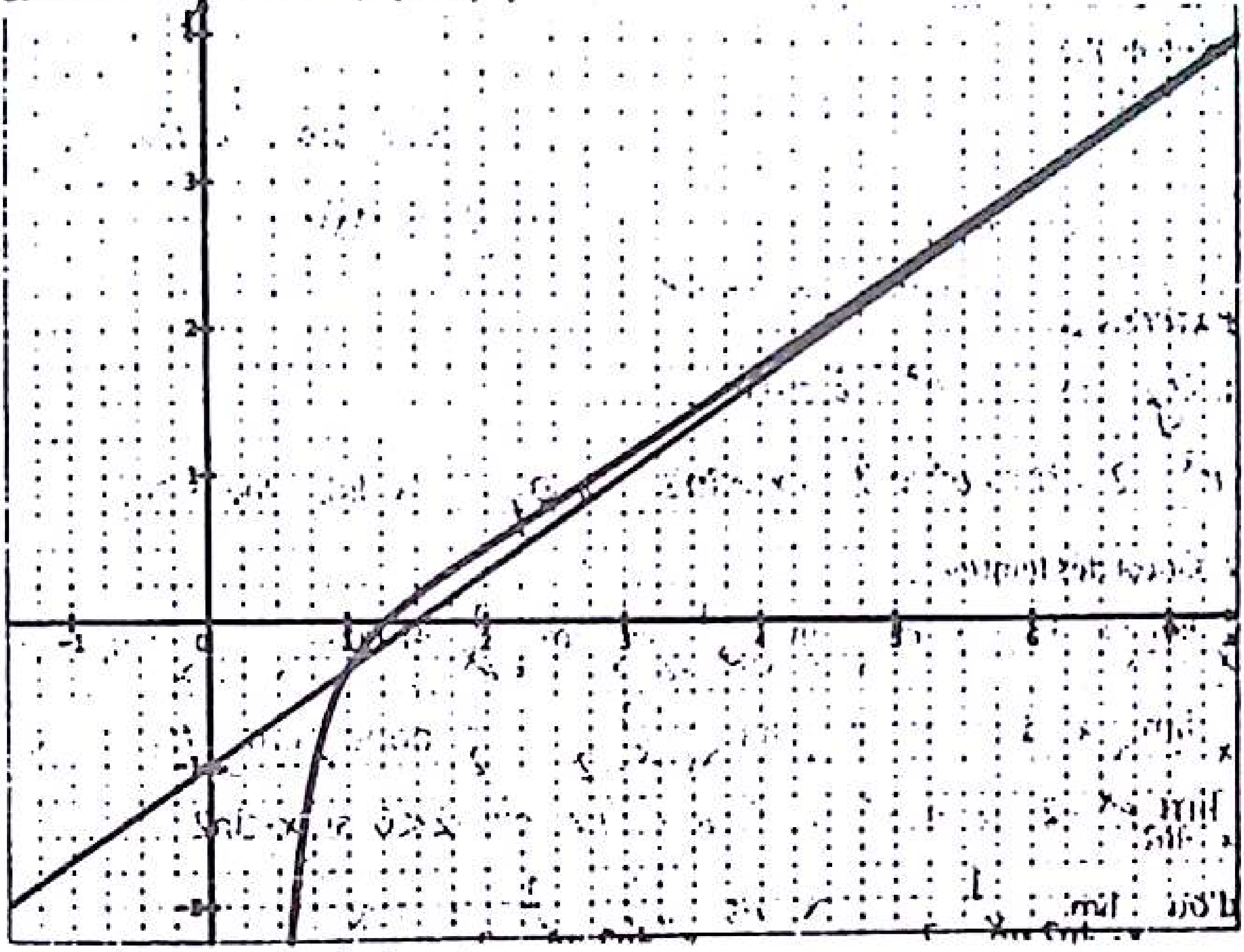
b. $]1,15;1,3[\subset]0;+\infty[$

$f(1,15) \simeq -0,13$ et $f(1,3) \simeq 0,02$

$f(1,15) \times f(1,3) < 0$ donc $1,15 < \alpha < 1,3$.

Scanned by CamScanner

c. Construction de (D) et (C).



5.a. $\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{-\ln\lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + 1$

$A(\lambda) = 4(-\frac{\ln\lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} + 1)cm^2$

b. $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = 4\,cm^2$ ou 4.

PROBLEME 2. Bac 2004 session normale

PARTIE A

1. Résolvons l'équation $x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0.$

$P(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 4 = 0.$

On pose $X = e^x$ avec $e^x > 0$. L'équation devient : $X^2 - 5X + 4 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$X_1 = \frac{5-3}{2} = 1;\ X_2 = \frac{5+3}{2} = 4$

$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$

Les solutions de l'équation sont : $\{0 ; \ln 4\}$.

Scanned by CamScanner

2. $P(x) = (e^x - 1)(e^x - 4)$

Signe de P(x)

x	$-\infty$	0		$\ln 4$	$+\infty$
P(x)	+	0	-	0	+

$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 4; +\infty[, P(x) > 0.$

$\forall x \in]0; \ln 4[, P(x) < 0.$

PARTIE B

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 2 \neq 0\};$

$e^x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \ln 2 \quad \Rightarrow D_f =]-\infty; \ln 2[\cup]\ln 2; +\infty[$

2. Calcul des limites

$\lim_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x - 1 = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x - 2} = -\frac{1}{2}$ donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \ln 2} e^x - 2 = 0$ et $e^x - 2 > 0$ si $x > \ln 2$; $e^x - 2 < 0$ si $x < \ln 2$

d'où $\lim_{\substack{x \to \ln 2 \\ <}} \frac{1}{e^x - 2} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \to \ln 2 \\ >}} \frac{1}{e^x - 2} = +\infty$

donc $\lim_{\substack{x \to \ln 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \to \ln 2 \\ >}} f(x) = +\infty$

3. a. Vérifions que : $f'(x) = \frac{P(x)}{(e^x - 2)^2}$

$\forall x \in Df, f'(x) = (x - 1)' + (\frac{1}{e^x - 2})' = 1 - \frac{e^x}{(e^x - 2)^2} = \frac{(e^x - 2)^2 - e^x}{(e^x - 2)^2}$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 4e^x + 4 - e^x}{(e^x - 2)^2} = \frac{P(x)}{(e^x - 2)^2}$$

b. Le signe de $f'(x)$.

$\forall x \in D_f$, $(e^x - 2)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $P(x)$. D'où :

Si $x \in]-\infty; 0[\cup]\ln 4; +\infty[$, $\quad f'(x) > 0$

Si $x \in]0; \ln 2[\cup]\ln 2; \ln 4[$, $\quad f'(x) < 0$

Si $x \in \{0; \ln 4\}$, $\quad f'(x) = 0$

Scanned by CamScanner

c. Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$\ln 4$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	$\ln 4-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Démontrons que la droite (D): $y=x-1$ est asymptote à (C) en $+\infty$

$$[f(x)-y]=\frac{1}{e^x-2} \quad \text{or} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-2}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}|f(x)-y|=0$$

D'où la droite (D) d'équation $y=x-1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

5. Sur $]\ln 2;+\infty[$, $(e^x-2)>0$ donc $[f(x)-y]>0$ alors (C) est au dessus de l'asymptote (D).

6. $\forall x\in D_f$, $f(x)=x-1+\frac{1}{e^x-2}=x-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-2}+\frac{1}{2}=x-\frac{3}{2}+\frac{1\times2+e^x-2}{2(e^x-2)}$

D'où $f(x)=x-\frac{3}{2}+\frac{e^x}{2(e^x-2)}$

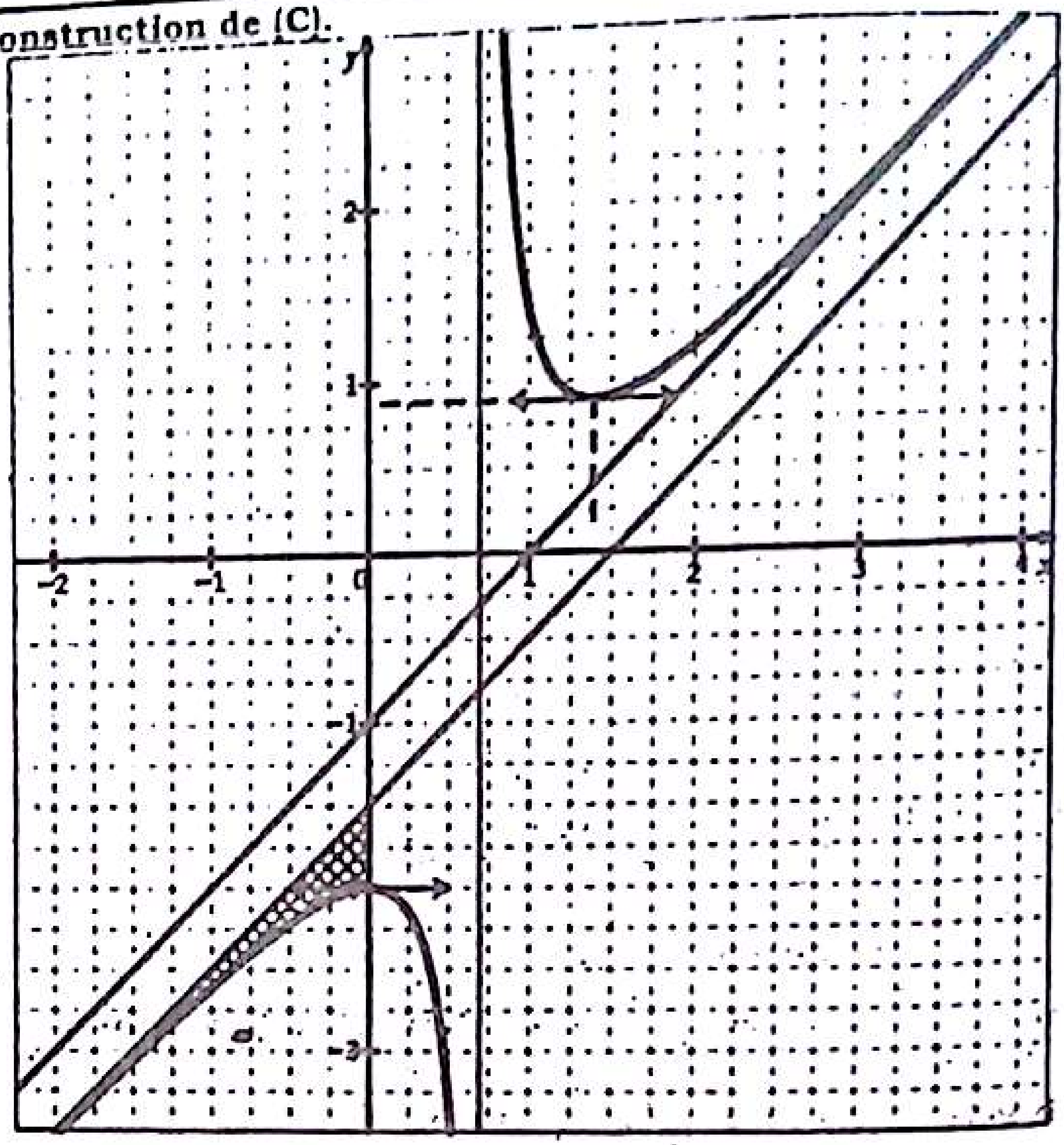
7. $[f(x)-y]=\frac{e^x}{2(e^x-2)}$ or $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{2(e^x-2)}=0$ car $\lim_{x\to-\infty}e^x=0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}|f(x)-y|=0$

D'où la droite (Δ) d'équation $y=x-\frac{3}{2}$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

8. Sur $]-\infty;\ln 2[$, $(e^x-2)<0$ et $e^x>0$ donc $[f(x)-y]<0$ alors (C) est en dessous de l'asymptote (Δ).

Scanned by CamScanner

9. Construction de (C).



PARTIE C

Soit λ un nombre réel strictement négatif.

1. $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{0}-(f(x)-y)dx \;.4cm^2 \;=\; \int_{\lambda}^{0}-\frac{e^x}{2(e^x-2)}dx \;.4cm^2$

$$=-2\int_{\lambda}^{0}\frac{e^x}{(e^x-2)}dx \;.4cm^2=-2\left[\ln\left|e^x-2\right|\right]_{\lambda}^{0}.cm^2$$

$$A(\lambda)= \;-2\left[\ln 1-\ln\left|e^{\lambda}-2\right|\right].cm^2=2\ln(2-e^{\lambda}).cm^2$$

2. a. $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=2\ln(2).cm^2=\ln 4\,cm^2$ car $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}e^{\lambda}=0$

b. Voir figure.

Scanned by CamScanner

PROBLEME 3. Bac 2003 session normale

PARTIE A

$h(x)=3+(x-1)e^{-x}=3+\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}$

1. Calculons les limites de h en $+\infty$ et en $-\infty$.

• $h(x)=3+\frac{x}{e^{x}}+\frac{1}{e^{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=3$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$

• $h(x)=3+(x-1)e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=+\infty$

2. Démontrons que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $h'(x)=(2-x)e^{-x}$.

$h'(x)=\left[3+(x-1)e^{-x}\right]'=\left[(x-1)e^{-x}\right]'$

$h'(x)=\left[(x-1)'e^{-x}\right]+\left[(x-1)(e^{-x})'\right]=e^{-x}+\left[(x-1)(-e^{-x})\right]$

$h'(x)=e^{-x}-xe^{-x}+e^{-x}=(2-x)e^{-x}$

3. Etudions les variations de h et dresser son tableau de variation.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}>0$. Le signe de $h'(x)$ est donc le même que le signe de (2-x).

$h'(x)>0\Leftrightarrow 2-x>0\Leftrightarrow x<2$

$h'(x)<0\Leftrightarrow 2-x<0\Leftrightarrow x>2$

$h'(x)=0\Leftrightarrow 2-x=0\Leftrightarrow x=2$

• Si $x\in\left]-\infty;2\right[$, $h'(x)>0$ alors h est strictement croissante.

• Si $x\in\left]2;+\infty\right[$, $h'(x)<0$ alors h est strictement décroissante.

• Si $x\in\{2\}$, $h'(x)=0$ alors h est constante.

Tableau de variation de h:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3+e^{2}$	$\searrow$	3

Scanned by CamScanner

4. a. Démontrons que sur l'intervalle $]-\infty;2[$ l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α.

Sur $]-\infty;2[$ h est continue et strictement croissante.

Donc h réalise une bijection de $]-\infty;2[$ dans $h(]-\infty;2[)=]-\infty;3+e^{-2}[$

$0\in]-\infty;3+e^{-2}[$ d'où l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α sur $]-\infty;2[$.

b. Démontrons que $-1<\alpha<0$.

$h(-1)=3-2e<0$ et $h(0)=3-1=2>0$ donc $-1<\alpha<0$

5. Si $x<\alpha$ alors $h(x)<h(\alpha)$ $\Rightarrow$ $h(x)<0$

Si $x>\alpha$ alors $h(x)>h(\alpha)$ $\Rightarrow$ $h(x)>0$

PARTIE B

$f(x)=3x+1-xe^{-x}$.

1. Limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

On peut écrire : $f(x)=3x+1-\frac{x}{e^x}$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

On peut écrire : $f(x)=x(3+\frac{1}{x}-e^{-x})$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty}(3+\frac{1}{x})=3$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^{-x})=\lim\limits_{X\to+\infty}(-e^{X})=-\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-e^{-x})=-\infty$

2. Démontrons que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=h(x)$.

$f'(x)=[3x+1-xe^{-x}]'=3-(xe^{-x})'=3-(e^{-x}-xe^{-x})$

$f'(x)=3-e^{-x}+xe^{-x}=3+(x-1)e^{-x}=h(x)$

3. Sens de variation de f et tableau de variation.

$f'(x)=h(x)$ donc f' et h ont le même signe.

On déduit, de la question 5. de la partie A :

Scanned by CamScanner

- Si $x<\alpha$ alors $h(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha[$

- Si $x>\alpha$ alors $h(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0$

Donc f est strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$

- Si $x=\alpha$ alors $h(x)=0 \Rightarrow f'(x)=0$

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Démontrons $(\Delta): y=3x+1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

$$[f(x)-y]=-xe^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}-xe^{-x}=\lim_{X\to-\infty}Xe^{X}=0$$

Donc $(\Delta): y=3x+1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

5. Position relative de (Δ) et (C) : $[f(x)-y]=-xe^{-x}$

$\forall x\in\mathbb{R}, e^{-x}>0$, donc le signe de $[f(x)-y]$ est le même que celui de $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-(3x+1)$	$+$	0	$-$
Positionrelative	(C)est au dessus de (Δ)	(C) et (Δ) se coupent	(C) est en dessous de (Δ)

Scanned by CamScanner

6. Démontrons que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

$$\frac{f(x)}{x}=3+\frac{1}{x}-e^{-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}3+\frac{1}{x}-e^{-x}=-\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\text{et} \lim_{x\to-\infty}(-e^{-x})=\lim_{X\to+\infty}(-e^{X})=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.

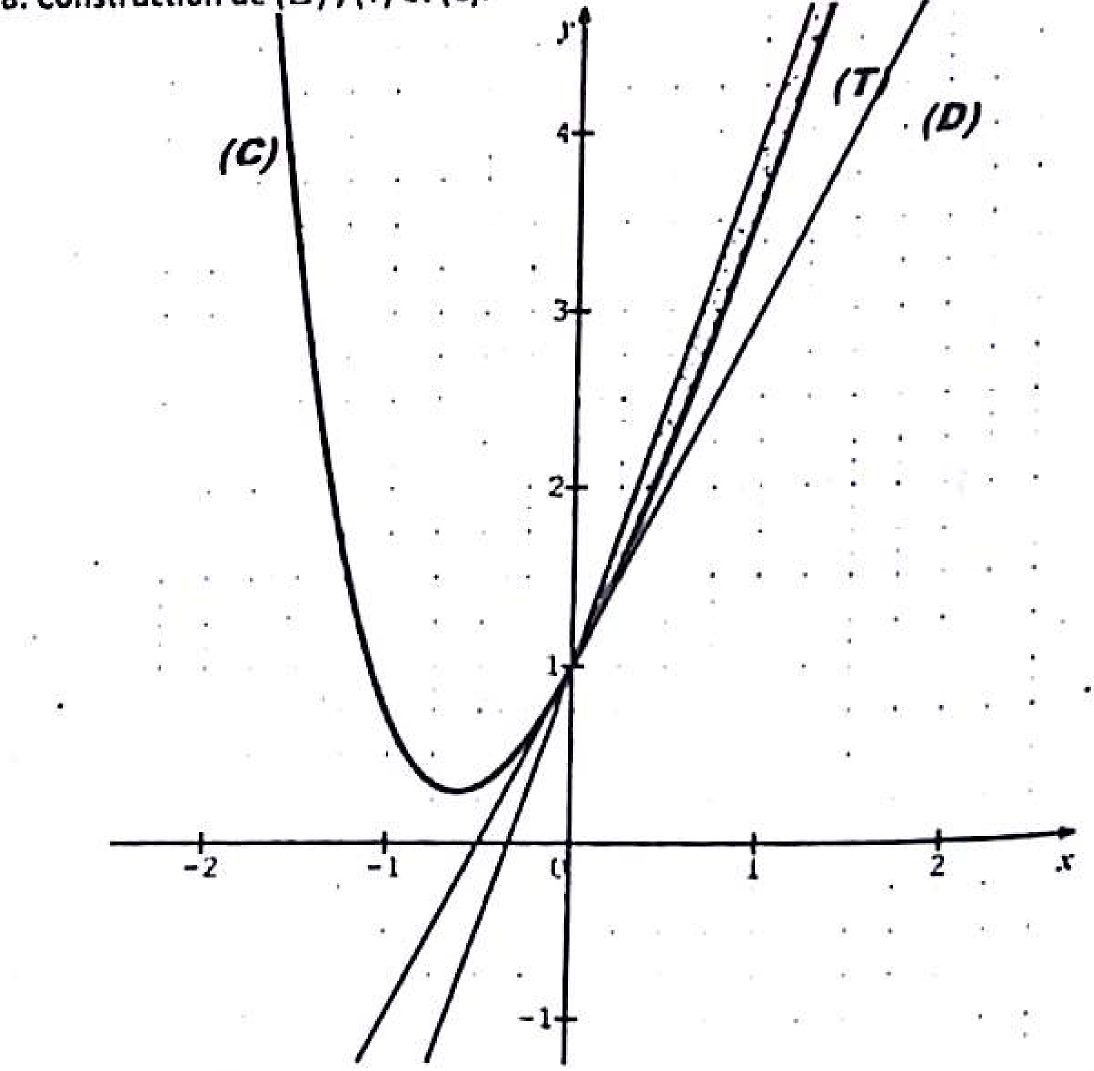
7. Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

$f'(0)=2$ et $f(0)=1$

(T): $y=f'(0)\cdot(x-0)+f(0)=2(x-0)+1=2x+1$.

(T): $y=2x+1$

8. Construction de (Δ) ; (T) et (C).



Scanned by CamScanner

9. Soit λ un nombre réel strictement positif.

a. Calcul de l'intégrale : $\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx$.

Utilisons une intégration par parties :

On pose $u=x \Rightarrow u'=1$

$v'=e^{-x} \Rightarrow v=-e^{-x}$

$$\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^{\lambda}+\int_0^{\lambda} e^{-x}dx$$

$$=-\lambda e^{-\lambda}+\left[-e^{-x}\right]_0^{\lambda}$$

$$=-\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1$$

$$\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx=-(\lambda+1)e^{-\lambda}+1$$

b. Aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm².

Sur $[0,\lambda]$, $f(x)-y<0$

Donc $\mathcal{A}(\lambda)=\int_0^{\lambda}-(f(x)-(3x+1)dx\times U.A$

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_0^{\lambda} xe^{-x}\times 4\,cm^2$$

$$\mathcal{A}(\lambda)=(1-(\lambda+1)e^{-\lambda})\times 4\,cm^2$$

c. Limite $\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

$$\mathcal{A}=\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}(1-(\lambda+1)e^{-\lambda})\times 4cm^2 \Rightarrow \mathcal{A}=1\times 4cm^2=4\,cm^2$$

Car $\lim_{\lambda\to+\infty}(\lambda+1)e^{-\lambda}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda+1}{e^{\lambda}}=0$

PROBLEME 4. Bac 2000. Session normale

1. $f'(-1)=0$ et $f'(3)=0$ car (C_f) admet une tangente horizontale aux points d'abscisses -1 et 3.

2. Complétons le tableau par lecture graphique.

x	-3	-1	0	2
$f(x)$	-2	-1	-2	8

3. Résolvons graphiquement l'équation: $x\in]-6;0,5[\cup]1,5;8[$, $f(x)=8$

Scanned by CamScanner

On trace la parallèle à (OI) passant par

Cette parallèle coupe (C_f) en 2 points.

Les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation

On lit: $x=2$ et $x=5$ donc $S=\{2;5\}$

4. Dressons le tableau de variation de f.

x	-6		-1		1					8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-4{,}5$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖	$+\infty$	↘		↗	10

5. On admet que $f(x)$ est de la forme: $f(x)=x+2+\frac{4}{x-1}$

a. Vérifions que f coïncide avec g définie par: $g(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}$

$$f(x)=x+2+\frac{4}{x-1}=\frac{(x+2)(x-1)+4}{x-1}=\frac{x^2-x+2x-2+4}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{x^2+x+2}{x-1}=g(x)$$

Donc f coïncide avec g sur $[-6;0,5]\cup[1,5;8]$

b. Justifions que (D): $y=x+2$ est une asymptote à (C_g).

$$g(x)-(x+2)=x+2+\frac{4}{x-1}-(x+2)=\frac{4}{x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}|g(x)-(x+2)|=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}|g(x)-(x+2)|=0$$

donc (D): $y=x+2$ est asympote oblique à (C_g) en $+\infty$

c. Démontrons que $C(1;3)$ est centre de symétrie de la courbe (C)

Soit $h(x)=f(x+a)-b$

$$h(x)=f(x+1)-3=f(x)=\frac{(x+1)^2+(x+1)+2}{(x+1)-1}-3$$

$$h(x)=\frac{x^2+2x+1+x+1+2}{x}-3=\frac{x^2+3x+4-3x}{x}=\frac{x^2+4}{x}$$

Scanned by CamScanner

Montrons que $h(x)=\frac{x^2+4}{x}$ *est impaire.*

$x\in D_h \Leftrightarrow x\neq 0 \Rightarrow D_h=\mathbb{R}\setminus\{0\}=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

Pour tout $x\in D_h$, $-x\in D_h$

$h(-x)=\frac{(-x)^2+4}{-x}=\frac{x^2+4}{-x}=-\frac{x^2+4}{x}=-h(x)$

$h(x)=f(x+1)-3$ *est impaire donc* $C(1;3)$ *est un centre de symétrie de* (C_f)

PROBLEME 5: Bac 2000 remplacement

1. $f(1)=-1+1.\ln 1=-1+0=-1$; $f(e)=-e+e.\ln e=-e+e\times 1=-e+e=0$

2.a. Calcul de la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} -x+x\ln x=\lim_{x\to+\infty} x(-1+\ln x)=+\infty \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-1+\ln x)=+\infty\end{cases}$$

b. Calcul de la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+x\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(-1+\ln x)=+\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

c. Interprétation graphique du résultat.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty \Rightarrow (\Gamma)$ admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ)

3.a. Montrons que f est continue à droite en 0.

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} -x+x\ln x=0 \quad \text{car} \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} -x=0\\ \lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0\end{cases}\\ f(0)=0\end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=f(0) \Rightarrow f$ est continue à droite en 0.

b. Etude de la dérivabilité de f à droite en 0.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{-x+x\ln x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(-1+\ln x)=-\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$ cette limite n'est pas finie (elle est infinie)

donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

Scanned by CamScanner

c. Précision de la tangente à (Γ) en O.

$$\lim_{x \to 0^{>}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty \Rightarrow (\Gamma) \text{ admet } \ldots \text{ abscisse } \ldots \text{ tangente verticale.}$$

4. a. Calcul de $f'(x)$ pour tout x élément d

$$f'(x) = (-x + x\ln x)' = -1 + \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = \ln x + 1 - 1 \Rightarrow f'(x) = \ln x$$

b. Tableau de variation de f.

Etude des variations :

$f'(x) = \ln x$

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x \in]0;1[\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]0;1[$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x \in]1;+\infty[\Rightarrow f$ est strictement croissante sur $]1;+\infty[$
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x \in \{1\}$

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	0	↘	-1	↗	$+\infty$

c. Equation de la tangente (D) à (Γ) au point d'abscisse e.

$$(D):\ y = f'(e)(x-e) + f(e)$$

$$y = (\ln e)(x-e) + 0 \qquad avec \quad \ln e = 1$$

$$y = x - e$$

5. Construction de (D) et (Γ). Voir figure

6. Soit t un nombre réel tel que : $0 < t < 1$.

a. Montrons que : $A(t) = \frac{1}{4}e^2 + \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln t\right)t^2$

$f(x) = -x + x\ln x < 0 \quad \forall x \in]0;e[$

$$A(t) = -\int_t^e f(x)dx\,.UA = -\int_t^e (-x + x\ln x)dx\,.UA$$

$$A(t) = -\left[\int_t^e (-x)dx + \int_t^e (x\ln x)dx\right].UA = \left[\int_t^e x\,dx - \int_t^e (x\ln x)dx\right].UA$$

$$A(t) = \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_t^e - \int_t^e (x\ln x)dx\right).UA$$

Scanned by CamScanner

Intégrons par partie $B=\int_t^e (x\ln x)dx$

On pose : $u(x)=\ln x \Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=x \Rightarrow v(x)=\frac{x^2}{2}$

$$B=\int_t^e (x\ln x)dx=\left(\left[\frac{x^2}{2}\times\ln x\right]_t^e-\int_t^e\left(\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}\right)dx\right)=\left(\left[\frac{x^2}{2}\times\ln x\right]_t^e-\int_t^e\left(\frac{x}{2}\right)dx\right)$$

$$=\left[\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}\right]_t^e=\left[\frac{2x^2\ln x-x^2}{4}\right]_t^e$$

$$B=\frac{2e^2\ln e-e^2}{4}-\frac{2t^2\ln t-t^2}{4}=\frac{2e^2-e^2}{4}-\frac{2t^2\ln t-t^2}{4}$$

$$B=\frac{e^2}{4}-\frac{2t^2\ln t-t^2}{4}=\frac{e^2-2t^2\ln t+t^2}{4}$$

$$A(t)=\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_t^e-B\right).UA=\left(\frac{e^2}{2}-\frac{t^2}{2}-B\right).UA=\left(\frac{e^2-t^2}{2}-B\right).UA=\left(\frac{2e^2-2t^2}{4}-B\right).UA$$

$$A(t)=\left(\frac{2e^2-2t^2}{4}-\frac{e^2-2t^2\ln t+t^2}{4}\right).UA=\left(\frac{2e^2-2t^2-e^2+2t^2\ln t-t^2}{4}\right).UA$$

$$A(t)=\left(\frac{e^2-3t^2+2t^2\ln t}{4}\right).UA=\frac{1}{4}e^2+\left(\frac{-3}{4}+\frac{1}{2}\ln t\right)t^2\ .UA$$

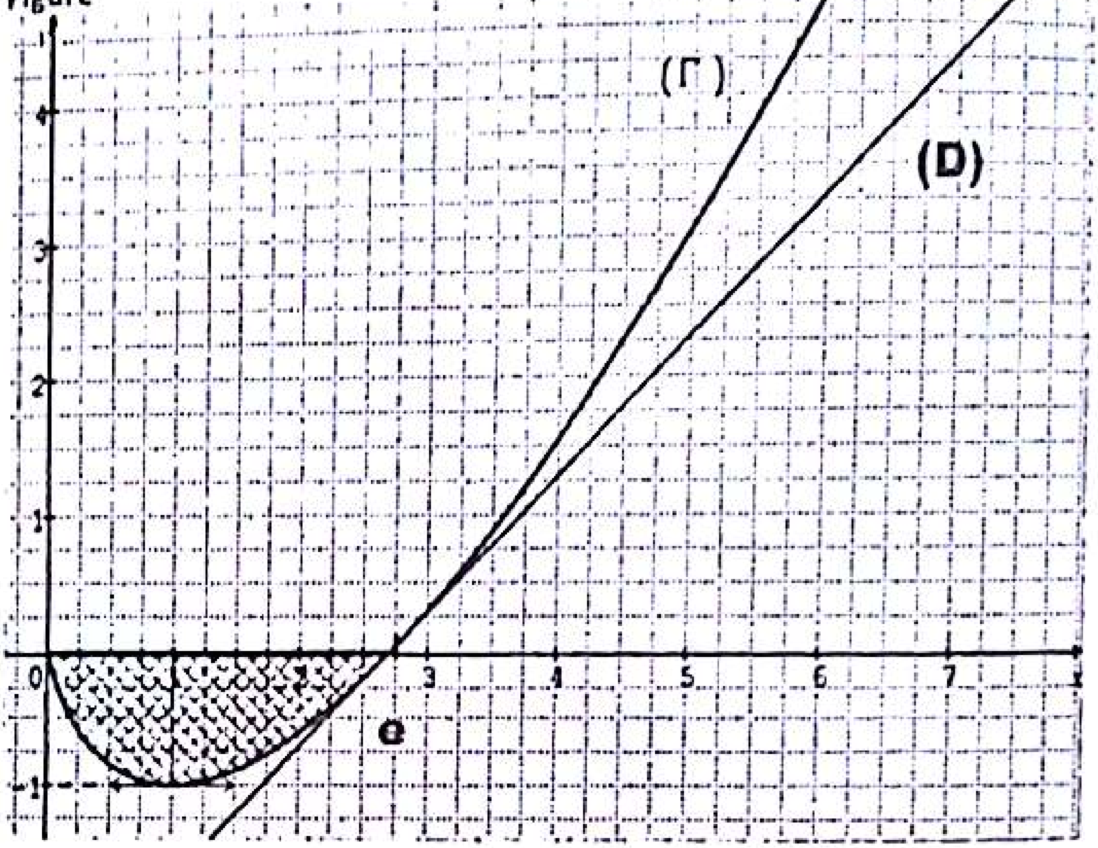
b. Calcul de la limite de A (t) quand t tend vers 0.

$$A(t)=\frac{1}{4}e^2+\left(\frac{-3}{4}+\frac{1}{2}\ln t\right)t^2=\frac{1}{4}e^2+\left(\frac{-3}{4}t^2+\frac{1}{2}t^2\ln t\right)$$

$$\lim_{t\to0}A(t)=\lim_{t\to0}\frac{1}{4}e^2+\left(\frac{-3}{4}t^2+\frac{1}{2}t^2\ln t\right)=\frac{1}{4}e^2\quad\text{car}\quad\begin{cases}\lim_{t\to0}\frac{-3}{4}\left(t^2\right)=0\\ \lim_{t\to0}\frac{1}{2}\left(t^2\ln t\right)=\lim_{t\to0}\frac{1}{2}t(t\ln t)=0\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Figure



Scanned by CamScanner

CHAPITRE VII: SUITES NUMERIQUES

Blaise PASCAL, l'un des plus grands génies et des plus remarquables écrivains français du XVIIe siècle est né à Clermont-Ferrand le 19 juin 1623.
A l'âge de douze ans, avec « des barres et des ronds » et sur une simple définition, il arrive seul et sans livre jusqu'à la 32e proposition des ***Eléments d'Euclide***.
A 16 ans, il écrit en latin "Essai pour les coniques", où est résumé tout ce qu'on sait sur les coniques.

Un peu après, Pascal conçoit et fait fabriquer une machine arithmétique (appelée la Pascaline) pour la simplification des calculs, en particulier des additions.

De 1646 à 1648, il fait des expériences barométriques qui confirment les découvertes sur la pesanteur de l'air et le conduisent à prouver l'existence du vide.

Il est également à l'origine du ***«principe de Pascal»*** qui établit qu'un fluide est incompressible. En hommage à ses travaux, son nom sera donné à une unité de pression.

En 1654, il entretient avec Pierre de Fermat des correspondances sur le thème des jeux de hasard qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : ***les calculs de probabilités***.

La même année, il fait la découverte d'un triangle arithmétique, appelé aujourd'hui ***"triangle de Pascal"***. Et c'est aussi à l'occasion du "Traité sur le triangle arithmétique" qu'**il énonce pour la première fois le principe du raisonnement par récurrence.**

Un matin de l'hiver 1654, **Pascal** connait soudainement une illumination religieuse.
Il se détourne alors des sciences et décide d'entrer au couvent janséniste de Port-Royal. Là, il écrit entre janvier 1656 et mars 1657 les « Provinciales».
Il écrit un second chef d'œuvre de la littérature, ***"Les Pensées"***, qui est une apologie de la religion chrétienne. La première publication des "Pensées" date de 1670.

En 1658, sa santé, déjà fragile, se détériore et pour se distraire de souffrances physiques insupportables, il se met à étudier les propriétés de la cycloïde ou roulette. Ses souffrances disparaissant aussitôt, il le voit comme un message de Dieu lui autorisant de s'adonner à nouveau à ses deux passions en même temps.
Pascal propose et résout lui-même les problèmes les plus difficiles et publie ses résultats dans un "Traité général de la roulette", 1659.

Mathématicien, physicien, théologien, philosophe, moraliste et fondateur de la prose classique en France, les nombreux talents de ce personnage hors du commun ont fait de Blaise Pascal une des figures les plus importantes de son siècle.

Il décède à l'âge de 39 ans, le 19 août 1662, des suites d'un cancer de l'estomac.

Scanned by CamScanner

FICHE DE COURS

GENERALITES SUR LES SUITES

1. Suites croissantes, suites décroissantes

Définitions

Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si pour tout entier n, $U_{n+1} \geq U_n$.

Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si pour tout entier n, $U_{n+1} \leq U_n$.

Remarques

a. Une suite croissante, une suite décroissante sont dites monotones.
b. Il existe des suites ni croissantes, ni décroissantes.

Exemple : La suite (U_n) définie par $U_n = (-1)^n$ est une suite ni croissante, ni décroissante.

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite (U_n) :

a. On étudie le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$.

b. Si tous les termes de la suite (U_n) sont strictement positifs, on compare $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1.

Théorème

Soit (U_n) une suite définie par $U_n = f(n)$, avec f définie sur $[0; +\infty[$

Si f est strictement croissante, alors (U_n) est strictement croissante.

Si f est strictement décroissante, alors (U_n) est strictement décroissante.

Remarque

a. Ce théorème ne s'applique pas si la suite (U_n) est définie par récurrence
b. On dit qu'une suite est stationnaire si elle est constante.

2. Opérations

Les règles opératoires sur les limites de suites (somme, produit, quotient) sont les mêmes que pour les limites en $+\infty$ d'une fonction.

Scanned by CamScanner

SUITES ARITHMETIQUES, SUITES GEOMETRIQUES

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Définition	$U_{n+1} = U_n + r$ r est appelé la raison de la suite	$U_{n+1} = qU_n$ q est appelé la raison de la suite
Expression du terme général	$U_n = U_0 + nr$ $U_n = U_k + (n-k)r$	$U_n = U_0 \times q^n$ $U_n = U_k \times q^{n-k}$
Identification	Etablir que $U_{n+1} - U_n$ est un réel indépendant de n.	Etablir que $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est un réel indépendant de n.
Sens de variation	• *Si* r>0 : *U est* croissante • *Si* r<0 : *U est* décroissante • *Si* r=0 : *U est* constante	• *Si* q=1 : *U est* constante • *Si* q<0 : *U n'est pas* monotone • *Si* $U_0 > 0$ • *Si* 0<q<1 : *U est* décroissante • *Si* q>1 : *U est* croissante • *Si* $U_0 < 0$ • *Si* 0<q<1 : *U est* croissante • *Si* q>1 : *U est* décroissante
Limite	• *Si* r>0 : $\lim U_n = +\infty$ • *Si* r<0 : $\lim U_n = -\infty$ • *Si* r=0 : $\lim U_n = U_0$	• *Si* q<-1: pas de limite • *Si* -1<q<1 : $\lim U_n = 0$ • *Si* q=1 : $\lim U_n = U_0$ • *Si* q>1 $\begin{cases} U_0 > 0 \text{ alors } \lim U_n = +\infty \\ U_0 < 0 \text{ alors } \lim U_n = -\infty \end{cases}$
Convergence	U_n converge si $r = 0$	U_n converge si -1<q<1 ou si q=1
Somme de termes consécutifs	La somme des n termes consécutifs est égale au produit par n de la demie somme des termes extrêmes	$S = 1^{er}\text{ terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

Scanned by CamScanner

METHODES PRATIQUES

M1 : Comment étudier les variations d'une suite ?

Pour étudier la monotonie d'une suite, on peut :

- Etudier les variations de f si $U_n = f(n)$
- Calculer puis comparer la différence $U_{n+1} - U_n$ à 0 et conclure.
- Calculer puis comparer le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1 et conclure.

  (À utiliser dans les cas ou tous les termes de la suite sont positifs).
- Faire une démonstration par récurrence.

M2 : Comment faire une démonstration par récurrence ?

Pour démontrer qu'une propriété P_n, qui dépend d'un entier naturel n, est vraie pour tout n, on peut procéder en trois étapes, comme suit :

Initialisation : Prouver que la propriété est vraie pour le terme initial (P_0 est vraie

Transmission : Supposer que la propriété P_k est vraie pour tout entier k et ensuite démontrer que la propriété P_{k+1} est vraie.

Conclusion : Conclure alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

M3 : Comment représenter graphiquement une suite donnée par une relation du type $U_{n+1} = f(U_n)$?

- Représenter (C_f) la courbe de f.
- Représenter (Δ) la première bissectrice des axes d'équation : $y = x$.
- Placer U_0 sur l'axe (OI).
- **Projeter verticalement U_0 sur (C_f), puis projeter le point obtenu horizontalement sur (Δ) et enfin projeter ce nouveau point verticalement sur (OI) : on obtient ainsi U_1.**
- Pour obtenir U_2, refaire ce même processus avec U_1. Et ainsi de suite...

M4 : Comment montrer qu'une suite est convergente ?

Pour montrer qu'une suite est convergente, on peut procéder comme suit :

- Calculer sa limite et montrer que cette limite existe et est finie.
- Montrer que la suite est croissante et majorée.
- Montrer que la suite est décroissante et minorée.

Scanned by CamScanner

EXERCICES RESOLUS

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE SUITE.

EXERCICE 1.

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), représenter sur la droite (OI), et sans les calculer, les termes d'indices 0 à 5 de chacune des suites numériques ci-dessous :

$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n \end{cases} \qquad \begin{cases} V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = -2V_n + 5 \end{cases}$$

SENS DE VARIATION D'UNE SUITE.

EXERCICE 2.

Les suites ci-dessous sont-elles croissantes, décroissantes ? Justifier.

(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = n^2 - 2n + 5$ (2) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = n^3 - n^2 + n$

(3) $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 + 1}{U_n} \end{cases}$

CALCUL DE LIMITES.

EXERCICE 3.

Calculer la limite des suites (U_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

1. $U_n = \dfrac{n+1}{n-5}$; 2. $U_n = \sqrt{3 + \dfrac{2}{n}}$; 3. $U_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

RÉCURRENCE /CONVERGENCE / SUITES BORNÉES.

EXERCICE 4.

La suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \dfrac{n}{n+1}$ est-elle majorée, minorée, bornées? Justifier.

EXERCICE 5.

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et pour tout entier n, $U_{n+1} = \sqrt{3 + U_n}$

1. Démontrer par récurrence que, on a : $0 \leq U_n \leq 3$
2. Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissante.
3. En déduire que (U_n) est convergente.

Scanned by CamScanner

SUITES ARITHMÉTIQUES.

EXERCICE 6.

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = -4n+7$.

1. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
2. En déduire les variations et la limite de (U_n).
3. Calculer S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

SUITES GÉOMÉTRIQUES.

EXERCICE 7.

Montrer que chacune des suites ci-après est géométrique, et préciser sa raison.

a. $U_n = (-4)^{2n+1}$ b. $U_n = 2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ c. $U_n = (-1)^n \times (2)^{3n+1}$

EXERCICE 8.

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n+3}{U_n+4} \end{cases}$

On pose, pour tout entier n : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$.

Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

2. Exprimer V_n, puis U_n, en fonction de n.

EXERCICE 9.

On considère la suite (V_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.

Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on pose: $V_n = U_n - 2$.

2. a. Calculer V_0, V_1 et V_2.

   b. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

   c. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3. On pose : $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ et $T_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

Exprimer S_n en fonction de n puis déduire T_n en fonction de n.

Scanned by CamScanner

PROBLEMES DE SYNTHESE RESOLUS

EXERCICE 10. Bac A 1995. Session normale.

On suppose que la longueur d'un boa augmente de 40% chaque année et ceci pendant ses douze premières années.

Sa longueur à la naissance est de dix centimètres.

Soit l_n sa longueur en centimètres au bout de n années ($0 \leq n \leq 12$).

1. Calculer l_1 et l_2.

2. a. Exprimer l_{n+1} en fonction de l_n.

   b. En déduire que $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géometrique dont on précisera la raison.

   c. Donner l'expression de l_n en fonction de n.

3. Calculer, en mètre, sa longueur au bout de dix années (*on donnera un arrondi d'ordre 2 du résultat).*

4. A partir de quel âge aura- t- il dépassé un mètre ?

c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

EXERCICE 11. Bac D 2003

Soit a un nombre réel donné.

On considère les suites U et U définies respectivement par :

- $U_0=3,\ U_1=5$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+2}=\frac{1}{2}(a+1)^2U_{n+1}+(a-2)U_n$
- $\forall n\in\mathbb{N},\ V_n=U_{n+1}-U_n$

1. On pose : $a=1$.

a. Démontrer que la suite (V) est constante et donner sa valeur.

b. En déduire que (U) est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.

c. On pose : $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$.

Exprimer U_n puis S_n en fonction de n.

2. On pose : $a=-5$.

a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont la raison est 7.

b. Exprimer V_n en fonction de n.

Scanned by CamScanner

c. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, exprimer en fonction de n la somme T_n où: $T_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$.

d. Exprimer U_n Un en fonction de T_n.

e. En déduire que la suite (U) est divergente.

EXERCICE 12. BAC D 1998. Session normale.

Soient les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 8 \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}$$

1. Calculer a_1 et b_1.

2. Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $d_n = b_n - a_n$

a. Démontrer que (d_n) est une suite géométrique.

Déterminer le premier terme d_0 et la raison q.

b. En déduire une expression de d_n en fonction de n.

Puis en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n > 0$

c. Calculer la limite de la suite (d_n).

3. a. Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = \dfrac{d_n}{3}$ et $b_{n+1} - b_n = -\dfrac{d_n}{4}$

En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n).

b. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*.\ a_0 < a_n < b_n < b_0$

c. Déduire des questions 3.a et 3.b que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

4. a. Déduire de la question 3.a. que :

$$\forall n > 1,\ a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1})$$

b. Déduire la limite de la suite (a_n) puis celle de la suite (b_n).

Scanned by CamScanner

EXERCICE 13. BAC D 2000. Session de remplacement.

On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par .

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3}{2}(U_n)^2 \end{cases}$$

et $V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$

1. Calculer V_0

2. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

3. Exprimer V_n en fonction de n.

4. Calculer la limite de (V_n).

5. Exprimer U_n en fonction de V_n et en déduire la limite de (U_n) .

6. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1} \quad et \quad T_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_{n-1}$$

a. Démontrer que : $S_n = (1-2^n)\ln 2$

b. Justifier que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$

c. Exprimer T_n en fonction de n.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 14. Bac D 2003. Deuxième session

On considère la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$

1. Calculer u_1

2. Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J) (unité 2 cm).

   a. Tracer les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{4}x + 3$

   b. Utiliser (D) et (Δ) pour placer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 sur l'axe des abscisses.

   (On laissera les traits de construction en pointillés sur le dessin).

   c. Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite u ?

3. a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 4$.

   b. Démontrer que la suite u est strictement croissante.

   c. La suite u est-elle convergente ? Justifier.

4. On pose : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 4$.

   a. Démontrer que v est une suite géométrique.
   Donner son premier terme et sa raison.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{-2}{4^{n-1}}$.

   c. Déterminer la limite de la suite v.

   d. En déduire la limite de la suite u.

5. a. Exprimer u_n en fonction de n.

   b. Trouver une valeur de l'entier naturel k telle que : $|u_k - 4| < 10^{-10}$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE SUITE.

EXERCICE 1.

Représenter graphiquement sur la droite (OI) les termes de la suite (U_n) définie par :

1. $\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 3U_n - 2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} U_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = -\frac{1}{3}U_n + 1 \end{cases}$

SENS DE VARIATION D'UNE SUITE.

EXERCICE 2.

Etudier le sens de variation des suites (U_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

1. $U_n = \frac{n}{n+2}$; 2. $U_n = \frac{3n-1}{2n-1}$; 3. $U_n = n - \ln(1+n)$; 4. $U_n = \frac{e^n}{n!}$

CALCUL DE LIMITES.

EXERCICE 3.

Calculer la limite des suites (U_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

1. $U_n = \frac{3n-4}{2n+1}$; 2. $U_n = \frac{\sqrt{n}-5}{\sqrt{n}+5}$; 3. $U_n = \ln(1+\frac{1}{n})$; 4. $U_n = \frac{e^n+2}{n+1}$

5. $U_n = \frac{3n^2-1}{(2n+1)^2}$; 6. $U_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$; 7. $U_n = \cos(\frac{1}{n})$; 8. $U_n = \frac{\sin(n^3)}{n+1}$

EXERCICE 4.

Calculer la limite des suites (U_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

1. $U_n = \frac{\ln(4n)}{\ln(3n)}$; 2. $U_n = \frac{\ln(n^2)}{(\ln n)^2}$; 3. $U_n = \frac{e^{2n+3}}{e^{3n+2}}$; 4. $U_n = \sqrt{1-e^{-n}}$

5. $U_n = \sqrt{4+n^2} - \sqrt{1+n^2}$ 6. $U_n = \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+1}}$

RÉCURRENCE / SUITES BORNÉES / CONVERGENCE.

EXERCICE 5.

Etudier la convergence de la suite (U_n) définie par :

1. $U_n = \frac{2n}{2+3n}$; 2. $U_n = -4n+5$; 3. $U_n = \sqrt{\frac{3n}{n^2}+16}$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 6.

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = 2 + \frac{U_n}{2}$

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout n, $n \geq 2$, on a : $2 < U_n < 4$
2. Prouver que la suite (U_n) est strictement croissante.
3. En déduire que (U_n) est convergente.

EXERCICE 7.

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, on a : $0 \leq U_n < 2$
2. Prouver que la suite (U_n) est strictement croissante.
3. En déduire que (U_n) est convergente.

EXERCICE 8.

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1$

1. Représenter graphiquement sur la droite (OI) les 6 premiers termes de la suite (U_n).
2. Démontrer que pour tout entier n, (U_n) est bornée.
3. Démontrer que la suite (U_n) est croissante.
4. En déduire que (U_n) est convergente.

EXERCICE 9.

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < U_n \leq 1$
2. Etudier le sens de variation de la suite (U_n).
3. En déduire que (U_n) est convergente.
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

SUITES ARITHMÉTIQUES.

EXERCICE 10.

Soit la suite arithmétique (U_n) de raison -2 et telle que $u_{10} = 25$.

Calculer u_{50} et S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 11.

1. Soit (U_n) la suite définie par $U_n = 3n+1$.

a. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

b. En déduire les variations et la limite de (U_n).

c. Calculer S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

2. Répondre aux mêmes questions précédentes avec la suite définie par $V_n = -4n+1$

3. Répondre aux mêmes questions précédentes avec la suite définie par $W_n = \frac{3}{2}n - 5$

EXERCICE 12.

Soit la suite arithmétique (U_n) telle que : $u_{12} = 13$ et $u_{20} = 25$.

1. Calculer la raison r et le premier terme et u_0

2. Calculer S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

EXERCICE 13.

Soit la suite arithmétique (U_n) dont les termes vérifient :

$S_5 = u_1 + u_2 + \cdots + u_5 = 45$ et $u_9 = 6$

1. Calculer r et u_1

2. Trouver n tel que $S_n = 66$

EXERCICE 14.

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + (U_n)^2} \quad \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$

1. Montrer que la suite (V_n), définie par $V_n = (U_n)^2$, est une suite arithmétique.

2. Ecrire une expression V_n en fonction de n.

3. En déduire une expression de U_n en fonction de n.

SUITES GÉOMÉTRIQUES.

EXERCICE 15.

Soit la suite géométrique (V_n) de raison $\frac{1}{2}$ et telle que $V_8 = \frac{3}{8}$.

Calculer V_{20} et S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 16.

1. Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 2^n \times 5$.

a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique.

Déterminer le premier terme et la raison.

b. En déduire les variations et la limite de (U_n).

c. Calculer S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

2. Répondre aux questions précédentes avec la suite définie par $V_n = \left[\frac{1}{3}\right]^{n} \times (-5)$

3. Répondre aux questions précédentes avec la suite définie par $W_n = 5^n$

EXERCICE 17.

Soit la suite arithmétique (U_n) telle que : $u_3 = 3$ et $u_8 = \frac{3}{32}$.

1. Calculer la raison q et le premier terme et u_0

2. Calculer S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

EXERCICE 18.

Soit la suite arithmétique (U_n) dont les termes vérifient :

$u_1 = 54$ et $u_4 = 16$

1. Calculer la raison q

2. Calculer S_6 la somme de ses six premiers termes.

EXERCICE 19.

Soit (U_n) la suite définie par : $U_1 = \frac{1}{3}$ et $U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{3n}\right)U_n$ pour $n \geq 0$

1. Calculer U_2; U_3; U_4; U_5 et U_6.

2. Montrer que la suite de terme général $V_n = \frac{U_n}{n}$ est une suite géométrique.

3. En déduire les expressions des suites V_n et U_n en fonction de n.

Scanned by CamScanner

LES SUITES DANS DES SITUATIONS PRATIQUES.

EXERCICE 20.

Le prix d'un certain matériel baisse, de façon régulière, chaque année de 15%. Le prix d'achat de celui-ci, à l'état neuf, était de 120 000 francs.
1. Quel sera son prix après un an d'utilisation ? Après 4 ans ? Après 5 ans ?
2. Au bout de combien d'années la cote de ce matériel sera-t-elle inférieure à 30000 francs ?

EXERCICE 21. BAC A 1993 Remplacement.

Les calculs seront arrondis à leur partie entière.
Une librairie ouvre sa boutique en 1992 avec 1500 livres dans ses rayons.
Elle augmentera son stock de 10% chaque année par rapport au stock de l'année précédente.
1. En appelant S_n le stock de cette librairie la n-ième après l'ouverture, démontrer que la suite (S_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison q.
2. Calculer le stock S_6 de cette librairie la sixième, après l'ouverture.
3. Au bout de combien d'années, dans ces conditions, le stock dépassera-t-il le double du stock initial S_0 ?

EXERCICE 22. Extrait du Bac A 1997. Session de remplacement

Le tableau ci-dessous représente la production en tonnes de cacao de Monsieur Yapi.

Année	1994	1995	1996
Production en tonnes	2,8	3,1	3,4

1. Démontrer que pendant ces 3 années, l'augmentation de la production a été constante.
2. On suppose que l'augmentation de la production reste constante.
On note : U_0 la production de cacao en 1994 ; U_1 la production de cacao après une année, U_n la production de cacao après n années.
Justifier que : $U_n = 2,8 + 0,3n$.
3. Quelle sera la production de cacao de Monsieur Yapi :
a. en 1997
b. après 9 années (en l'an 2003) ?

Scanned by CamScanner

PROBLEMES DE SYNTHESE

EXERCICE 23. BAC BLANC 2002. LYCEE MUNICIPAL D'ABOBO

U est une suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = e^{2n+1}$

1. a. Démontrer que la suite U est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire la convergence de U.

2. $S_{0,n}$ désigne la somme : $U_0 + U_1 + U_2 + \cdots\cdots\cdots + U_n$

a. Exprimer $S_{0,n}$ en fonction de n.

b. Démontrer que $\lim S_{0,n} = +\infty$

c. Déterminer la valeur minimale de n pour que : $S_{0,n} \geq 10^6$

3. V est une suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = \ln(U_n)$

a. Démontrer que V est une suite arithmétique. Préciser le premier terme et la raison.

b. Exprimer la somme S telle que : $S = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ en fonction de n.

c. Exprimer le produit P_n tel que : $P_n = U_0 . U_1 . U_2 \ldots\ldots U_n$, en fonction de n.

d. Trouver n pour que : $P_n = e^{100}$

EXERCICE 24.

Soit la suite définie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $U_1 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} = \frac{3+U_n}{2}$

1. Calculer U_2 et U_3

2. la suite (U_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier votre réponse.

3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose : $V_n = 3 - U_n$

a. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ dont on déterminera le premier terme.

b. Calculer la limite de la suite (V_n).

c. Exprimer V_n en fonction de n.

d. En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

e. Calculer la limite de la suite (U_n)

Scanned by CamScanner

EXERCICE 25. Bac 2011. Burkina Faso/ 2nd tour

On considère la suite (I_n) définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx, \quad (n \in \mathbb{N})$.

1. Calculer I_0 ; $I_0 + I_1$ et en déduire I_1.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n.
3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive.
4. Montrer que pour tout $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 26.

On considère la suite numérique U définie par :

$U_0 = 7$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{5}$

1. Calculer U_1; U_2 et U_3
2. Soit V la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - 2$.

a. Démontrer que V est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

b. Exprimer V_n en fonction de n

c. Déterminer la limite de V_n

d. En déduire que $U_n = 5.\left(\frac{2}{5}\right)^n + 2$

e. Quelle est la limite de la suite U ?

3. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+6}{5}$.

(C) désigne la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

a. Tracer la courbe (C) et de la droite (D) d'équation y = x.

b. Utiliser (C) et (D) pour construire U_0; U_1; U_2 et U_3 sur l'axe (OI).

Scanned by CamScanner

EXERCICE 27. BAC D 1996 REMPLACEMENT.

Soit α un nombre réel.

Soit la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $a_0 = \alpha$ et $a_{n+1} = \frac{\alpha}{1+a_n}$

On veut étudier la suite (a_n) pour $\alpha = 2$, puis pour $\alpha = -\frac{1}{4}$.

1. On pose $\alpha = 2$.

On étudie alors la suite (a_n), à termes positifs, telle que : $a_0 = 2$ et $a_{n+1} = \frac{2}{1+a_n}$

Soit la suite (w_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 2}$

a. Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et calculer sa limite éventuelle.

b. En déduire l'expression de a_n en fonction de w_n, puis calculer la limite de la suite (a_n).

2. On pose $\alpha = -\frac{1}{4}$

On étudie alors la suite (a_n) telle que : $a_0 = -\frac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -\frac{1}{4+4a_n}$

a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq -\frac{1}{2}$.

b. On considère la suite (v_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{a_n + \frac{1}{2}}$

Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et calculer le premier terme v_0.

c. Exprimer v_n en fonction de n.

d. $\forall n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n en en fonction de v_n puis en déduire l'expression de a_n en fonction de n.

e. En déduire la limite de la suite (a_n).

Scanned by CamScanner

EXERCICE 28. BAC D 2007. Burkina Faso/ 1^er^ tour.

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_1 = \frac{1}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{n-1}{2n} v_n$

1. Calculer v_2, v_3 et v_4.

2. a) Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a $v_n > 0$.
   b) Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.
   c) En déduire que la suite (v_n) est convergente.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{v_n}{n}$, $\forall n > 0$.

a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer u_n puis v_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

EXERCICE 29. BAC D 1994 SESSION DE REMPLACEMENT.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

S est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

F est l'application complexe associée à S.

1. Déterminer l'expression de f(z) en fonction du nombre complexe z.

2. On pose $z_0 = 1 - i$ et $z_1 = f(z_0)$.

a. Ecrire z_0 sous sa forme trigonométrique.

b. Calculer le module r_1 de z_1 et déterminer un argument θ_1 de z_1.

3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$

θ_n désigne un argument de z_n et r_n son module.

On considère la suite (z_n), définie par : $z_0 = 1 - i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3 + i\sqrt{3}\right) z_n$.

a. Préciser la nature de cette suite et en donner les caractéristiques.

b. Calculer z_n en fonction de n.

c. Calculer r_n et θ_n en fonction de n.

d. Préciser la nature de chacune dès suites (r_n) et (θ_n) et les caractériser.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 30. Bac Blanc 2009. Lycée Municipal 1 d'Attécoubé.

Soit une suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$

1. Démontrer, par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$

2. On considère les suites (v_n) et (w_n) telles :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ et $w_n = \ln(v_n)$

a. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$

b. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.

Préciser le premier terme w_0 et la raison q.

c. Exprimer w_n puis v_n en fonction de n.

3. a. Justifier que $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}$

b. Calculer la limite de la suite (u_n)

EXERCICE 31. Bac D 2004. Burkina Faso/ 2nd tour.

Soit la suite numérique définie par : $u_0 = -1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $-1 \leq u_n \leq 2$

2. a) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de même signe.

b) Calculer $u_1 - u_0$, puis en déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge et calculer sa limite.

EXERCICE 32.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 1$; $u_1 = 7$ et $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.

1. Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}^*$, par $w_n = u_n - u_{n-1}$

a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.

b. En déduire sa convergence.

2. a. Calculer la somme $S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ en fonction de n.

b. En déduire : $\lim_{n \to +\infty} u_n$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 33.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = e^3$ et $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4
2. On pose $v_n = \ln(u_n) - 2$

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

Préciser sa raison et calculer v_0.

b. En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

3. En déduire la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots\cdots + v_n$
4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 34.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_1 = 1$ et $(u_{n+1})^2 = 4u_n$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 *(donner les résultats sous la forme 2^α)*
2. On pose $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

Préciser sa raison et calculer v_1.

b. En déduire une expression de v_n, puis de u_n en fonction de n.

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
4. Pour quelles valeurs de n, a-t-on : $u_n > 5$?

3. Calculer la somme $S_n = v_1 + v_2 + \cdots\cdots + v_n$

EXERCICE 35.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n}$

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$, par : $v_n = u_{n+1} - u_n$ (1)

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

Préciser la raison et le premier terme.

2. En déduire la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots\cdots + v_n$
3. a. Utiliser la relation (1) pour trouver une autre expression de S_n

b. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

4. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 36.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n$

1. Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = u_{n+1} + u_n$

a. Démontrer que (w_n) est géométrique.

En déterminer la raison q et le premier terme w_0.

b. En déduire une expression de w_n en fonction de n.

2. on pose $v_n = (-1)^n u_n$ et $t_n = v_{n+1} - v_n$

Exprimer t_n en fonction de w_n.

3. a. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n

(On pourra calculer de 2 manières la somme $t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-1}$)

b. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{8^n}$

EXERCICE 37.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 9$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$

1. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 6$

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique à termes positifs.

b. Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n.

c. En déduire la somme $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

d. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim_{n \to +\infty} S'_n$

2. On définit la suite (w_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \ln(v_n)$

a. prouver que (w_n) est une suite arithmétique.

b. Calculer la somme $S''_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$ en fonction de n.

c. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S''_n$

3. a. Calculer le produit $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot \cdots \cdot v_n$ en fonction de n

b. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} P_n$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 38:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, I, J).
(unité 2 cm).

On donne $A_0(2i)$, A_1 milieu de $[A_0A'_1]$.

Plus généralement, si A_n est le point d'affixe z_n, on désigne par A'_n le point d'affixe iz_n et par A_{n+1} le milieu de $[A_nA'_{n+1}]$.

On note : $|z_n| = \rho_n$ et $\arg(z_n) = \theta_n$.

1. Déterminer les affixes des points A_0 ; A'_0 ; A_1 ; A'_1 ; A_2 ; A'_2 ; A_3.
   Placer ces points.
2. Calculer $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ ainsi que $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$
3. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n et en déduire z_n en fonction de n.
4. Exprimer ρ_n et θ_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite de (ρ_n) ; interpréter le résultat.
6. Comparer les modules et arguments de z_n et z_{n+1}
7. Prouver que $A_nA_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1}A_n$;

a. Exprimer A_nA_{n+1} en fonction de n.

b. Déterminer la longueur l_n de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots\ldots\ldots A_n$.

c. Déterminer la limite de (l_n).

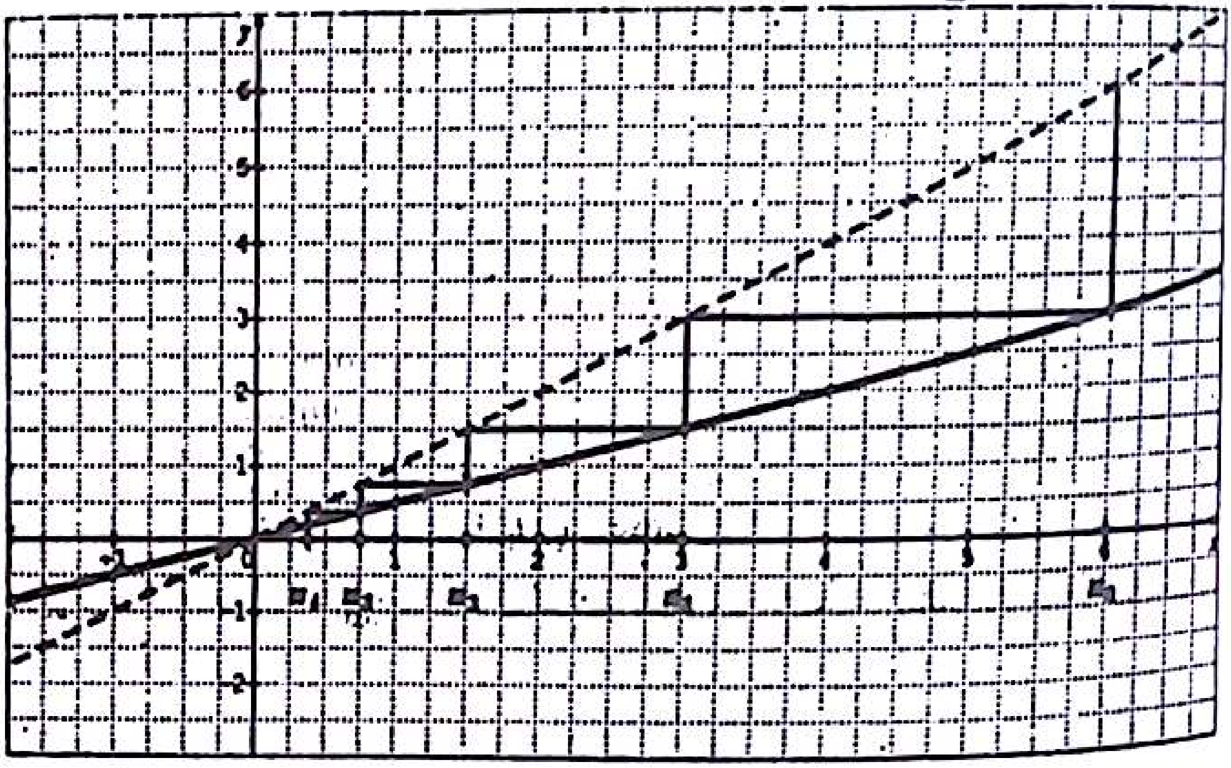
Scanned by CamScanner

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1. Représentation des termes des suites (U_n) et (V_n).

a. $\begin{cases} U_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n \end{cases}$

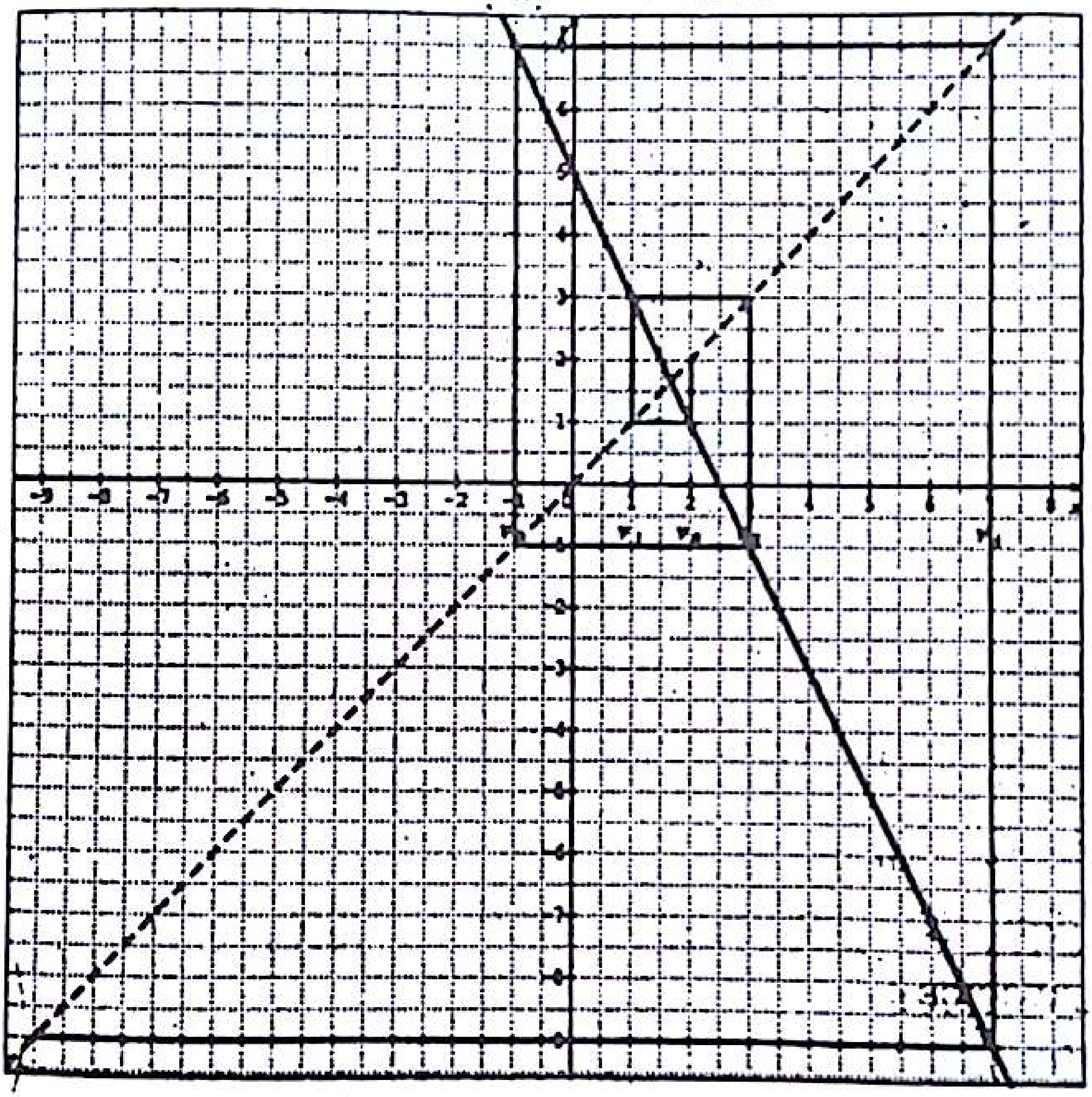
Soit f la fonction associée à la suite (U_n) définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}x$



Scanned by CamScanner

b. $\begin{cases} V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = -2V_n + 5 \end{cases}$

Soit g la fonction associée à la suite (V_n) définie par $g(x) = -2x + 5$



EXERCICE 2. **Etudions les variations des suites suivantes :**

1. Etudions le signe de $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \left[(n+1)^2 - 2(n+1) + 5\right] - \left(n^2 - 2n + 5\right) = 2n - 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n-1} - U_n = 2n - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad U_{n+1} - U_n > 0$$

Donc la suite (U_n) est une suite croissante.

Scanned by CamScanner

2. Etudions le signe de $U_{n+1}-U_n$

$$U_{n+1}-U_n=\left[(n+1)^3-(n+1)^2+(n+1)\right]-(n^3-n^2+n)=3n^2+n+1$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $U_{n+1}\ U_n=3n^2+n+1>0 \Rightarrow U_{n+1}\cdot U_n>0$

Par conséquent, la suite (U_n) est croissante.

3. Etudions le signe de $U_{n+1}-U_n$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n^2+1}{U_n}-U_n=\frac{U_n^2+1-U_n^2}{U_n}=\frac{1}{U_n}<0$$

car (U_n) est une suite à valeurs négatives.

Par conséquent, la suite (U_n) est décroissante.

EXERCICE 3. Calcul de la limite des suites (U_n) définies sur $\mathbb{N}^*$.

1. $U_n=\frac{n+1}{n-5}$ On pose : $f(x)=\frac{x+1}{x-5}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}U_n=1$$

2. $U_n=\sqrt{3+\frac{2}{n}}$ On pose : $f(x)=\sqrt{3+\frac{2}{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3+\frac{2}{x}}=\sqrt{3} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}U_n=\sqrt{3}$$

3. $U_n=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ On pose : $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=\ln 1=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}U_n=0$$

EXERCICE 4.

$$U_n=\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 0\Leftrightarrow n+1\geq 1\Leftrightarrow 0\leq\frac{1}{n+1}\leq 1\Leftrightarrow -1\leq-\frac{1}{n+1}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1-1\leq 1-\frac{1}{n+1}\leq 1+0\Leftrightarrow 0\leq 1-\frac{1}{n+1}\leq 1$$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq U_n\leq 1$. Donc la suite (U_n) est minorée par 0 et majorée par 1.

Par conséquent, la suite (U_n) est bornée par 0 et 1.

EXERCICE 5. (U_n) est définie par : $U_0=1$ et pour tout entier n, $U_{n+1}=\sqrt{3+U_n}$

Scanned by CamScanner

1. Démontrons par récurrence que, on a : $0 \leq U_n \leq 3$

- Initialisation

$U_0 = 1 \Rightarrow 0 \leq U_0 \leq 3$ la propriété est vraie à l'ordre 0.

- Transmission

On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_k \leq 3$

$0 \leq U_k \leq 3 \Leftrightarrow 3+0 \leq 3+U_k \leq 3+3 \Leftrightarrow 3 \leq 3+U_k \leq 6$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{3+U_k} \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq U_{k+1} \leq \sqrt{6}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{3} \leq U_{k+1} \leq \sqrt{6} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq U_{k+1} \leq 3$

- Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq U_n \leq 3$

2. Démontrons que la suite (U_n) est strictement croissante.

On note P_n la propriété: "$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} > U_n$"

Montrons par récurrence que : $U_{n+1} > U_n$

- Initialisation

$U_0 = 1$; $U_1 = 2 \Rightarrow U_1 > U_0$ la propriété est vraie à l'ordre 0.

- Transmission

On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N},\ U_{k+1} > U_k$

$U_{k+1} > U_k \Leftrightarrow 3+U_{k+1} > 3+U_k \Leftrightarrow \sqrt{3+U_{k+1}} > \sqrt{3+U_k} \Leftrightarrow U_{k+2} > U_{k+1}$

- Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} > U_n$ donc (U_n) est strictement croissante.

3. En déduisons que (U_n) est convergente.

(U_n) est croissante et majorée par 3 donc (U_n) est convergente.

EXERCICE 6.

1. Montrons que (U_n) est une suite arithmétique.

$U_{n+1} = -4(n+1)+7 = -4n-4+7 = -4n+3$

$U_{n+1} - U_n = -4n+3-(-4n+7) = -4n+3+4n-7 = -4$

$U_{n+1} - U_n = -4$ qui est une constante indépendante de n.

(U_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = -4$

et de premier terme $U_0 = -4 \times 0 + 7 = 7$

2. En déduisons les variations et la limite de (U_n).

(U_n) est une suite arithmétique.

$r = -4 < 0 \Rightarrow (U_n)$ est strictement décroissante.

$r = -4 < 0 \Rightarrow \lim U_n = -\infty$

Scanned by CamScanner

3. Calcul de S_{10} la somme des 10 premiers termes.

S_n – nombre de termes $\times$ demie somme des termes extrêmes.

Donc $S_{10} = 10 \times \frac{U_0 + U_9}{2} = 10 \times \frac{7 + (-29)}{2} = 10 \times \frac{-22}{2} = -110$

EXERCICE 7.

Montrons que les suites suivantes sont géométriques :

a. $U_n = (-4)^{2n+1}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(-4)^{2(n+1)+1}}{(-4)^{2n+1}} = \frac{(-4)^{2n+2+1}}{(-4)^{2n+1}} = \frac{(-4)^{2n+3}}{(-4)^{2n+1}} = (-4)^{(2n+3)-(2n+1)} = (-4)^2 = 16$$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 16$ qui est une constante indépendante de n donc (U_n) est une suite géométrique de raison 16.

b. $U_n = 2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)+1}}{2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = \frac{2^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = 2^{n+1-n} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+2)-(n+1)}$$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ qui est une constante indépendante de n donc (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

c. $U_n = (-1)^n \times (2)^{3n+1}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(-1)^{n+1} \times (2)^{3(n+1)+1}}{(-1)^n \times (2)^{3n+1}} = \frac{(-1)^{n+1} \times (2)^{3n+4}}{(-1)^n \times (2)^{3n+1}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \times \frac{(2)^{3n+4}}{(2)^{3n+1}} = (-1)^{(n+1)-n} \times (2)^{(3n+4)-(3n+1)} = (-1) \times (2)^3$$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = -\left(2^3\right)$ qui est une constante indépendante de n donc (U_n) est une suite géométrique de raison $-\left(2^3\right) = -8$.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 8.

1. Montrons que (V_n) est une suite géométrique.

Exprimons V_{n+1} en fonction de V_n.

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+3}=\frac{\frac{2U_n+3}{U_n+4}-1}{\frac{2U_n+3}{U_n+4}+3}=\frac{\frac{2U_n+3-U_n-4}{U_n+4}}{\frac{2U_n+3+3U_n+12}{U_n+4}}=\frac{\frac{U_n-1}{U_n+4}}{\frac{5U_n+15}{U_n+4}}$$

$$V_{n+1}=\frac{U_n-1}{U_n+4}\times\frac{U_n+4}{5U_n+15}=\frac{U_n-1}{5U_n+15}=\frac{U_n-1}{5(U_n+3)}=\frac{1}{5}\times\frac{U_n-1}{(U_n+3)}=\frac{1}{5}\times V_n$$

D'où $\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{1}{5}$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

2. Exprimons V_n en fonction de n.

$$q=\frac{1}{5}\quad ;\quad V_0=\frac{U_0-1}{U_0+3}=\frac{0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad V_n=V_0\times q^n=-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Exprimons U_n en fonction de n.

$$V_n=\frac{U_n-1}{U_n+3}\Rightarrow U_n-1=V_n(U_n+3)\Rightarrow U_n-1=V_n\times U_n+3\times V_n$$

$$\Rightarrow U_n-V_n\times U_n=3\times V_n+1\Rightarrow U_n(1-V_n)=3\times V_n+1\quad\Rightarrow\quad U_n=\frac{3\times V_n+1}{1-V_n}$$

Or, $V_n=-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$ d'où $$U_n=\frac{3\times V_n+1}{1-V_n}=\frac{3\times\left(-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)+1}{1-\left(-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)}=\frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^n+1}{1+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

$$U_n=\frac{\frac{-1}{5^n}+1}{1+\frac{1}{3\times 5^n}}=\frac{\frac{-1+5^n}{5^n}}{\frac{1+3\times5^n}{5^n}}=\frac{-1+5^n}{5^n}\times\frac{5^n}{1+3\times5^n}=\frac{5^n}{5^n}\times\frac{-1+5^n}{1+3\times5^n}=\frac{-1+5^n}{1+3\times5^n}$$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 9.

1. Calculons U_1 , U_2 **et** U_3.

$U_1=\frac{1}{2}U_0+1=\frac{1}{2}\times 0+1=1$

$U_2=\frac{1}{2}U_1+1=\frac{1}{2}\times 1+1=\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=\frac{3}{2}$

$U_3=\frac{1}{2}U_2+1=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}+1=\frac{3}{4}+1=\frac{3}{4}+\frac{4}{4}=\frac{7}{4}$

2. a. Calculer V_0 , V_1 **et** V_2.

$V_0=U_0-2=0-2=-2$

$V_1=U_1-2=1-2=-1$

$V_2=U_2-2=\frac{3}{2}-2=\frac{3}{2}-\frac{4}{2}=-\frac{1}{2}$

b. Démontrons que (V_n) **est une suite géométrique de raison** $\frac{1}{2}$

$V_n=U_n-2$

$V_{n+1}=U_{n+1}-2=\frac{1}{2}U_n+1-2=\frac{1}{2}U_n-1=\frac{1}{2}(U_n-2)=\frac{1}{2}V_n$

$V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n \quad\Rightarrow\quad \frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{1}{2}$

donc (V_n) *est une suite géométrique de raison* $q=\frac{1}{2}$

et premier terme $V_0=-2$

c. Exprimons V_n **puis** U_n **en fonction de n.**

$V_n=V_0\times q^n=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$V_n=U_n-2 \quad\Rightarrow\quad U_n=V_n+2=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+2$

3. On pose: $S_n=V_0+V_1+\cdots+V_n$ et $T_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$

a. Exprimons S_n **en fonction de n.**

(V_n) est une suite géométrique

Scanned by CamScanner

$$S_n = 1^{er}\ terme \times \frac{1-q^{nombredetermes}}{1-q} = V_0 \times \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$$

$$S_n = -2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = -2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = -4 \times \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

b. En déduisons T_n en fonction de n.

$$V_n = U_n - 2 \quad \Rightarrow \quad U_n = 2 + V_n$$

$$T_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$$

$$T_n = (2+V_0) + (2+V_1) + \cdots + (2+V_n)$$

$$T_n = (2+2+\ldots+2) + V_0 + V_1 + \cdots + V_n = 2(n+1) + S_n$$

$$T_n = 2(n+1) - 4 \times \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

c. Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \ donc \ \lim_{n \to +\infty} S_n = -4(1-0) = -4$$

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = +\infty \ car \ \lim_{n \to +\infty} 2(n+1) = \lim_{n \to +\infty} 2n = +\infty$$

$$et \ \lim_{n \to +\infty} -4 \times \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = -4$$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 10.

1. Calculons l_1 et l_2.

$l_0 = 10\,cm$

$l_1 = l_0 + 40\%\, l_0 = l_0 + \frac{40}{100} l_0 = l_0 + 0{,}4 l_0 = (1+0{,}4) l_0$

$l_1 = 1{,}4 l_0 = 1{,}4 \times 10 = 14\,cm$

$l_2 = l_1 + 40\%\, l_1 = l_1 + \frac{40}{100} l_1 = l_1 + 0{,}4 l_1 = (1+0{,}4) l_1$

$l_2 = 1{,}4 l_1 = 1{,}4 \times 14 = 19{,}6\,cm$

2. a. Exprimons l_{n+1} en fonction de l_n.

$l_{n+1} = l_n + 40\%\, l_n = l_n + \frac{40}{100} l_n = l_n + 0{,}4 l_n = (1+0{,}4) l_n$

$l_{n+1} = 1{,}4 l_n$

b. En déduisons que $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

$l_{n+1} = 1{,}4 l_n \Rightarrow \frac{l_{n+1}}{l_n} = 1{,}4$

donc (l_n) *est une suite géométrique de raison* $q = 1{,}4$ *et premier terme* $l_0 = 10\,cm$

c. Donnons l'expression de l_n en fonction de n.

$l_n = l_0 \times q^n = 10 \times (1{,}4)^n$

3. Calculons, en mètre, sa longueur au bout de dix années.

$l_{10} = 10 \times (1{,}4)^{10} = 289{,}25\,cm$ *soit* $l_{10} = 2{,}89\,m$

4. Déterminons à partir de quel âge le boa aura dépassé un mètre.

Il s'agit de résoudre l'inéquation : $l_n > 100$ (*car* $1m = 100cm$)

$l_n > 100 \Leftrightarrow 10 \times (1{,}4)^n > 100 \Leftrightarrow (1{,}4)^n > 10 \Leftrightarrow \ln(1{,}4)^n > \ln 10$

$\Leftrightarrow n\ln(1{,}4) > \ln 10 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 10}{\ln(1{,}4)} \Leftrightarrow n > 6{,}84$

$\Leftrightarrow n = 7$

Le boa aura dépassé 1 m à partir de 7 ans.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 11. Bac D 2003

1. On pose : $a=1$.

a. Démontrons que la suite (V)est constante et donner sa valeur.

Ona: $V_{n+1}=U_{n+2}-U_{n+1}$ or $U_{n+2}=2U_{n+1}-U_n$

donc $V_{n+1}=2U_{n+1}-U_n-U_{n+1}=U_{n+1}-U_n=V_n$

$V_{n+1}=V_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, donc(V)estconstante.

La suite (V) est constante donc

$\forall n\in\mathbb{N},\ V_{n+1}=V_n=V_0=U_1-U_0=2$

b. En déduisons que (U) est une suite arithmétique de raison r = 2.

ona: $\forall n\in\mathbb{N},\ V_n=U_{n+1}-U_n$ or $V_n=2$

d'où: $U_{n+1}-U_n=2$

(U) est donc une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $U_0=3$.

c. On pose : $S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$.

Exprimons U_n en fonction de n.

(U) est une suite arithmétique de raison r = 2 et de premier terme $U_0=3$.

Donc : $U_n=U_0+nr=3+2n$.

Exprimons S_n en fonction de n.

S_n désigne la somme des (n+1) premiers termes de la suite arithmétique(U).

Donc $S_n=(n+1)\times\frac{U_0+U_n}{2}=(n+1)\times\frac{3+3+2n}{2}=(n+1)\times(3+n)$

2. On pose : $a=-5$.

a. Démontrons que (V_n) est une suite géométrique de raison $q=7$.

Montrons que le rapport $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ est égal à 7.

$V_n=U_{n+1}-U_n$

$V_{n+1}=U_{n+2}-U_{n+1}$ avec $U_{n+2}=8U_{n+1}-7U_n$

$V_{n+1}=8U_{n+1}-7U_n-U_{n+1}=7U_{n+1}-7U_n=7(U_{n+1}-U_n)=7V_n$

$\frac{V_{n+1}}{V_n}=7$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q=7$.

Scanned by CamScanner

b. Exprimons V_n en fonction de n.

V est une suite géométrique de raison $q=7$ et de premier terme $V_0=7$.

Donc $V_n=V_0.q^n=2\times7^n$

c. Exprimons en fonction de n, $T_n=V_0+V_1+\dots+V_{n-1}$.

T_n désigne la somme des n premiers termes de la suite géométrique (V).

Donc $T_n=V_0\times\frac{1-q^n}{1-q}=2\times\frac{1-7^n}{1-7}\Rightarrow T_n=2\times\frac{1-7^n}{-6}=2\times\frac{7^n-1}{6}=\frac{7^n-1}{3}$

d. Exprimons U_n en fonction de T_n.

Ona: $V_n=U_{n+1}-U_n$

D'où: $V_0=U_1-U_0$

$$\begin{array}{l} V_1=U_2-U_1 \\ V_2=U_3-U_2 \\ V_3=U_4-U_3 \\ \vdots \\ V_{n-1}=U_n-U_{n-1} \\ \hline V_0+V_1+V_2+\ldots+V_{n-1}=U_n-U_0 \end{array}$$

Donc $U_n-U_0=T_n$

Onendéduit: $\forall n\in\mathbb{N}, U_n=U_0+T_n=3+T_n$

e. En déduire que la suite (U) est divergente.

Ona: $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7^n-1}{3}=+\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(3+T_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=+\infty$

Alors U divergevers $+\infty$

<u>EXERCICE 12.</u> BAC D 1998. Session normale.

1. $a_1=\frac{2a_0+b_0}{3}=\frac{2\times1+8}{3}=\frac{10}{3}$ et $b_1=\frac{a_0+3b_0}{4}=\frac{1+3\times8}{4}=\frac{25}{4}$.

Scanned by CamScanner

2. a. Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $d_n = b_n - a_n$

$$\Rightarrow \quad d_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{3} = \frac{3a_n + 9b_n}{12} - \frac{8a_n + 4b_n}{12}$$

$$= \frac{3a_n + 9b_n - 8a_n - 4b_n}{12} = \frac{-5a_n + 5b_n}{12} = \frac{5b_n - 5a_n}{12} = \frac{5(b_n - a_n)}{12}$$

$$= \frac{5}{12}(b_n - a_n) = \frac{5}{12}d_n$$

Donc (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = b_0 - a_0 = 8 - 1 = 7$ et de raison $q = \frac{5}{12}$.

b. (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = 7$ et de raison $q = \frac{5}{12}$

$$\Rightarrow \quad d_n = q^n \times d_0 = \left(\frac{5}{12}\right)^n \times 7$$

$$d_n = \left(\frac{5}{12}\right)^n \times 7 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad car \quad 7 > 0 \quad et \quad \left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$$

c. $-1 < q = \frac{5}{12} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim d_n = 0.$

3- a. $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n = \frac{2a_n + b_n - 3a_n}{3} = \frac{b_n - a_n}{3} = \frac{d_n}{3}$

$b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \quad \Rightarrow \quad b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + 3b_n}{4} - b_n = \frac{a_n + 3b_n - 4b_n}{4} = \frac{-b_n + a_n}{4} = \frac{-d_n}{4}$

En déduisons les variations des suites (a_n) et (b_n).

$a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$ or on a montré que $d_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$a_{n+1} - a_n > 0 \quad \Rightarrow \quad (a_n)$ est strictement croissante.

$b_{n+1} - b_n = -\frac{d_n}{4}$ or on a montré que $d_n > 0 \Rightarrow b_{n+1} - b_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$b_{n+1} - b_n < 0 \quad \Rightarrow \quad (b_n)$ est strictement décroissante.

b. Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_0 < a_n < b_n < b_0$.

(a_n) est strictement croissante $\quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \; a_0 < a_n \quad (1)$

(b_n) est strictement décroissante $\quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \; b_n < b_0 \quad (2)$

$d_n > 0 \quad \Rightarrow \quad b_n - a_n > 0 \quad \Rightarrow \quad b_n > a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n < b_n \qquad (3)$

$(1), (2) \, et \, (3) \quad \Rightarrow \quad a_0 < a_n < b_n < b_0$

Scanned by CamScanner

c. Déduisons de 3-a. et 3-b. que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

$a_0 < a_n < b_n < b_0 \Rightarrow a_n < b_0 \Rightarrow (a_n)$ est majorée par b_0

De plus, (a_n) est strictement croissante

(a_n) est strictement croissante et majorée par b_0 donc (a_n) est convergente

$a_0 < a_n < b_n < b_0 \Rightarrow a_0 < b_n \Rightarrow (b_n)$ est minorée par a_0

De plus, (b_n) est strictement décroissante

(b_n) est strictement décroissante et minorée par a_0 donc (b_n) est convergente.

4.a. Déduisons de la question 3-a. que : $\forall n > 1,\ a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1})$

$$a_1 - a_0 = \frac{d_0}{3}$$
$$+$$
$$a_2 - a_1 = \frac{d_1}{3}$$
$$+$$
$$a_3 - a_2 = \frac{d_2}{3}$$
$$\vdots$$
$$+$$
$$a_n - a_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{3}$$

$$a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1})$$

b. Déduisons la limite de la suite (a_n) puis celle de la suite (b_n).

(d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = 7$ et de raison $q = \frac{5}{12}$

$$d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1} = d_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 7 \times \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}} = 7 \times \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}}$$

$$= 7 \times \frac{5}{3} \times \left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right] = \frac{35}{3} \times \left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$$

Scanned by CamScanner

$a_n - a_0 = \frac{1}{3}\left(d_0 + d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_{n-1}\right)$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{3}\left(d_0 + d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_{n-1}\right) + a_0 = \frac{1}{3} \times \frac{35}{3} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + a_0$

$\Rightarrow a_n = \frac{35}{9} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + 1$

$\lim a_n = \lim \frac{35}{9} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + 1 = \frac{35}{9} + 1 = \frac{35+9}{9} = \frac{44}{9}$ car $\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

On a: $d_n = b_n - a_n \Rightarrow b_n = d_n + a_n$

$\lim b_n = \lim d_n + \lim a_n$ or $\lim d_n = 0 \Rightarrow \lim b_n = \lim a_n = \frac{44}{9}$

EXERCICE 13.

1. $V_0 = \ln\left(\frac{3}{2}U_0\right) = \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

2. Démontrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

$V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \Rightarrow V_{n+1} = \ln\left(\frac{3}{2}U_{n+1}\right) = \ln\left[\frac{3}{2} \times \frac{3}{2}(U_n)^2\right] = \ln\left[\left(\frac{3}{2}U_n\right)^2\right] = 2\ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2\ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)} = 2 \Rightarrow (V_n)$ est une suite géométrique de raison 2.

3. Expression de V_n en fonction de n.

(V_n) est une suite géométrique de raison 2.

L'expression du terme général de la suite (V_n) est donc :

$V_n = q^n V_0 = 2^n \times (-\ln 2) = (-\ln 2) \times 2^n$

4. Calculons la limite de (V_n).

$V_n = (-\ln 2) \times 2^n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} (-\ln 2) \times 2^n = -\infty$ car $\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty \\ -\ln 2 < 0 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

5. Expression de U_n en fonction de V_n et déduction de la limite de (U_n).

- $V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \Rightarrow e^{V_n} = e^{\ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)} = \frac{3}{2}U_n \Rightarrow \frac{3}{2}U_n = e^{V_n} \Rightarrow U_n = \frac{2}{3}e^{V_n}$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} e^{V_n} = 0$ car $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0.$

Finalement. $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{3} \times e^{V_n} = 0$

6. Pour tout entier naturel n, on pose :

$S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$ et $T_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_{n-1}$

a. Montrons que : $S_n = \left(1-2^n\right)\ln 2$

Il s'agit, ici, de calculer la somme de n termes consécutifs de la suite géométrique (V_n)

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \times V_0 = \frac{1-2^n}{1-2} \times (-\ln 2) = \frac{1-2^n}{-1} \times (-\ln 2) = \left(1-2^n\right)\ln 2$$

b. Justifions que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$

$$T_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_{n-1} \Rightarrow \ln(T_n) = \ln\left(U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_{n-1}\right)$$

$$\ln(T_n) = \ln U_0 + \ln U_1 + \ldots + \ln U_{n-1}$$

$$\Rightarrow n\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(T_n) = n\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_0 + \ln U_1 + \ldots + \ln U_{n-1}$$

$$\Rightarrow n\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(T_n) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_0 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_1 + \ldots + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_{n-1}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{3}{2}\right)^n + \ln(T_n) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_0 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_1 + \ldots + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_{n-1}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n \times T_n\right) = \ln\left(\frac{3}{2} \times U_0\right) + \ln\left(\frac{3}{2} \times U_1\right) + \ldots + \ln\left(\frac{3}{2} \times U_{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n \times T_n\right) = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n \times T_n\right) = S_n$$

$$\Rightarrow e^{\ln\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n \times T_n\right)} = e^{S_n}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \times T_n = e^{S_n}$$

$$\Rightarrow T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{S_n}$$

c. Exprimer T_n en fonction de n.

$$T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{S_n} \quad \textit{et} \quad S_n = \left(1 - 2^n\right)\ln 2 \quad \textit{(voir question 6.a)}$$

$$T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{\left(1-2^n\right)\ln 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{\left(1-2^n\right)} \times e^{\ln 2}$$

$$T_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{\left(1-2^n\right)}$$

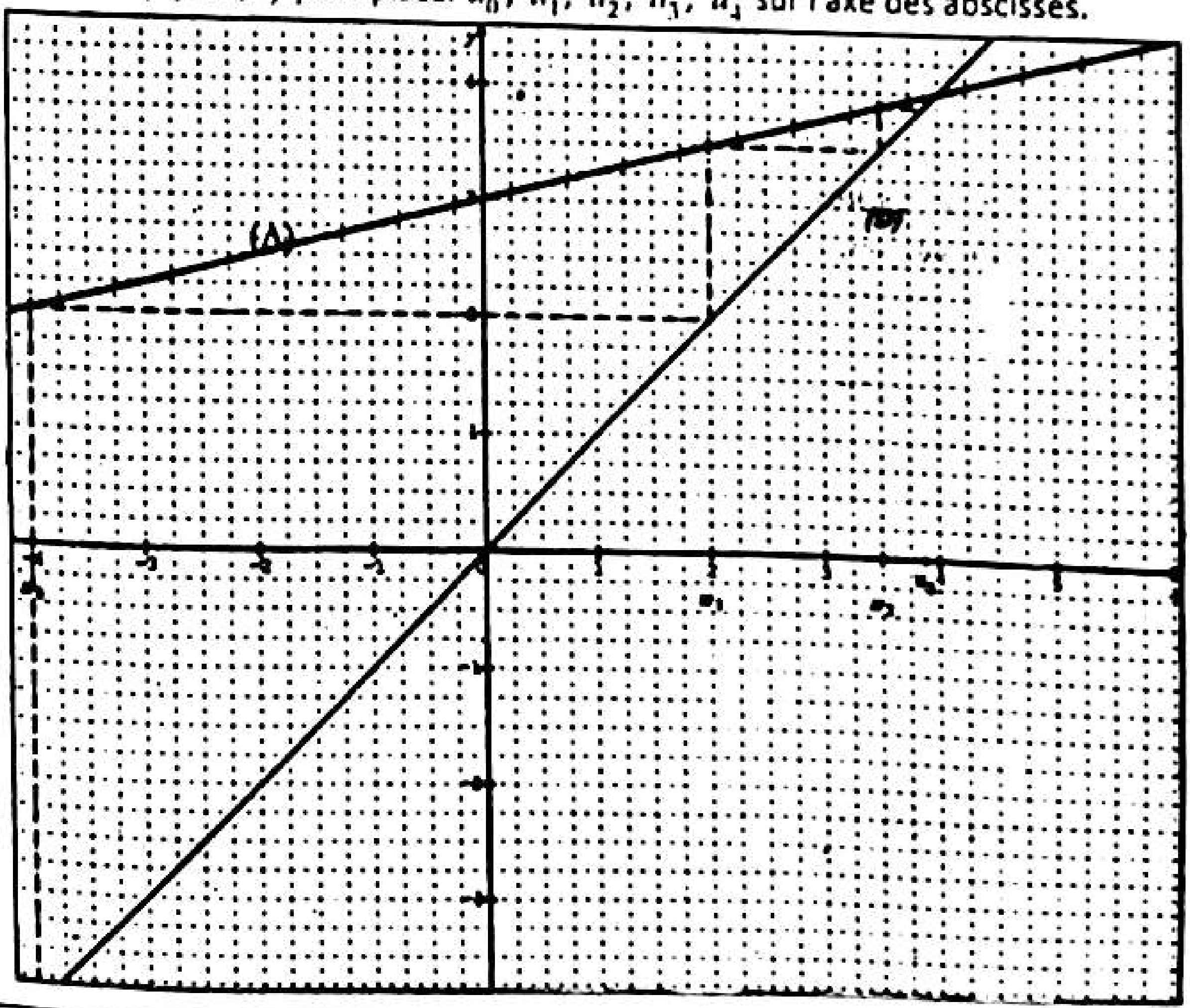
EXERCICE 14.

1. Calcul de u_1 : $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{4} \times u_0 + 3 = \frac{1}{4} \times (-4) + 3 = -1 + 3 = 2$

2. Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J) (unité 2 cm).

a. Tracé des droites (D) et (Δ) ***(voir ci-dessous)***

b. Utilisons (D) et (Δ) pour placer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 sur l'axe des abscisses.



Scanned by CamScanner

c. Conjecture quant à la convergence de la suite u.

La représentation graphique de la suite nous permet de conjecturer que la suite u converge vers 4.

3. a. Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 4$.

$u_0 = -4 < 4$ (la propriété est vraie à l'ordre 0).

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 4$ et montrons que $u_{n+1} < 4$

$u_n < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \times u_n < \frac{1}{4} \times 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \times u_n + 3 < 1 + 3 \Rightarrow \frac{1}{4} \times u_n + 3 < 4$

$\Rightarrow f(u_n) < 4 \Rightarrow u_{n+1} < 4$ (la propriété est vraie à l'ordre $n+1$).

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 4$

b. Démontrons que la suite u est strictement croissante.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$

$u_0 = -4\ ;\ u_1 = 2$

$u_1 > u_0$ (la propriété est vraie à l'ordre 0).

Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n-1}$ et montrons que $u_{n+1} > u_n$

$u_n > u_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{4} \times u_n > \frac{1}{4} \times u_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{4} \times u_n + 3 > \frac{1}{4} \times u_{n-1} + 3$

$\Rightarrow f(u_n) > f(u_{n-1}) \Rightarrow u_{n+1} > u_n$ (la propriété est vraie à l'ordre $n+1$).

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} > u_n$

On en déduit que la suite u est strictement croissante.

c. Etude de la convergente de la suite u.

La suite u est convergente car elle croissante *(question 3.b)* et majorée par 4 *(question 3.a)*.

4. On pose : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 4$.

a. Démontrons que v est une suite géométrique.
Donner son premier terme et sa raison.

$v_n = u_n - 4$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \left(\frac{1}{4}u_n + 3\right) - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = \frac{1}{4}\left(u_n - 4\right) = \frac{1}{4}v_n$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{4}$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -8$.

Scanned by CamScanner

b. Démontrons que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{-2}{4^{n-1}}$.

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = -8$.

$$v_n = q^n v_0 = \left(\frac{1}{4}\right)^n .(-8) = \frac{1}{4^n}.(-8) = \frac{-8}{4^n} = \frac{-2\times 4}{4^{n-1}\times 4} = \frac{-2}{4^{n-1}}$$

c. Déterminons la limite de la suite v.

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

$$-1 < q < 1 \Rightarrow \lim v_n = 0$$

d. En déduisons la limite de la suite u.

$$v_n = u_n - 4 \Rightarrow u_n = v_n + 4 \Rightarrow \lim u_n = \lim(v_n + 4) = \lim v_n + 4 = 0 + 4 = 4$$

5. a. Exprimer u_n en fonction de n.

$$v_n = u_n - 4 \Rightarrow u_n = v_n + 4 \Rightarrow u_n = \frac{-2}{4^{n-1}} + 4$$

b. Trouvons une valeur de l'entier naturel k telle que : $|u_k - 4| < 10^{-10}$.

$$|u_k - 4| < 10^{-10} \Rightarrow |v_k| < 10^{-10} \Rightarrow \frac{2}{4^{k-1}} < 10^{-10} \Rightarrow \frac{1}{4^{k-1}} < \frac{1}{2}.10^{-10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4^{k-1}} < \frac{10^{-10}}{2} \Rightarrow \frac{2}{10^{-10}} < 4^{k-1} \Rightarrow \ln\frac{2}{10^{-10}} < \ln 4^{k-1}$$

$$\Rightarrow \ln 2 - \ln 10^{-10} < (k-1)\ln 4 \qquad \Rightarrow \ln 2 + 10\ln 10 < (k-1)\ln 4$$

$$\Rightarrow (k-1) > \frac{\ln 2 + 10\ln 10}{\ln 4} \qquad \Rightarrow k > \frac{\ln 2 + 10\ln 10}{\ln 4} + 1$$

$$\frac{\ln 2 + 10\ln 10}{\ln 4} + 1 \simeq 18{,}11 \qquad \Rightarrow k \geq 19$$

Scanned by CamScanner

CHAPITRE VIII: EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Joseph Louis,
comte de Lagrange

(en italien Giuseppe Lodovico de Lagrangia), né à Turin le 25 janvier 1736 et mort à Paris le 10 avril 1813 (à 77 ans), est un mathématicien, mécanicien et astronome. Italien

Fondateur du calcul des variations avec **Euler et de la théorie des formes quadratiques**, il démontre **le théorème de Wilson sur les nombres premiers** et la conjecture de Bachet sur la décomposition d'un entier en quatre carrés. Son nom figure partout en mathématiques. On lui doit un cas particulier du théorème auquel on donnera son nom en théorie des groupes, un autre sur les fractions continues, **l'équation différentielle de Lagrange**.

En physique, en précisant le principe de moindre action, avec le calcul des variations, vers 1756, il invente la fonction de Lagrange, qui vérifie les équations de Lagrange, puis développe la mécanique analytique, vers 1788, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie, un de ses résultats étant la mise en évidence des points de libration (dits points de Lagrange) (1772).

Il élabore le système métrique avec Lavoisier pendant la Révolution. Il est membre fondateur du Bureau des longitudes (1795) avec, entre autres, Laplace et Jean-Dominique Cassini (Cassini IV). Il participe à l'enseignement de mathématiques de l'École normale de l'an III avec Joseph Lakanal, de l'École polytechnique (1794) avec Monge et Fourcroy, où il enseigne dès 1797. Il est aussi le fondateur de l'Académie de Turin (1758).

En mécanique des fluides, il introduisit le concept de potentiel de vitesse en 1781, bien en avance sur son temps. Il démontra que le potentiel de vitesse existe pour tout écoulement de fluide réel, pour lequel la résultante des forces dérive d'un potentiel. Dans le même mémoire de 1781, il introduisit, en plus, deux notions fondamentales : le concept de la fonction de courant, pour un fluide incompressible, et le calcul de la célérité d'une petite onde dans un canal peu profond. Rétrospectivement, cet ouvrage marqua une étape décisive dans le développement de la mécanique des fluides moderne.

Scanned by CamScanner

FICHE DE COURS

1. Définition

On appelle équation différentielle, toute équation ayant pour inconnue une fonction, dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonction inconnue.

Exemples: $7f''+5f'-2f=0$; $-4f''+f'+3f=0$

2. Equations différentielles du type $f'+af=0$

a. Définition

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, toute équation différentielle qui peut s'écrire : $f'+af=0$ $(a\in\mathbb{R})$

Exemples: $f'+3f=0$; $5f'-2f=0$; $6f'=2f$; $-7f'+f=0$

b. Résolution

Les seules solutions de l'équation différentielle (E): $f'+af=0$. sont les fonctions f_k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f_k(x)=ke^{-ax}$ $(k\in\mathbb{R})$.

3. Equations différentielles du type $f''=0$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f''=0$ sont les fonctions $f(x)=Ax+B$ $(A\in\mathbb{R}, B\in\mathbb{R})$

4. Equations différentielles du type $f''=kf$ $(k\in\mathbb{R})$

a. Equations différentielles du type $f''-\omega^2 f=0$ $(\omega\in\mathbb{R})$

Les seules solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f''-\omega^2 f=0$ $(\omega\in\mathbb{R})$ sont les fonctions $f(x)=Ae^{\omega x}+Be^{-\omega x}$ $(A\in\mathbb{R}, B\in\mathbb{R})$

b. Equations différentielles du type $f''+\omega^2 f=0$ $(\omega\in\mathbb{R})$

Les seules solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $f''+\omega^2 f=0$ $(\omega\in\mathbb{R})$ sont les fonctions $f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$ $(A\in\mathbb{R}, B\in\mathbb{R})$

Scanned by CamScanner

EXERCICES RESOLUS

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

EXERCICE 1.

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

(1). $f'+3f=0$; (2). $f'-6f=0$; (3). $2f'-3f=0$; (4). $-7f'+f=0$

(5). $3f'+\frac{2}{3}f=0$; (6). $f'+\sqrt{5}f=0$; (7). $2f'=5f$; (8). $-2f'=\frac{2}{5}f$

EXERCICE 2.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.

(1). $f'-2f=0$ et $f(0)=1$

(2). $f'+7f=0$ et $f(1)=2$

(3). $2f'-5f=0$ et $f(1)=0$

(4). $-f'+6f=0$ et $f(3)=3$

(5). $2f'-\frac{4}{5}f=0$ et $f(-1)=2$

(6). $f'+\sqrt{3}f=0$ et $f(0)=-5$

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

EXERCICE 3.

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1. $f''-4f=0$ 2. $f''+3f=0$
3. $-3f''+15f=0$ 4. $2f''+f=0$

EXERCICE 4.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales données.

1. $4f''+f=0$ $f(0)=1$ *et* $f'(0)=0$
2. $f''-f=0$ $f(0)=2$ *et* $f'(0)=1$
3. $f''+\frac{1}{9}f=0$ $f(\pi)=1$ *et* $f'(\pi)=0$

Scanned by CamScanner

PROBLEME DE SYNTHESE RESOLU

PROBLEME : Partie A du problème du bac 2002. Session normale.

On se propose de chercher les fonctions dérivables $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle (E) : $f'(x)+2f(x)=2x-1$.

1. Démontrer que la fonction g définie par $g(x)=x-1$ est solution de (E).

2. Soit (E ') l'équation différentielle : $f'(x)+2f(x)=0$.

a. Résoudre (E ').

b. Soit k un nombre réel.

Démontrer que les fonctions $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que : $f_k(x)=ke^{-2x}+x-1$ sont solutions de (E).

3. a. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que si f est solution de (E) alors $f-g$ est solution de (E ').

b. En déduire les solutions de (E).

Scanned by CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

EXERCICE 1.

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

$(1).f'-5f=0$; $(2).f'+7f=0$; $(3).7f'=-2f0$; $(4).f'+f=0$

$(5).3f'+\frac{2}{3}f=0$; $(6).-2f'+\sqrt{3}f=0$; $(7).f'=-2f$; $(8).3f'+\frac{1}{2}f=0$

EXERCICE 2.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale donnée.

$(1).\ f'-f=0$ et $f(2)=0$; $(2).\ 2f'+3f=0$ et $f(0)=5$

$(3).\ -3f'+f=0$ et $f(1)=0$; $(4).\ -f'+6f=0$ et $f(3)=1$

$(5).\ \frac{2}{3}f'-5f=0$ et $f(-2)=0$; $(6).\ f'-\frac{\sqrt{2}}{2}f=0$ et $f(1)=0$

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

EXERCICE 3.

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1. $f''-25f=0$ 2. $f''+16f=0$ 3. $f''-2f=0$
4. $-3f''+2f=0$ 5. $\frac{1}{2}f''+8f=0$ 6. $16f''+f=0$

EXERCICE 4.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales données.

1. $f''+f=0$ *avec* $f(0)=-1$ *et* $f'(0)=0$
2. $3f''-12f=0$ *avec* $f(1)=2$ *et* $f'(1)=1$
3. $f''+9f=0$ *avec* $f(\frac{\pi}{2})=-2$ *et* $f'(\frac{\pi}{2})=3$
4. $16f''+f=0$ *avec* $f(\pi)=\sqrt{2}$ *et* $f'(\pi)=-\sqrt{2}$
5. $f''-f=0$ *avec* $f(5)=3$ *et* $f'(2)=4$
6. $f''-\frac{1}{4}f=0$ *avec* $f(1)=1$ *et* $f'(0)=-1$

Scanned by CamScanner

PROBLEMES DE SYNTHESE

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

EXERCICE 5.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $2f'+f=0$
2. Déterminer la solution particulière g dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées **(2 ; 1)**.

EXERCICE 6.

Soit l'équation différentielle (E) : $f'+2f=x^2+1$

1. Résoudre l'équation différentielle (F) : $f'+2f=0$
2. Déterminer une fonction polynôme g du second degré, solution de (E).
3. Démontrer qu'une fonction h est une solution de (E) si et seulement si $h-g$ est une solution de (F).
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 7.

Soit l'équation différentielle (E) : $f'+2f=5\cos x$

1. Résoudre l'équation différentielle (F) : $f'+2f=0$
2. Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=a\cos x+b\sin x$ est une solution de (E).
3. Démontrer qu'une fonction h est une solution de (E) si et seulement si $h-g$ est une solution de (F).
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 8.

La proportion d'atomes de carbone 14 présents dans un organisme mort est une fonction f du temps t (en années) qui vérifie l'équation différentielle (E) : $f'+0{,}000121f=0$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière g telle que $g(0)=1$
3. On appelle période d'un élément radioactif, le temps T au bout duquel la moitié des atomes initialement présents se sont désintégrés.
Calculer, à 10 ans près, la période du carbone 14.
4. Quel est l'âge, à 100 ans près, d'un os fossile qui contient 23% d'atomes de carbone 14 par rapport à un os contemporain ?

Scanned by CamScanner

EXERCICE 9.

$N(t)$ désigne le nombre d'atomes de radium d'une substance radioactive à l'instant t (exprimé en années).

On a : $N'(t) = -25\times10^{-8}N(t)$ et $N(0) = N_0$

1. Déterminer l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et t.

2. Au bout de combien d'années le nombre d'atomes de radium aura-t-il diminué de moitié ?

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

EXERCICE 10.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : 4f'' = -f$

2. Déterminer la solution particulière g dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (0; 1) et admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x+3$ en ce point.

EXERCICE 11.

On considère les équations différentielles (E_1) et (E_2) telles que :

(E_1): $f''+4f = 0$ et (E_2): $f''+4f = 3\cos x$ où f est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Quelles sont les fonctions g solutions de (E_1) ?

2. Vérifier que la fonction cosinus est solution de (E_2).

3. g étant une solution de (E_1), vérifier que toute fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)+\cos x$ est solution de (E_2).

4. Parmi les fonctions h définies à la question 3., déterminer celle qui vérifie de plus : $h(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $h'(\frac{\pi}{2}) = 1$

EXERCICE 12.

Soit l'équation différentielle $(E) : f''+4f = 0$

où f est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et f'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre (E).

2. Déterminer la solution particulière g de (E) qui vérifie $g(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ et $g'(\frac{\pi}{4}) = -2\sqrt{2}$

3. Vérifier que, pour tout nombre réel, $g(x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{4})$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 13. Bac D 2013. Burkina Faso/ 2nd tour

On considère l'équation différentielle (E) définie par :(E): $\frac{1}{2}y'+y=3e^{-2x}+2$

1. Déterminer le réel a, tel que la fonction v définie par $v(x)=axe^{-2x}+2$ soit une solution de l'équation (E).

2. Donner les solutions de l'équation (E'): $\frac{1}{2}y'+y=0$.

3. a) Montrer que u est solution de (E) si et seulement si $(u-v)$ est solution de (E').
   b) En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière h de l'équation (E) vérifiant h(0) = 0.

EXERCICE 14. Bac D 2012. Burkina Faso/ 1er tour

On considère les équations différentielles suivantes : (E_1): $y''+4y=0$ et (E_2): $y''+y=0$

1. Déterminer la solution de l'équation (E_1) dont la courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ passe par le point A(0 ; -2) et admet en ce point une tangente horizontale.

2. Déterminer la solution g de l'équation (E_2) vérifiant : $g(\frac{\pi}{2})=-1$ et $g'(\frac{\pi}{2})=-1$

EXERCICE 15. Bac D 2014. Burkina Faso/ 1er tour

A l'instant t = 0, un corps à la température $\theta_0=60°C$ est placé dans l'air ambiant à la température $\theta_1=20°C$.

Au bout de 10 minutes, la température du corps est 50°C.

Sa température à la date t, exprimée en minutes, est solution de l'équation différentielle $\frac{d\theta(t)}{d(t)}=-k(\theta(t)-\theta_1)$ où k est une constante.

On pose $\phi(t)=\theta(t)-\theta_1$

1.a) Quelle est l'équation différentielle vérifiée par ϕ ?
   b) Déterminer ϕ.
   c) En déduire $\theta(t)$ en fonction de k.
   d) Déterminer la constante k puis, en déduire l'expression définitive de $\theta(t)$.

2.a) Au bout de combien de minutes la température du corps diminuera-t-il de moitié ?
   b) Quelle sera la température du corps au bout d'une heure ?

On donne $\ln 2=0,70$; $\ln\frac{3}{4}=-0,29$

Scanned by CamScanner

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1. **Résolution des équations différentielles suivantes :**

(1)• $f'+3f=0 \quad \Rightarrow \quad f_k(x)=ke^{-3x} \quad (k\in\mathbb{R})$

(2)• $f'-6f=0 \quad \Rightarrow \quad f_k(x)=ke^{6x} \quad (k\in\mathbb{R})$

(3)• $2f'-3f=0 \quad \Rightarrow \quad f'-\frac{3}{2}f=0 \Rightarrow f_k(x)=ke^{\frac{3}{2}x} \quad (k\in\mathbb{R})$

(4)• $-7f'+f=0 \quad \Rightarrow \quad f'-\frac{1}{7}f=0 \Rightarrow f_k(x)=ke^{\frac{1}{7}x} \quad (k\in\mathbb{R})$

(5)• $3f'+\frac{2}{3}f=0 \quad \Rightarrow \quad f'+\frac{2}{9}f=0 \Rightarrow f_k(x)=ke^{\frac{2}{9}x} \quad (k\in\mathbb{R})$

(6)• $f'+\sqrt{5}f=0 \quad \Rightarrow \quad f_k(x)=ke^{-\sqrt{5}x} \quad (k\in\mathbb{R})$

(7)• $2f'=5f \quad \Rightarrow \quad f'-\frac{5}{2}f=0 \Rightarrow f_k(x)=ke^{\frac{5}{2}x} \quad (k\in\mathbb{R})$

(8)• $-2f'=\frac{2}{5}f \quad \Rightarrow \quad f'+\frac{1}{5}f=0 \Rightarrow f_k(x)=ke^{\frac{1}{5}x} \quad (k\in\mathbb{R})$

EXERCICE 2. **Résolution d'équations différentielles vérifiant les conditions initiales données.**

(1)• $f'-2f=0 \quad \Rightarrow f_k(x)=ke^{2x} \quad (k\in\mathbb{R})$

$f(0)=1 \Rightarrow ke^{2\times 0}=1 \Rightarrow k=1 \quad \Rightarrow f(x)=e^{2x}$

(2)• $f'+7f=0 \quad \Rightarrow f_k(x)=ke^{-7x} \quad (k\in\mathbb{R})$

$f(1)=2 \Rightarrow ke^{-7}=2 \Rightarrow k=\frac{2}{e^{-7}}=2e^{7} \quad \Rightarrow f(x)=2e^{7}e^{-7x}=2e^{7-7x}$

(3)• $2f'-5f=0 \quad \Rightarrow f_k(x)=ke^{\frac{5}{2}x} \quad (k\in\mathbb{R})$

$f(1)=0 \Rightarrow ke^{\frac{5}{2}\times 1}=0 \Rightarrow k=0 \quad \Rightarrow f(x)=0$

(4)• $-f'+6f=0 \quad \Rightarrow f_k(x)=ke^{6x} \quad (k\in\mathbb{R})$

$f(3)=3 \Rightarrow ke^{18}=3 \Rightarrow k=\frac{3}{e^{18}}=3e^{-18} \Rightarrow f(x)=3e^{-18}\times e^{6x}=3\times e^{6x-18}$

Scanned by CamScanner

(5) $2f'-\frac{4}{5}f=0 \Rightarrow f'-\frac{2}{5}f=0 \Rightarrow f_k(x)=ke^{\frac{2}{5}x}$ $(k\in\mathbb{R})$

$f(-1)=2 \Rightarrow ke^{-\frac{2}{5}}=2 \Rightarrow k=\frac{2}{e^{-\frac{2}{5}}}=2e^{\frac{2}{5}} \Rightarrow f(x)=2e^{\frac{2}{5}}.e^{\frac{2}{5}x}=2e^{\frac{2}{5}(1+x)}$

(6) $f'+\sqrt{3}f=0 \Rightarrow f_k(x)=ke^{-3x}$ $(k\in\mathbb{R})$

$f(0)=-5 \Rightarrow ke^0=-5 \Rightarrow k=-5 \Rightarrow f(x)=-5e^{-3x}$

EXERCICE 3. Résolution des équations différentielles suivantes :

Résolvons chacune des équations différentielles suivantes :

1. $f''-4f=0 \Leftrightarrow f''-2^2f=0$

les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$f(x)=Ae^{2x}+Be^{-2x}$ $(A\in\mathbb{R},\ B\in\mathbb{R})$

2. $f''+3f=0 \Leftrightarrow f''+(\sqrt{3})^2f=0$

les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$f(x)=A\cos(\sqrt{3}x)+B\sin(\sqrt{3}x)$ $(A\in\mathbb{R},\ B\in\mathbb{R})$

3. $-3f''+15f=0 \Leftrightarrow f''-5f=0 \Leftrightarrow f''-(\sqrt{5})^2f=0$

les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$f(x)=Ae^{\sqrt{5}x}+Be^{-\sqrt{5}x}$ $(A\in\mathbb{R},\ B\in\mathbb{R})$

4. $2f''+f=0 \Leftrightarrow f''+\frac{1}{2}f=0 \Leftrightarrow f''+\frac{\sqrt{2}}{2}f=0$

les solutions de (E_4) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$f(x)=A\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x)+B\sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x)$ $(A\in\mathbb{R},\ B\in\mathbb{R})$

EXERCICE 4.

Dans chacun des cas suivants, déterminons la solution de l'équation différentielle

1. $4f''+f=0$ $\quad f(0)=1$ *et* $f'(0)=0$

$4f''+f=0 \Leftrightarrow f''+\frac{1}{4}f=0 \Leftrightarrow f''+(\frac{1}{2})^2f=0$

les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$f(x)=A\cos(\frac{1}{2}x)+B\sin(\frac{1}{2}x)$ $(A\in\mathbb{R},\ B\in\mathbb{R})$

Scanned by CamScanner

On a: $f'(x) = -\frac{1}{2}A\sin(\frac{1}{2}x) - \frac{1}{2}B\cos(\frac{1}{2}x)$

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cos 0 + B\sin 0 = 1 \\ -\frac{1}{2}A\sin 0 + \frac{1}{2}B\cos 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=0 \end{cases}$$

Donc $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$

2. $f'' - f = 0$ $\quad\quad f(0)=2$ et $f'(0)=1$

$f'' - f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'' - (1)^2 f = 0$

les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$f(x) = Ae^{x} + Be^{-x} \quad (A\in\mathbb{R},\ B\in\mathbb{R})$

On a: $f'(x) = Ae^{x} - Be^{-x}$

$$\begin{cases} f(0)=2 \\ f'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ae^{0} + Be^{-0} = 2 \\ Ae^{0} - Be^{-0} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A=3 \\ 2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{3}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $f(x) = f(x) = \frac{3}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{3e^{x} + e^{-x}}{2}$

3. $f'' + \frac{1}{9}f = 0$ $\quad\quad f(\pi)=1$ et $f'(\pi)=0$

$f'' + \frac{1}{9}f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'' + (\frac{1}{3})^2 f = 0$

les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$f(x) = A\cos(\frac{1}{3}x) + B\sin(\frac{1}{3}x) \quad (A\in\mathbb{R},\ B\in\mathbb{R})$

On a: $f'(x) = -\frac{1}{3}A\sin(\frac{1}{3}x) + \frac{1}{3}B\cos(\frac{1}{3}x)$

$$\begin{cases} f(\pi)=1 \\ f'(\pi)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cos(\frac{\pi}{3}) + B\sin(\frac{\pi}{3}) = 1 \\ -\frac{1}{3}A\sin(\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{3}B\cos(\frac{\pi}{3}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 1 \\ -\frac{A}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{B}{3}\times\frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Donc $f(x) = \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{3}x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{1}{3}x)$

Scanned by CamScanner

PROBLEME : Partie A du problème du bac 2002. Session normale.

1. Montrons que la fonction définie par $g(x)=x-1$ est solution de (E).

$g(x)=x-1$ est solution de (E) si et seulement si $g'(x)+2g(x)=2x-1$

On a : $g(x)=x-1$ donc $g'(x)=1$

$g'(x)+2g(x)=1+2(x-1)=1+2x-2=2x-1$

$g'(x)+2g(x)=2x-1$ d'où $g(x)=x-1$ est solution de (E).

2. On donne l'équation différentielle (E '): $f'(x)+2f(x)=0$.

a. Résolution de (E ').

(E ') est de la forme $f'+af=0$ avec $a=2$.

Les solutions de (E') sont donc les fonctions de la forme ke^{-2x} $(k\in\mathbb{R})$

b. Montrons que les fonctions $f_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que : $f_k(x)=ke^{-2x}+x-1$ sont solutions de (E).

$f_k(x)=ke^{-2x}+x-1$ est solution de (E) si et seulement si $f_k'(x)+2f_k(x)=2x-1$.

On a: $f_k(x)=ke^{-2x}+x-1$ donc $f'_k(x)=-2ke^{-2x}+1$

$f_k'(x)+2f_k(x)=-2ke^{-2x}+1+2(ke^{-2x}+x-1)=2x-1$

$f_k'(x)+2f_k(x)=2x-1$ d'où les fonctions $f_k(x)=ke^{-2x}+x-1$ sont solutions de (E).

3. a. Montrons que si f est solution de (E) alors $f-g$ est solution de (E ').

Si f est solution de (E) alors $f'(x)+2f(x)=2x-1$

Or: $g'(x)+2g(x)=2x-1$. D'où: $f'(x)+2f(x)=g'(x)+2g(x)$

$(f'(x)+2f(x))-(g'(x)+2g(x))=0 \Leftrightarrow f'(x)+2f(x)-g'(x)-2g(x)=0$

$f'(x)-g'(x)+2f(x)-2g(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-g'(x)+2(f(x)-g(x))=0$

Donc $f-g$ est solution de (E ').

b. En déduisons les solutions de (E).

D'après la question 2.a) Les solutions de (E') sont les fonctions de la forme ke^{-2x} $(k\in\mathbb{R})$

Donc : $(f-g)(x)=ke^{-2x}$

D'où: $f(x)=ke^{-2x}+g(x)=ke^{-2x}+x-1$

Scanned by CamScanner

CHAPITRE IX: PROBABILITES

Jacques ou Jakob BERNOULLI (27 décembre 1654, Bâle - 16 août 1705) est un mathématicien et physicien suisse, frère de Jean Bernoulli et oncle de Daniel Bernoulli et Nicolas Bernoulli.

Son père, conseiller d'état et riche commerçant, le force d'abord à étudier la théologie. Mais cette discipline n'intéresse pas Jacques qui contre la volonté de son père se tourne vers les sciences, plus particulièrement les mathématiques.

Sa devise est « Invito sidera verso » (J'étudie les étoiles contre la volonté de mon père).

Il se consacre à la physique et aux mathématiques.

Il enseigne à l'université de Bâle à partir de 1682, devenant professeur de mathématiques en 1687.

Il mérita par ses travaux et ses découvertes d'être nommé associé de l'Académie des sciences de Paris (1699) et de celle de Berlin (1701).

Jacques **BERNOULLI** est l'auteur du premier ouvrage sur les probabilités (***Ars conjectandi***, ouvrage posthume de 1713). Il y définit clairement les probabilités et introduit des notations encore en vigueur. Il perfectionne également le calcul infinitésimal de Leibniz.

C'est également l'inventeur des coordonnées polaires, souvent utilisées en géométrie et dans l'étude des nombres complexes. Il développe encore le calcul intégral et étudie précisément la fonction exponentielle et ses liens avec les fonctions logarithmiques.

Enfin, on peut citer la fameuse inégalité de **BERNOULLI**, (bien qu'elle fût démontrée 19 ans avant lui par Barrow) :

Pour $x > -1$ et n entier strictement supérieur à 1, $(1+x)^n < 1 + nx$.

Cette inégalité rentre dans une des constructions de la fonction exponentielle.

BERNOULLI a également découvert une méthode pour calculer le nombre pi.

Scanned by CamScanner

FICHE DE COURS

Quel modèle de dénombrement choisir?

- Si l'énoncé contient le mot **successif**, il faut tenir compte de tous les ordres dans lesquels on peut obtenir un événement donné.

On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

- Si l'énoncé contient les mots : **successif et avec remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.

Le modele mathématique est la **p-liste.**

- Si l'énoncé contient les mots **successif et sans remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments).

Le modèle mathématique est l'**arrangement**.

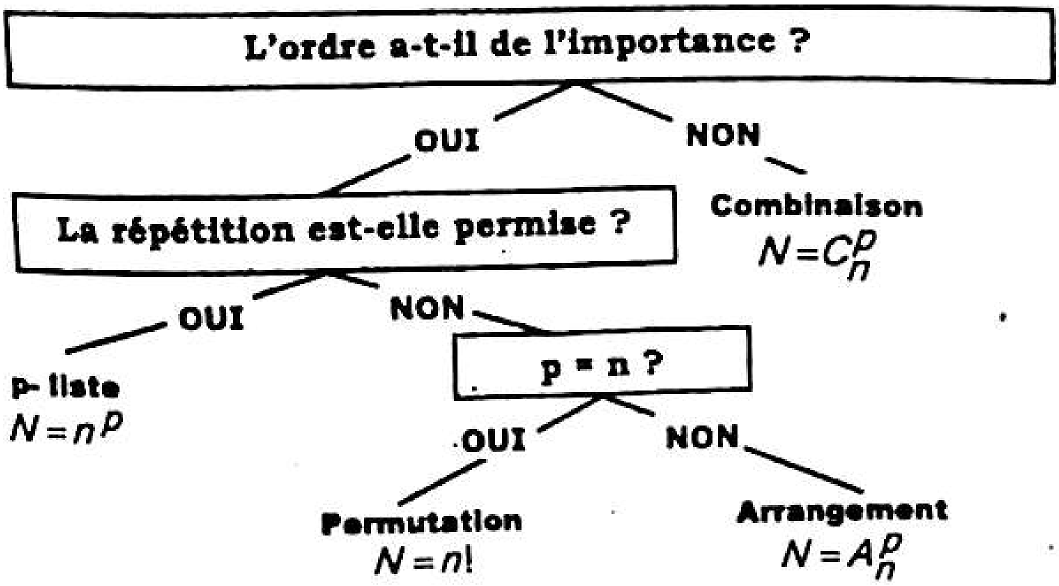
- Si l'énoncé contient le mot **simultanément**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments n'a pas d'importance.

Le modèle mathématique est la **combinaison**.

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.

Les principaux modèles de dénombrement

On fait un tirage de p éléments d'un ensemble qui contient n éléments.



Scanned by CamScanner

1. Probabilité simple

Dans une épreuve où tous les évènements élémentaires d'un univers Ω sont équiprobables, la probabilité d'un évènement A est le nombre réel $P(A)$ défini par :

$$P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables à la réalisation de A}}{\text{nombre total de cas possibles}}$$

2. Probabilité conditionnelle

Soient 2 évènements A et B de probabilité non nulle tels que $A \cap B \neq \varnothing$.

La probabilité de réalisation de A quand B est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B ou probabilité de A sachant B.

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

3. Indépendance

Deux évènements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'autre.

On a alors : $\begin{cases} P_B(A) = P(A) \\ P_A(B) = P(B) \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

4. Espérance mathématique d'une variable aléatoire

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + \dots + x_n p_n$$

5. Variance et écart-type d'une variable aléatoire

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum x_i^2 p_i - (E(X))^2 \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

6. Epreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve aléatoire ne conduisant qu'à 2 éventualités.

L'une de ces 2 éventualités est appelée succès avec pour probabilité p et l'autre échec avec pour probabilité $q = 1 - p$.

7. Loi binomiale

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Soit p la probabilité du succès et $q = 1 - p$ celle de l'échec.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de succès.

La probabilité d'avoir exactement k succès est : $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

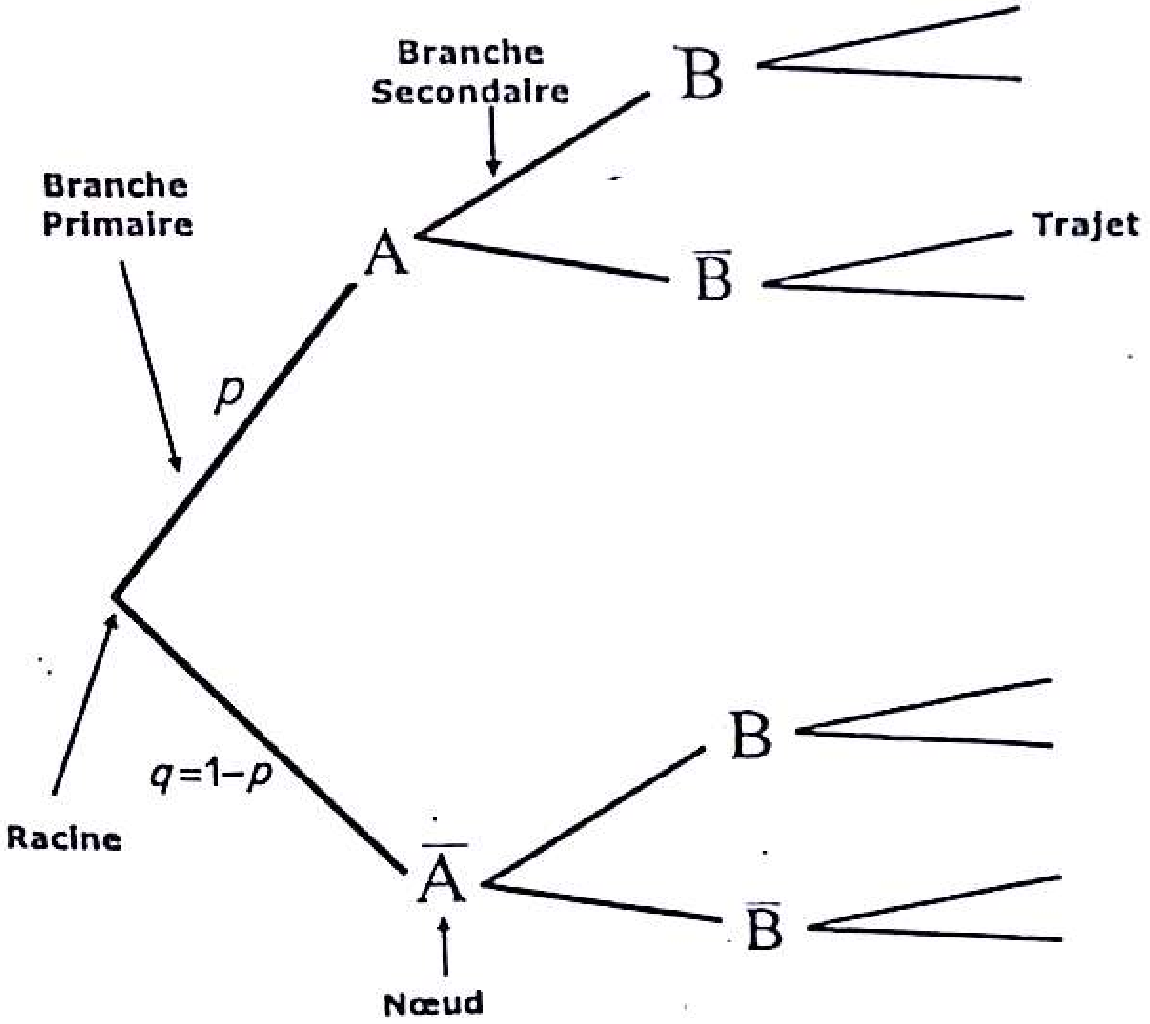
Scanned by CamScanner

METHODES PRATIQUES

Méthode: Comment construire un arbre pondéré ?

Pour construire un arbre pondéré, on peut appliquer les règles suivantes

1. Les évènements qui se trouvent aux extrémités des branches primaires forment une partition de l'univers Ω.
2. Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.
3. La somme des poids des branches primaires vaut 1.
4. Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.
5. La somme des poids des branches secondaires issues d'un même nœud vaut 1.
6. Le poids ou la probabilité d'un trajet est le produit des branches le constituant.
7. La probabilité d'un évènement associé à plusieurs trajets complets est la somme des probabilités de ces trajets.



EXERCICES RESOLUS

PROBABILITÉS SIMPLES

EXERCICE 1. Bac A 1995. Session normale.

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une boite contient 12 gâteaux emballés séparement dans 12 paquets identiques.
5 de ces gâteaux sont parfumés à la vanille, 4 autres au chocolat et les 3 derniers à la banane.

Partie A.

Un enfant choisit simultanément 3 gâteaux.

1. Combien y-a-t-il de choix possibles ?

2. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi :

a. Un gâteau de chaque sorte ?

b. 3 gâteaux identiques ?

c. Exactement 2 variétés de gâteaux?

Partie B. (Spécifique à la série A1)

S'il mangeait un gâteau le matin, un gâteau à midi et un gâteau le soir :

1. Combien aurait-il eu de choix possibles ?

2. Quelle aurait été la probabilité de prendre :

a. un gâteau à la vanille le matin, un gâteau au chocolat à midi, un gâteau à la banane le soir ?

b. Un gâteau de chaque sorte ?

c. deux gâteaux à la banane et un au chocolat ?

EXERCICE 2 : Bac A Sénégal session 2000

Une urne contient 3 boules jaunes, cinq boules rouges et deux boules vertes.

A. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité d'avoir un tirage unicolore ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules de même couleur ?

B. On tire successivement sans remise trois boules.

1. Quelle est la probabilité d'avoir des boules rouges uniquement ?
2. Quelle est la probabilité de ne pas avoir une boule verte au deuxième tirage ?

EXERCICE 3. Bac A 1992. Session de remplacement.

Les 10 lettres du mot « MULTIPARES » sont inscrites sur 10 petits cartons rectangulaires, placés dans un sac.

Tout alignement de 5 de ces cartons est appelé « mot » qu'il ait une signification au non.

On tire au hasard, successivement 5 cartons que l'on aligne dans l'ordre où ils se présentent.

1. Combien de mots de 5 lettres peut-on former ?

2. Combien peut-on former de mots de 5 lettres

a. commençant par la lettre A ?

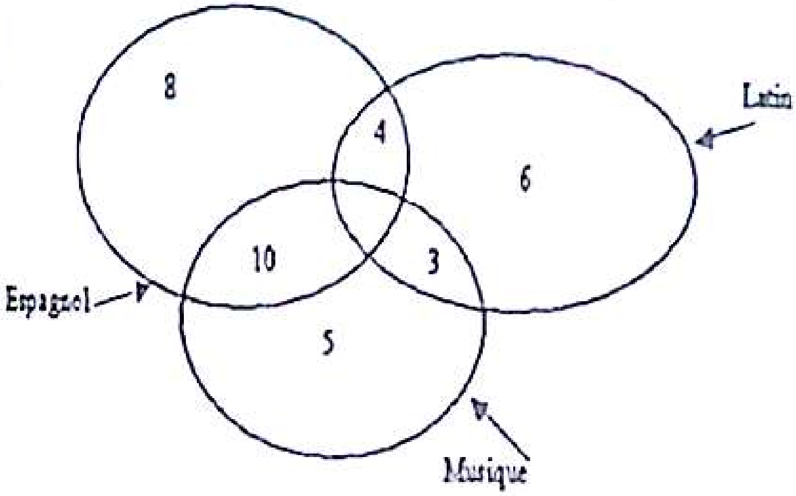
b. commençant et se terminant par une consonne ?

c. comportant exactement une voyelle ?

Scanned by CamScanner

EXERCICE 4.

Trois options sont offertes aux élèves d'une classe : espagnol, latin, musique
Chaque élève choisit une ou deux options. Le schéma ci-dessous indique le nombre d'élèves pour chaque combinaison d'options possible.



On choisit un élève au hasard dans cette classe.
Déterminer la probabilité des événements suivants :

1. l'élève étudie l'espagnol,
2. l'élève étudie uniquement l'espagnol,
3. l'élève étudie l'espagnol et le latin,
4. l'élève étudie l'espagnol ou le latin,
5. l'élève étudie uniquement une des deux langues : espagnol ou latin (il peut éventuellement faire aussi de la musique),
6. L'élève étudie une seule des trois options.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

EXERCICE 5.

Une maladie atteint 3% d'une population.
Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95% de tests sont positifs et 5% négatifs.
- Chez les individus non malades, 1% de tests sont positifs et 99% négatifs.

On note : M l'évènement : « être malade » et
T l'évènement : «le test est positif».

1. Construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience aléatoire.
2. Donner la probabilité de l'évènement « $M \cap T$ », puis celle de « $\overline{M} \cap T$ ».
3. Déterminer $p(T)$ et $p(\overline{T})$
4. a. Calculer la probabilité de ne pas être malade, sachant que le test est positif
   b. Calculer la probabilité d'être malade, sachant que le test est négatif.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 6.

Les résultats d'une étude présentes par l'Institut National de la Statistique révèlent

45 % de la population active sont des hommes

25 % des femmes et 20% des hommes de cette population active sont au chômage.

On interroge au hasard une personne

1. Déterminez les probabilités des évènements suivants :

a. H : « Être un homme ».

b. F : « Être une femme ».

c. « Être au chômage sachant qu'on est un homme ».

d. « Être au chômage sachant qu'on est une femme ».

2. Calculez la probabilité pour qu'un individu de cette population active interrogé au hasard soit au chômage.

3. Quelle est la probabilité que l'individu interrogé soit une femme sachant qu'il est au chômage ?

EXERCICE 7.

Dans une usine, la fabrication d'une pièce nécessite son passage sur deux machines.

Notons : M_1 l'évènement « la première machine tombe en panne » et

M_2 l'évènement « la deuxième machine tombe en panne ».

Une étude a permis d'estimer que : $P(M_1) = 0{,}007$ et $P(M_2) = 0{,}004$

Lorsque M_1 est en panne, la probabilité pour que M_2 soit en panne est 0,5.

1. Calculez la probabilité pour que les deux machines soient en panne.

2. Calculez la probabilité pour que M_1 tombe en panne lorsque M_2 est en panne.

EXERCICE 8.

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel : les ingénieurs, les opérateurs de production, les agents de maintenance.

Il y a 8% d'ingénieurs et 82% d'opérateurs de production.

Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 60% des opérateurs de production et 25% des agents de maintenance.

Partie A.

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :

M l'évènement « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;

O l'évènement « le personnel interrogé est un opérateur de production» ;

I l'évènement « le personnel interrogé est un ingénieur» ;

F l'évènement « le personnel interrogé est une femme ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

2. Calculer la probabilité d'interroger :

a. un agent de maintenance ;

b. une femme agent de maintenance ;

c. une femme.

Scanned by CamScanner

Partie B.

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue

Des études ont montré que sur une journée :

- La probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002 ;
- La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003 ;
- La probabilité qu'une panne se produise est égale à **0,04**.

On note :

A l'évènement : « l'alarme se déclenche» ;

B l'évènement : « une panne se produit».

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à **0,037.**
2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

VARIABLES ALÉATOIRES

EXERCICE 9.

Soit une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$

EXERCICE 10.

Un cirque possède 10 fauves dont 4 lions.

Pour chaque représentation, le dompteur choisit 5 fauves au hasard. Soit X la variable aléatoire qui décompte le nombre de lions présentés au cours d'une représentation.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
On donnera les résultats sous forme de fractions.
2. Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 11.

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques : trois de ces secteurs sont rouges, quatre sont blancs et n sont verts (avec n supérieur ou égal à 1).

Un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe ; chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère. Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16F ; s'il est blanc, il perd 12F ; s'il est vert, il lance une deuxième fois la roue : si le secteur repéré est rouge, il gagne 8F ; s'il est blanc, il perd 2F ; s'il est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.

Scanned by CamScanner

X_n est la variable aléatoire égale au gain algébrique à l'issue d'une partie.

1. Déterminez la loi de probabilité de X_n
2. Calculez $E(X_n)$ son espérance mathématique et montrez que $E(X_n)=\dfrac{16n}{(n+7)^2}$
3. f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{16x}{(x+7)^2}$

a. Etudiez les variations de f.

b. Déduisez-en la valeur de n pour laquelle $E(X_n)$ est maximale.

Quelle est la valeur correspondante de $E(X_n)$?

EXERCICE 12. BAC 2005 SESSION NORMALE

PARTIE A

Soit la fonction définie de $[2;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6}$

1. Calculer $f(2)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. Démontrer que : $\forall x\in[2;+\infty[,\ f(x)=6-\dfrac{8x+16}{x^2+5x+6}$
3. a. Démontrer que : $\forall x\in[2;+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{8(x+2)^2}{(x^2+5x+6)^2}$

   b. Dresser le tableau de variation de f.

PARTIE B

Une urne contient : un jeton marqué 1, deux jetons marqués 2 et n jetons marqués 3 ; n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On tire simultanément deux jetons de l'urne.
On suppose que les tirages sont équiprobables.
On désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points marqués sur les deux jetons extraits de l'urne.

1. a. Exprimer en fonction de n les valeurs prises par X.

   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Soit $E(X)$ l'espérance mathématique de X.

a. Démontrer que $E(X)=\dfrac{6n^2+22n+20}{n^2+5n+6}$

b. Déterminer n pour que $E(X)$ soit égale à 5.

c. Déduire de la partie A que : $4.4\le E(X)\le 6$.

Donner une interprétation de cet encadrement.

Scanned by CamScanner

SCHÉMA DE BERNOULLI / LOI BINOMIALE

EXERCICE 13.

On suppose que la probabilité de faire un garçon est $\frac{1}{4}$ Une famille a 5 enfants

Calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 garçons.

EXERCICE 14. Bac 1993. Session de remplacement.

Sur une autoroute, deux carrefours successifs sont munis de feux tricolores A et B.
La couleur du feu B est indépendante de celle du feu A.

La probabilité que le feu A soit vert est $\frac{3}{4}$.

La probabilité que le feu B soit vert est $\frac{1}{2}$.

La probabilité de couleur orange est toujours nulle.

1. Un automobiliste passe aux deux carrefours.

a. Calculer la probabilité qu'il rencontre deux feux verts.

b. Calculer la probabilité qu'il rencontre au moins un feu vert.

2. On ne s'occupe plus que du feu A.

Un automobiliste passe quatre fois à ce carrefour.

X est la variable aléatoire qui a pour valeur le nombre de feux verts que l'automobiliste rencontre.

a. Trouver la loi de probabilité de X.

b. Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X.

Pouvait-on prévoir ce résultat ?

EXERCICE 15.

Un porte-monnaie contient quatre pièces de 500 F CFA et six pièces de 200 F CFA.
Un enfant tire au hasard et simultanément 3 pièces de ce porte-monnaie.

1. Calculer la probabilité de l'évènement A : «tirer trois pièces de 500 F ».

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de pièces de 500 F figurant parmi les trois pièces tirées.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

3. L'enfant répète cinq fois l'expérience en mettant chaque fois les trois pièces tirées dans le porte-monnaie.

Quelle est la probabilité que l'événement A se réalise trois fois à l'issue des cinq tirages ?

EXERCICE 16. Bac 1999. Session normale.

Cet exercice a pour but de déterminer lesquels des avions à 2 ou à 4 moteurs sont les plus sûrs.

Un avion ne s'écrase pas tant que la moitié au moins de ses moteurs fonctionne.

Les moteurs d'un avion tombent en panne de manière indépendante.

Soit p la probabilité pour qu'un moteur tombe en panne.

PARTIE A.

Scanned by CamScanner

Dans cette partie $p=0.1$

1. Calculer la probabilite pour qu'un avion a 2 moteurs s'ecrase
2. Calculer la probabilité pour qu'un avion a 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne
3. Calculer la probabilite pour qu'un avion a 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne.
4. En déduire la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

PARTIE B.

On revient au cas général.

1. Soit $f(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.

Démontrer que : $f(p)=p^2$

2. Soit $g(p)$ la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

Démontrer que : $g(p)=p^2\left(-3p^2+4p\right)$.

3. On pose : $h(p)=f(p)-g(p)$.

a. Etudier le signe de $h(p)$ en fonction de p.

b. En déduire, suivant les valeurs de p, dans quels avions il vaut mieux monter.

EXERCICE 17. Bac D 2003

1. Un dé A, bien équilibré possède : une face numérotée 1; deux faces numérotées 2; une face numérotée 4; une face numérotée 5; une face numérotée 6.

a. On lance une fois le dé A et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro 2 ?

b. On lance 3 fois de suite le dé et on note de la gauche vers la droite les chiffres obtenus successivement. On obtient ainsi un nombre de trois chiffres. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 421?

2. Un autre dé B, bien équilibré possède : une face numérotée 1; deux faces numérotées 2; deux faces numérotées 4; une face numérotée 6.
On lance 3 fois de suite le dé B comme à la question 1.b.

Vérifier que la probabilité d'obtenir le nombre 421 est égale à $\frac{1}{54}$.

3. Une urne contient 4 dés identiques au dé A et 6 dés identiques au dé B.
Egny tire au hasard un dé de l'urne et le lance 3 fois de suite pour obtenir un nombre à 3 chiffres comme décrit précédemment.

a. Démontrer que la probabilité d'obtenir 421 est égale à $\frac{2}{135}$.

b. Egny a obtenu 421 ; calculer la probabilité qu'il ait joué avec un dé de type A.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 18. Bac 2004. Session normale.

Le chargement d'un camion remorque est composé de 60 sacs identiques dont 10 contiennent un produit non déclaré aux services de la douane.

Le trajet à parcourir comporte trois barrages de douane.

A chacun de ces barrages, le contrôle, obligatoire, consiste à examiner le contenu de 5 sacs choisis au hasard (les contrôles effectués aux différents barrages sont indépendants).

I. Le camionneur arrive à un barrage donné.

(On donnera un arrondi d'ordre 1 de chacun des résultats obtenus).

1. Calculer la probabilité pour qu'exactement 2 des 5 sacs contrôlés contiennent le produit non déclaré.

2. Démontrer que la probabilité pour que l'un au moins des 5 sacs contrôlés contienne le produit non déclaré est égale à 0,6.

II. Le camionneur sait que si l'un au moins des sacs du produit non déclaré est découvert à un barrage quelconque, il doit payer une taxe forfaitaire de **10 000F** (dix mille francs) à ce barrage pour être autorisé à continuer son chemin avec tout son chargement.

Si le camionneur ne peut pas payer la taxe forfaitaire, tout son chargement est saisi.

1. On suppose que le camionneur paie la taxe chaque fois que le produit non déclaré est découvert.

On note **X** la variable aléatoire égale à la somme totale que le camionneur peut ainsi dépenser sur l'ensemble de son trajet.

a. Déterminer la loi de probabilité de **X**.

b. Démontrer que l'espérance mathématique est égale à **18 000F.**

2. On suppose que le camionneur n'a pas d'argent pour payer une éventuelle taxe. Calculer la probabilité pour que son chargement soit saisi.

Scanned by CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

PROBABILITÉS SIMPLES

EXERCICE 1.

Les codes informatiques de l'entreprise OMEGA sont constitués de trois chiffres distincts suivis d'une lettre de l'alphabet français.

Deux exemples de codes sont *245A* et 018Q.

1. Démontrer que le nombre de codes possibles est 18 720.

2. Après avoir codé son système, le chef du service informatique a oublié une partie de son code. Il se souvient seulement que :

- la lettre du code est une voyelle ;
- le code contient un seul chiffre pair ;
- aucun des chiffres du code n'est nul.

a. Démontrer que le nombre de codes conformes aux informations précédentes est 1 440.

b. L'informaticien frappe au hasard trois (3) chiffres non nuls et distincts dont un seul est pair et la lettre A.

Calculer la probabilité que l'informaticien trouve le bon code.

(Le résultat sera exprimé sous forme de fraction irréductible).

EXERCICE 2.

Tanoh écrit les lettres de son nom sur 5 cartons et les met dans un chapeau.

Ensuite, il tire successivement et sans remise 3 cartons du chapeau qu'il dépose devant lui de gauche à droite.

Il obtient alors un mot (ayant un sens ou non).

1. Vérifier que l'on peut ainsi écrire 60 mots différents.

2. Parmi ces mots :

a. Combien finissent par la lettre T ?

b. Combien ne comportent aucune voyelle ?

c. Combien commencent par une consonne ?

d. Combien comportent une seule consonne ?

3. Démontrer que la probabilité d'avoir un mot terminé par T est 0,2.

4. Calculer la probabilité d'avoir un mot comportant au moins une voyelle.

5. Calculer la probabilité d'avoir un mot comportant les lettres O et H.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES ET INDÉPENDANCE

EXERCICE 3.

Une urne contient quatre boules : deux blanches et deux noires.

On tire au hasard une boule de l'urne, puis sans la montrer et sans la remettre dans l'urne, on en tire une seconde.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. Sachant que la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que :

a. la première soit blanche ?

b. la première soit noire ?

Scanned by CamScanner

EXERCICE 4.

La production d'une usine est assurée à 60% par une machine A et à 40% par une machine B.

La machine A fabrique 1% de pièces défectueuses et la machine B, 3%.

On choisit une pièce au hasard à la sortie de l'usine.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité que :

a. cette pièce soit défectueuse et produite par B ?

b. cette pièce soit défectueuse ?

c. cette pièce ait été produite par B sachant qu'elle est défectueuse ?

EXERCICE 5.

Une usine fabrique des pièces.

Une étude statistique a montré que 2% de la production est défectueuse.

Chaque pièce est soumise à un contrôle de fabrication.

Ce contrôle refuse 99% des pièces défectueuses et accepte 97% des pièces non défectueuses.

On choisit au hasard une pièce avant son passage au contrôle.

Calculer la probabilité que la pièce soit acceptée.

EXERCICE 6.

Dans une usine, trois machines M1, M2 et M3 produisent respectivement 50%, 30% et 20% des pièces.

Parmi les pièces produites par ces machines, il y a respectivement 2%, 3% et 5% de pièces défectueuses.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité d'obtenir :

a. une pièce défectueuse.

b. une pièce défectueuse provenant de la machine M1.

EXERCICE 7.

Une classe est constituée de 12 garçons et 24 filles.

8 garçons et n filles de cette classe ont choisi de pratiquer la musique.

On choisit au hasard un élève de cette classe.

1. Calculez la probabilité des évènements :

a. G : « cet élève soit un garçon ».

b. Il pratique la musique sachant que c'est un garçon.

2. a. Exprimer en fonction de n, la probabilité de P(M) de l'évènement :

« l'élève pratique la musique».

b. Pour quelle valeur de n, P(M) et P(G) sont-ils indépendants ?

EXERCICE 8.

Le sang humain est classé en 4 groupes distincts A, B, AB et O.

Indépendamment du groupe, le sang peut posséder ou non le facteur Rhésus.

Quand le sang possède ce facteur, il est dit de Rhésus positif (Rh+) ; sinon, il est dit de Rhésus négatif (Rh-).

Dans une population, les groupes sanguins se répartissent comme suit :

Scanned by CamScanner

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

Pour chaque groupe sanguin, les proportions d'individus possédant ou non le facteur Rhésus sont les suivantes :

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	82%	81%	83%	80%
Rh-	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant un sang du groupe O et Rh- est appelé un donneur universel.
On choisit un individu au hasard.
1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité que cet individu :
a. soit du groupe O ?
b. soit un donneur universel ?
c. ait un sang Rh - ?
3. Si cet individu est choisi parmi ceux ayant le facteur Rh -, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas du groupe O ?

EXERCICE 9.

Pour prévenir deux défectuosités A et B des pièces fabriquées par une usine, on décide de soumettre l'ensemble des pièces à des tests. Les études statistiques menées sur un grand effectif ont montré que :
8 % des pièces présentent le défaut A ;
Parmi les pièces présentant le défaut A, 15 % ont le défaut B ;
Parmi les pièces ne présentant pas le défaut A, 5 % ont le défaut B.
On prend au hasard une pièce produite et on considère les évènements suivants :
A : «la pièce présente le défaut A » et B : «la pièce présente le défaut B ».
1. Une pièce est prise au hasard.
a. Calculez la probabilité qu'elle présente les deux défauts A et B.
b. Calculez la probabilité qu'elle présente le défaut B et ne présente pas le défaut A.
c. En déduire que la probabilité de B est égale à 0,058.
2. Démontrez que la probabilité d'obtenir une pièce bonne (c'est-à-dire ne présentant ni le défaut A, ni le défaut B) est 0,874.
3. La pièce tirée au hasard présente le défaut B.
Quelle est la probabilité pour qu'elle présente le défaut A ?
4. La pièce tirée au hasard ne présente pas le défaut B.
Quelle est la probabilité pour qu'elle présente le défaut A ?

EXERCICE 10.

On soumet, à la naissance, une population d'enfants à un test pour dépister la présence d'un caractère génétique A.
La probabilité qu'un enfant ayant le caractère A ait un test positif est 0,99.
La probabilité qu'un enfant n'ayant pas le caractère A ait un test négatif est 0,98.

Scanned by CamScanner

On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant sur 1000 était porteur du caractère A.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité qu'un enfant pris au hasard dans la population étudiée ait un test positif.
3. Déterminer la probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère A.

EXERCICE 11.

On dispose de deux urnes A et B.
L'urne A contient 4 boules blanches et 1 boule noire.
L'urne B contient 2 boules blanches et 3 boules noires.
On choisit une urne au hasard, puis une boule dans l'urne choisie.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire
   a. sachant que l'urne choisie est A ?
   b. sachant que l'urne choisie est B ?
3. En déduire la probabilité de tirer une boule noire.

EXERCICE 12.

Une étude épidémiologique concernant une certaine maladie a été réalisée dans des familles ayant deux enfants de moins de 10 ans, une fille et un garçon.
On a constaté que 20% des filles et 50% des garçons sont touchés par la maladie.
Par ailleurs, dans les familles où la fille est touchée par la maladie, le garçon l'est aussi dans 70 % des cas.
On choisit au hasard une des familles ayant fait l'objet de cette étude.
Calculez la probabilité des évènements suivants :

1. A : « Les deux enfants sont atteints par la maladie » ;
2. B : « Au moins un des deux enfants est atteint » ;
3. C : « Aucun des deux enfants n'est atteint » ;
4. D : « La fille soit atteinte sachant que le garçon l'est aussi » ;
5. E : « La fille soit atteinte sachant que le garçon ne l'est pas ».

VARIABLES ALÉATOIRES

EXERCICE 13.

Soit une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est partiellement donnée par le tableau suivant :

x_i	-1	0	2	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	....	$\frac{1}{6}$

1. Compléter le tableau.
2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 14.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-1	0	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

Représenter la fonction de répartition de X, notée F.

EXERCICE 15.

Une urne contient six boules indiscernables : deux vertes et quatre rouges.

On tire simultanément trois boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

EXERCICE 16.

On lance deux pièces équilibrées.

On note X la variable aléatoire qui associe à chaque lancer le nombre de « FACE ».

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Représenter la fonction de répartition de X.

EXERCICE 17.

Toutes les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient huit boules blanches et deux boules rouges.

Un joueur extrait simultanément trois boules de l'urne.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. A l'issue d'un tirage de trois boules :
- si aucune boule n'est rouge, le joueur perd 10 francs ;
- si une seule boule est rouge, le joueur gagne 5 francs ;
- si deux boules sont rouges, le joueur gagne 20 francs.

X est la variable qui associe le gain algébrique du joueur à l'issue d'un tirage.

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer $E(X)$.l'espérance mathématique de X.

2. Le joueur joue deux fois de suite selon les mêmes règles en remettant dans l'urne, après chaque tirage, les trois boules extraites.

Y est la variable aléatoire qui associe le gain algébrique du joueur à l'issue des deux tirages. Donner les valeurs possibles pour Y.

Déterminer la probabilité que le joueur gagne exactement 10 francs à l'issue des deux parties. (On pourra s'aider d'un arbre).

Scanned by CamScanner

SCHÉMA DE BERNOULLI/ LOI BINOMIALE

EXERCICE 18.

On lance une pièce équilibrée quatre fois de suite.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois FACE ?
2. Combien de fois faut-il lancer la pièce pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois FACE soit supérieure à 0,99 ?

EXERCICE 19.

Les quatre faces d'un dé tétraédrique régulier sont numérotées de 0 à 3.

On suppose que, lorsque l'on jette le dé, chaque face a la même probabilité d'être cachée.

On considère la variable aléatoire X égale au produit des trois numéros visibles.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. On jette le dé cinq fois de suite.

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois l'évènement « $X = 0$ » ?

3. Quel est le nombre minimal de lancers de dé pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois « $X = 0$ » dépasse 0,99999 ?

EXERCICE 20.

1. Une entreprise fabrique des vélos de course dans deux usines A et B.

Pour un période donnée, l'usine A fabrique 2400 vélos dont 6% sont défectueux, l'usine B fabrique 4000 vélos dont 7% sont défectueux.

Ces deux productions sont stockées dans le dépôt central de l'entreprise.

On tire au hasard l'un de ces vélos.

a. Quelle est la probabilité pour que ce vélo soit défectueux ?

b. Quelle est la probabilité pour que ce vélo ne soit pas défectueux?

2. Des tests effectués sur les vélos vendus ont montré que 90% de ces vélos fonctionnaient encore parfaitement à la fin de la période de garantie.

Un club cycliste en achète 6.

Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de vélos qui fonctionnent parfaitement au terme de la période de garantie.

a. Expliquez pourquoi la loi de probabilité de X est une loi binomiale.

Quelle est son espérance mathématique ?

b. Quelle est la probabilité pour qu'au terme de la période de garantie :

b1. Tous les vélos fonctionnent ?

b2. Aucun vélo ne fonctionne ?

b3. Au moins la moitié des vélos achetés fonctionne ?

b4. Au plus la moitié des vélos fonctionne ?

Scanned by CamScanner

PROBLEMES DE SYNTHESE

EXERCICE 21. Bac blanc 2009. Groupe Scolaire les Archanges.

Une université propose aux étudiants trois orientations et trois seulement :
Une filière A, une filière B et une filière C.
Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une des trois filières et une seule.

- Les effectifs de la filière A sont le double de ceux de la filière B.
- Les effectifs de la filière B sont le triple de ceux de la filière C.

On sait de plus que :

- 20% des étudiants de la filière A sont des filles ;
- 30% des étudiants de la filière B sont des filles ;
- 40% des étudiants de la filière C sont des filles.

On choisit au hasard un étudiant de cette université.
On note A l'évènement : « L'étudiant est inscrit dans la filière A».
On note B l'évènement : « L'étudiant est inscrit dans la filière B».
On note C l'évènement : « L'étudiant est inscrit dans la filière C».
On note F l'évènement : « L'étudiant est une fille».
On note G l'évènement : « L'étudiant est un garçon».

1. Calculer les probabilités des évènements A, B, et C.
2. Réaliser un arbre de choix pondéré.
3. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A et soit une fille.
4. Montrer que $p(F)=\frac{1}{4}$
5. Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A sachant que c'est une fille.
6. L'étudiant, choisi au hasard, n'est pas inscrit dans la filière A.
Calculer alors la probabilité que ce soit une fille.
7. On prend cinq (5) étudiants.
On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de filles parmi les 5 étudiants.
a. Donner les différentes valeurs prises par la variable aléatoire X.
b. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.

EXERCICE 22. Bac blanc 2009. Lycée municipal 1 d'Attécoubé.

Deux caisses indiscernables A et B contiennent des poulets indiscernables au toucher.
La caisse A contient 4 poulets rouges et 2 poulets noirs.
La caisse B contient 3 poulets rouges et 1 poulet noir.

1. On choisit une caisse au hasard, on tire au hasard un poulet de cette caisse et on note la couleur du poulet.
Démontrer que la probabilité pour que le poulet choisi soit rouge est égale à $\frac{17}{24}$

Scanned by CamScanner

2. De la caisse choisie, on tire simultanément et au hasard deux poulets.
Calculer la probabilité de tirer au moins un poulet noir.
3. Le client paie alors **1000 F** pour un poulet noir tiré et **2000 F** pour un poulet rouge tiré.
Soit X la variable aléatoire qui associe la somme à payer après chaque tirage simultané de deux poulets.
a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
b. Déterminer la loi de probabilité de X.
c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
4. Le client reprend n fois l'expérience de la question 2.$(n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2)$.
a. Déterminer en fonction de n la probabilité de ne jamais tirer de poulet noir.
En déduire la probabilité P_n de tirer au moins un poulet noir.
b. Calculer la valeur minimale de n pour que l'on ait $P_n \geq 0{,}8$

EXERCICE 23. Bac D 2003. Burkina Faso.

Dans une famille donnée, on admet qu'une naissance donne un garçon, une fille ou des jumeaux. Une naissance donne dans 30% des cas un garçon et dans 50% des cas une fille. On admet que le sexe de l'enfant ne dépend pas des naissances précédentes.
1.a) Quelle est la probabilité pour qu'une naissance donne des jumeaux dans la famille ?
b) Calculer la probabilité pour que les trois premières naissances donnent des filles et la quatrième donne un garçon.
2. On suppose qu'il a n naissances dans une famille.
a) Calculer en fonction de n la probabilité P_n d'avoir au moins une naissance donnant des jumeaux.
b) Déterminer le nombre minimal n_0 de naissances pour que P_n soit supérieur ou égal à 0,97.
3. On suppose qu'il y a trois naissances successives dans la famille et l'on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'enfants possibles issus des trois naissances.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.
On donne $\dfrac{\ln(0{,}03)}{\ln(0{,}8)} \simeq 15{,}95$

EXERCICE 24. Bac 1998. Session de remplacement.

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier et homogène dont les quatre faces sont marquées des nombres **1, 3,7** et **10**. Lorsque le dé est posé, trois faces sont visibles.
1. Calculer la probabilité pour que le dé se pose sur une face donnée.
2. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des nombres visibles après un lancer.
a. Donner l'ensemble des valeurs prises par X.

Scanned by CamScanner

b. Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 14)$.
Soit n un entier naturel non nul. On lance le dé n fois et après chaque lancer, on calcule la somme X des nombres visibles.
3. a. Calculer la probabilité P_n pour que l'évènement $(X \geq 14)$ se réalise au moins une fois au cours des n lancers.
b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle on a : $P_n \geq 0{,}999$.

EXERCICE 25. Bac 1997. Session normale.

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés dont les faces sont numerotées de 1 à 6.
On dit qu'on obtient un « double » si les deux faces supérieures des dés portent des chiffres identiques.
A chaque lancer, si le joueur fait un « double », il gagne 500F ; sinon il perd 100F.
1. On lance les dés une fois. Calculer la probabilité de gagner 500F.
2. On lance les dés trois fois..
Soit X la variable aleatoire associée à la somme gagnée ou perdue après les 3 lancers.
a. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
b. Etablir la loi de probabilité de X.
3. On lance les dés n fois.
a. Calculer, en fonction de n, la probabilité, notée q_n, de ne jamais faire un « double ».
b. Calculer, en fonction de n, la probabilité, notée P_n, de faire au moins un « double ».
c. Quelle est la valeur minimum de n pour que l'on ait $P_n \leq 0{,}8$

On prendra : $\ln 0.2 = -1.61$; $\ln\frac{5}{6} = -0{,}19$.

EXERCICE 26. Bac 1995. Session normale.

Un sac contient 6 boules jaunes, 3 boules vertes et une boule rouge indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 2 boules.
1. Quelle est la probabilité de tirer 2 boules de même couleur?
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 boules, associe :
  + 2 si les deux boules sont de même couleur et
  - 2 si les deux boules sont de couleurs différentes.
a. Déterminer la loi de probabilité de X.
b. Vérifier que : $E(X) = -0{,}4$.
3. On recommence 3 fois la même épreuve, en notant à chaque fois la valeur X obtenue, et en remettant les deux boules dans le sac après chaque tirage.
Soit Y la variable aléatoire égale à la somme des 3 valeurs obtenues par X.
a. Déterminer la loi de probabilité de Y.
b. Calculer l'espérance mathématique de Y.
c. Interpréter le résultat obtenu à la question **3.b.**
Les résultats seront donnés sous forme de nombres décimaux d'ordre 3.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 27. Bac D 2008. Burkina Faso/ 2nd tour.

Un sac contient six boules numérotés de 0 à 5.
On en extrait simultanément deux boules, qui portent respectivement les numéros x et y. A chaque tirage, on associe la variable aléatoire X définie de la façon suivante :

- Si x et y sont pairs, X prend la valeur $\frac{x+y}{2}$.
- Si x et y sont impairs, X prend la valeur $\frac{|x-y|}{2}$.
- Si x et y sont de parités différentes, on attribue à X prend la valeur 0 (zéro). (On rappelle que zéro est pair).

1.a) Déterminer les valeurs proises par X.
  b) Etablir la loi de probabilté de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X.
3. On extrait dix fois de suite deux boules simultanément avec remise.
Quelle est la probabilité d'obtenir sept fois x et y de même parité ? (On exprimera le résultat sous forme de puissances de 2, de 3 et de 5)

EXERCICE 28. Bac 1996. Session normale.

PARTIE A.

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher: $\begin{cases} 6 \text{ Boules BLANCHES} \\ 4 \text{ Boules ROUGES} \end{cases}$

On tire 2 boules simultanément.
1. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 2 boules, associe le nombre de boules rouges tirées.
a. Donner la loi de probabilité de X.
b. Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Calculer la probabilité pour que les 2 boules tirées soient de même couleur.

PARTIE B.

Soit un entier n tel que : $2 \leq n \leq 8$.

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : $\begin{cases} n \quad \text{Boules BLANCHES} \\ 10-n \ \text{Boules ROUGES} \end{cases}$

On tire 2 boules simultanément.
1. Démontrer que la probabilité $P(n)$ de tirer 2 boules de la même couleur est :

$$P(n) = \frac{2n^2 - 20n + 90}{90}$$

2. Quel doit être le nombre n de boules blanches pour que $P(n)$ soit minimum ? Calculer ce minimum.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 29. Bac 2013. Burkina Faso/ 2nd tour.

1. Une urne contient dix boules indiscernables au toucher, dont quatre portent le chiffre 1 et six portent le chiffre 5. On tire simultanément deux de ces boules.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « Tirer deux boules portant chacune le chiffre 1»
B : « Tirer deux boules portant chacune le chiffre 5»
C : « Tirer deux boules portant des chiffres différents»
2. On suppose maintenant que l'urne contient a boules portant le chiffre 1 et b boules portant le chiffre 5 avec a + b = 10 $(1 \leq a \leq 9 \text{ et } 1 \leq b \leq 9)$.
Soit X la variable aléatoire égale au total des points marqués sur les deux boules tirées simultanément.
a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
b) Déterminer l'espérance mathématique E(X) en fonction de a.
c) Pour quelles valeurs de a, a-t-on $6 < E(X) < 8$?

EXERCICE 30. Bac 1993. Session normale.

Le propriétaire d'une loterie met en vente des billets numérotés 1 à 50.
La règle du jeu est la suivante :
- Si le numéro du billet se termine par 0 ou 5, le client gagne 2000F.
- Si le numéro du billet se termine par 3 ; 6 ou 9, le client gagne 1000F.
- Dans les autres cas, le client ne gagne rien.

1. Le client choisit un seul billet.
On suppose que chaque billet a la même chance d'être tiré.
a. Quelle est la probabilité pour qu'il gagne 1000F ?
b. Quelle est la probabilité pour qu'il gagne 2000F ?
c. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque billet tiré, associe le gain réalisé.
Calculer $E(X)$.
2. Trouvant qu'il y a trop de gagnants, le propriétaire décide de retirer de la vente un certain nombre n de billets terminés par 0 ou 5 $(0 \leq n \leq 10)$
Le client tire alors un billet parmi ceux restants.
Soit X_n la variable aléatoire qui, à chaque billet tiré, associe le gain réalisé.
a. Déterminer, en fonction de n, $E(X_n)$.
b. En déduire le nombre minimal de billets à retirer pour que : $E(X_n) \leq 500$
3. Le propriétaire enlève 7 billets terminés par 0 ou 5.
Un client tire simultanément 2 billets parmi ceux restants.
a. Quelle est la probabilité pour qu'il gagne 4000F ?
b. Quelle est la probabilité pour qu'il ne gagne pas ?

Scanned by CamScanner

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1.

Partie A.

1. On a un tirage simultané de 3 gâteaux. Il s'agit d'une combinaison

Le nombre total de choix possibles est : $card\Omega = C_{12}^{3} = 220$

2. Calculons les probabilités des évènements suivants:

a. A : « il consomme un gâteau de chaque sorte »

$$card A = C_5^1 \times C_4^1 \times C_3^1 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ donc } P(A) = \frac{card A}{card\Omega} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

b. B : « il consomme 3 gâteaux identiques »

$$card B = C_5^3 + C_4^3 + C_3^3 = 10 + 4 + 1 = 15 \text{ donc } P(B) = \frac{card B}{card\Omega} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

c. C : « il consomme exactement 2 variétés de gâteaux »

$$card C = C_5^2 \times C_7^1 + C_4^2 \times C_8^1 + C_3^2 \times C_9^1 = 10 \times 7 + 6 \times 8 + 3 \times 9 = 145$$

donc $P(C) = \frac{card C}{card\Omega} = \frac{145}{220} = \frac{29}{44}$

Partie B.

1. Dans cette partie, l'ordre est important et il n'y a pas de répétition.

Il s'agit donc d'un arrangement de 3 gâteaux tirés parmi 12.

Le nombre total de choix possibles est : $card\Omega = A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$

2. Calculons les probabilités des évènements suivants:

a. A : «il consomme un gâteau à la vanille le matin, un gâteau au chocolat à midi, un gâteau à la banane le soir».

$$card A = A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ donc } P(A) = \frac{card A}{card\Omega} = \frac{60}{1320} = \frac{1}{22}$$

b. B : «il consomme un gâteau de chaque sorte »

$$card B = \left(A_5^1 \times A_4^1 \times A_3^1\right) \times 3! = 60 \times 6 = 360$$

On multiplie par 3 ! car il faut permuter les 3 variétés de gâteaux pendant les 3 temps de la journée. Donc $P(B) = \frac{card B}{card\Omega} = \frac{360}{1320} = \frac{3}{11}$

c. C : «il consomme deux gâteaux à la banane et un au chocolat »

$$card C = \left(A_3^2 \times A_4^1\right) \times 3 = 24 \times 3 = 72$$

On multiplie par 3 car le gâteau au chocolat peut être mangé en 3 moments différents de la journée (Matin, Midi ou Soir). Donc $P(B) = \frac{card C}{card\Omega} = \frac{72}{1320} = \frac{3}{55}$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 2.

Une urne contient 3 boules jaunes, 5 boules rouges et 2 boules vertes

A. On tire simultanement trois boules de l'urne.

$$card(\Omega)=C_{10}^{3}=120.$$

1. Soit A l'évenement « avoir un tirage unicolore »

Il s'agit de tirer trois boules de même couleur.

$$card(A)=C_{5}^{3}+C_{3}^{3}=10+1=11 \text{ donc } P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{11}{120}.$$

2. Soit B l'évènement « avoir exactement 2 boules de même couleur »

$$card(B)=C_{3}^{2}\times C_{7}^{1}+C_{5}^{2}\times C_{5}^{1}+C_{2}^{2}\times C_{8}^{1}=79 \text{ donc } P(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{79}{120}.$$

B. On tire successivement sans remise trois boules.

$$card(\Omega)=A_{10}^{3}=10\times 9\times 8=720$$

1. Soit C l'évènement « avoir des boules rouges uniquement » ;

$$card(C)=A_{5}^{3}=5\times 4\times 3=60 \text{ donc } P(C)=\frac{card(C)}{card(\Omega)}=\frac{60}{720}=\frac{1}{12}.$$

2. Soit D l'évènement « pas de boules vertes au deuxième tirage ».

$D=D_1\cup D_2$ avec

D_1 : « pas de boules vertes au deuxième tirage mais la 1ère boule tirée est verte » ; et

D_2 « pas de boules vertes au deuxième tirage et la 1ère boule tirée n'est pas verte »

On a : $D_1\cap D_2=\varnothing$

$$card(D_1)=2\times 8\times 8=128 \qquad card(D_2)=8\times 7\times 8=448$$

$$P(D)=\frac{card(D)}{card(\Omega)}=\frac{card(D_1)+card(D_2)}{card(\Omega)}=\frac{128+448}{720}=\frac{576}{720}=\frac{4}{5}$$

EXERCICE 3. Bac A 1992. Session de remplacement.

1. L'ordre est important et il n'y a pas de répétition.

Il s'agit donc d'un arrangement de 5 lettres tirées parmi 10.

$$N_1=A_{10}^{5}=10\times 9\times 8\times 7\times 6=30240 \text{ mots de 5 lettres}$$

2. Déterminons le nombre de mots de 5 lettres :

a. A : « commençant par la lettre A ».

A				
1	9	8	7	6

$$N_A=1\times A_9^4=1\times 9\times 8\times 7\times 6=3024 \text{ mots de 5 lettres}$$

b. B : « commençant et se terminant par une consonne ».

consonne				consonne
6	8	7	6	5

$$N_B=6\times 8\times 7\times 6\times 5=10\,080 \text{ mots de 5 lettres}$$

Scanned by CamScanner

c. C : «comportant exactement une voyelle».

voyelle				
4	6	5	4	3

$$N_C = (4\times6\times5\times4\times3)\times5 = 7\,200 \textit{ mots de 5 lettres}$$

On multiplie par 5 car la voyelle peut occuper 5 positions différentes.

EXERCICE 4.

La classe comprend 36 élèves.

1. Le nombre d'élèves étudiant l'espagnol est égal à : **8 + 4 + 10 = 22.**

Si on choisit un élève au hasard, la probabilité pour qu'il étudie l'espagnol est donc égale à $\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$.

2. Le nombre d'élèves étudiant uniquement l'espagnol est égal à 8.

Si on choisit un élève au hasard, la probabilité pour qu'il étudie uniquement l'espagnol est donc égale à $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

3. Le nombre d'élèves étudiant l'espagnol et le latin est égal à 4.

Si on choisit un élève au hasard, la probabilité pour qu'il étudie l'espagnol et le latin est donc égale à $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

4. Le nombre d'élèves étudiant l'espagnol ou le latin est égal à :
8 + 10 + 4 + 3 + 6 = 31.

Si on choisit un élève au hasard, la probabilité pour qu'il étudie l'espagnol ou le latin est donc égale à $\frac{31}{36}$.

5. Le nombre d'élèves étudiant l'espagnol, l'espagnol et la musique, le latin, le latin et la musique est égal à **8 + 10 + 3 + 6 = 27.**

Si on choisit un élève au hasard, la probabilité pour qu'il étudie l'espagnol, l'espagnol et la musique, le latin, le latin et la musique est donc égale à $\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$.

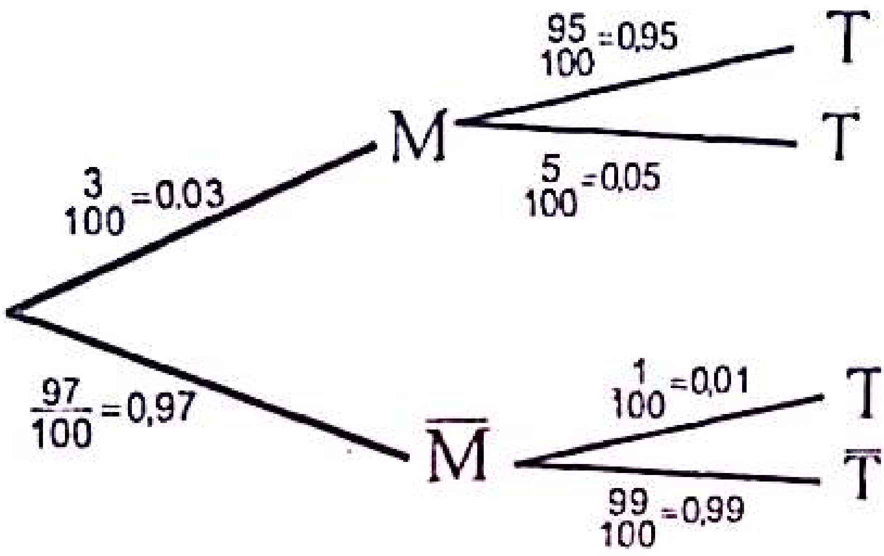
6. Le nombre d'élèves étudiant une seule des trois options est égal à
8 + 6 + 5 = 19.

Si on choisit un élève au hasard, la probabilité pour qu'il étudie une seule des trois options est donc égale à $\frac{19}{36}$.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 5.

1. L'arbre pondéré correspondant à l'expérience aléatoire.



2. Calculons les probabilités des évènements « $M \cap T$ » et « $\overline{M} \cap \overline{T}$ ».

$$p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = \frac{3}{100} \times \frac{95}{100} = \frac{285}{10000} = 0{,}0285$$

$$p(\overline{M} \cap \overline{T}) = p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(\overline{T}) = \frac{97}{100} \times \frac{99}{100} = \frac{9603}{10000} = 0{,}9603$$

3. Déterminer $p(T)$ et $p(\overline{T})$

- $p(T)$ est obtenue en évaluant le poids de l'ensemble des branches terminées par T.

$$p(T) = p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T) = 0{,}0285 + \frac{97}{100} \times \frac{1}{100} = 0{,}0285 + 0{,}0097 = 0{,}0382$$

- $p(\overline{T})$ est obtenue en évaluant le poids de l'ensemble des branches terminées par $\overline{T}$.

$$p(\overline{T}) = p(M \cap \overline{T}) + p(\overline{M} \cap \overline{T}) = \frac{3}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{97}{100} \times \frac{99}{100} = 0{,}9618$$

4. a. La probabilité de ne pas être malade sachant que le test est positif est $p_T(\overline{M})$

$$p_T(\overline{M}) = \frac{p(\overline{M} \cap T)}{p(T)} = \frac{0{,}97 \times 0{,}01}{0{,}0382} = 0.25393$$

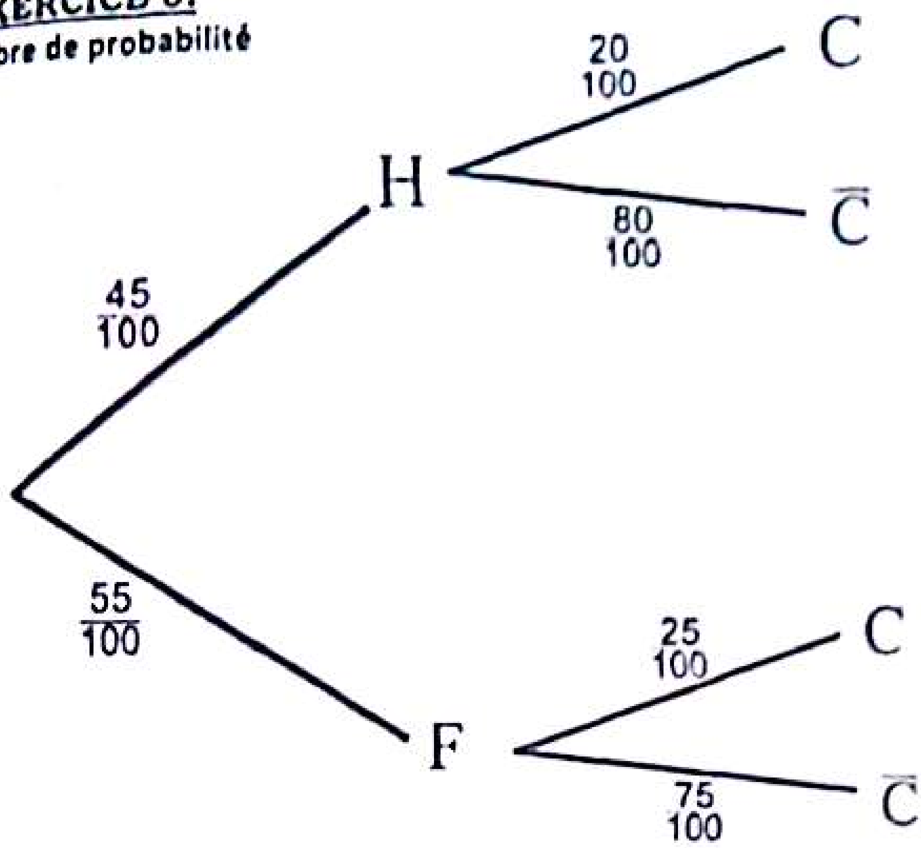
b. La probabilité d'être malade sachant que le test est négatif est $p_{\overline{T}}(M)$

$$p_{\overline{T}}(M) = \frac{p(M \cap \overline{T})}{p(\overline{T})} = \frac{0{,}03 \times 0{,}05}{0{,}9618} = 0{,}00156$$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 6.

Arbre de probabilité



1. Déterminons les probabilités des évènements suivants :

a. H : « Être un homme ». $p(H)=\frac{45}{100}=\frac{9}{20}=0{,}45$

b. F : « Être une femme ». $p(F)=\frac{55}{100}=\frac{11}{20}=0{,}55$

c. « Être au chômage sachant qu'on est un homme ». $p_H(F)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}=0.20$

d. « Être au chômage sachant qu'on est une femme ». $p_F(C)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}=0.25$

2. Calculons la probabilité pour qu'un individu de cette population active interrogé au hasard soit au chômage.

$$p(C)=p(H\cap C)+p(F\cap C)=p(H)\times p_H(C)+p(F)\times p_F(C)$$

$$p(C)=\frac{45}{100}\times\frac{20}{100}+\frac{55}{100}\times\frac{25}{100}=\frac{2275}{10000}=\frac{91}{400}=0{,}228$$

3. Calculons la probabilité que l'individu interrogé soit une femme sachant qu'il est au chômage.

$$p_C(F)=\frac{p(F\cap C)}{p(C)}=\frac{p(F)\times p_F(C)}{p(C)}$$

$$p_C(F)=\frac{\frac{55}{100}\times\frac{25}{100}}{\frac{91}{400}}=\frac{\frac{1375}{10000}}{\frac{91}{400}}=\frac{1375}{10000}\times\frac{400}{91}$$

$$p_C(F)=\frac{5500}{9100}=\frac{55}{91}=0.604$$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 7.

1. Calculons la probabilité pour que les deux machines soient en panne.

$$p(M_1 \cap M_2) = p(M_1) \times p_{M_1}(M_2) = 0,007 \times 0,5 = 0.0035$$

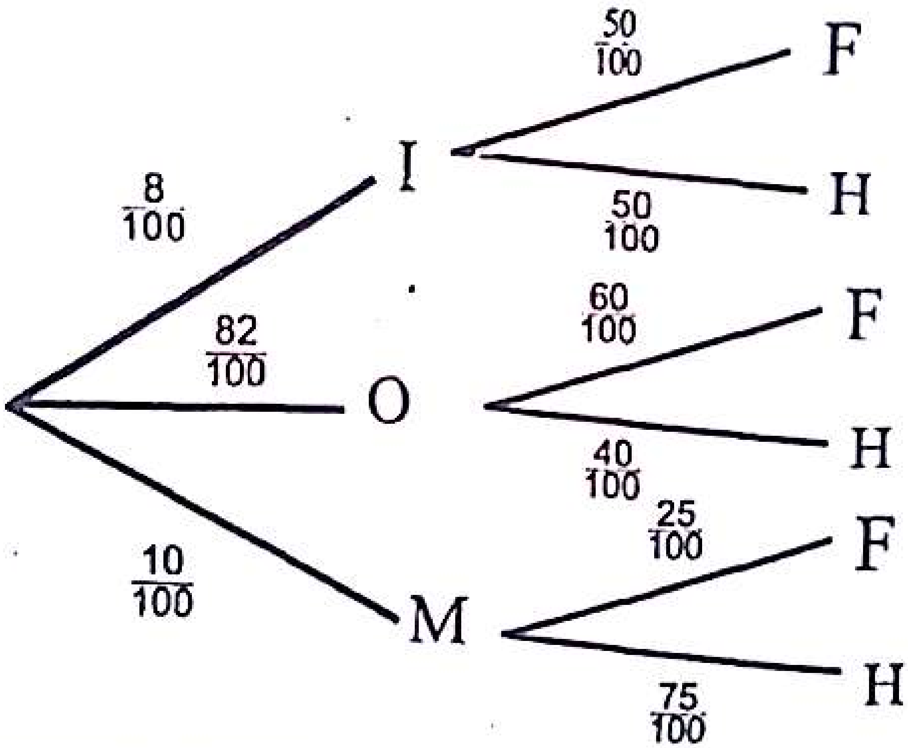
2. Calculons la probabilité pour que M_1 tombe en panne lorsque M_2 est en panne.

$$p_{M_2}(M_1) = \frac{p(M_2 \cap M_1)}{p(M_2)} = \frac{0,0035}{0,004} = 0.875$$

EXERCICE 8.

Partie A.

1. Construction d'un arbre pondéré correspondant aux données.



2. Calculons la probabilité que la personne d'interrogée soit :

a. un agent de maintenance ; $p(H) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$

b. une femme agent de maintenance ;

$$p(M \cap F) = p(M) \times p_M(F) = \frac{10}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{1}{40} = 0,025$$

c. une femme.

$$p(F) = p(I \cap F) + p(O \cap F) + p(M \cap F)$$

$$p(F) = p(I) \times p_I(F) + p(O) \times p_O(F) + p(M) \times p_M(F)$$

$$p(F) = \frac{8}{100} \times \frac{50}{100} + \frac{82}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{25}{100}$$

$$p(F) = \frac{400}{10000} + \frac{4920}{10000} + \frac{250}{10000} = \frac{5570}{10000} = \frac{557}{1000} = 0,557$$

Scanned by CamScanner

Partie B.

1. Démontrons que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.

On veut calculer : $p(B\cap A)$

Or $p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap\overline{A})$ *donc* $p(B\cap A)=p(B)-p(B\cap\overline{A})$

D'où $p(B\cap A)=0{,}04-0{,}003=0{,}037$

2. Calculons la probabilité que l'alarme se déclenche.

$p(A)=p(B\cap A)+p(\overline{B}\cap A)=0{,}037+0{,}002=0{,}039$

3. Calculons la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

$$p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{0{,}037}{0{,}039}=\frac{37}{39}=0{,}949$$

EXERCICE 9.

Calculons $E(X)$ et $\sigma(X)$

$$E(X)=(-2)\times\frac{1}{3}+(-1)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{12}=\frac{-7}{12}$$

$$V(X)=(-2)^2\times\frac{1}{3}+(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{12}-\left(\frac{-7}{12}\right)^2=\frac{251}{144}=1{,}743$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{251}{144}}=1{,}320$$

EXERCICE 10.

1. Le cirque possède 10 fauves dont 4 lions.

Le dompteur choisit au hasard 5 fauves à chaque représentation.

Le dompteur a $C_{10}^{5}=252$ façons de choisir 5 fauves parmi les 10 présents.

Pour k entier compris entre 0 et 4, il y a C_4^k façons de choisir k lions et C_6^{5-k} façons de choisir (5 - k) autres fauves.

Ainsi, nous avons : $p(X=k)=\dfrac{C_4^k\times C_6^{5-k}}{C_{10}^5}$ (k entier compris entre 0 et 4).

Ce qui nous donne la loi de probabilité de X :

xi	0	1	2	3	4
P(X=xi)	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

Scanned by CamScanner

2. L'espérance mathématique de X est donné par :

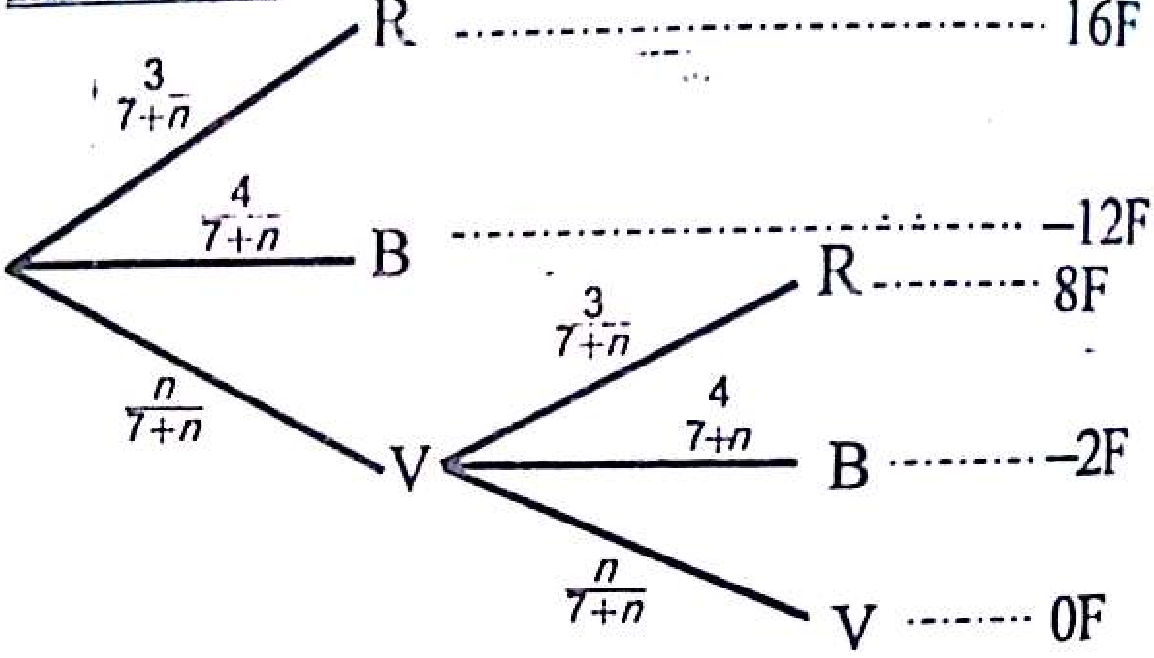
$$E(X)=0\times\frac{1}{42}+1\times\frac{5}{21}+2\times\frac{10}{21}+3\times\frac{5}{21}+4\times\frac{1}{42}=2$$

L'espérance mathématique de X est donc de 2 lions.

Interprétation :

En moyenne, on dénombre deux lions au cours de chaque représentation.

EXERCICE 11.



L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire est :

$X_n=\{-12;-2;0;8;16\}$

1. Déterminons la loi de probabilité de X_n

$$P(X_n=-12)=\frac{4}{7+n}=\frac{4(7+n)}{(7+n)^2}=\frac{28+4n}{(7+n)^2}$$

$$P(X_n=-2)=\frac{n}{7+n}\times\frac{4}{7+n}=\frac{4n}{(7+n)^2}$$

$$P(X_n=0)=\frac{n}{7+n}\times\frac{n}{7+n}=\frac{n^2}{(7+n)^2}$$

$$P(X_n=8)=\frac{n}{7+n}\times\frac{3}{7+n}=\frac{3n}{(7+n)^2}$$

$$P(X_n=16)=\frac{3}{7+n}=\frac{3(7+n)}{(7+n)^2}=\frac{21+3n}{(7+n)^2}$$

Scanned by CamScanner

Loi de probabilité

x_i	-12	-2	0	8	16
$P(X_n = x_i)$	$\frac{28+4n}{(7+n)^2}$	$\frac{4n}{(7+n)^2}$	$\frac{n^2}{(7+n)^2}$	$\frac{3n}{(7+n)^2}$	$\frac{21+3n}{(7+n)^2}$

2. Calculons $E(X_n)$ et montrons que $E(X_n) = \frac{16n}{(n+7)^2}$

$$E(X_n) = (-12)\times\frac{28+4n}{(7+n)^2} + (-2)\times\frac{4n}{(7+n)^2} + (0)\times\frac{n^2}{(7+n)^2} + (8)\times\frac{3n}{(7+n)^2} + (16)\times\frac{21+3n}{(7+n)^2}$$

$$E(X_n) = \frac{-336-48n-8n+0+24n+336+48n}{(7+n)^2} = \frac{16n}{(n+7)^2}$$

3. f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{16x}{(x+7)^2}$

a. Etudions les variations de f.

$$f(x) = \frac{16x}{(x+7)^2} = \frac{16x}{x^2+14x+49}$$

$$f'(x) = \frac{16(x^2+14x+49)-(2x+14)(16x)}{(x^2+14x+49)^2} = \frac{16x^2+224x+784-32x^2-224x}{(x+7)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-16x^2+784}{(x+7)^4} = \frac{-16(x^2-49)}{(x+7)^4} = \frac{-16(x-7)(x+7)}{(x+7)^4} = \frac{-16(x-7)}{(x+7)^3} = \frac{16(7-x)}{(x+7)^3}$$

$\forall x \in [0;+\infty[$, $(x+7)^3 > 0$ *le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(7-x)$*

x	0		7		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\frac{4}{7}$	↘	0

$$f(7) = \frac{16\times7}{(7+7)^2} = \frac{112}{(14)^2} = \frac{112}{196} = \frac{4}{7}$$

Scanned by CamScanner

b. Déduisons la valeur de n pour laquelle $E(X_n)$ est maximale.

$$E(X_n)=\frac{16n}{(n+7)^2}=f(n)$$

On déduit du tableau de variation précédent que $n=7$

et on tire $E(X_7)=f(7)=\frac{4}{7}$

EXERCICE 12. BAC 2005 SESSION NORMALE

A. $f(x)=\frac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6}$

1. $f(2)=\frac{22}{5}=4,4$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+22x+20}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{x^2}=6$$

2. $f(x)=6-\frac{8x+16}{x^2+5x+6}$ obtenu après division euclidienne.

3.a. $f'(x)=\left(6-\frac{8x+16}{x^2+5x+6}\right)'=(6)'-\left(\frac{8x+16}{x^2+5x+6}\right)' \Rightarrow f'(x)=\frac{8(x+2)^2}{(x^2+5x+6)^2}$

b. Tableau de variation:

$f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

x	2 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$4,4 \nearrow 6$

B. La variable aléatoire X ne dépend pas de n dans la question 1.a)

1. a. $X\in\{3;\ 4;\ 5;\ 6\}$.

b. Loi de probabilité

x_i	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{n^2+5n+6}$	$\frac{2n+2}{n^2+5n+6}$	$\frac{4n}{n^2+5n+6}$	$\frac{n^2-2}{n^2+5n+6}$

2.a. Déterminons $E(X)$ l'espérance mathématique de X:

$$E(X)=3\times\frac{4}{n^2+5n+6}+4\times\frac{2n+2}{n^2+5n+6}+5\times\frac{4n}{n^2+5n+6}+6\times\frac{n^2-2}{n^2+5n+6}$$

$$E(X)=\frac{12+8n+8+20n+6n^2-6n}{n^2+5n+6}=\frac{6n^2+22n+20}{n^2+5n+6}$$

Scanned by CamScanner

b. Déterminons n pour que $E(X)$ égale à 5.

$$E(X)=5 \Leftrightarrow \frac{6n^2+22n+20}{n^2+5n+6}=5 \Leftrightarrow 6n^2+22n+20=5(n^2+5n+6)$$

$$\Leftrightarrow n^2-3n-10=0 \Leftrightarrow n=-2 \text{ ou } n=5$$

$n=-2$ ou $n=5$ et $n\in[2;+\infty[$, on retient donc $n=5$.

c. $4{,}4 \leq E(X) \leq 6$

En moyenne, on peut espérer obtenir une somme de points comprise entre 4,4 et 6.

EXERCICE 13.

Avoir une naissance simple conduit à 2 éventualités :

soit on a un garçon, soit on a une fille. C'est donc une épreuve de Bernoulli.

On pourrait considérer l'épreuve « avoir un garçon » comme le succès de probabilité $p=\frac{1}{4}$ et l'épreuve « avoir une fille » comme l'échec de probabilité $q=1-p=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Cinq naissances successives constituent une succession de 5 épreuves de Bernoulli. Pour calculer la probabilité d'avoir exactement 3 garçons, on utilise alors la loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{4}$.

$$P(X=3)=C_5^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2=10\times\frac{1}{64}\times\frac{9}{16}=\frac{90}{1024}=\frac{45}{512}=0{,}088$$

EXERCICE 14.

1\. a . Les deux feux A et B sont indépendants.

La probabilité de rencontrer 2 feux verts est : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$.

b. Soit C : « il rencontre au moins un feu vert».

$$P(C)=P(A)\times P(B)+P(A)\times P(\overline{B})+P(\overline{A})\times P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$$

2\. Il s'agit ici, d'une épreuve de BERNOULLI qui se répète 4 fois.

En effet, à chaque passage, soit il rencontre le feu vert avec une probabilité $p=\frac{3}{4}$ ou il ne le rencontre pas avec une probabilité $q=1-p=\frac{1}{4}$.

a. Les différentes valeurs de la variable aléatoire sont : $X=\{0; 1; 2; 3; 4\}$

$$P(X=0)=C_4^0\left(\frac{3}{4}\right)^0\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$$

$$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{3}{4}\right)^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=4\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{12}{256}$$

Scanned by CamScanner

$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=6\times\frac{9\times1}{4^4}=\frac{54}{256}$

$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^1=4\times\frac{3^3}{4^4}=\frac{108}{256}$

$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\times\left(\frac{1}{4}\right)^0=1\times\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$

X	0	1	2	3	4	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{81}{256}$	1

b. Espérance mathématique

$E(X)=0\times\frac{1}{256}+1\times\frac{12}{256}+2\times\frac{54}{256}+3\times\frac{108}{256}+4\times\frac{81}{256}=\frac{768}{256}=3$

L'on pouvait prévoir ce résultat car la probabilité de rencontrer le feu vert au feu A est $\frac{3}{4}$. Comme il passe 4 fois à ce feu, il a alors 3 chances de rencontrer le feu vert d'où la valeur de $E(X)=3$.

EXERCICE 15.

1. Total des pièces = 10

$P(A)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

2. a. Loi de probabilité

$X(\Omega)=\{0, 1,2,3\}$

$P(X=0)=\frac{C_4^0\times C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$ $P(X=1)=\frac{C_4^1\times C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$

$P(X=2)=\frac{C_4^2\times C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$ $P(X=3)=\frac{C_4^3\times C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$

Loi de probabilité

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$

b. Calcul de l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type :

$E(X)=\sum x_i\cdot p_i=0\times\frac{20}{120}+1\times\frac{60}{120}+2\times\frac{36}{120}+3\times\frac{4}{120}=\frac{144}{120}=\frac{6}{5}=1,2$

Scanned by CamScanner

$$V(X)=\sum x_i^2\cdot p_i=0^2\times\frac{20}{120}+1^2\times\frac{60}{120}+2^2\times\frac{36}{120}+3^2\times\frac{4}{120}-E(X)^2=0,56$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0,56}=0,75$$

3. On a ici une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre n= 5 et $p=\frac{1}{30}$

Soit Y cette variable aléatoire

$$P(Y=3)=C_5^3\times\left(\frac{1}{30}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{30}\right)^2\simeq 3,46.10^{-4}$$

EXERCICE 16.

Soit P la probabilité pour qu'un moteur tombe en panne.

A. Dans cette partie : P = 0,1.

1. La probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.

Un avion à deux moteurs s'écrase si ses deux moteurs sont en panne.

$$P_1=P\times P=P^2=0,1\times 0,1=0,01$$

2. La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait ses 4 moteurs en panne.

$$P_2=P\times P\times P\times P=P^4=0,1\times 0,1\times 0,1\times 0,1=0,0001$$

3. La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne.

L'état de fonctionnement d'un moteur conduit à 2 éventualités : soit il est en panne soit il ne l'est pas. Avoir un moteur en panne est donc une épreuve de Bernoulli.

La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs ait exactement 3 moteurs en panne se détermine par la loi binômiale de paramètres $P=0,1$ et $k=3$.

$$P_3=P(X=3)=C_4^3(0,1)^3(0,9)^1=4\times(0,001)\times(0,9)=0,0036$$

4. La probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a trois moteurs en panne. $P_4=P_2+P_3=0,0001+0,0036=0,0037$

B. On revient au cas général.

1. f (P) est la probabilité pour qu'un avion à 2 moteurs s'écrase.

Démontrons que : $f(P)=P^2$

Un avion à deux moteurs s'écrase si ses deux moteurs sont en panne.

$$f(P)=P\times P=P^2$$

2. g (P) est la probabilité pour qu'un avion à 4 moteurs s'écrase.

Démontrons que : $g(P)=P^2\left(-3P^2+4P\right)$.

Un avion à 4 moteurs s'écrase si ses 4 moteurs sont en panne ou s'il a trois moteurs en panne.

Scanned by CamScanner

$g(P) = P^4 + P(X=3) = P^4 + C_4^3 P^3(1-P) = P^4 + 4P^3(1-P)$

$\qquad = P^4 + 4P^3 - 4P^4 = -3P^4 + 4P^3 = P^2(-3P^2 + 4P)$

$g(P) = P^2(-3P^2 + 4P)$

3. On pose: $h(P) = f(P) - g(P)$.

a. Etude du signe de h (P) en fonction de P.

$h(P) = f(P) - g(P) = P^2 - P^2(-3P^2 + 4P) = P^2(1 + 3P^2 - 4P) = P^2(3P^2 - 4P + 1)$

$P^2 \geq 0 \Rightarrow$ le signe de $h(P)$ dépend du signe de $(3P^2 - 4P + 1)$

$(3P^2 - 4P + 1) = 3(P-1)\left(P - \frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow h(P) > 0$ si $P \in \left]0;\frac{1}{3}\right[$, $h(P) < 0$ si $P \in \left]\frac{1}{3};1\right[$; $h(P) = 0$ si $P \in \left\{\frac{1}{3};1\right\}$

b. En déduisons, suivant les valeurs de P, dans quels avions il vaut mieux monter.

- Si $P \in \left]0;\frac{1}{3}\right[$ alors $h(P) > 0 \Rightarrow f(P) > g(P)$: un avion à 4 moteurs est plus sûr.
- Si $P \in \left]\frac{1}{3};1\right[$ alors $h(P) < 0 \Rightarrow f(P) < g(P)$. un avion à 2 moteurs est plus sûr.
- Si $P \in \left\{\frac{1}{3};1\right\}$ alors $h(P) = 0 \Rightarrow f(P) = g(P)$: le risque est le même.

<u>EXERCICE 17.</u> Bac 2003

1. a. La probabilité d'obtenir le numéro 2.

On dispose de 2 faces portant le chiffre 2 sur un ensemble de 6 faces :

$P(\{2\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b. La probabilité d'obtenir le nombre 421.

Obtenir 421 revient à obtenir 4 au premier lancer, 2 au second lancer et 1 au 3ème lancer.

$P(\{421\}) = P(\{4\}) \times P(\{2\}) \times P(\{1\}) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$.

2. Vérifions que la probabilité d'obtenir, ici, le nombre 421 est égale à $\frac{1}{54}$.

$P(\{421\}) = P(\{4\}) \times P(\{2\}) \times P(\{1\}) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{54}$

3. a. Démontrons que la probabilité d'obtenir 421, dans ce cas, est égale à $\frac{2}{135}$.

Soit N l'évènement « obtenir le nombre 421 ».

Scanned by CamScanner

Comme l'urne contient 10 dés dont 4 identiques au dé A et 6 identiques au dé B, alors la probabilité d'obtenir 421 est égale à la somme de 4/10 de la probabilité du cas 1.b et 6/10 de la probabilité du cas 2.

$$P(N) = P(\{421\}) = \frac{4}{10}\times\frac{1}{108}+\frac{6}{10}\times\frac{1}{54}=\frac{2}{135}$$

b. Egny a obtenu **421.**

Calculons la probabilité qu'il ait joué avec un dé de type A.

Soit A l'évènement « jouer avec un dé de type A ».

Ici, il s'agit donc de calculer la probabilité de jouer avec un dé de type A sachant qu'on obtient 421. $P_N(A)=\dfrac{P(A\cap N)}{P(N)}=\dfrac{\frac{4}{10}\times\frac{1}{108}}{\frac{2}{135}} \Rightarrow P_N(A)=\dfrac{2}{5\times108}\times\dfrac{135}{2}=\dfrac{1}{4}$

EXERCICE 18. Bac 2004. Session normale.

I. 1. On choisit 5 sacs parmi les 60 sacs du chargement.

$card\Omega = C_{60}^{5} = 5461512.$

Soit A l'évènement : « Exactement 2 sacs contiennent le produit non déclaré ».

$card\,A = C_{10}^{2}\times C_{50}^{3} = 882000 \Rightarrow P(A)=\dfrac{card\,A}{card\,\Omega}=\dfrac{882000}{5461512}\simeq 0,2$

2. Soit B : « l'un au moins des 5 sacs contrôlés contient le produit non déclaré »

L'évènement contraire est $\overline{B}$: « aucun des 5 sacs contrôlés ne contient le produit non déclaré »

On a: $P(\overline{B})=\dfrac{card\,\overline{B}}{card\,\Omega}=\dfrac{C_{50}^{5}}{C_{60}^{5}}\approx 0,4$ D'où: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0,4 = 0,6.$

II. 1. a. Sur le trajet, il y a trois barrages.

A chaque barrage, si le produit non déclaré est saisi, le camionneur paie 10 000F.

D'où : X = {0 ; 10 000 ; 20 000 ; 30 000}.

L'expérience conduit à 2 éventualités : le produit non déclaré est saisi ou non.

Il s'agit donc d'une expérience de Bernoulli.

L'expérience étant répétée 3 fois (il y a 3 barrages), la variable aléatoire suit la loi binômiale suivante : $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}=C_3^k(0,6)^k(0,4)^{3-k}$

Car n = 3 ; k ∈ {0 ; 1 ; 2 ; 3}, p = 0,6 et q = 0,4.

Si $k=0$: $P(X=0)=C_3^0(0,6)^0(0,4)^{3-0}=(0,4)^3=0,064$

Si $k=1$: $P(X=1)=C_3^1(0,6)^1(0,4)^2=0,288$

Si $k=2$: $P(X=2)=C_3^2(0,6)^2(0,4)^1=0,432$

Si $k=3$: $P(X=3)=C_3^3(0,6)^3(0,4)^0=(0,6)^3=0,216$

Scanned by CamScanner

La loi de probabilité de X est :

x_i	0	10 000	20 000	30 000
$p(X = x_i)$	0,064	0,288	0,432	0,216

1. b. L'espérance mathématique E(X).

$E(X) = 0 \times 0{,}064 + 10\,000 \times 0{,}288 + 20\,000 \times 0{,}432 + 30\,000 \times 0{,}216 = 18\,000$.

2. On suppose que le camionneur ne peut payer la taxe.

Le produit est saisi dans les cas suivants :

- le produit est détecté dès le 1er barrage.
- le produit n'est pas détecté au 1er barrage mais est détecté au 2ème barrage.
- le produit n'est pas détecté aux 2 barrages précédents mais est détecté au 3ème barrage.

La probabilité de saisir le chargement est : **$p = 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}6 + (0{,}4)^2 \times 0{,}6 = 0{,}936$.**

Scanned by CamScanner

CHAPITRE X: NOMBRES COMPLEXES

Abraham de MOIVRE est né le 26 mai 1667 à Vitry-le-François. Protestant, il est obligé d'immigrer à Londres en 1685. En 1695, il connait la consécration quand Halley rapporte à la Royal Society de Londres que de Moivre a amélioré "la méthode des fluxions" (le calcul différentiel) de Newton.

Deux ans plus tard, De Moivre devient membre associé de cette société. Ses recherches les années suivantes concernent l'astronomie et diverses méthodes de résolution d'équation.

C'est dans un mémoire de 1707 qu'apparait la formule qu'on appelle désormais **la formule de De Moivre** : $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$

L'apport de De Moivre est fondamental en probabilités. Dans son ouvrage, ***Doctrine of chance***, paru en 1718, il explique la formule des probabilités composées.

De Moivre montre en particulier que la loi binomiale tend, en un certain sens, vers la loi normale (ou loi de Laplace-Gauss), la fameuse loi "à la courbe en cloche".

L'autre ouvrage majeur de De Moivre est ***Miscellanea Analytica*** (mélanges analytiques) paru en 1730. C'est dans cet ouvrage qu'apparait pour la première fois la formule de Stirling qui donne un équivalent du nombre n!

Y figurent également des travaux sur les suites récurrentes, la trigonométrie, les fractions rationnelles.

Une jolie légende entoure la mort de De Moivre, survenue le 27 novembre 1754 à Londres, dans la pauvreté.

On raconte que De Moivre s'était rendu compte qu'il dormait chaque nuit 15 minutes supplémentaires. S'aidant de cette suite arithmétique, il avait deviné le jour de sa mort, celui où il dormirait pendant 24H! Il ne s'était pas trompé!

Scanned by CamScanner

FICHE DE COURS

Soit $z = a + ib$ (avec a et b deux nombres réels) un nombre complexe.

1. Module et argument d'un nombre complexe écrit sous forme algébrique :

Le module de z est : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Un argument θ de z est donné par : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(Z)}{|z|} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(Z)}{|z|} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

2. Forme trigonométrique ou forme exponentielle d'un nombre complexe :

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ Forme trigonométrique

$z = \rho e^{i\theta}$ Forme exponentielle

$\rho = |Z|$ et $\theta = \arg(z)$.

3. Conjugué d'un nombre complexe : sous forme algébrique et sous forme exponentielle :

$$\bar{z} = a - ib = \rho e^{-i\theta} = \rho\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$$

4. Module et argument d'un produit $z \cdot z'$ et d'un quotient $\frac{z}{z'}$

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(z \times z') = (\arg z + \arg z') + k2\pi$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = (\arg z - \arg z') + k2\pi$

5. Résoudre une équation du second degré avec a, b et c complexes :

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et c complexes

$\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

Premier cas : $\Delta \in \mathbb{R}$

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution : $z_1 = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Scanned by CamScanner

Deuxième cas : $\Delta \notin \mathbb{R}$

l'équation admet deux solutions complexes

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a} \quad et \quad z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$$ (δ étant une racine carrée de Δ

6. Différentes caractérisations du fait que z est réel :

a. avec l'écriture algébrique : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \quad z = a\cos\theta$

b. avec l'argument : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z)=(0)+k\pi$

c. avec le conjugué : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z=\bar{z}$

7. Différentes caractérisations du fait que z est imaginaire pur :

a. avec l'écriture algébrique : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \quad z = ia\sin\theta$

b. avec l'argument : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z)=\left(\frac{\pi}{2}\right)+k\pi$

c. avec le conjugué : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z=-\bar{z}$

8. Calculer une longueur avec des complexes :

$$AB=\left|z_B-z_A\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

9. Calculer des angles avec des complexes :

$$mes\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)=\arg\left(\frac{Z_D-Z_C}{Z_B-Z_A}\right)+k2\pi$$

10. Montrer que deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires :

On montre que : $\frac{Z_D-Z_C}{Z_B-Z_A}$ est un nombre imaginaire pur

ou encore que : $\arg\left(\frac{Z_D-Z_C}{Z_B-Z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+k2\pi$

11. Montrer que trois points A, B et C sont alignés :

On montre que : $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$ est un nombre réel

ou encore que : $\arg\left(\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}\right)=0+k2\pi$

12. Traduire que ABC est rectangle isocèle en B :

On montre que $\frac{Z_B-Z_A}{Z_B-Z_C}=i$ ou $\frac{Z_B-Z_A}{Z_B-Z_C}=-i$

Scanned by CamScanner

13. Traduire que ABC est équilatéral :

On montre que : $|z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_A - z_C|$

ou encore que : $\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_B - Z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_B - Z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

14. Cosinus et sinus de quelques angles particuliers

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Scanned by CamScanner

METHODES PRATIQUES

M1: Quand utiliser le conjugué d'un nombre complexe ?

- Pour écrire sous forme algébrique un nombre complexe qui a une forme de quotient, on multiplie son numérateur et son dénominateur par le conjugué du dénominateur.
- Pour prouver que Z est un nombre réel, on démontre que $\overline{Z}=Z$
- Pour prouver que Z est un imaginaire pur, on démontre que $\overline{Z}=-Z$

M2: Quand utiliser les formes trigonométriques ?

- Pour calculer les puissances de certains nombres complexes, on les écrit sous forme trigonométrique ou exponentielle et on utilise la formule de Moivre.
- Pour calculer les valeurs exactes du sinus et du cosinus de certains angles, on peut identifier les formes algébrique et trigonométrique.

M3. Recherche algébrique des racines carrées d'un nombre complexe

Soit $Z = a + ib$ et soit $z = x + iy$ une racine carrée de Z

$z^2 = Z \Leftrightarrow |z|^2 = |Z|$ et $(x + iy)^2 = a + ib$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = |Z|$ et $(x^2 - y^2 + 2xy) = a + ib$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{lll} x^2+y^2 = |Z| & & (1) \\ x^2-y^2 = a & & (2) \\ 2xy = b & & (3) \end{array}\right.$$

Remarque : Si $b > 0$ alors x et y ont le même signe.
Si $b < 0$ alors x et y ont des signes contraires.

M4: Quand utiliser le rapport $\dfrac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$?

Soit Z_A, Z_B et Z_C les affixes des points distincts A, B et C.

- Pour prouver que A, B et C sont alignés, on démontre que $\dfrac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$ est un réel.
- Pour prouver que le triangle ABC est rectangle en A ou alors que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, on démontre que $\dfrac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$ est un imaginaire pur.

Scanned by CamScanner

EXERCICES RESOLUS

FORME ALGEBRIQUE

EXERCICE 1.

Déterminer la forme algébrique de : $Z_1 = (1-2i)(4+5i)$ et $Z_2 = \dfrac{3-5i}{4+2i}$

FORME TRIGONOMETRIQUE / FORME EXPONENTIELLE

EXERCICE 2.

Soit les nombres complexes : $Z_1 = 1+i$, $Z_2 = 2i$, $Z_3 = 5$ et $Z_4 = 1-\sqrt{3}i$

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes ci-dessus.
2. En déduire leur forme trigonométrique puis leur forme exponentielle.

EXERCICE 3.

Soit les nombres complexes : $Z_1 = 1+i$ et $Z_2 = 1+\sqrt{3}i$

1. Déterminer $|Z_1|$ et $|Z_2|$
2. Déterminer : $\arg(Z_1)$ et $\arg(Z_2)$
3. En déduire le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$Z_3 = (1+i)(1+i\sqrt{3}),\ Z_4 = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}},\ Z_5 = (1+i)^7$$

EXERCICE 4.

Calculer $Z = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^{2001}$

EXERCICE 5.

On donne $z = -1+i\sqrt{3}$ et $z' = 1+i$

1. Calculer le module puis un argument des nombres complexes z *et* z'
2. Ecrire $\dfrac{z}{z'}$ sous forme trigonométrique
3. Ecrire $\dfrac{z}{z'}$ sous forme algébrique
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

Scanned by CamScanner

ENSEMBLES DE POINTS

EXERCICE 6. BAC Blanc 2001. Cours UNESCO Plateau

On considère les points E (i), F (3-i) et G (1+2i).

1. Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : 1cm).
2. Déterminer et construire :

a. l'ensemble (B) des points M (z) tels que : $|z-i|=3$

b. l'ensemble (H) des points M (z) tels que : $|z-i|=|z-3+i|$

c. l'ensemble (R) des points M (z) tels que : $Arg(z-i)=Arg(z_G-z_E)$

EXERCICE 7.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Au point m d'affixe $z=x+iy$, avec $z \neq i$, on associe le point M d'affixe $Z=\dfrac{z+3}{z-i}$

1. Exprimer les coordonnées X et Y de M à l'aide des coordonnées x et y de m.
2. Déterminer l'ensemble des points m tels que :

a. Z soit réel.

b. Z soit imaginaire pur.

TRIGONOMETRIE

EXERCICE 8.

Déterminer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

EXERCICE 9.

Linéariser $\cos^3\theta$

RESOLUTION D'EQUATIONS

EXERCICE 10.

Déterminer les racines carrées de $Z=3-4i$

EXERCICE 11. Bac D Sénégal 2003

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E): z^3+(1-8i)z^2-(23+4i)z-3+24i=0$$

1. Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.
2. Montrer que $1+2i$ et $-2+3i$ sont solution de (E).
3. Donner l'ensemble des solutions de (E).

Scanned by CamScanner

FIGURES GEOMETRIQUES

EXERCICE 12.

On désigne par R, S et T les points du plan complexe d'affixes définies respectivement par : $R = 3 - 2\sqrt{3} + 2i$; $S = 3 - 2\sqrt{3} - 2i$; $T = 3$

1. Déterminer le module et un argument du nombre : $U = \dfrac{S-T}{R-T}$

2. En déduire la nature du triangle RST.

VALEURS EXACTES DE COSINUS ET DE SINUS

EXERCICE 13. Bac Sénégal 2005

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^3 = 1$

2. a. Développer $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^3$

b. Soit l'équation E : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)$

En posant $u = \dfrac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équations E.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

FORME ALGEBRIQUE

EXERCICE 1.

On donne : $Z_1 = 2-3i$ et $Z_2 = 1+i$

Calculer les nombres complexes : $Z_1 + Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 \times Z_2$; Z_1^2; $\frac{1}{Z_2}$; $\frac{Z_1}{Z_2}$

FORME TRIGONOMETRIQUE / FORME EXPONENTIELLE

EXERCICE 2.

Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \ ; \ Z_2 = \frac{1}{1+i} \ ; \ Z_3 = (1+i\sqrt{3})^5 \ ; \ Z_4 = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}$$

$$Z_5 = -2e^{i\frac{\pi}{4}}; \ Z_6 = (1+i)^3 e^{i\frac{3\pi}{4}}; \ Z_7 = (1-i)e^{i\frac{\pi}{3}}; \ Z_8 = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

EXERCICE 3.

On donne $z = 1+i$ et $z' = \sqrt{3} - i$

1. Calculer le module puis un argument des nombres complexes z et z'
2. Ecrire sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique le produit $z \times z'$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

ENSEMBLES DE POINTS

EXERCICE 4.

Soit $z \neq -1$; on pose $Z = \frac{z-2i}{z+1}$

Déterminer puis construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. Z soit réel
2. Z soit imaginaire pur.

EXERCICE 5.

Pour tout nombre complexe z différent de 2i, on donne $Z = \frac{z+1}{z-2i}$.

On pose $z = x+iy$ et $Z = X+iY$ où x, y, X et Y sont des nombres réels.

1. Calculer X et Y en fonction de x et y.
2. Déterminer l'ensemble E_1 des points M, tels que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble E_2 des points M, tels que Z ait pour argument $\frac{\pi}{2}$.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 6.

Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z telle que :

a. $|z-2|=|z+1|$; b. $|z+1+i|=|z-2-3i|$; c. $|iz-1|=|z+2+i|$

d. $|z-1+3i|=2$; e. $|iz-3+i|=5$; f. $\left|z+\frac{i}{2}\right|=3$; g. $|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i|=4$

EXERCICE 7.

Représenter l'ensemble des points d'affixe Z tels que :

1. $Arg(Z)=\pi$
2. $|z|=2$ et $Arg(Z)=\frac{\pi}{4}$
3. $Re(Z)=-1$
4. $|z|=2$ et $Im(Z)=1$

TRIGONOMETRIE

EXERCICE 8.

Ecrire en fonction de $\cos x$ et $\sin x$: a. $\sin 4x$ b. $\cos 5x$

EXERCICE 9.

Linéariser les expressions suivantes :

a. $\cos^4 x$ b. $\sin^4 x$ c. $\sin^5 x$ et d. $\sin^2 x \cdot \cos^3 x$

RESOLUTION D'EQUATIONS

EXERCICE 10.

On donne le polynôme P (z) défini par :

$P(x)=z^3+(2+i)z^2+(-3+4i)z-10+5i$

1. Montrer que (2 – i) est un zéro de P.
2. Trouver deux nombres complexes a et b tels que :

$P(x)=(z-2+i)(z^2+az+b)$ Puis factoriser $P(z)$.

3. Résoudre dans C l'équation : $P(z)=0$.

EXERCICE 11.

On pose $P(z)=z^4-3z^3+z^2-3z+1$.

α désigne un complexe quelconque.

1. Montrer que si α est solution de l'équation $P(z)=0$, il en est de même de $\overline{\alpha}$ et de $\frac{1}{\alpha}$
2. a. Calculer $P(1+i)$

   b. En déduire la résolution de l'équation $P(z)=0$
3. Ecrire sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 12.

On pose $P(z)=z^4-6z^3+23z^2-34z+26$

1.α désigne un complexe quelconque. Montrer que $\overline{P(\alpha)}=P(\overline{\alpha})$.

En déduire que si $P(\alpha)=0$ alors $P(\overline{\alpha})=0$

2. Calculer $P(1+i)$.

En déduire 2 solutions complexes de l'équation $P(z)=0$.

3. $Q(z)=[z-(1+i)][z-(1-i)]$

a. Vérifier que le polynôme P (z) est divisible par Q (z)

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$.

EXERCICE 13.

1. Calculer $(1-i)^2$ et $(1+i)^2$

2. Soit (E) : $z^4+8iz^2+48=0$.

Montrer que si α est solution de (E), $-\alpha$ l'est également.

3. Développer le produit $(z^2+12i)(z^2-4i)$.

4. Résoudre (E)

FIGURES GEOMETRIQUES

EXERCICE 14.

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a=-1+i\sqrt{3}$; $b=-1-i\sqrt{3}$; $c=\sqrt{3}-i$ et $d=\sqrt{3}+i$

1. Placer A, B, C et D sur une figure dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ Unité : 4 cm.

2. Déterminer le module et l'argument principal de $Z=\dfrac{a-c}{d-b}$.

Quelle conclusion peut-on tirer ?

3. Montrer que A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre I, le rayon et une équation. Construire ce cercle.

4. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

EXERCICE 15.

Tous les résultats demandés seront justifiés.

Soit le nombre complexe $Z_1=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

On pose : $Z_2=\overline{Z_1}$, où $\overline{Z_1}$ désigne le nombre complexe conjugué de Z_1,

$Z_3=-Z_1$; $Z_4=Z_1e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Scanned by CamScanner

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes Z_1, Z_2 et Z_3.

2. Déterminer le module et un argument des nombres complexes Z_2 et Z_3.

3. a. Montrer que $Z_4 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

b. En déduire le module et un argument du nombre complexe Z_4.

c. Quelle est la forme algébrique de Z_4 ?

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (Unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4.

a. Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Construire ce cercle.

b. Construire les points A, B, C et D en utilisant leurs ordonnées.

c. Calculer les distances AC et BD.

d. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

EXERCICE 16.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 1cm)

Soit les points A, B, C d'affixes respectives

$Z_A = -3+9i$; $Z_B = 2+6i$ et $Z_C = -1+i$

1. Placer les points A, B et C.
2. Déterminer le centre, le rayon et l'équation du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.
3. Soit D le symétrique de B par rapport au point K d'affixe $Z_K = -2+5i$.

   Calculer les coordonnées de D.
4. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

EXERCICE 17. Bac D Sénégal 2001

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit f l'application de $\mathbb{C} \setminus \{2i\}$ vers $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \dfrac{2z-i}{z-2i}$

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $f(z) = z$. Donner les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique

b. Calculer $z_1^4 + z_2^4$

1. Soit $M(z)$ un point de P

Soit (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur. Donner une équation cartésienne de (Γ). Tracer (Γ).

2. Montrer que $|z| = 1$ équivaut à $|f(z)| = 1$.

Scanned by CamScanner

PROBLEMES DE SYNTHESE

EXERCICE 18. Bac D Burkina Faso 2015/ 1er tour

Soit le polynôme $P(z)=z^3-(1+2i)z^2-3z+2i-1,\ z\in\mathbb{C}$

1. Montrer que le polynôme $P(z)$ admet une racine réelle z_0 que l'on déterminera

2. Déterminer trois nombres complexes a, b, c tels que : $P(z)=(z-z_0)(az^2+bz+c)$

3. Résoudre dans, l'équation $P(z)=0$.

4. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$(unité 2cm), on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i ; 2+i et -1.

a. Placer les points A, B et C.

b. Soit D l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Calculer l'affixe de D.

c. Calculer le nombre complexe $Z=\dfrac{z_A}{z_A-z_B}$.

Déterminer le module et un argument de Z. En déduire la nature du triangle OAB.

EXERCICE 19. Bac blanc 2009. Lycée municipal 1 d'Attécoubé.

Partie A.

Soient z et u deux nombres complexes tels que : $z=\sqrt{3}+i$ et $u=\sqrt{2}(1+i)$

On pose : $Z=u\cdot z^2$

1. a. Déterminer le module et l'argument principal de z et u.

   b. En déduire le module et l'argument principal de Z.

2. a. Ecrire Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

   b. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$

   c. Calculer Z^{12}

Partie B.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité est le centimètre.

A, B et C sont des points du plan d'affixes respectives $Z_A=3i$; $Z_B=4+i$; $Z_C=2-3i$

1. Placer les points A, B et C dans le repère (O, I, J).

2. Calculer Z_D l'affixe du point D pour que ABCD soit un parallélogramme.

3. On pose $Z=\dfrac{z-3i}{z-4-i}$ avec $z\neq 4+i$

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a. $|Z|=1$

b. Z soit imaginaire pur.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 20. Bac D Burkina Faso 2014/ 1er tour

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$; unité : 2cm.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z)=-\frac{1}{z}$.

F est l'application du plan P privé de O dans lui-même qui à tout poim M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=f(z)$.

1. On pose $z=re^{i\theta}$, $r\in\mathbb{R}^*_+$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

Exprimer le module et un argument de $f(z)$ en fonction de r et θ.

2. On pose x+iy et Z=X+iY où Z est l'affixe du milieu I de [MM'] ; x, y, X, Y sont des réels.

a) Exprimer X et Y à l'aide de x et y.

b) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M tels que I appartienne à l'axe $(O,\vec{u})$.

c) Déterminer et représenter l'ensemble (F) des points M tels que I appartienne à l'axe $(O,\vec{v})$.

3. On suppose |z|=1. On pose donc $z=re^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

a) Calculer Z en fonction de θ.

b) Caractériser géométriquement la resriction de F au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 21. Bac D Sénégal 2002

1. a. Calculer le module et l'argument du nombre complexe : $\varpi=\frac{2+2i\sqrt{3}}{4}$

b. En déduire ses racines carrées

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $z^2+(\sqrt{3}-7i)z-4(3+i\sqrt{3})=0$

3. Soit z_1 la solution imaginaire pur et z_2 l'autre solution, montre que $\frac{z_2-2i}{z_1-2i}=\varpi$

4. Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\right)$, A, B, C sont les points d'affixes respectives $2i$, z_1, z_2.

Préciser la nature du triangle (ABC) en utilisant 1. a.

EXERCICE 22. Bac D Burkina Faso 2013/ 2nd tour

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, unité : 2cm.

1. Soit le nombre complexe $z_0=1+i$.

a) Montrer que z_0 est solution de l'équation (E) définie par $z^3-(7+i)z^2+2(8+3i)z-10(1+i)=0$

b) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2. On considère les points A, B et C du plan, d'affixes respectives $1+i$, $3+i$ et $3-i$

Scanned by CamScanner

a) Calculer et écrire sous forme exponentielle $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

b) En déduire la nature exacte du triangle ABC.

c) Placer les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, et compléter la figure au fur et à mesure.

d) Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminer l'affixe du centre G et le rayon r du cercle .

3. Soit (Δ) l'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant la relation $|z-1-i|=|z-3+i|$

a) Caractériser géométriquement l'ensemble (Δ).

b) Justifier que le point F d'affixe 4+2i appartient à (Δ).

c) Déterminer l'affixe du point E de (Δ) situé sur l'axe des ordonnées.

4. Quelle est la nature exacte du quadrilatère CEAF ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 17. Bac D Burkina Faso 2011/ 1er tour

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient les nombres complexes $a=\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}$ et $z_0=6+6i$.

On note A_0 le point d'affixe z_0 et pour tout n entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_n=a^n z_0$.

1.a) Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique ; écrire z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) Exprimer z_3 et z_7 en fonction de z_1 et a^2 ; en déduire l'expression de z_3 et z_7 sous forme exponentielle.

2. Pour tout n entier naturel, on pose $|z_n|=r_n$.

a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $r_n=12.(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$

b) En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Déterminer la limite de la suite (r_n) et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Scanned by CamScanner

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1. **Déterminons la forme algébrique.**

$$Z_1=(1-2i)(4+5i)=4+5i-8i-10i^2=4+5i-8i-10\times(-1)=4-3i+10=14-3i$$

$$Z_2=\frac{(3-5i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}=\frac{12-6i-20i+10i^2}{4^2+2^2}=\frac{12-6i-20i-10}{16+4}=\frac{2-26i}{20}=\frac{1}{10}-\frac{13i}{10}$$

EXERCICE 2.

1. Déterminons le module et un argument des nombres complexes.

- $|Z_1|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

- $|Z_3|=|5|=\sqrt{5^2+0^2}=\sqrt{25}=5$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{5}{5}=1\\ \sin\theta=\frac{0}{5}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=0$$

- $|Z_2|=|2i|=\sqrt{0^2+2^2}=\sqrt{4}=2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{0}{2}=0\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$

- $|Z_4|=|1-\sqrt{3}i|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{3}$$

2. En déduisons leurs formes trigonométrique et exponentielle.

$Z_1=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$; $Z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$Z_2=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$; $Z_2=2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$Z_3=5(\cos0+i\sin0)$; $Z_3=5e^{i0}$

$Z_4=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$; $Z_4=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

EXERCICE 3.

$Z_1=1+i$ et $Z_2=1+\sqrt{3}i$

1. • $|Z_1|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

• $|Z_2|=|1+\sqrt{3}i|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$

Scanned by CamScanner

2. $\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow Arg(Z_1) = \theta = \frac{\pi}{4}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Arg}(Z_2) = \theta = \frac{\pi}{3}$

3. Calcul du module et d'un argument des nombres complexes suivants:

- $|Z_3| = |(1+i)(1+i\sqrt{3})| = |1+i| \times |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$

$\arg(Z_3) = \arg(1+i)(1+i\sqrt{3}) = \arg(1+i) + \arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$

- $|Z_4| = \left|\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right| = \frac{|1+i|}{|1+i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arg(Z_4) = \arg\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right) = \arg(1+i) - \arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{12}$

- $|Z_5| = |(1+i)^7| = |1+i|^7 = \sqrt{2}^7 = \sqrt{2}^6 \times \sqrt{2} = 2^3 \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$\arg(Z_5) = \arg(1+i)^7 = 7 \times \arg(1+i) = 7 \times \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

EXERCICE 4. Calcul de $Z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{2001}$

Point méthode :

> Pour déterminer la forme algébrique de $Z = (Z_1)^n$, on peut procéder comme suit :
>
> 1. Déterminer la forme trigonométrique de Z_1
> 2. Utiliser la formule de Moivre pour déterminer la forme trigonométrique de Z
> 3. Déterminer $\text{Arg}(Z)$ la mesure principale de $\arg(Z)$
> 4. Revenir à la forme algébrique de Z

Scanned by CamScanner

On pose : $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $|Z_1| = 1$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{Arg}(Z_1) = \frac{\pi}{6}$

$$Z_1 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$Z = (Z_1)^{2001} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{2001} = \left(\cos\left(\frac{2001\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2001\pi}{6}\right)\right)$$

$$\frac{2001}{6} = 334 - \frac{3}{6} = 334 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2001\pi}{6} = 334\pi - \frac{\pi}{2}$$

La mesure principale de $\frac{2001\pi}{6}$ est donc $-\frac{\pi}{2}$.

$$Z = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 + i \times (-1) = -i$$

EXERCICE 5.

On donne $z = -1 + i\sqrt{3}$ et $z' = 1 + i$

1. Calculons le module puis un argument des nombres complexes z *et* z'

$$|z| = \left|-1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Soit θ unargument de z

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right| \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$|z'| = |1+i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Soit θ' unargument de z'

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta' = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta' = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \theta' = \frac{\pi}{4}$$

2. Ecrivons $\frac{z}{z'}$ sous forme trigonométrique

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{8\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} + 2k\pi = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\frac{z}{z'} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

Scanned by CamScanner

3. Ecrivons $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique

$$\frac{z}{z'}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{(-1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1+i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}}{1^2+1^2}=\frac{-1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i}{1^2+1^2}$$

$$\frac{z}{z'}=\frac{(-1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

4. En déduisons les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\frac{z}{z'}=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}) \quad et \quad \frac{z}{z'}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

Donc: $\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

D'où: $\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ *et* $\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

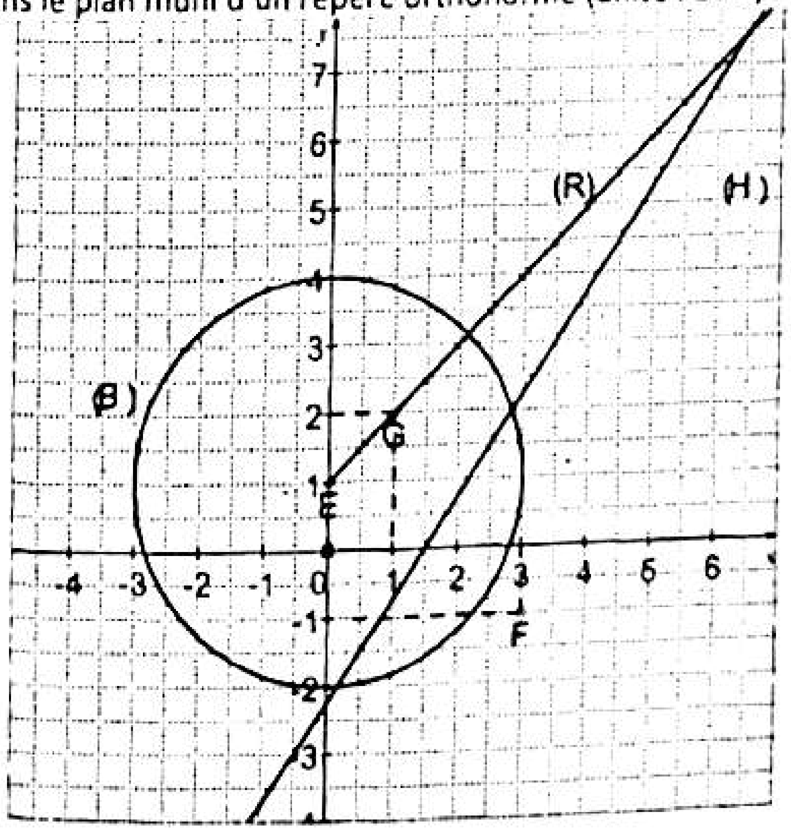
On en déduit:

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

EXERCICE 6. BAC Blanc 2001. Cours UNESCO Plateau

1. Construction des points E, F et G puis construction des ensembles de points de la question 2. dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : 1cm).



Scanned by CamScanner

2. Déterminons :

a. $|Z-i|=3 \Leftrightarrow |Z-Z_E|=3 \Leftrightarrow$ (B) est le cercle de centre $E(i)$ et de rayon 3.

b. $|Z-i|=|Z-3+i| \Leftrightarrow |Z-i|=|Z-(3-i)| \Leftrightarrow |Z-Z_E|=|Z-Z_F|$

$\Rightarrow$ (H) est la médiatrice du segment $[EF]$.

c. $Arg(Z-i)=Arg(Z_G-Z_E) \Leftrightarrow Arg(Z_M-Z_E)=Arg(Z_G-Z_E)$

$$\Leftrightarrow Arg\left(\frac{Z_M-Z_E}{Z_G-Z_E}\right)=0 \Leftrightarrow Mes\left(\overline{EG,EM}\right)=0$$

Le point $M \in [EG)$ donc (R) est le demi-droite $[EG)$.

EXERCICE 7.

1. Expression des coordonnées de X et Y de M à l'aide des coordonnées x et y de m.

On pose: $Z = X + iY$ et $z = x + iy$

$$Z = \frac{z+3}{z-i} = \frac{x+iy+3}{x+iy-i} = \frac{(x+3)+iy}{x+i(y-1)} = \frac{[(x+3)+iy][x-i(y-1)]}{[x+i(y-1)][x-i(y-1)]}$$

$$Z = \frac{x(x+3)+ixy-i(x+3)(y-1)+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$Z = \frac{x(x+3)+y(y-1)+i[xy-(x+3)(y-1)]}{x^2+(y-1)^2}$$

$$Z = \frac{x^2+3x+y^2-y+i[xy-xy+x-3y+3]}{x^2+(y-1)^2}$$

$$Z = \frac{x^2+y^2+3x-y+i[x-3y+3]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2+y^2+3x-y}{x^2+(y-1)^2} + \frac{x-3y+3}{x^2+(y-1)^2}i$$

On en déduit: $X = \dfrac{x^2+y^2+3x-y}{x^2+(y-1)^2}$ et $Y = \dfrac{x-3y+3}{x^2+(y-1)^2}$

2. a. Ensemble des points m tels que Z soit réel.

Z réel $\Leftrightarrow Im(Z)=0 \Leftrightarrow Y=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3y+3}{x^2+(y-1)^2}=0 \Leftrightarrow x-3y+3=0$

Z réel $\Leftrightarrow -3y=-x-3 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+1$

L'ensemble de points m tels que Z soit réel est la droite (D): $y=\frac{1}{3}x+1$

Scanned by CamScanner

b. Ensemble des points m tels que Z soit imaginaire pur.

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z)=0 \Leftrightarrow X=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+3x-y}{x^2+(y-1)^2}=0$$

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2+3x+y^2-y=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{10}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$$

L'ensemble des points m tels que Z soit imaginaire pur est le cercle de centre $A\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$

EXERCICE 8.

Déterminons $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Point méthode :

Pour écrire $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$,

- On pose la formule de Moivre $\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$
- On développe le second membre de cette égalité au moyen du binôme de Newton.
- On identifie $\cos(n\theta)$ avec la partie réelle du second membre développé et $\sin(n\theta)$ avec la partie imaginaire du second membre développé.

$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^3$$
$$=1\cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\sin\theta)+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+1(i\sin\theta)^3$$
$$=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta$$
$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right)$$

Par identification, on a :

$\cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$; $\sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$

EXERCICE 9.

Linéariser $\cos^3\theta$

Point méthode :

Pour linéariser $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$, on peut procéder comme suit :

- Poser la formule d'Euler $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ ou $\sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases}-x^2+4x-3=0\\-x^3+8x^2-23x+24=0\end{cases}$$

$x=3$ est solution commune aux deux équations $z_0=3i$

b. A l'aide du schéma de Horner, on montre que $1+2i$ est solution de (E)

	1	1-8i	-23-4i	-3+24i
1+2i		1+2i	14-2i	3-24i
	1	2-6i	-9-6i	0

par la même méthode, on montre que $-2+3i$ est solution de (E).

c. L'ensemble des solutions de (E) est : $\{3i; 1+2i; -2+3i\}$

EXERCICE 12.

1. Déterminons le module et un argument du nombre : $U=\dfrac{S-T}{R-T}$

$$U=\frac{S-T}{R-T}=\frac{\left(3-2\sqrt{3}-2i\right)-3}{\left(3-2\sqrt{3}+2i\right)-3}=\frac{-2\sqrt{3}-2i}{-2\sqrt{3}+2i}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2\sqrt{3}-2i}=\frac{\left(2\sqrt{3}+2i\right)\left(2\sqrt{3}+2i\right)}{\left(2\sqrt{3}-2i\right)\left(2\sqrt{3}+2i\right)}$$

$$U=\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times2i+\left(2i\right)^2}{16}=\frac{12+8\sqrt{3}i-4}{16}=\frac{8+8\sqrt{3}i}{16}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$U=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

- $|U|=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{4}{4}}=\sqrt{1}=1$
- $\theta=\arg(U)$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\\\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \theta=\arg(U)=\frac{\pi}{3}$$

2. En déduisons la nature du triangle RST.

- $|U|=1\Leftrightarrow\left|\frac{S-T}{R-T}\right|=1\Leftrightarrow\frac{|S-T|}{|R-T|}=1\Leftrightarrow|S-T|=|R-T|\Leftrightarrow ST=RT$ (1)
- $\arg(U)=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\arg\left(\frac{S-T}{R-T}\right)=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow mes\left(\widehat{\overrightarrow{TR},\overrightarrow{TS}}\right)=\frac{\pi}{3}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ RST est un triangle équilatéral.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 13. Bac Sénégal 2005

1. $z^3-1=0$ si et seulement si $(z-1)(z^2+z+1)=0$

Résolvons l'équation : $z^2+z+1=0$

$\Delta=1-4=-3=(i\sqrt{3})^2$. Donc $z=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

d'où $z^3-1=0$ si et seulement si $z=1$ ou $z=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

2. a. Développons $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^3$

$(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^3=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^2=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(-4i)=4\sqrt{2}(-1-i)$

b. $z^3=4\sqrt{2}(-1-i)$

On pose : $u=\dfrac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \Leftrightarrow z=u(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$

Donc $z^3=u^3(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^3=4\sqrt{2}(-1-i)$. On en déduit que : $u^3=1$

D'après 1). On a : $u=1$ ou $u=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ou $u=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Or $Z=u(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$

Donc $Z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ ou $z=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $z=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

C'est-à-dire $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ ou $z=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ ou

$z=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ qui sont les racines de E sous forme algébrique.

Exprimons ces racines sous forme trigonométrique.

On a : $Z=u(\sqrt{2}-i\sqrt{2})=u\times 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2ue^{-i\frac{\pi}{4}}$

donc : Pour $u=1$, on obtient $z=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Pour $u=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, on obtient $z=2e^{-i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}=2e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

Pour $u=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, on obtient $z=2e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}=2e^{i\frac{5\pi}{12}}$

d'où les racines de E sous forme trigonométrique sont : $2e^{-i\frac{\pi}{4}}, 2e^{-i\frac{11\pi}{12}}, 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$

Scanned by CamScanner

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

On a eu : $2e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

Donc $e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

D'où $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Scanned by CamScanner

CHAPITRE XI: NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

Carl Friedrich GAUSS

né à Brunswick le 30 avril 1777,
décédé le 23 février 1855 à Göttingen
(Allemagne)

GAUSS apprit seul à lire et à compter à l'âge de 3 ans. Remarquant ses aptitudes, le duc de Brunswick lui accorda une bourse en 1792 afin de lui permettre de poursuivre son instruction. Il fréquenta le collège Caroline de 1792 à 1795 et formula à cette époque **la méthode des moindres carrés** et une conjecture sur la répartition des nombres premiers.

En 1795, **GAUSS** se rendit à Göttingen où il découvrit le théorème fondamental des résidus quadratiques.

GAUSS développa le concept des nombres complexes et en 1799 l'université de Helmstedt lui décerna le titre de docteur pour sa thèse qui donnait la première démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.

A l'âge de 24 ans, il publia ***Disquisitiones arithmeticae***, sa théorie des nombres, un des travaux les plus remarquables de l'histoire des mathématiques.

Il calcula aussi les orbites de petits astéroïdes tels Cérès et Pallas.

GAUSS calcula l'orbite en utilisant la méthode des moindres carrés et prédit correctement où et quand Cérès réapparaitrait. Après cette réussite il accepta un poste d'astronome à l'observatoire de Göttingen.

En 1820, **GAUSS** inventa l'héliotrope, un instrument muni d'un miroir mobile qui réfléchissait les rayons du soleil; il fut utilisé en géodésie. Pendant la fin des années 1820, en collaboration avec le physicien Wilhelm Weber, **GAUSS** effectua des recherches de base en électromagnétisme, en mécanique, en acoustique et en optique.

En 1833, il construisit le premier télégraphe.

GAUSS faisait une étude soigneuse des journaux étrangers dans la salle de lecture de Göttingen, et en particulier, des nouvelles financières. Cela lui permit de gérer une fortune personnelle considérable par des spéculations boursières. Il mourut fort riche.

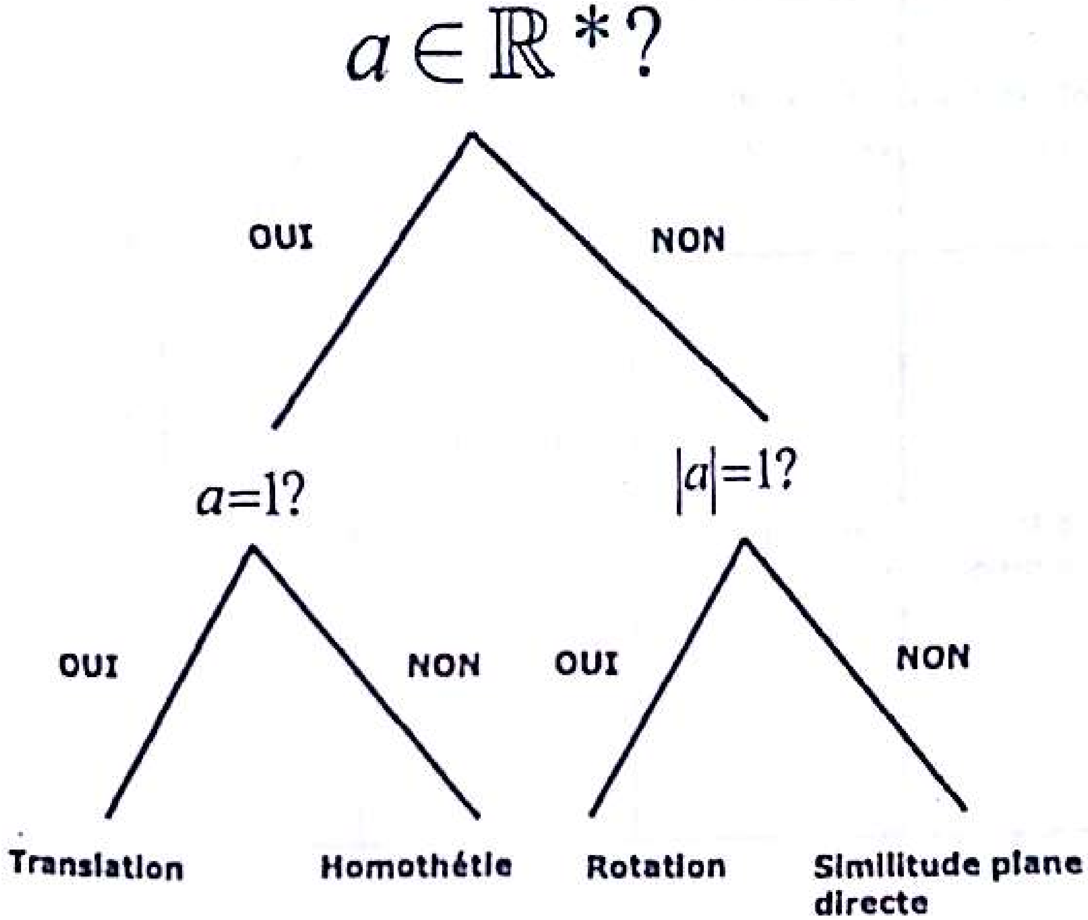
Scanned by CamScanner

FICHE DE COURS

Reconnaître une transformation du plan

Soit une transformation du plan d'écriture complexe

$$z'=az+b \quad (a\in\mathbb{C}, b\in\mathbb{C})$$



Eléments caractéristiques d'une transformation du plan

	$a \in \mathbb{R}^*$		$a \notin \mathbb{R}^*$, $a = \|a\| e^{i\theta}$	
	$a = 1$	$a \neq 1$	$\|a\| = 1$	$\|a\| \neq 1$
Ecriture complexe	$z' = az + b$			
Transformations du plan	Translation de vecteur $\vec{u}$	Homothétie de rapport a et de centre Ω	Rotation d'angle θ et de centre Ω	Similitude plane directe de rapport $\|a\|$ d'angle θ et de centre Ω
Eléments caractéristiques	L'affixe de $\vec{u}$ est b	• rapport a • centre $\Omega(\omega)$ $\omega = \frac{b}{1-a}$	• angle θ $\theta = \arg(a)$ • centre $\Omega(\omega)$ $\omega = \frac{b}{1-a}$	• rapport $\|a\|$ • angle θ $\theta = \arg(a)$ • centre $\Omega(\omega)$ $\omega = \frac{b}{1-a}$

Scanned by CamScanner

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1.

Pour chacune des similitudes directes S, donner la nature et les éléments caractéristiques (rapport, angle et centre éventuel).

1. S d'écriture complexe $z'=-3z+1-5i$
2. S d'écriture complexe $z'=(1+i)z-i$
3. S d'écriture complexe $z'=z+1+i$
4. S f d'écriture complexe $z'=iz-1+2i$

EXERCICE 2.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, I, J)

Donner dans chacun des cas l'écriture complexe de f.

1. S est l'homothétie de centre O et de rapport 2.
2. S est la rotation de centre Ω d'affixe i et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
3. S est la similitude directe de centre Ω d'affixe $1-2i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

EXERCICE 3.

Soient A, B, C et D les points d'affixes :

$Z_A=-1-i$, $Z_B=i$, $Z_C=1+3i$ et $Z_D=5+i$

Soit S la similitude directe transformant A en C et B en D.

1. Déterminer le rapport k et l'angle θ de S.
2. Déterminer l'écriture complexe f associée à S
3. Déterminer l'affixe de Ω le centre de S.

EXERCICE 4. Bac 2000 session normale

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé (O, I, J), les points A et B ont pour affixes respectives $\sqrt{3}+i$ et $-\sqrt{3}+i$.

On désigne par S la similitude directe d'écriture complexe :

$$z'=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}z-\sqrt{3}+i$$

1. Déterminer les images par S des points O et A.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de S.
3. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 2 et (C') son image par S.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C').

b. Construire (C').

Scanned by CamScanner

EXERCICE 5. BAC blanc 2009. Lycée Mamie Fêtai de Bingerville

On considère le polynôme $P(z)=z^4-4(1+i)z^3+12iz^2+8(1-i)z-20$

1. Déterminer les nombres complexes b et c pour que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, on ait :
$P(z)=(z^2+2i)(z^2+bz+c)$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z)=0$

3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $Z_A=1-i$, $Z_B=-1+i$, $Z_C=1+3i$ et $Z_D=3+i$

a. Faire une figure.

b. Démontrer que ABCD est un carré.

4. Soit S la similitude directe transformant A en A et C en B.

a. Déterminer l'écriture complexe de S

b. Déterminer les éléments caracteristiques de S.

c. Déterminer l'image du point B par S

d. Construire l'image du carré ABCD par S.

EXERCICE 6. BAC 2005 Session normale

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
L'unité est le centimètre.
On donne le point A d'affixe i.
Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant
$\left|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i\right|=6$

1. a. Démontrer qu'un point M appartient à (Γ) si et seulement si son affixe z vérifie: $|z-i|=3$

b. En déduire la nature de (Γ).

2. On considère les points B et C d'affixes respectives $\sqrt{3}$ et $-4i$.
L'application S est la similitude directe qui applique A sur O et B sur C.
Soit M un point d'affixe z et M ' d'affixe z ', l'image de M par S.

a. Démontrer que : $z'=(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i$

b. Déterminer les éléments caractéristiques de S. On notera E son centre.

3. On désigne par (C) l'image de (Γ) par S.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C).

b. Construire (C) et (Γ).

4. Soit D le point tel que : $D\in[EB)$ et $ED=2EB$

Scanned by CamScanner

a. Construire les points D et E dans le même repère.
b. Démontrer que le triangle ECD est équilatéral.
c. Calculer l'affixe de D.
5. Soit r la rotation de centre E qui transforme C en D.
Déterminer l'écriture complexe de r.

EXERCICE 7. Bac 2004. Session normale

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A, B et C d'affixes respectives Z_A, Z_B et Z_C telles que : $Z_A = 4i$, $Z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ et $Z_C = -2\sqrt{3} + 2i$.

1. Déterminer le module et l'argument principal de chacun des nombres complexes Z_A, Z_B et Z_C.
2. Utiliser les résultats précédents pour placer les points A, B et C.
Unité graphique : 1 cm.
3. Démontrer que le triangle OBA est équilatéral.
4. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.
5. On désigne par K le milieu du segment [OA] et par S la similitude directe de centre O qui transforme B en K.
a. Déterminer l'écriture complexe de S.
b. Calculer l'affixe de l'image par S du point L milieu du segment [AC].
c. En déduire que l'image par S de la médiatrice du segment [AC] est la droite (OI).

EXERCICE 8. Bac 2003. Deuxième session

Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J), (unité : 2cm).

1. On considère l'équation : (E) : $Z \in \mathbb{C}$, $Z^3 - 2iZ^2 + 4(1+i)Z + 16 + 16i = 0$
Vérifier que : $\forall Z \in \mathbb{C}, Z^3 - 2iZ^2 + 4(1+i)Z + 16 + 16i = (Z+2)\left[Z^2 - 2(1+i)Z + 8(1+i)\right]$
2. a. Déterminer les racines carrées du nombre complexe - 8- 6i.
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : (E_1) : $Z^2 - 2(1+i)Z + 8(1+i) = 0$
c. En déduire les solutions de l'équation (E).
3. Soit A, B et C les points respectives - 2 ; 4i et 2- 2i.
a. Faire une figure.
b. Soit K le milieu de [BC].
On considère la similitude directe S de centre A, qui transforme B en K.
Déterminer et construire l'image (C') du cercle (C) de diamètre [AB] par la similitude S.
c. Déterminer l'écriture complexe de S.
d. Déterminer l'angle et le rapport de S.

Scanned by CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 1.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, I, J)

On considère l'application F qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=u^2z+u-1$ où u désigne un nombre complexe.

1. a. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une translation.

   b. Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

2. a. Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

   b. Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

EXERCICE 2. Extrait BAC 1993

Soient A, B, C et D les points du plan P d'affixes respectives :

2 ; 2i ; 2+4 i ; 4+2 i.

1. Faire une figure et démontrer que ABCD est un carré.
2. Déterminer la similitude plane directe S telle que S (A) = B et S(C) = D.
   On précisera les éléments caractéristiques de S.
3. Construire l'image de B par S. Justifier.

EXERCICE 3. Extrait BAC 1994

1. Déterminer (Γ) l'ensemble des points M d'affixe z tels que: $\left|(1-i)z+2i\right|=2$.
2. Etudier la transformation F du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point z' telle que : $z'=(1-i)z+2i$
3. Déterminer l'image du cercle (C) de centre (2 ; -1) et de rayon 1 par F.

EXERCICE 4. Devoir de niveau 2002. Lycée Municipal d'Attécoubé

1. Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé (O, I, J), (Unité : 2cm). On considère les points A (2 ; 0), B (2 ; 3) et C (-1 ; 3).
   a. Faire une figure et placer les points A, B et C.
   b. Donner la nature du triangle ABC.
2. On désigne par F la similitude du plan qui transforme le point A en A et le point B en C.
   a. Donner les éléments caractéristiques de F.
   b. Déterminer le centre K et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.
   c. Quelle est l'image de ce cercle par la transformation du plan F.
   (On en donnera la nature et les éléments caractéristiques).

Scanned by CamScanner

EXERCICE 5. Bac D Burkina Faso 2010/ 1er tour

Soit $P(z)=z^3-(1-i)z^2+z-1+i, \quad z\in\mathbb{C}$.

1. Démontrer que $P(z)$ admet deux racines imaginaires pures.
2. Résoudre l'équation $P(z)=0$, puis donner les solutions sous forme exponentielle.
3. Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note $a=-i;\ b=i \ \ et \ \ c=1-i$

a) Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

On notera A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.

b) Calculer $\dfrac{a-b}{a-c}$, puis préciser la nature du triangle ABC.

c) Soit C l'image du point D par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Calculer l'affixe du point D.

d) E est l'image du point D par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Déterminer l'affixe du pointE.

e) Pour quelles valeurs de n, c^n est-il un réel.

EXERCICE 6. BAC D 1995. Session normale

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3-i=0$.

2. Soit le plan complexe muni du repère orthonormé (O, I, J) ; unité : 2cm.

On donne les points $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, $B\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ et $C(0;1)$.

On considère la similitude directe S de centre O, de rapport 2 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$.

Soit M un point quelconque d'affixe z et M' le point tel que M' = S (M).

a. Déterminer l'affixe z' du point M' en fonction de z.

b. Déterminer et placer A', B' et C' les images respectives des ponts A, B et C par S.

3. Calculer l'aire du triangle A'B'C' en fonction de l'aire du triangle ABC.

4. Trouver une homothétie de centre O transformant globalement le triangle ABC en le triangle A'B'C'. Justifier votre réponse.

EXERCICE 7. Bac D Sénégal 1999

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

$(E): z^3+(3-2i)z^2+(1-4i)z-1-2i=0$

1. a. Vérifier que (E) admet une solution réelle.

b. Achever la résolution de l'équation (E)

2. Dans le plan complexe on désigne par A, B, C les points d'affixes respectifs $z_A=-1;\ z_B=-2+i;\ z_C=i$.

Scanned by CamScanner

a. Déterminer le module et argument de $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

b. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C.

EXERCICE 8.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité : 1 cm.

On désigne par A B, C, D les points d'affixes respectives :

2+ i ; 3 ; - 3 i ; - 2 + 5 i.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z, associe le point M ' d'affixe z ' définie par : $z' = -2iz - 2 + i$.

1. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. Vérifier que $f(A) = C$ et que $f(B) = D$.

3. Démontrer que pour tout z ≠ i, on a : $\frac{z' - i}{z - i} = -2i$

4. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{JM}; \overrightarrow{JM'})$ et en déduire que JM ' = 2 JM.

EXERCICE 9. BAC D 1997 remplacement

1. Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$ suivante : $z^4 + (i - \sqrt{3})z^3 - iz + 1 + i\sqrt{3} = 0$

a. Développer, réduire et ordonner le polynôme : $p(z) = \left(z - \sqrt{3} + i\right)\left(z^3 - i\right)$.

b. Résoudre (E).

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, I, J) (unité : 4 cm).

On considère les points : A d'affixe $\frac{\sqrt{3} + i}{2}$, B d'affixe $\frac{-\sqrt{3} + i}{2}$ et C d'affixe $-i$.

a. Placer les points A, B et C.

b. Justifier que le triangle ABC est équilatéral.

3. Soit Ω le milieu du segment [AC] et S la similitude directe de centre Ω qui transforme A en B.

a. Déterminer les éléments caractéristiques de S.

b. Démontrer que l'image du point O par S est le point C.

Scanned by CamScanner

CORRECTION DES EXERCICES

EXERCICE 1.

Nature et éléments caractéristiques des similitudes directes f.

1. f d'écriture complexe $z'=-3z+1-5i$

$a=-3\in\mathbb{R}$ et $a\neq 1$ donc f est une homothétie

- de rapport $k=|-3|=3$
- de centre le point Ω d'affixe ω tel que $\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1-5i}{1-(-3)}=\frac{1-5i}{4}=\frac{1}{4}-\frac{5}{4}i$

2. f d'écriture complexe $z'=(1+i)z-i$

$a=(1+i)\notin\mathbb{R}$ et $|1+i|=\sqrt{2}\neq 1$ donc f est une similitude plane directe

- de rapport $k=|1+i|=\sqrt{2}$
- d'angle $\theta=\arg(a)=\arg(1+i)$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ $\theta=\frac{\pi}{4}$

- de centre le point Ω d'affixe ω tel que $\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-i}{1-(1+i)}=\frac{-i}{-i}=1$

3. f d'écriture complexe $z'=z+1+i$

$a=1\in\mathbb{R}$ donc f est une translation de vecteur $\overline{u}$ d'affixe $b=1+i$

4. f d'écriture complexe $z'=iz-1+2i$

$a=i\notin\mathbb{R}$ et $|a|=|i|=1$ donc f est une rotation

- d'angle $\theta=\arg(a)=\arg(i)$

$\cos\theta=\frac{0}{1}=0$ et $\sin\theta=\frac{1}{1}=1$ $\Rightarrow$ $\theta=\frac{\pi}{2}$

- de centre le point Ω d'affixe ω tel que

$$\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{1+2i}{1-i}=\frac{(1+2i)(1-i)}{(1-i)(1-i)}=\frac{-1-i+2i-2}{2}=\frac{-3+i}{2}=\frac{-3}{2}+\frac{1}{2}i$$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 2. **Ecriture complexe de f.**

1. f est l'homothétie de centre O et de rapport 2.

$z' = az + b$

$k = |a| = 2 \Rightarrow a = 2$ ou $a = -2$

$\omega = \dfrac{b}{1-a} = 0 \Rightarrow b = 0$

Donc l'écriture complexe de f est : $z' = 2z$

2. f est la rotation de centre Ω d'affixe i et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

$z' = az + b$

$$\left.\begin{array}{l} k = |a| = 1 \\ \theta = \arg(a) = -\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

$\omega = \dfrac{b}{1-a} \Rightarrow b = \omega(1-a) = i(1-(-i)) = i(1+i) = i - 1 = -1 + i$

Donc l'écriture complexe de f est : $z' = -iz - 1 + i$

3. f est la similitude directe de centre $\Omega(1-2i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$

$z' = az + b$

$$\left.\begin{array}{l} k = |a| = \sqrt{2} \\ \theta = \arg(a) = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right| \Rightarrow a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + i$$

$\omega = \dfrac{b}{1-a} \Rightarrow b = \omega(1-a) = (1-2i)(1-(1+i)) = (1-2i)(-i) = -i - 2 = -2 - i$

Donc l'écriture complexe de f est : $z' = (1+i)z - 2 - i$

EXERCICE 3.

A, B, C et D ont pour affixes : $Z_A = -1 - i$, $Z_B = i$, $Z_C = 1 + 3i$ et $Z_D = 5 + i$

$$\xrightarrow{S}$$
$$\begin{array}{c|c} A & C \\ B & D \\ [AB] & [CD] \end{array}$$

1. Déterminons le rapport k et l'angle θ de S.

- $k = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{|Z_D - Z_C|}{|Z_B - Z_A|} = \dfrac{|(5+i)-(1+3i)|}{|i-(-1-i)|} = \dfrac{|4-2i|}{|1+2i|} = \dfrac{\sqrt{16+4}}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2$

Scanned by CamScanner

- $\theta = mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right) = \arg\left(\frac{4-2i}{1+2i}\right)$

$\frac{4-2i}{1+2i} = \frac{(4-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{4-8i-2i-4}{5} = \frac{-10i}{5} = -2i \Rightarrow \theta = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$

2. Déterminons l'écriture complexe f associée à S.

$f(z) = az + b$

$S(A) = C \Leftrightarrow az_A + b = z_C \quad (1)$

$S(B) = D \Leftrightarrow az_B + b = z_D \quad (2)$

$(1)-(2) \Rightarrow a(z_A - z_B) = z_C - z_D \Rightarrow a = \frac{z_C - z_D}{z_A - z_B} = \frac{-4+2i}{-1-2i} = \frac{4-2i}{1+2i} = -2i$

$(2) \Rightarrow az_B + b = z_D \Leftrightarrow b = z_D - az_B = (5+i) - (-2i)\times i = 5+i+2i\times i = 5+i-2 = 3+i$

D'où l'écriture complexe f est : $f(z) = -2iz + 3 + i$

3. Déterminons l'affixe de Ω le centre de S.

Soit ω l'affixe de Ω

$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3+i}{1-(-2i)} = \frac{3+i}{1+2i} = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-6i+i+2}{5} = \frac{5-5i}{5} = 1-i$

<u>EXERCICE 4.</u> BAC 2000. Session normale

1. Les images par S des points O et A sont :

$z_{O'} = \frac{3-i\sqrt{3}}{2} z_O - \sqrt{3} + i = \frac{3-i\sqrt{3}}{2} \times 0 - \sqrt{3} + i = -\sqrt{3} + i \Rightarrow S(O) = B$

$z_{A'} = \frac{3-i\sqrt{3}}{2} z_A - \sqrt{3} + i = \frac{3-i\sqrt{3}}{2} \times (\sqrt{3}+i) - \sqrt{3} + i = \sqrt{3} + i \Rightarrow S(A) = A$

2. Les éléments caractéristiques de S.

L'écriture complexe de la similitude directe S est : $z' = \frac{3-i\sqrt{3}}{2} z - \sqrt{3} + i$.

Cette écriture a la forme $z' = az + b$ avec $a = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$ et $b = -\sqrt{3} + i$

$a = \frac{3-i\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{R}$ et $\left|\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$ donc S est une similitude

plane directe :
- de rapport $k = |a| = \left|\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$
- d'angle

$\theta = \arg a = \arg\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ car $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(a)}{|a|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(a)}{|a|} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Scanned by CamScanner

- de centre le point $A\left(\sqrt{3}+i\right)$ car $S(A)=A$

3. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 2 et (C') son image par S.

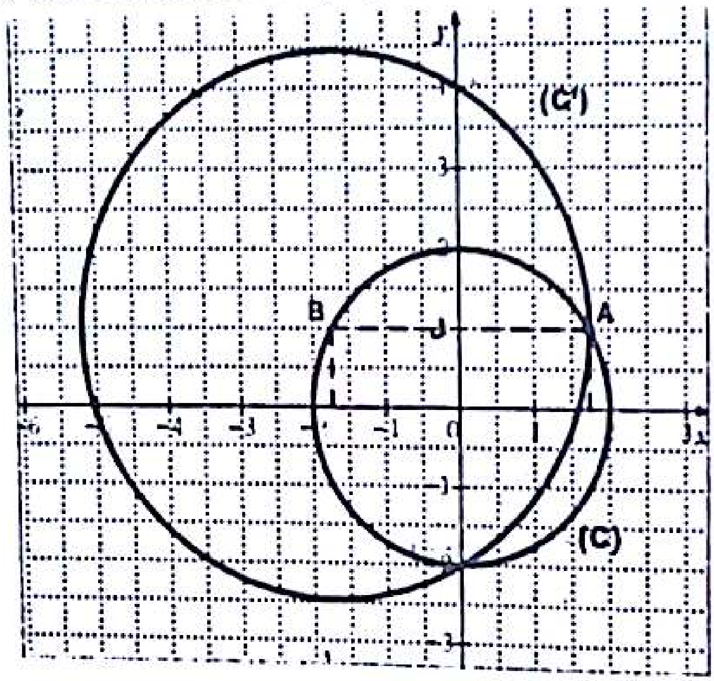
a. Nature et éléments caractéristiques de (C').

L'image d'un cercle par une similitude est un cercle donc (C') est un cercle.

Les éléments caractéristiques de (C') sont :

- Son rayon $R'=k\times R=\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$
- Son centre $O'=S(O)=B$

b. Construction de (C').



EXERCICE 5. BAC blanc 2009. Lycée Mamie Fêtai de Bingerville

1. Déterminons les nombres b et c tels que : $P(z)=\left(z^2+2i\right)\left(z^2+bz+c\right)$

$$P(z)=\left(z^2+2i\right)\left(z^2+bz+c\right)\Leftrightarrow P(z)=z^4+bz^3+cz^2+2iz^2+2ibz+2ic$$

$$\Leftrightarrow P(z)=z^4+bz^3+\left(c+2i\right)z^2+2ibz+2ic$$

Or $P(z)=z^4-4(1+i)z^3+12iz^2+8(1-i)z-20$

D'où: $z^4+bz^3+(c+2i)z^2+2ibz+2ic=z^4-4(1+i)z^3+12iz^2+8(1-i)z-20$

Par identification, on a :

- $b=-4(1+i)$
- $c+2i=12i \Leftrightarrow c=12i-2i=10i$

Donc $P(z)=\left(z^2+2i\right)\left(z^2-4(1+i)z+10i\right)$

Scanned by CamScanner

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z)=0$

$P(z)=0 \Leftrightarrow (z^2+2i)(z^2-4(1+i)z+10i)=0$

$P(z)=0 \Leftrightarrow z^2+2i=0$ ou $z^2-4(1+i)z+10i=0$

$\Leftrightarrow z^2=-2i$ (1) ou $z^2-4(1+i)z+10i=0$ (2)

- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (1): $z^2=-2i$

Les nombres $z\in\mathbb{C}$ tels que $z^2=-2i$ sont les racines carrées de $Z=-2i$

Il s'agit donc de déterminer les racines carrées de $Z=-2i$

Déterminons les racines carrées de $Z=-2i$

$|Z|=|-2i|=2$

Soit $z=x+iy$ une racine carrée de $Z=-2i$, on a :

$$\begin{cases} x^2+y^2=|Z| \\ x^2-y^2=\mathrm{Re}(Z) \\ 2xy=\mathrm{Im}(Z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 & (1) \\ x^2-y^2=0 & (2) \\ 2xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=2 & (1)+(2) \\ 2y^2=2 & (1)-(2) \\ xy=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \\ xy<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ou } x=-1 \\ y=1 \text{ ou } y=-1 \\ x \text{ et } y \text{ sont de signes contraires} \end{cases}$$

Les racines carrées de $Z=-2i$ sont : $z_1=1-i$ et $z_2=-1+i$

Les solutions de l'équation (1) sont : $z_1=1-i$ et $z_2=-1+i$

- Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation (2): $z^2-4(1+i)z+10i=0$

$\Delta=[-4(1+i)]^2-4\times1\times10i=16(1+i)^2-40i$

$\Delta=16(1+2i-1)-40i=16(2i)-40i=32i-40i$

$\Delta=-8i$

Déterminons les racines carrées de $\Delta=-8i$

$|\Delta|=|-8i|=8$

soit $\delta=x+iy$ une racine carrée de $\Delta=-8i$, on a :

$$\begin{cases} x^2+y^2=|\Delta| \\ x^2-y^2=\mathrm{Re}(\Delta) \\ 2xy=\mathrm{Im}(\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=8 & (1) \\ x^2-y^2=0 & (2) \\ 2xy=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=8 & (1)+(2) \\ 2y^2=8 & (1)-(2) \\ xy=-4 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ y = 2 \text{ ou } y = -2 \\ x \text{ et } y \text{ sont de signes contraires} \end{cases}$$

Les racines carrées de $\Delta = -8i$ sont : $\delta = 2 - 2i$ et $\delta' = -2 + 2i$

$$z_3 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{4(1+i)+2-2i}{2} = \frac{4+4i+2-2i}{2} = \frac{6+2i}{2} = 3+i$$

$$z_4 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{4(1+i)-2+2i}{2} = \frac{4+4i-2+2i}{2} = \frac{2+6i}{2} = 1+3i$$

Les solutions de l'équation (2) sont: $z_3 = 3+i$ et $z_4 = 1+3i$

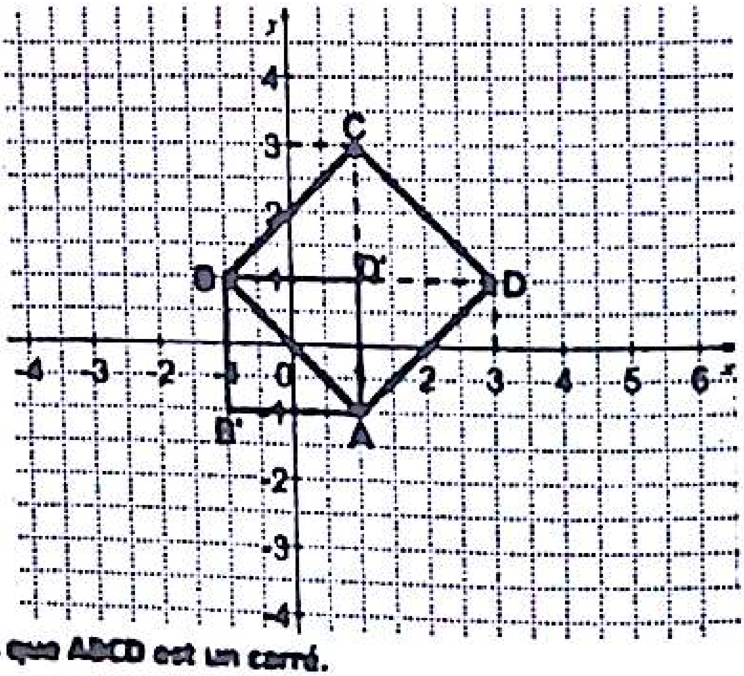
- Finalement les solutions de l'équation $p(z) = 0$ sont:

$z_1 = 1-i$; $z_2 = -1+i$; $z_3 = 3+i$ et $z_4 = 1+3i$

$$S_{\mathbb{C}} = \{1-i\ ;\ -1+i\ ;\ 3+i\ ;\ 1+3i\}$$

3. $Z_A = 1-i$, $Z_B = -1+i$, $Z_C = 1+3i$ et $Z_D = 3+i$

a. Figure.



b. Démontrons que ABCD est un carré.

o Montrons que ABCD est un parallélogramme

$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A = (-1+i)-(1-i) = -2+2i$

$Z_{\overrightarrow{DC}} = Z_C - Z_D = (1+3i)-(3+i) = -2+2i$

$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ est un parallélogramme.

Scanned by CamScanner

- **Déterminons la mesure des côtés $[AB]$ et $[BC]$.**

$$\left.\begin{array}{l} AB=|Z_B-Z_A|=|(-1+i)-(1-i)|=|-2+2i|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \\ BC=|Z_C-Z_B|=|(1+3i)-(-1+i)|=|2+2i|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \end{array}\right| AB=BC$$

- **Déterminons la mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$**

$$mes(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})=\arg\left(\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}\right)=\arg\left(\frac{(1+3i)-(-1+i)}{(1-i)-(-1+i)}\right)=\arg\left(\frac{2+2i}{2-2i}\right)$$

$$\frac{2+2i}{2-2i}=\frac{2(1+i)}{2(1-i)}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{2}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i$$

$$mes(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})=\arg\left(\frac{2+2i}{2-2i}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow (BA)\perp(BC)$$

CONCLUSION :

ABCD est un parallélogramme dont 2 côtés consécutifs ont même mesure et forment un angle droit : ABCD est un carré.

4. Soit S la similitude directe transformant A en A et C en B.

a. Déterminons l'écriture complexe de S.

$z'=az+b$

$S(A)=A \Leftrightarrow az_A+b=z_A \quad (1)$

$S(C)=B \Leftrightarrow az_C+b=z_B \quad (2)$

$$(1)-(2)\Rightarrow a(z_A-z_C)=z_A-z_B \Rightarrow a=\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{(1-i)-(-1+i)}{(1-i)-(1+3i)}=\frac{2-2i}{-4i}$$

$$\Rightarrow a=\frac{1-i}{-2i}=\frac{(1-i)\times i}{(-2i)\times i}=\frac{i-i^2}{-2\times i^2}=\frac{i-(-1)}{-2\times(-1)}=\frac{i+1}{2}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}(1+i)$$

$$(2)\Rightarrow az_C+b=z_B \Leftrightarrow b=z_B-az_C=(-1+i)-\frac{1}{2}(1+i)(1+3i)$$

$$\Rightarrow b=-1+i-\frac{1}{2}(-2+4i)=-1+i+1-2i=-i$$

D'où l'écriture complexe de S est : $z'=\frac{1}{2}(1+i)z-i$

b. Déterminons les éléments caractéristiques de S.

- $S(A)=A \Leftrightarrow A(1-i)$ est le centre de la similitude S
- Le rapport $k=\frac{1}{2}|1+i|=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- L'angle $\theta=\arg\left(\frac{1}{2}(1+i)\right)$

Scanned by CamScanner

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right| \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

c. Déterminons l'image du point B par S

Soit $B' = S(B)$

$$z_{B'} = \frac{1}{2}(1+i)z_B - i = \frac{1}{2}(1+i)(-1+i) - i = \frac{1}{2}(-1+i-i-1) - i = -1-i$$

d. S (ABCD) = ACB'D' car S (A) = A; S (C) = B; S (B) = B' et S (D) = D'

Déterminons D' = S (D)

$$z_{D'} = \frac{1}{2}(1+i)z_D - i = \frac{1}{2}(1+i)(3+i) - i = \frac{1}{2}(3+i+3i-1) - i = \frac{1}{2}(2+4i) - i = 1+i$$

<u>EXERCICE 6.</u> BAC 2005 SESSION NORMALE

1.a. $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \left|\left(1-i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - i\right| = 6 \Leftrightarrow \left|\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right)\right| = 6$

$$\Leftrightarrow \left|\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(z - \frac{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}\right)\right| = 6 \Leftrightarrow \left|\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(z - \frac{4i}{4}\right)\right| = 6$$

$$\Leftrightarrow \left|\left(1-i\sqrt{3}\right)(z-i)\right| = 6 \Leftrightarrow \left|1-i\sqrt{3}\right|\left|z-i\right| = 6$$

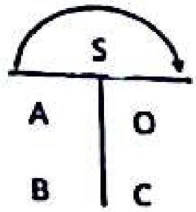
$$\Leftrightarrow 2\times|z-i| = 6 \Leftrightarrow |z-i| = \frac{6}{2}$$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow |z-i| = 3$

b. $|z-i| = 3 \Leftrightarrow |z_M - z_A| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$

Donc (Γ) *est le cercle de centre A d'affixe i et de rayon* 3.

2.



Scanned by CamScanner

a. $z' = az + b$

$s(A) = O \Leftrightarrow az_A + b = z_O$

$s(B) = C \Leftrightarrow \underline{az_B + b = z_C}$

$az_A - az_B = z_O - z_C$

$a(z_A - z_B) = z_O - z_C$

$$a = \frac{z_O - z_C}{z_A - z_B} = \frac{z_C - z_O}{z_B - z_A} = \frac{-4i - 0}{\sqrt{3} - i} = \frac{-4i}{\sqrt{3} - i} = \frac{-4i(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)}$$

$$a = \frac{-4i\sqrt{3} + 4}{3 + 1} = \frac{4 - 4i\sqrt{3}}{4} = 1 - i\sqrt{3}$$

$az_A + b = z_O \Leftrightarrow b = z_O - az_A = 0 - (1 - i\sqrt{3}) \times i = -(1 - i\sqrt{3}) \times i$

$\Leftrightarrow b = -(i + \sqrt{3}) = -i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - i$

Donc $z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$

b. $z' = (1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i$

$|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

S est une similitude plane directe

- *de rapport* $k = |1 - i\sqrt{3}| = 2$
- *d'angle* $\theta = \arg(1 - i\sqrt{3})$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right| \theta = -\frac{\pi}{3}$$

- *de centre* $E(\varpi)$

$$\varpi = \frac{b}{1 - a} = \frac{-\sqrt{3} - i}{1 - (1 - i\sqrt{3})} = \frac{-\sqrt{3} - i}{i\sqrt{3}} = \frac{(-\sqrt{3} - i)(-i\sqrt{3})}{(i\sqrt{3})(-i\sqrt{3})} = \frac{3i - \sqrt{3}}{3} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{3}$$

$$\varpi = \frac{-\sqrt{3}}{3} + i$$

3.a. Nature et éléments caractéristiques de (C).

(C) est un cercle.

- *de rayon* $R = k \times r = 2 \times 3 = 6$
- *de centre O l'image de A par S (en effet,* $S(A) = O$)

b. Construction de (C) et (Γ) (voir figure)

(C) : Cercle de centre O (0 ; 0) et de rayon 6.

(Γ) : Cercle de centre A (0 ; 1) et de rayon 3.

Scanned by CamScanner

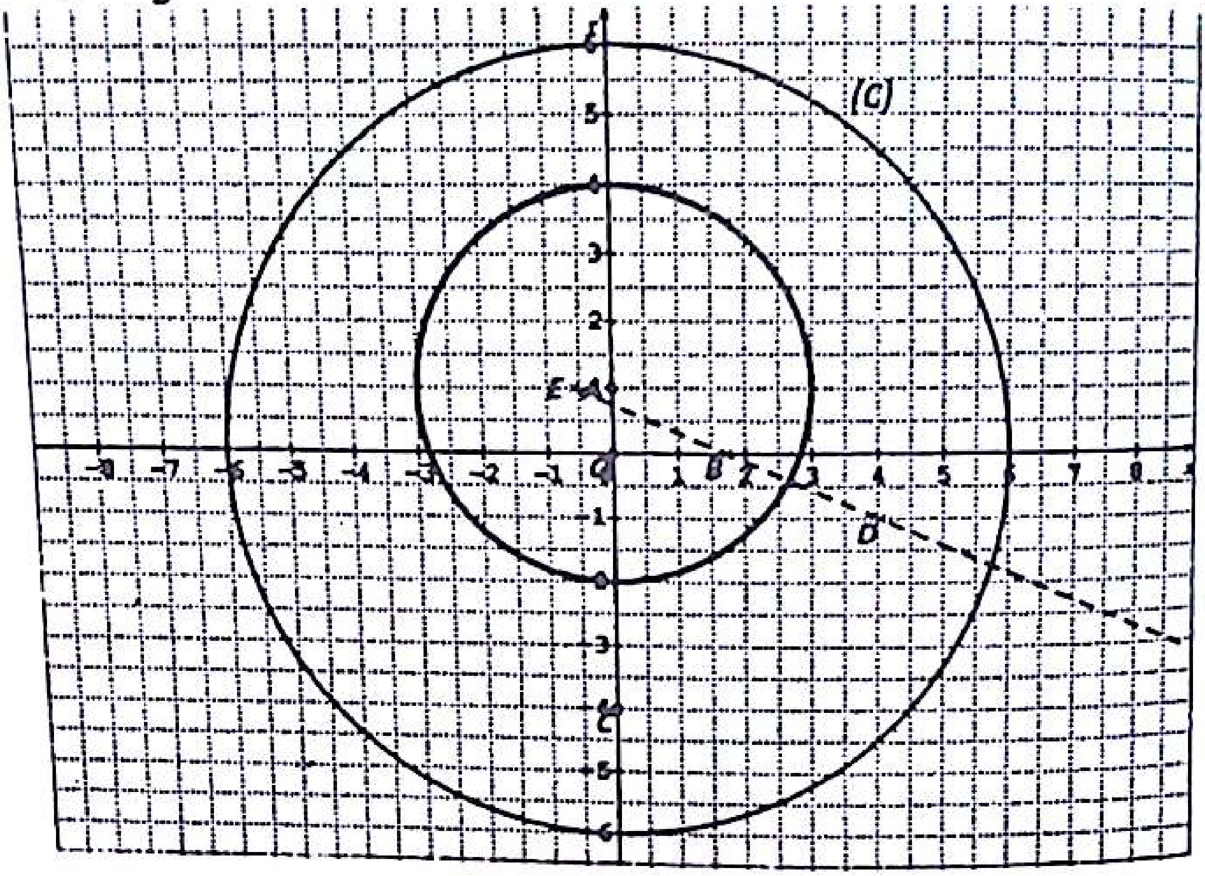
4.a. Construction des points E et D.(voir figure)

b. Le triangle ECD est un triangle équilatéral car : EC=ED et $Mes\,\widehat{DEC}=\frac{\pi}{3}$

c. $D\in(EB)$ et $ED=2EB \Rightarrow \overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{EB} \Rightarrow z_D-z_E=2(z_B-z_E)$

$\Rightarrow z_D=2(z_B-z_E)+z_E=2z_B-2z_E+z_E=2z_B-z_E=2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}-i$

$\Rightarrow z_D=\frac{7\sqrt{3}}{3}-i$



5. $z'=az+b$

$s(E)=E \Leftrightarrow az_E+b=z_E$

$s(C)=D \Leftrightarrow az_C+b=z_D$

$az_E-az_C=z_E-z_D$

$a(z_E-z_C)=z_E-z_D$

$a=\frac{z_E-z_D}{z_E-z_C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\varpi=\frac{b}{1-a} \Rightarrow b=\varpi\times(1-a)=z_E\times(1-a)=\frac{\sqrt{3}}{3}+i$

Donc $z'=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)z+\frac{\sqrt{3}}{3}+i$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 7. Bac 2004. Session normale

1. $|z_A| = \sqrt{4^2} = 4$ soit θ_A un argument de z_A, on a :

$$\begin{cases} \cos\theta_A = \frac{0}{4} = 0 \\ \sin\theta_A = \frac{4}{4} = 1 \end{cases} \text{ d'où } Arg z_A = \theta_A = \frac{\pi}{2}$$

$|z_B| = \sqrt{4\times3+4} = 4$ soit θ_B un argument de z_B, on a :

$$\begin{cases} \cos\theta_B = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_B = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ d'où } Arg\, z_B = \theta_B = \frac{\pi}{6}$$

$|z_C| = \sqrt{4\times3+4} = 4$ soit θ_C un argument de z_C, on a :

$$\begin{cases} \cos\theta_C = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_C = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ d'où } Arg z_C = \theta_C = \frac{5\pi}{6}$$

2. On a : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 4 \Leftrightarrow OA = OB = OC$

Donc les points A, B et C appartiennent au cercle C (0 ; 4).

3. Démontrons que le triangle OBA est équilatéral.

$AB = |z_{AB}| = |z_B - z_A| = |2\sqrt{3} - 2i| = 4.$

Comme AB = OA = OB alors le triangle OBA est équilatéral.

4. Démontrons que OBAC est un losange.

$CA = |z_{CA}| = |z_A - z_C| = |2i + 2\sqrt{3}| = 4.$

Comme OB = BA = CA = CO = 4 et de plus (OB) est parallèle à (CA) (car $z_{OB} = z_{CA}$)

Donc le quadrilatère OBAC est un losange.

5. K est le milieu de [OA] ; S est la similitude directe de centre O telle que S (B) = K.

a. Détermination de l'écriture complexe de S.

Méthode 1

	S	
O		O
B		K

Le rapport k de S : $k = \frac{OK}{OB} = \frac{|z_K|}{|z_B|} = \frac{|2i|}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Car $z_k = \frac{z_O + z_A}{2} = \frac{z_A}{2} = 2i$

L'angle orienté θ de S : $\theta = Arg(\frac{z_{OK}}{z_{OB}}) = Arg(\frac{z_K}{z_B}) = Arg(z_k) - Arg(z_B) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Le centre de S st le point O tel que $z_O = 0$.

L'écriture complexe est donc : $z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

On en déduit : $z' = \frac{1}{2}(\frac{i\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})z = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}z$

Scanned by CamScanner

Méthode 2

L'écriture complexe de S est de la forme : $z'=az+b$ avec a et b des nombres complexes et $|a|\neq 1$.

S (O) = O et S(B) = K d'où :

$$\begin{cases}0=0\times a+b\\2i=a(2\sqrt{3}+2i)+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\a=\dfrac{2i}{2(\sqrt{3}+i)}=\dfrac{i(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=0\\a=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}\end{cases}$$

d'où $z'=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{4}z$

b. L milieu de [AC] donc $z_L=\dfrac{z_C+z_A}{2}=-\sqrt{3}+3i$

$$z'_L=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}(-\sqrt{3}+3i)=\frac{1}{4}(-\sqrt{3}-3i+3i-3\sqrt{3})\Rightarrow z'_L=-\sqrt{3}$$

c. (LO) est la médiatrice du segment [AC]. Or S (O) = O et S (L) = L'.

$z'_L=-\sqrt{3}$ alors L' $\in$(OI). Donc S ((OL)) = (OI).

L'image de la médiatrice (LO) est (OI).

EXERCICE 8 : Bac 2003 deuxième session

1. Vérifions que :

$\forall Z\in\mathbb{C},\ Z^3-2iZ^2+4(1+i)Z+16+16i=(Z+2)[Z^2-2(1+i)Z+8(1+i)]$

1ère méthode : la division euclidienne

$$\begin{array}{l|l}
Z^3-2iZ^2+4(1+i)Z+16+16i & Z+2\\
\hline
-Z^3-2Z^2 & Z^2-2(1+i)Z+8(1+i)\\
\hline
-2(1+i)Z^2+4(1+i)Z & \\
2(1+i)Z^2+4(1+i)Z & \\
\hline
8(1+i)Z+16+16i & \\
-8(1+i)Z-16-16i & \\
\hline
00 &
\end{array}$$

2ème méthode : la méthode de **HÖRNER**

	1	-2i	4+4i	16+16i
-2		-2	4+4i	-16-16i
	1	-2-2i	8+8i	0

Scanned by CamScanner

2. a. Déterminons les racines carrées du nombre complexe -8-6i.

Soit $Z=-8-6i \Rightarrow |Z|=|-8-6i|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$

soit $\delta=x+iy$ une racine carrée de Z, on a :

$$\begin{cases} x^2+y^2=|Z| \\ x^2-y^2=\mathrm{Re}(Z) \\ 2xy=\mathrm{Im}(Z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 & (1) \\ x^2-y^2=-8 & (2) \\ 2xy=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=2 & (1)+(2) \\ 2y^2=18 & (1)-(2) \\ xy=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=9 \\ xy<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ou } x=-1 \\ y=3 \text{ ou } y=-3 \\ x \text{ et } y \text{ sont de signes contraires} \end{cases}$$

On en déduit que les racines carrées de $Z=-8-6i$ sont :

$\delta=1-3i$ et $\delta'=-1+3i$

b. Résolvons, dans $\mathbb{C}$, $Z^2-2(1+i)Z+8(1+i)=0$

$\Delta'=b'^2-ac=(1+i)^2-8(1+i)=2i-8-8i=-8-6i \Rightarrow \Delta'=-8-6i$

Les racines carrées de $\Delta'=-8-6i$ sont : $\delta=1-3i$ et $\delta'=-1+3i$

Les solutions de l'équation: $Z^2-2(1+i)Z+8(1+i)=0$ sont:

$$Z_1=\frac{-b'+\delta}{a}=\frac{(1+i)+1-3i}{1}=\frac{2-2i}{1}=2-2i$$

$$Z_2=\frac{-b'-\delta}{a}=\frac{(1+i)-1+3i}{1}=\frac{4i}{1}=4i$$

$S_1=\{2-2i\,;4i\}$

c. En déduisons les solutions de l'équation (E).

(E): $Z^3-2iZ^2+4(1+i)Z+16+16i=0$

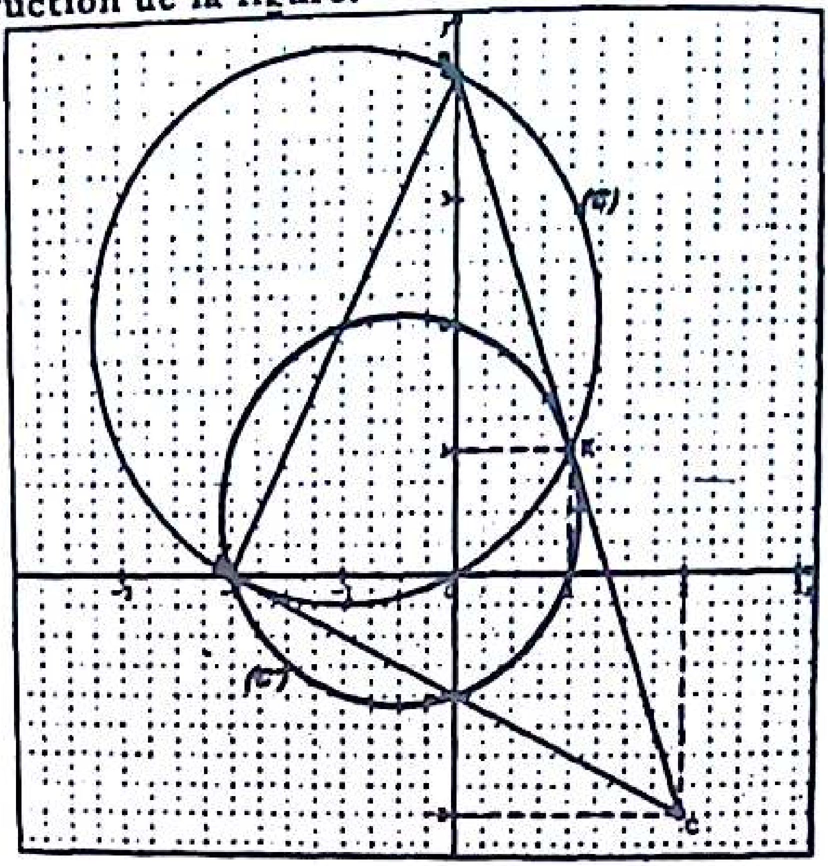
$\Leftrightarrow \quad (Z+2)\left[Z^2-2(1+i)Z+8(1+i)\right]=0$

$\Leftrightarrow \quad (Z+2)=0$ ou $Z^2-2(1+i)Z+8(1+i)=0$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S=\{-2\,;2-2i\,;4i\}$

Scanned by CamScanner

3. a. Construction de la figure.



b. Soit K le milieu de [BC].
Soit S la similitude directe de centre A, qui transforme B en K.
Déterminons puis construisons l'image (C') du cercle (C) de diamètre [AB] par la similitude S.

K est le milieu de $[BC] \Leftrightarrow Z_K = \dfrac{Z_B + Z_C}{2} = \dfrac{4i+2-2i}{2} = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$

La similitude S est telle que : $S(A)=A$ et $S(B)=K \Rightarrow S([AB])=[AK]$

On en déduit que :

l'image du cercle (C) de diamètre $[AB]$ est le cercle (C') de diamètre $[AK]=S([AB])$

c. Déterminons l'écriture complexe de S.

Soit $f(Z)=aZ+b$ l'écriture complexe associée à la similitude S.

$S(A)=A \Leftrightarrow f(Z_A)=Z_A \Leftrightarrow aZ_A+b=Z_A \quad (1)$

$S(B)=K \Leftrightarrow f(Z_B)=Z_K \Leftrightarrow \underline{aZ_B+b=Z_K} \quad (2)$

$$(1)-(2) \Rightarrow a(Z_A-Z_B)=Z_A-Z_K$$

$$\Rightarrow a=\frac{Z_A-Z_K}{Z_A-Z_B}=\frac{-2-(1+i)}{-2-(4i)}=\frac{-3-i}{-2-4i}=\frac{(-3-i)(-2+4i)}{(-2-4i)(-2+4i)}=\frac{10-10i}{20}=\frac{1}{2}(1-i)$$

Scanned by CamScanner

De(1), on tire: $aZ_A+b=Z_A \Rightarrow b=Z_A-aZ_A=-2-\frac{1}{2}(1-i)\times(-2)$

$$\Rightarrow b=-2+1-i=-1-i$$

$a=\frac{1}{2}(1-i)$ et $b=-1-i$, $\Rightarrow$ $f(Z)=\frac{1}{2}(1-i)Z-1-i$

d. Déterminons l'angle et le rapport de S.

1ère méthode ***(utilisant l'écriture complexe de la similitude)***

$f(Z)=\frac{1}{2}(1-i)Z-1-i$

∘Soit k le rapport de la similitude: $k=|a|$

$$k=\left|\frac{1}{2}(1-i)\right|=\frac{1}{2}|1-i|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

•Soit θ l'angle de la similitude: $\theta=\arg(a)$

$$\theta=\arg(a)=\arg\left(\frac{1}{2}(1-i)\right)=\arg\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\dfrac{\mathrm{Re}(a)}{|a|}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2ex] \sin\theta=\dfrac{\mathrm{Im}(a)}{|a|}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right|\ \theta=-\frac{\pi}{4}$$

2ème méthode ***(utilisant les points et leurs images respectives par la similitude)***

La similitude S est telle que: $S(A)=A$ et $S(B)=K \Rightarrow S([AB])=[AK]$

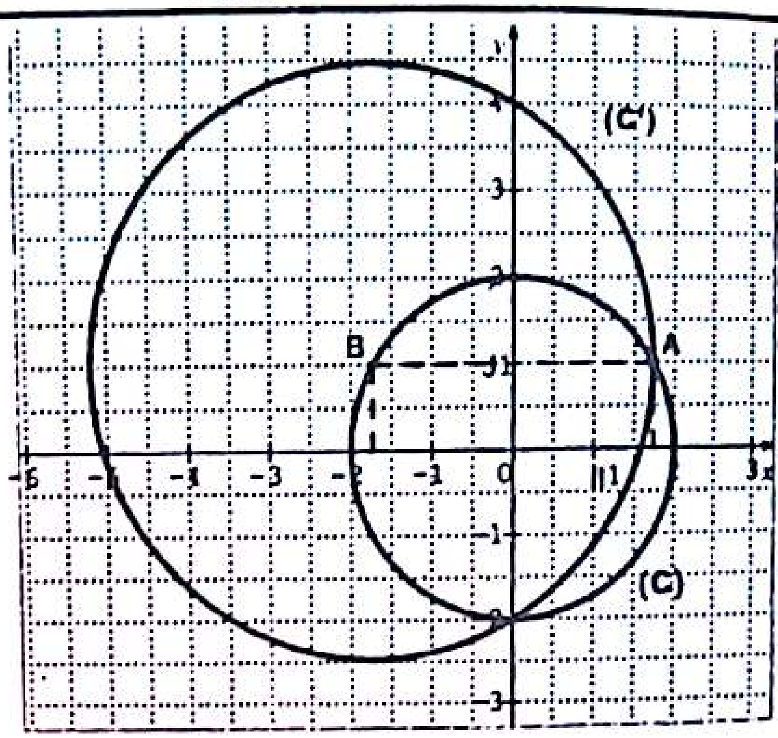
On en déduit que:

$$k=\frac{AK}{AB}=\frac{|Z_K-Z_A|}{|Z_B-Z_A|}=\frac{|3+i|}{|2+4i|}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta=mes(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AK}})=\arg\left(\frac{Z_K-Z_A}{Z_B-Z_A}\right)=\arg\left(\frac{3+i}{2+4i}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}(1-i)\right)=-\frac{\pi}{4}$$

Scanned by CamScanner

b. Construction de (C').



Scanned by CamScanner

CHAPITRE XII: STATISTIQUES

Andreï Andreïevitch Markov

(2 juin 1856 - 20 juillet 1922)

Mathématicien russe.

Né en 1856 à Riazan, il étudia à l'Université d'État de Saint-Pétersbourg en 1874 sous la tutelle de Tchebychev et en 1886, il devint membre de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg.

Ses travaux sur la théorie des probabilités l'ont amené à mettre au point **les chaînes de Markov** qui l'ont rendu célèbre. Ceux-ci peuvent représenter les prémices de la théorie du calcul stochastique. Il étudia en 1913 la succession des lettres dans le roman *Eugène Onéguine* d'Alexandre Pouchkine. Markov nota que les lettres utilisées (qui se répartissent selon les statistiques spécifiques de l'alphabet russe) suivent en fait des contraintes très précises: chaque lettre dépend étroitement de la précédente. On appela par la suite les groupements dans lesquels une lettre d'un texte dépend de la précédente- avec une certaine probabilité -**une chaîne de Markov.**

Scanned by CamScanner

FICHE DE COURS

Nuage de points

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

L'ensemble des points M_{ij} de coordonnées $\left(x_i, y_j\right)$ est appelé nuage de points associé à la série.

Point moyen d'un nuage de points

On appelle point moyen d'un nuage de points représentant une série, le point G de cordonnées $\left(X_G, Y_G\right)$ où et $Y_G = \bar{Y} = \frac{\sum y_j}{N}$.

Covariance $X_G = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{N}$

La covariance d'une série statistique à 2 caractères X et Y, de moyennes respectives $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ et d'effectif total N est le nombre réel noté $COV(X,Y)$ ou σ_{XY} tel que :

$$COV(X,Y) = \frac{\sum n_{ij}\left(x_i - \bar{X}\right)\left(y_j - \bar{Y}\right)}{Effectif\ total} \quad \text{ou} \quad COV(X,Y) = \frac{\sum n_{ij} x_i y_j}{Effectif\ total} - \bar{X} \bullet \bar{Y}$$

Droite de régression de Y en X

La droite (D) de régression de Y en fonction de X passe par le point $G\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$, point moyen du nuage de point.

Son équation est : $y = ax + b$. $Avec\ \ a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)}\ \ et\ \ b = \bar{Y} - a\bar{X}$.

Droite de régression de X en Y

La droite (D') de régression de X en fonction de Y passe par le point $G\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$, point moyen du nuage de point.

Son équation est : $x = a'y + b'$. $Avec\ \ a' = \frac{COV(X,Y)}{V(Y)}\ \ et\ \ b' = \bar{X} - a\bar{Y}$.

Remarque $G\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$ appartient aux 2 droites de régression.

Pour tracer ces droites, il suffit donc de déterminer un autre point vérifiant l'équation.

Corrélation linéaire

Deux variables statistiques X et Y sont dites en corrélation linéaire lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en Y sont des droites.

Scanned by CamScanner

Coefficient de corrélation linéaire

On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractère

(X, Y), le nombre réel r défini par : $r = \dfrac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X) \bullet V(Y)}}$

Propriétés

- Si $0,87 \leq |r| \leq 1$ alors la corrélation linéaire entre les 2 variables est forte.
- Si $r = 1$ alors la corrélation est parfaite.

Estimation, Prévision

Lorsqu'il existe une bonne corrélation linéaire, il est possible de prévoir la valeur de y connaissant celle de x, en utilisant l'équation de la droite de régression de y en x ; et vice-versa.

METHODES PRATIQUES

M1 : Comment calcule- t-on la variance de la variable X?

Pour calculer la variance de la variable X, on peut procéder comme suit :

- Calculer $\overline{X}$ la moyenne de la variable X, puis calculer $\overline{X}^2$ le carré de la moyenne (1).
- Déterminer le carré de chaque modalité.
- Multiplier colonne par colonne le carré de chaque modalité par son effectif correspondant.
- Calculer la somme des produits obtenus ci-dessus.
- Diviser cette somme par l'effectif total : on obtient ainsi la moyenne des carrées (2).
- Soustraire de la moyenne des carrés (2) le carré de la moyenne (1) : on obtient la variance.

NB : On procèdera de même pour calculer la variance de la variable Y.

M2 : Comment calcule-t-on la covariance des variables X et Y?

Pour calculer la covariance des variables X et Y, on peut procéder comme suit :

- Calculer $\overline{X}$ la moyenne de la variable X.
- Calculer $\overline{Y}$ la moyenne de la variable Y.
- Calculer le produit $\overline{X} \bullet \overline{Y}$. (1).
- Déterminer le carré de chaque modalité.
- Multiplier colonne par colonne chaque variable X à la variable Y correspondante.
- Calculer la somme des produits obtenus ci-dessus.
- Diviser cette somme par l'effectif total. (2).
- Calculer la différence (2) − (1) : on obtient la covariance des variables X et Y.

Scanned by CamScanner

EXERCICES RESOLUS

EXERCICE 1. Bac D 1999. Session normale.

Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaires en millions de Francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où x désigne le numéro du mois et y le chiffre d'affaires correspondant.

x	1	2	3	4	5	6
y	12	13	15	19	21	22

1. Calculer $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les moyennes des variables x et y.
2. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point moyen G. (Unités : 2 cm en abscisses et 1 cm pour 2 unités en ordonnées).
3. Calculer la variance V(x) de x et la covariance $COV(X,Y)$ de x et y.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

4. Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de y en x est : $y = \frac{78}{35}x + 9,2$
5. Tracer la droite (D).
6. En utilisant la droite (D), calculer une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7ème mois.

EXERCICE 2.

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit.

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Prix de vente en milliers de francs xi	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels yi	180	160	150	130	100	90	80	70

1. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. (Unité : 1 cm pour 1000 francs en abscisse, 1cm pour 10 acheteurs en ordonnée).
2. Déterminer les coordonnées du point G.
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. Interpréter le résultat obtenu.
4. Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x. Tracer (D).
5. Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.
6. En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x, déterminer :

a. le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F.

b. le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 3. Bac D 2000. Session de remplacement

Pour préparer la retraite de ses membres, une coopération a planté en 1991 des anacardiers qui sont rentrés en production trois ans plus tard. Le tableau statistique suivant donne l'évolution des productions depuis la première année de récolte.

Ordre X_i de l'année de production	1	2	3	4	5	6	7
Année de production			1996				
Quantité Y_i de production (en tonnes)	118	146	184	247	267	278	255

1. En quelle année cette coopérative a-t-elle obtenu 278 tonnes d'anacarde ?
2. Recopier et compléter le tableau statistique ci-dessus.
3. Représenter dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J), le nuage de points de la série statistique double (X_i, Y_i).

On prendra : En abscisses 2 cm pour unité et en ordonnées 1 cm pour 20 tonnes.

4. Déterminer l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire de la distribution statistique (X_i, Y_i).
5. La corrélation entre les variables X et Y est-elle bonne ? Justifier.
6. Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de régression qui permet d'estimer l'année en fonction de la production.
7. En quelle année la coopérative produira-t-elle 350 tonnes ?

EXERCICE 4. Sénégal bac D 1999

L'étude du commerce extérieur d'un pays de 1990 à 1996 pour les importations et les exportations exprimés en milliards de francs donne le tableau suivant :

Importation X	2,8	3,2	3,8	4,4	6,4	5,7	7,4
Exportation Y	2	2,6	3,2	3,8	5	5,5	6,5

1. Calculer :

a. les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

b. les variances V(X) et V(Y)

c. les écarts types σ(X) et σ(Y)

2. Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y.

Existe t-il une corrélation entre les importations et les exportations.

EXERCICE 5. Sénégal bac D 2000

On donne la série statistique suivante à deux variables :

Xi	1,2	1,4	1,6	1,8	2
Yi	13	12	14	16	t

Par la méthode des moindres carrées, on a obtenu l'équation de la droite de régression de y en x, à savoir : $y = 9x + 0,6$

1. Calculer $\overline{X}$
2. Exprimer $\overline{Y}$ en fonction de a
3. En utilisant 1. et 2., montrer que $t = 20$.

Scanned by CamScanner

EXERCICES DE PERFECTIONNEMENT

EXERCICE 1.

On considère la série statistique déterminée par le tableau ci-contre.

x_i	-3	-1	0	5
y_i	1	-1	4	2

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
3. Déterminer V(X) et V(Y)
4. Calculer Cov (X, Y) la covariance des variables X et Y.
5. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et de la droite de régression de x en y. Tracer ces deux droites.
6. Calculer le coefficient de corrélation de cette série et l'interpréter.

EXERCICE 2.

On considère la série statistique déterminée par le tableau ci-dessous.

x_i	10	11	13	15	17	18
y_i	105	107	110	111	112	115

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
3. Déterminer V(X) et V(Y)
4. Calculer Cov (X, Y) la covariance des variables X et Y.
5. Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x.
   Tracer la droite (D).
6. Calculer le coefficient de corrélation de cette série et l'interpréter.

EXERCICE 3.

Le directeur des ressources humaines d'une entreprise doit embaucher des ouvriers. Lors de précédents recrutements pour des postes analogues, il a fait une étude statistique et a dressé le tableau suivant :

Salaires proposés x_i	60.000	64.000	68.000	72.000
Nombre de candidatures y_i	11	17	20	25

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.
3. En déduire une estimation du salaire que doit proposer le directeur s'il veut recruter 30 ouvriers.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 4.

Le tableau suivant donne le poids y en kg d'un nourrisson, x jours après sa naissance.

x_i	5	7	10	14	18	22	26
y_i	3,61	3,70	3,75	3,85	3,90	4,05	4,12

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x et la représenter.
3. Donner une estimation du poids du poids du nourrisson 30 jours après sa naissance.

EXERCICE 5.

Le tableau suivant donne, pour six années, les montants x des frais de publicité d'une entreprise et y de son chiffre d'affaires, exprimés en millions de francs.

x_i	5,8	4	6,4	4,6	5,2	7
y_i	128	102	138	116	118	142

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série.
   Le résultat permet-il d'envisager un ajustement linéaire ?
3. Déterminer la droite de régression de y en x.
4. En déduire :

a. une estimation de chiffre d'affaires si l'on engage 9 millions de francs de publicité.
b. une estimation du budget de publicité à prévoir si l'on désire réaliser un chiffre d'affaires de 200 millions de francs.

EXERCICE 6.

Les dépenses x_i et les chiffres d'affaires y_i bimensuels d'une grande entreprise ont donné en 1982 la nomenclature suivante, après une étude statistique.
Les montants sont exprimés en dizaines de millions de francs CFA.

x_i	12	17	11	13	31	20
y_i	99	130	92	108	232	150

1. Placer le nuage de points pour $1 \leq i \leq 6$ dans un plan muni d'un repère orthogonal.
2. Déterminer les équations des deux droites de régression de y en x et de x en y.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique.
   Que peut-on en déduire ?
4. Quel (le) est en deux mois :

a. La dépense si le chiffre d'affaires bimensuel est de deux (2) milliards de FCFA.
b. Le chiffre d'affaires si la dépense bimensuelle est de 300 millions ?

Scanned by CamScanner

PROBLEMES DE SYNTHESE TYPE BAC

EXERCICE 7. Adapté de Bac D 2010. Burkina Faso/ 2nd tour.

Une entreprise fabrique des vêtements. Dans le tableau suivant, on aindiqué pour les 7 premiers mois de l'année 2008 la production journalière moyenne de pulls.

Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où x désigne le numéro du mois et y la production journalière.

Mois	janvier	Fevrier	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
x	1	2	3	4	5	6	7
y	200	210	260	265	270	300	315

La direction de l'entreprise devra fermer l'atelier de production de pulls si la production moyenne journalière n'atteint pas 350 pulls à la fin de l'année 2008.

1. Calculer $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les moyennes des variables x et y.
2. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique ainsi que le point moyen G. (Unités : 1 cm par rang de mois en abscisses et 1 cm pour 20 pulls en ordonnées).
3. Calculer la variance V(x) de x et la covariance $COV(X,Y)$ de x et y.
4. Déterminer une équation de la droite de régression (D) de y en x.
5. Tracer la droite (D).
6. a) Calculer la production journalière de pulls en décembre 2008 ;
   b) Déterminer graphiquement ce résultat.
7. L'atelier de fabrication de pulls a-t-il été fermé en fin décembre 2008 ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 8. Adapté de Bac D 2009. Burkina Faso/ 2nd tour.

Le tableau suivant donne le montant des prêts octroyés par une banque à des associations féminines entre 2002 et 2007.

Année	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x	1	2	3	4	5	6
Montant des prêts en millions de francs CFA y	4,5	5	5,2	5,8	6,3	7,1

1. Calculer $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les moyennes des variables x et y.
2. Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique ainsi que le point moyen G. (Unités : 1 cm pour une unité en abscisses et 1 cm pour un million en ordonnées).
3. Calculer la variance V(x) de x et la covariance $COV(X,Y)$ de x et y.
4. Déterminer une équation de la droite de régression (D) de y en x.
5. Tracer la droite (D).
6. On suppose que l'évolution du montant des prêts faits aux associations féminines reste la même au cours des années à venir. A partir de quelle année, le montant des prêts sera-t-il strictement supérieur au double de celui de 2009 ?

Scanned by CamScanner

EXERCICE 9.

Le tableau suivant présente les notes obtenues par cinq élèves d'une même classe en Français et en Philosophie au baccalauréat 2011.

On désigne par x_i la note en Français et y_i la note en philosophie.

Note x_i	7	10	11	13	16
Note y_i	8	9	12	12	13

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
2. Calculer r le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X et Y.

Interpréter le résultat obtenu.

3. a. Donner par la méthode des moindres carrés, l'équation de (D), droite de régression de y en x.

   b. Tracer (D).
4. Suivant cet ajustement, quel serait la note en philosophie d'un élève qui a obtenu 9 en français.

EXERCICE 10.

Ce tableau ci-dessous donne l'évolution du tirage (en milliers d'exemplaires) d'un journal durant les sept derniers mois.

Mois xi	1	2	3	4	5	6	7
Tirage yi	6	4	6	8	10	10	12

1. a. Représenter le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.
2. Déterminer par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite de régression de y en x.
3. Calculer r le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Interpréter.
4. en supposant que l'évolution du tirage de ce journal se poursuive ainsi dans les mois futurs, estimez le tirage lors du dixième mois.

EXERCICE 11. Adapté de Bac D 2006. Burkina Faso.

Le tableau suivant donne les résultats d'une étude réalisée sur un produit P ;

x représente le prix de vente unitaire du produit exprimé en FCFA ;

y représente la quantité du produit P disponible sur le marché, exprimée en milliers.

xi en FCFA	30	35	45	60	80	100
yi en milliers	12,5	13	13	15	15,5	16

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.

(Unités : 1 cm pour 10FCFA en abscisses et 1 cm pour un millier en ordonnées).

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G. Le placer dans le repère.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r.

   Un ajustement affine de ce nuage de points semble-t-il raisonnable ?
3. Déterminer l'équation de la droite (D) de régression de y en x.
4. Représenter (D).
5. En utilisant l'équation de (D), déterminer :

a) la quantité de produit P disponible sur le marché pour un prix de 150FCFA.

b) le prix de vente si la quantité du produit P disponible sur le marché est de 20000.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 12.

Le tableau suivant donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population féminine.

X	36	42	48	54	60	66
Y	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1. Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal (O, I, J) (1 cm pour 3 ans et 1 cm pour l'unité de tension artérielle).

2. Calculer la moyenne et la variance des variables X et Y.

3. a. Trouver une équation de la droite de régression de Y en X.

b. Trouver une équation de la droite de régression de X en Y.

c. Représenter ces deux droites dans le repère (O, I, J).

4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X et Y.

5. Une personne de 70 ans a une tension de maximale de 16,2. Cela vous paraît-il normal ?

EXERCICE 13.

Le tableau suivant représente l'évolution du chiffre d'affaires en millions de francs d'une entreprise pendant 10 années (de 1995 à 2004).

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffres d'affaires y_i	110	130	154	180	190	210	240	245	270	295

1. Représenter le nuage de points associé à cette série. (Unité : 2 cm pour une unité en abscisse ; 1 cm pour 20 millions de francs en ordonnée)
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G. Le placer dans le repère.
3. Calculer le coefficient de corrélation de cette série et l'interpréter.
4. Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x.
5. Déterminer le chiffre d'affaires en 2010, si l'évolution continue.

EXERCICE 14.

Le tableau suivant donne le bénéfice net en millions de francs d'une entreprise.

Année	1980	1985	1990	1995	1998	2000	2002	2003
Rang de l'année x_i	0	5	10	15	18	20	22	23
Bénéfice net y_i	3	3,6	3,8	4,6	4,8	5,2	5,4	5,8

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G. Le placer dans le repère.
3. Calculer le coefficient de corrélation de cette série et l'interpréter.
4. Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x.
5. En utilisant l'ajustement linéaire précédent, déterminer :

a. le bénéfice net en 1992.

b. l'année où le bénéfice net prévu dépassera 7 millions de francs.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 15.

Le tableau suivant donne la consommation ivoirienne de riz en tonnes pour la période de 2001 à 2008.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Consommation en tonnes	7740	7800	7880	7900	7920	8000	8020	8060

x_i: Rang de l'année à partir de 2000.

y_i: Consommation de riz en tonnes.

1. Représenter le nuage de points associé à cette série.
(Unité : 2 cm pour une unité en abscisse ; 1 cm pour 20 tonnes de riz en ordonnée).
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G. Le placer dans le repère.
3. Déterminer l'équation de la droite (D) de régression de y en x.
4. Représenter (D).
5. Calculer une valeur approchée, à une tonne près, de la consommation ivoirienne de riz en 2015.

EXERCICE 16.

La série statistique suivante comporte 2 variables :

X= les dépenses militaires en milliards de F.

Y = l'effectif de l'armée en milliers.

	X	Y
Allemagne	224,6	447,0
Belgique	21,6	75,7
France	241,4	417,5
Grande-Bretagne	234,1	293,5
Italie	136,7	354,0
Pays-Bas	41,7	88 ,3

1. Construire le nuage de points associé à cette série statistique double.
2. Déterminer le point moyen du nuage. Le placer dans le repère précédent.
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y puis l'interpréter.
4. a. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x.
   b. Déterminer une équation de la droite de régression de x en y.
5. Construire ces deux droites dans le repère précédent.

Scanned by CamScanner

CORRECTION

EXERCICE 1. **Bac D 1999 session normale.**

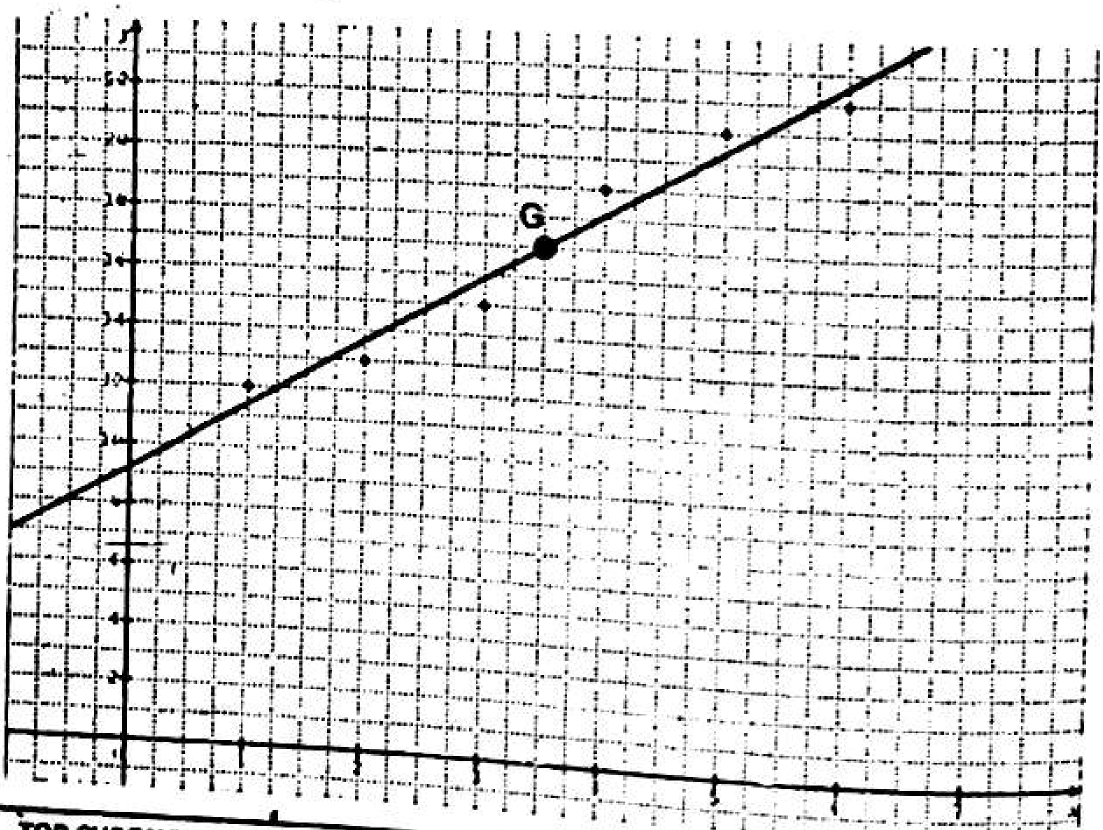
Pour les calculs, on pourra s'aider du tableau ci-dessous :

x_i	y_i	$x_i.y_i$	x_i^2	y_i^2	
1	12	12	1	144	
2	13	26	4	169	
3	15	45	9	225	
4	19	76	16	361	
5	21	105	25	441	
6	22	132	36	484	
21	102	396	91	1824	Total

1. Calcul de $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les moyennes des variables x et y.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{1}^{6} x_i}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{1}^{6} y_i}{6} = \frac{102}{6} = 17$$

2. Le nuage de points de la série statistique ainsi que le point moyen G.



Scanned by CamScanner

3. Calcul de la variance V(x) de x et la covariance Cov (x, y) de x et y.

$$V(X)=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{70}{24}=\frac{35}{12}\ ;\ \text{cov}(X;Y)=\frac{396}{6}-\left(\frac{7}{2}\times17\right)=\frac{39}{6}=\frac{13}{2}$$

4. Montrons qu'une équation de la droite de régression (D) de y en x est : $y=\frac{78}{35}x+9,2$

$$a=\frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}=\frac{\frac{13}{2}}{\frac{35}{12}}=\frac{13}{2}\times\frac{12}{35}=\frac{156}{70}=\frac{78}{35}\quad\text{et}\quad b=\overline{Y}-a\overline{X}=17-\frac{78}{35}\times\frac{7}{2}=9,2$$

Donc l'équation de la droite de régression est : $y=\frac{78}{35}x+9,2$

5. Tracé de la droite (D). ***(Voir nuage de points)***

La droite (D) passe par le point moyen point G (3,5 ; 17) et par un autre point que l'on détermine en remplaçant dans l'équation de la droite de régression, x par une valeur que l'on choisira.

Par exemple, si x = 0, on obtient y = 9,2.

(D) passe donc également par le point A (0 ; 9,2).

6. Calcul d'une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7ème mois.

Le 7ème mois correspond à $x=7$.

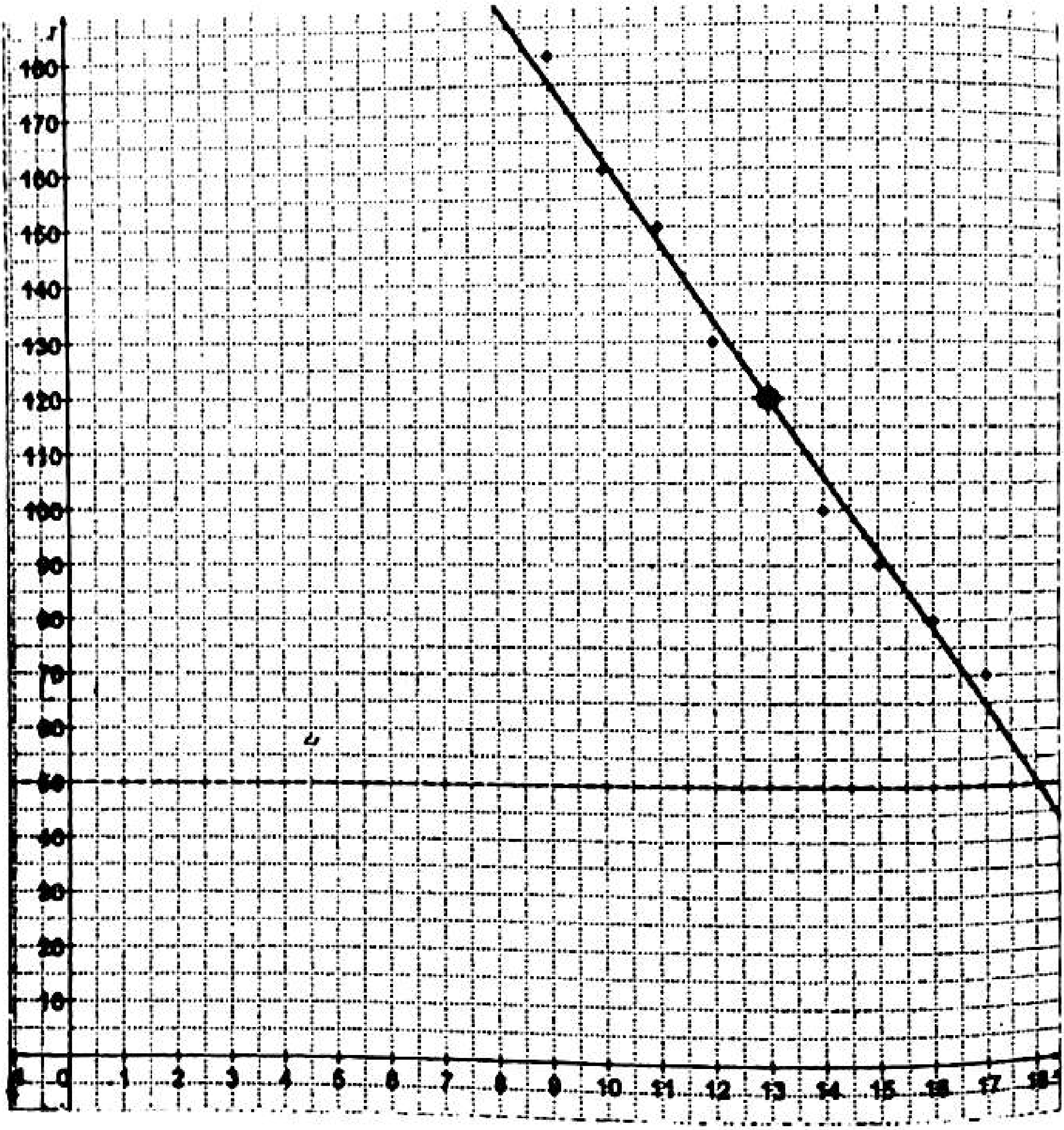
Il s'agit de déterminer la valeur de y associée à cette valeur de x.

Pour $x=7$, $y=\frac{78}{35}\times7+9,2=24,8$ **millions de francs CFA.**

Scanned by CamScanner

EXERCICE 2.

1. Représentation graphique du nuage de points de cette série statistique.
(Unité : 1 cm pour 1000 francs en abscisse, 1cm pour 10 acheteurs en ordonnée).



2. Déterminons les coordonnées du point G.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{X}=\dfrac{\sum_{1}^{8}x_i}{8}=\dfrac{9+10+11+12+14+15+16+17}{8}=13\\[2ex] \overline{Y}=\dfrac{\sum_{1}^{8}y_i}{8}=\dfrac{180+160+150+130+100+90+80+70}{8}=120\end{array}\right|\Rightarrow G(13;120)$$

Scanned by CamScanner

3. Déterminons le coefficient de corrélation linéaire r et Interprétons le résultat.

$$cov(X,Y)=\frac{\sum X_i.Y_i}{N}-\overline{X}\bullet\overline{Y}$$

$$=\frac{9\times180+10\times160+11\times150+12\times130+14\times100+15\times90+16\times80+17\times70}{8}-13\times120$$

$$cov(X,Y)=-103,75$$

$$V(X)=\frac{\sum X_i^2}{N}-\overline{X}^2=\frac{9^2+10^2+11^2+12^2+14^2+15^2+16^2+17^2}{8}-13^2$$

$$V(X)=7,499$$

$$V(Y)=\frac{\sum Y_i^2}{N}-\overline{Y}^2=\frac{180^2+160^2+150^2+130^2+100^2+90^2+80^2+70^2}{8}-120^2$$

$$V(Y)=1450,003$$

$$r=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\bullet V(Y)}}=\frac{-103,75}{\sqrt{7,499\times1450,003}}=-0,995$$

$0,87\leq|r|\leq1$: il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y.

L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

4. Equation de la droite (D) de régression de y en x.

$$(D): y=ax+b$$

$$a=\frac{cov(X,Y)}{V(X)}=\frac{-103,75}{7,499}=-13,88$$

$$\overline{y}=a\overline{x}+b \Rightarrow b=\overline{y}-a\overline{x}=120-(-13,88)\times13=299,83$$

$$(D): y=-13,88x+299,83$$

Tracé de (D) : (D) passe par le point moyen $G(13;120)$, déterminons un second point en remplaçant par exemple x par 10. On trouve y = 161,03.

On obtient : $A(10;161,03)$

5. Pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels, on lit graphiquement que le prix à fixer ne doit pas dépasser 18 000 francs.

6. a. Si le prix est fixé à 13 000 F, on a : x = 13.

Le nombre d'acheteurs à prévoir est : $y=-13,88\times13+299,83=119,39\simeq119$

b. Il s'agit de déterminer x pour y = 250.

$$y=-13,88x+299,83 \Rightarrow x=\frac{y-299,83}{-13,88}$$

Pour $y=250$, on a : $x=\frac{250-299,83}{-13,88}=3,59$ milliers de frs $=3590$ F

Scanned by CamScanner

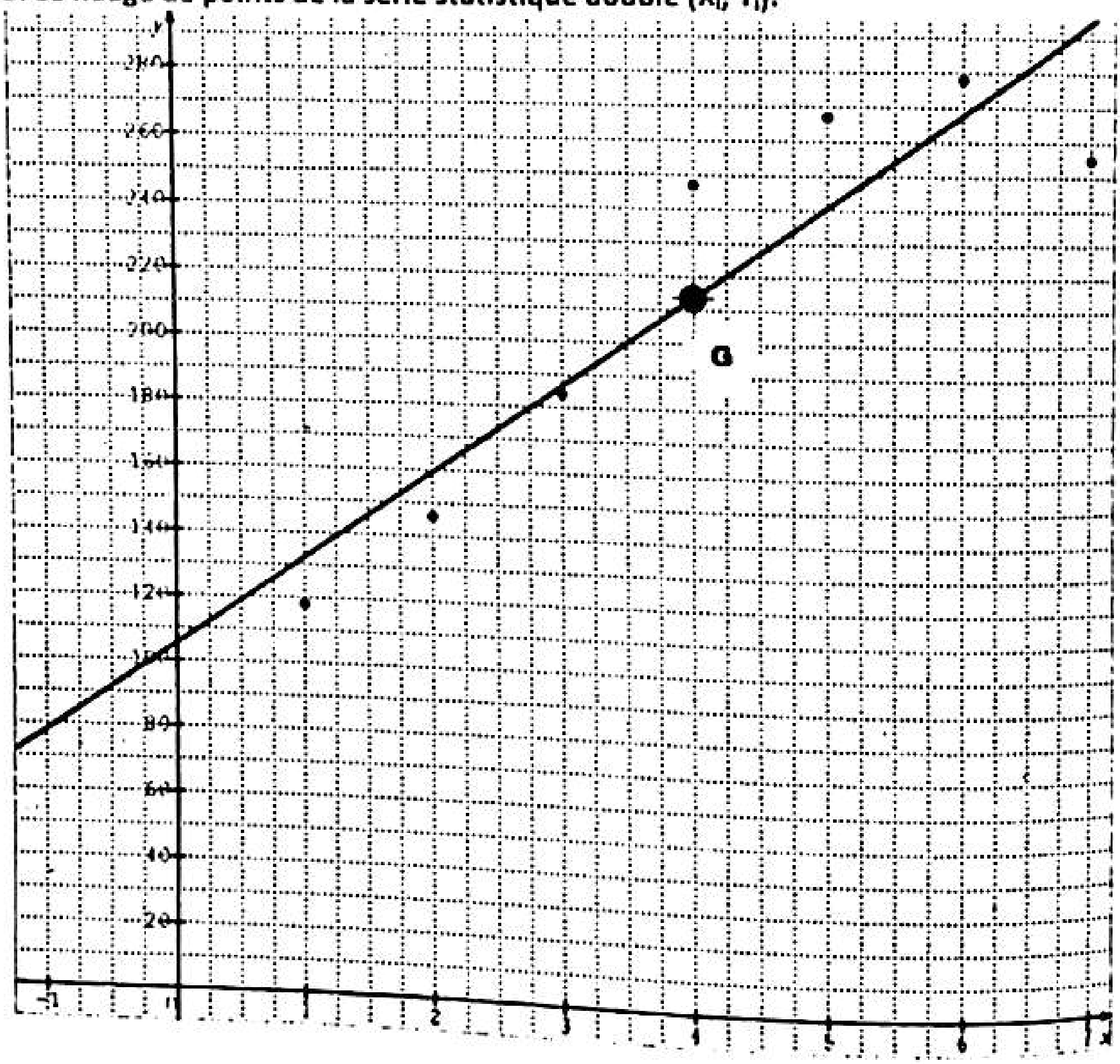
EXERCICE 3: Bac D 2000. Session de remplacement

1. La coopérative a obtenu 278 tonnes d'anacarde en 1999.

2. Tableau statistique.

Ordre X_i de l'année de production	1	2	3	4	5	6	7
Année de production	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Quantité Y_i de production (en tonnes)	118	146	184	247	267	278	255

3. Le nuage de points de la série statistique double (X_i, Y_i).



Scanned by CamScanner

On pourra s'aider du tableau ci-dessous pour calculer les différentes valeurs statistiques

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2	
1	118	118	1	13924	
2	146	292	4	21316	
3	184	552	9	33856	
4	247	988	16	61009	
5	267	1335	25	71289	
6	278	1668	36	77284	
7	255	1785	49	65025	
28	1.495	6.738	140	343.703	Total

$\overline{X}=\frac{28}{7}=4$; $\overline{Y}=\frac{1495}{7}=213,571$

$V(X)=\frac{140}{7}-4^2=4$; $V(Y)=\frac{343703}{7}-(213,571)^2=3487,857$

$Cov(X,Y)=\frac{6738}{7}-(4\times 213,571)=108,287$

4. Coefficient de corrélation linéaire de la distribution statistique (X_i, Y_i).

$$r=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}}=\frac{108,286}{\sqrt{4\times 3487,857}}=0,9167\approx 0.92$$

5. La corrélation entre les variables X et Y est-elle bonne ? Justifier.

$r=0,92>0,87 \Rightarrow$ il existe une bonne corrélation entre les variables X et Y.

6. Equation de la droite de régression qui permet d'estimer l'année en fonction de la production.

Il s'agit de la droite de régression de x en y.

$a'=\frac{\text{cov}(X,Y)}{V(Y)}=\frac{108,286}{3487,857}=0,031$ et $b'=\overline{X}-a'\overline{Y}=4-0,031\times 213,571=-2,62$

Donc l'équation de la droite de régression est : $x=0,031\,y-2,62$

7. Année de production de 350 tonnes par la coopérative.

Il s'agit ici, de déterminer x sachant que y = 350

$x=0,031\times 350-2,62=8,23$

C'est donc la 8ème année que la coopérative produira 350 tonnes.

Scanned by CamScanner

EXERCICE 4.

1.

a. $\overline{X} = 4,81$; $\overline{Y} = 4,08$

b. $V(X) = 2,97$; $V(Y) = 2,68$

c. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,97} = 1,72$; $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{2,68} = 1,64$

2. $r \simeq 0,98$.

$0,87 \leq |r| \leq 1$, il existe donc une bonne corrélation entre les importations et les exportations.

EXERCICE 5.

Par la méthode des moindre carrés, on a obtenu l'équation de la droite de régression de y en x suivante : $y = 9x + 0,6$

1. Calculons $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = 1,6$$

2. Expression de $\overline{Y}$ en fonction de a.

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{5} = \frac{55 + t}{5}$$

3. Trouvons la valeur de a.

On a : $y = 9x + 0,6 = ax + b$ avec $b = \overline{Y} - a\overline{X}$

Donc : $\frac{55+t}{5} - 9 \times 1,6 = 0.6$

D'où $t = 20$

Scanned by CamScanner

DEUXIEME PARTIE

LES 10 DERNIERS SUJETS DE BAC ENTIEREMENT RESOLUS

(BAC 2006 A 2015)

	Année	Enoncé	Correction	Contenu de l'épreuve		
				Exercice 1	Exercice 2	Problème
Sujet 1	2015	316	345	Complexes	Probabilités	Exponentielle
Sujet 2	2014	319	356	Complexes	Suites	Exponentielle
Sujet 3	2013	322	365	Complexes	Suites	logarithme
Sujet 4	2012	325	373	Statistiques	Suites	Logarithme/ Exponentielle
Sujet 5	2011	329	383	Suites	Probabilités	Logarithme/ Exponentielle
Sujet 6	2010	332	395	Probabilites	Complexes	Logarithme
Sujet 7	2009	335	405	Statistiques	Suites	Exponentielle
Sujet 8	2008	337	415	Complexes	Statistiques	Logarithme
Sujet 9	2007	339	424	Suites	Probabilités	Logarithme/ Exponentielle
Sujet 10	2006	342	434	Complexes	Probabilités	Logarithme

Scanned by CamScanner

DEUXIEME PARTIE

LES 10 DERNIERS SUJETS DE BAC ENTIEREMENT RESOLUS

(BAC 2006 A 2015)

	Année	Enoncé	Correction	Contenu de l'épreuve		
				Exercice 1	Exercice 2	Problème
Sujet 1	2015	316	345	Complexes	Probabilités	Exponentielle
Sujet 2	2014	319	356	Complexes	Suites	Exponentielle
Sujet 3	2013	322	365	Complexes	Suites	logarithme
Sujet 4	2012	325	373	Statistiques	Suites	Logarithme/ Exponentielle
Sujet 5	2011	329	383	Suites	Probabilités	Logarithme/ Exponentielle
Sujet 6	2010	332	395	Probabilités	Complexes	Logarithme
Sujet 7	2009	335	405	Statistiques	Suites	Exponentielle
Sujet 8	2008	337	415	Complexes	Statistiques	Logarithme
Sujet 9	2007	339	424	Suites	Probabilités	Logarithme/ Exponentielle
Sujet 10	2006	342	434	Complexes	Probabilités	Logarithme

Scanned by CamScanner

EXAMEN 1: BAC D SESSION NORMALE 2015

EXERCICE 1

PARTIE I

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ p(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$$

1. a) Calculer $p(i)$.

   b) Déterminer deux nombres complexes a et b tels que :

$$p(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) : $p(z) = 0$.

PARTIE II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité : 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. a) Calculer z_1 et z_2.

   b) Placer les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

2. On considère la suite U définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$

b) Démontrer que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$

c) Exprimer U_n en fonction de n.

3. On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$

a) Calculer ℓ_n

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell_n$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 2

Mariam, une jeune diplomée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité, elle constate que :

- pour un jour donne, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est 0,6 ;
- lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7 ;
- lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4.

On désigne par A l'évènement « il y a affluence de clients » et B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».

1. On choisit un jour au hasard.

a) Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».

b) Démontrer que la probabilité p(B) de l'évènement B est 0,58.

c) Mariam a réalisé un bénéfice.

Calculer la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là.

On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.

a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance mathématique E(X) de X.

3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.

a) Justifier que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $p_n = 1-(0,42)^n$.

b) Déterminer la valeur minimale de n pour qu'on ait $p_n \geq 0,9999$.

PROBLEME

PARTIE A

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $r(x) = xe^{-x}$

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

1. Démontrer que g est une solution de l'équation (E).

2. Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.

a) Démontrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est une solution de (F).

b) Résoudre l'équation différentielle (F).

c) En déduire la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$.

Scanned by CamScanner

PARTIE B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^2-3}{2}e^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), d'unités graphiques OI= 2cm ; OJ= 4cm.

1. a) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

b) Démontrer que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3.a) Soit f' la fonction dérivée de f.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)=\frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$

b) Etudier les variations de f.

c) Dresser le tableau de variations de f.

4. Démontrer qu'une équation de la tangent (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est : $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

5. Etudier les positions ralatives de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

6. Représenter graphiquement (T) et (C).

PARTIE C

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_0^1 xe^{-x}dx$

2.a) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=-f'(x)+xe^{-x}$

c) En utilisant la question précédente, calculer en cm2 l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations x= 0 et x=1.

Scanned by CamScanner

EXAMEN 2: BAC D SESSION NORMALE 2014

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note B et C les points du plan d'affixes respectives $3-2i$ et $5+i$.

On désigne par S la similitude directe de centre O qui transforme C en B.

1. a) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z$.

   b) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

   c) Déterminer l'affixe du point D qui pour image le point C par S.

2. a) Justifier que l'affixe z_1 du point B_1, image de B par S est $\frac{1}{2}(1-5i)$.

   b) Justifier que le triangle OBB_1 est rectangle et isocèle en B_1.

3. On définit les points suivants : $B_0 = B$ et $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = S(B_n)$

   On note z_n l'affixe du point B_n.

   a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$

   b) Calculer la distance OB_n en fonction de n.

   c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} OB_n$.

EXERCICE 2

Pour étudier l'évolution du nombre de bacheliers accédant aux études supérieures, le ministère du plan d'un pays a diligenté une enquête depuis l'an 2003.

Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang X de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre Y de diplômés (en milliers)	25	27	30	33	34	35	38	41	43

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique double (X, Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé. (Unité graphique : 1cm).

   On prendra pour origine le point $\Omega\binom{0}{21}$.

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série (X, Y).

3. Justifier que :

   a) La variance de X est $\frac{20}{3}$;

   b) La covariance de X et Y est $\frac{44}{3}$.

Scanned by CamScanner

4. a) Sachant que la variance de Y est égale à $\frac{98}{3}$, déterminer la valeur du coefficient de correlation linéaire.

b) Justifier que ce resultat permet d'envisager un ajustement linéaire.

5. Soit (D) la droite de d'ajustement de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.

a) Déterminer une équation de (D).

b) Tracer (D).

6. On suppose que l'évolution se poursuit de la même manière au cours des années suivantes. Donner une estimation du nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels.

Dans le plan muni du repère (O, I, J), on désigne par :
(C) la courbe représentative de g ; (D) la droite d'équation $y = x$.

1. a) On donne : $g(0) = 1$. Déterminer la valeur de b.

b) on admet que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite (D).

Déterminer la valeur de a.

2. Soit h la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{x} - x$

a) Soit h' la dérivée de h

Calculer $h'(x)$, pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variation de h.

On ne calculera pas les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + (x+1)e^{-x}$.

1. a) Calculer la limite de f en $-\infty$.

b) Justifier que : $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

c) Donner une interprétation graphique de ces résultats.

2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Etudier les positions relatives de (C) et (D).

Scanned by CamScanner

3. a) On désigne par f' la fonction dérivée de f.

Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x}h(x)$.

b) Déterminer le sens de variation de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

4. Construire sur le même graphique (T), (C) et (D).

5. a) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$

c) Construire (Γ) la courbe représentative de f^{-1} sur le même graphique que (C).

Partie C

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_{-1}^{n} (t+1)e^{-t}dt$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = (-2-n)e^{-n} + e$.

2. Calculer l'aire Λ_n en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = n$

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \Lambda_n$.

Scanned by CamScanner

EXAMEN 3: BAC D SESSION NORMALE 2013

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J), on désigne par K, A et B les points d'affixes respectives $z_1 = 2$, $z_2 = 4+2i$ et $z_3 = 2+4i$.

L'unité graphique est 2 cm.

1. a. Placer les points K, A et B.

b. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

2. On note S la similitude directe de centre K qui transforme A en B.

a. Démontrer que l'écriture complexe de S est $z' = (1+i)z - 2i$:

b. Déterminer les affixes respectives des points I' et J', images respectives des points I et J puis placer I' et J'.

3. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle orienté de la similitude directe S.

4. Soit (C) le cercle de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 2.

a. Tracer (C).

b. Déterminer le centre et le rayon de (C'), image de (C) par S.

c. Construire (C').

5. a. Déterminer puis construire l'image par S de la droite (IJ).

On pourra caractériser l'image par S de la droite (IJ) par deux de ses points.

b. On désigne par E le point d'intersection de (C) et la droite (IJ) d'abscisse négative. Placer E et l'image E' de E par S. Justifier la position du point E'.

EXERCICE 2

On considère la suite numérique (u) définie par : $u_0 = \sqrt{2}$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Déterminer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ et de représentation graphique (D).

a. Tracer (D) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

b. Placer u_0 sur l'axe (OI).

c. A l'aide de (D) et (Δ), placer les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u) sur l'axe (OI).

3. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 4$.

b. Démontrer que la suite (u) est croissante.

c. En déduire que la suite (u) est convergente.

Scanned by CamScanner

4. On considère la suite (V) définie par $v_n = u_n - 4$, pour tout nombre entier naturel n.

Démontrer que la suite (V) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

5. On pose, pour tout nombre entier naturel n :

$T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (v)

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u)

a. Déterminer une expression de T_n en fonction de n.

b. Justifier que : $S_n = 2(\sqrt{2} - 4)(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) + 4(n+1)$

c. Déterminer la limite de S_n.

PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). L'unité graphique est 2 cm.

On considère la fonction f dérivable et définie sur $]-\infty; 1[$ par : $f(x) = x^2 - 1 + \ln(1-x)$

On note (C) la courbe représentative de f.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

c. Calculer la limite de f à gauche en 1 puis donner une interprétation graphique du résultat.

2. a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, caculer $f'(x)$.

b. Démontrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

3. a. Démontrer que l'équation (E) $x \in]-\infty; 1[$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b. Justifier que $-0,7 < \alpha < -0,6$.

4. a. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = -x - 1$.

b. On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0,25	0,5	0,75
arrondi d'ordre 1 de f(x)	4,1	2,2	0,7	0,1	-0,3	-0,7	-1,2	-1,4	-1,8

Tracer (T) et (C).

On pourra faire la figure dans la partie du plan caractérisée par $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 6 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

5. On désigne par A l'aire de la partie du plan délimitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x=\alpha$ et $x=0$.

a. Calculer $\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx$ à l'aide d'une intégrale par parties.

b. Démontrer que la valeur de A en unités d'aire est $A=\frac{\alpha^3}{3}-2\alpha-(1-\alpha)\ln(1-\alpha)$.

c. Déterminer en cm² l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de A pour $\alpha=-0,65$.

6. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni du repère (O,I,J).

a. Calculer $f(-1)$.

b. Démontrer que le nombre dérivé de f^{-1} en ln2 existe puis le calculer.

c. Construire la courbe (C')* et sa tangente (Δ) au point d'abscisse ln2 sur la figure de la question*4.b.

Scanned by CamScanner

EXAMEN 4: BAC D SESSION NORMALE 2012

EXERCICE 1

Madame Kouamé, statisticienne à la retraite, a créé une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels.

Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2011, elle a fait l'état des ventes des huit types de colliers fabriqués en 2010.

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Type de collier	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix x_i de vente en centaines de francs CFA du collier de type i.	54	60	66	72	84	90	96	102
Nombre y_i de dizaines de colliers vendus au prix x_i	18	16	15	13	10	9	8	7

On désigne par :

X le caractère « prix de vente du collier » ;

Y le caractère « nombre de colliers vendus au prix X »

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double de caractère (X ;Y) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
On prendra 2 cm pour 10 centaines de francs sur (OI) et 2 cm pour 2 dizaines de colliers sur (OJ).

2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3. a. Calculer la variance V(X) de X.
   b. Calculer la covariance COV(X ;Y) de la série statistique double de caractère (X ;Y)
   c. On admet que V(Y)=14,50. Démontrer que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à - 0,99.

4. Soit (D) la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.
a. Justifier que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à -0,23.
b. Démontrer qu'une équation de la droite (D) est : $y = -0,23x + 29,94$.

5. Pour l'année 2011, Madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11 500 francs CFA l'unité. Combien de colliers de ce type pourrait-elle vendre selon l'ajustement linéaire réalisé ?

Scanned by CamScanner

EXERCICE 2

On considère la suite numérique U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) \end{cases}$

1. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) où les unités respectives sur (OI) et (OJ) sont 4 cm et 2 cm.
La courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$ sont tracées sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

a. Représenter sur l'axe des abscisses (OI) les termes U_1, U_2 et U_3 de la suite U en utilisant la courbe (C) et la droite (D).

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite U ?

2. On admet que f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$.

a. Démontrer que $f([2;3]) \subset [2;3]$

b. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $2 \leq U_n \leq 3$

3. a. Démontrer que la suite U est décroissante.

b. En déduire que la suite U est convergente.

4. On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$

a. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $V_{n+1} = (V_n)^2$

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

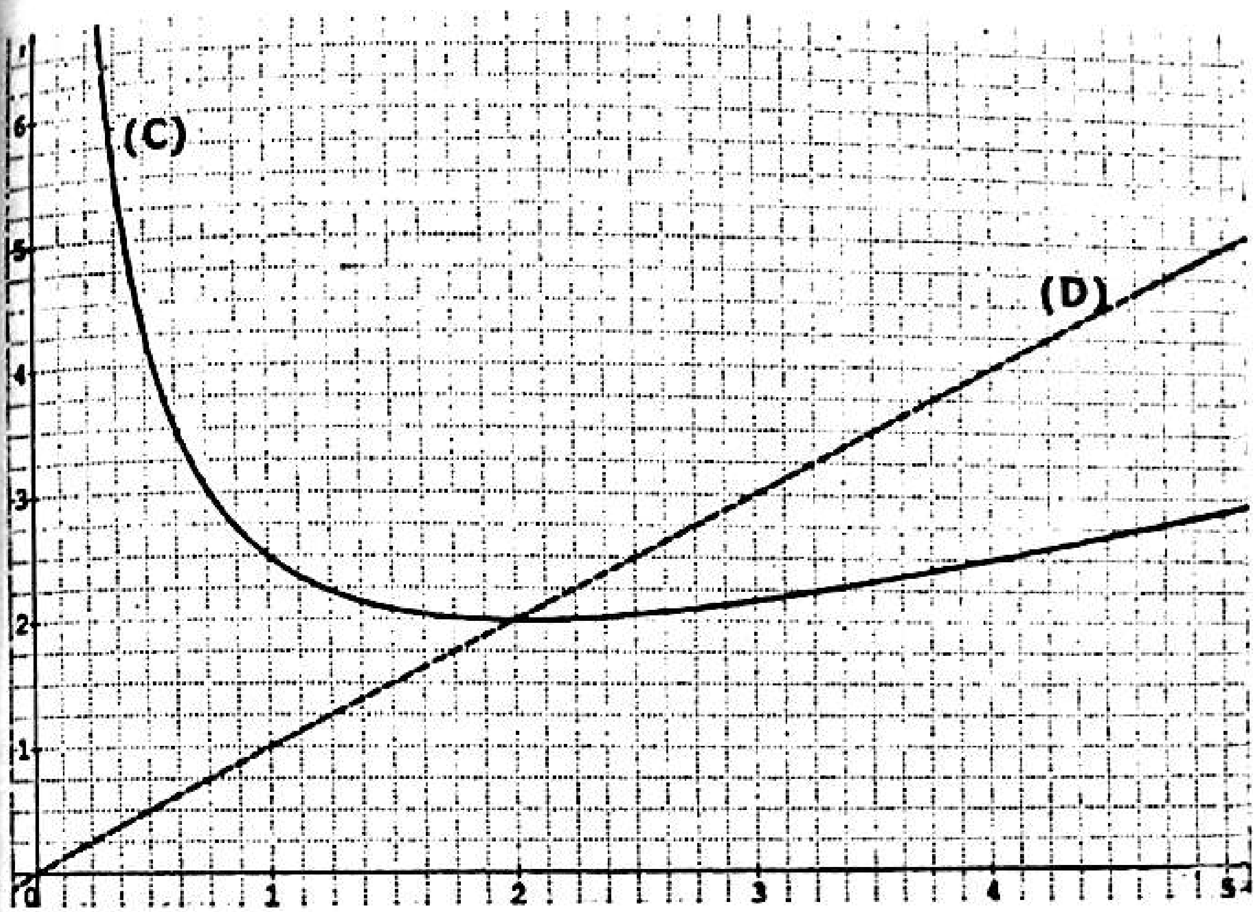
c. Calculer V_1 puis exprimer V_n en fonction de n.

d. Exprimer U_n en fonction de n.

e. Démontrer que $\lim V = 0$. En déduire la limite de U.

Scanned by CamScanner

Feuille annexe



PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=e^{x}+2\ln x$

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

b. Calculer $g'(x)$

c. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

2. a. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$.

b. Vérifier que $0,4<\alpha<0.5$.

c. Démontrer que :

$\forall x\in]0;\alpha[,\quad g(x)<0;$

$\forall x\in]\alpha;+\infty[,\quad g(x)>0.$

Scanned by CamScanner

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x + 2x\ln x - 2x \ si \ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé

(O, I, J). L'unité graphique est 4 cm.

1. a. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b. Interpréter graphiquement les résultats.

2. a. Démontrer que f est continue en 0.

b. Démontrer que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$.

c. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.

d. Interpréter graphiquement le résultat de la question 2.b.

3. On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

a. Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = g(x)$.

b. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4. Tracer la courbe (C) sur l'intervalle $[0;2]$.

(On prendra $\alpha = 0{,}45$ et on admettra que la courbe (C) coupe la droite (OI) en deux points d'abscisses respectives 0,3 et 0,6).

5. a. On pose $K = \int_1^2 x\ln x\,dx$.

A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $K = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

b. Soit ⊠ l'aire en cm2 de la partie du plan délimitée par la courbe , la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

Calculer ⊠ puis donner l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

Scanned by CamScanner

EXAMEN 5: BAC D SESSION NORMALE 2011

EXERCICE 1

On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$

1. a. Démontrer que la suite (v_n) est convergente après avoir déterminé sa limite.

b. Démontrer que la suite (v_n) est croissante.

c. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{3}{4} \leq v_n < 1$

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $a_n = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$

a. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ on \ a: \ a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

b. En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On pose pour tout entier naturel n: $b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(v_n)$

a. Démontrer que (b_n) est une suite à termes négatifs.

b. Calculer la limite de la suite (b_n).

EXERCICE 2

La société « Gnamienlait » de Gnamien produit des sachets de lait caillé.
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit, sa masse en gramme (g). La loi de probabilité de X est définie par le tableau ci-dessous.

x_i (en g)	220	230	240	250	260	270	280
P_i	0,08	0,10	a	b	0,16	0,15	0,04

a et b sont deux nombres réels.
x_i représente la masse du sachet de lait caillé ;
P_i la probabilité qu'un sachet de lait ait la masse x_i.

1. a. Calculer E(X) l'espérance mathématique de X en fonction de a et b.

b. Sachant que E(X) = 250, justifier que a = 0,14 et b = 0,33.

Dans la suite de l'exercice, on conservera les valeurs de a et de b données ci-dessus.

2. Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de sa société.
Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250g.

Scanned by CamScanner

3. Tièplé, la fille de Gnamien, prend au hasard et de façon indépendante cinq sachets de lait caillé.
Calculer la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220 g.
On prendra l'arrondi d'ordre 3 du résultat.
4. Les sachets de lait caillé sont contrôlés par une machine.
Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse inférieure à 250 g.
- Si un sachet de lait caillé a 240 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7.
- Si un sachet de lait caillé a 230 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8.
- Si un sachet de lait caillé a 220 g, il est systématiquement éliminé.
- Si un sachet de lait caillé a une masse supérieure ou égale à 250g, il est systématiquement accepté.

a. Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est de 0,098.
b. Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

PROBLEME

Partie A

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$

2. a. Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

b. En déduire le sens de variation de g.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. a. Démontrer que l'équation $x \in]0;+\infty[, \quad g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b. Justifier que $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$.

c. Démontrer que : $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[, & g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, & g(x) > 0 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

Partie B

On considère la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $f(x)=\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)e^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). (Unités graphiques: OI = 2 cm et OJ = 10 cm).

1. a. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

2. Démontrer que : $f(\alpha)=-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$

3. a. Démontrer que : $\forall x\in]0;+\infty[,\ f'(x)=e^{-x}\cdot g(x)$

   b. En utilisant la partie A, déterminer les variations de f.

   c. Dresser le tableau de variation de f.

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est : $y=-\frac{3}{e}x+\frac{4}{e}$.

5. Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J). On prendra α = 2,6.

Partie C

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $h(x)=e^{-x}\cdot\ln x$

   Démontrer que h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2. Soit λ un nombre réel tel que λ>3.

   a. Calculer, en cm² et en fonction de λ, l'aire A(λ) de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équation x = 3 et x = λ.

   b. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

Scanned by CamScanner

EXAMEN 5: BAC D SESSION NORMALE 2010

EXERCICE 1

Partie A

On considère dans $\mathbb{C}$:l'équation: (E) : $4z^3-6i\sqrt{3}z^2-3\left(3+i\sqrt{3}\right)z-4=0.$

1. Déterminer les racines carrées de $6+6i\sqrt{3}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: l'équation $2z^2-\left(1+3i\sqrt{3}\right)z-4=0.$

3. a. Développer, réduire et ordonner $\left(2z+1\right)\left[2z^2-\left(1+3i\sqrt{3}\right)z-4\right]$

   b. En déduire les solutions de (E).

4. Soit $z_0=-\frac{1}{2}$; $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_2=1+\sqrt{3}i$

Exprimer chacun des nombres complexes z_0; z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ où l'unité est 1 cm, on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives $-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i; 1+\sqrt{3}i$

S est la similitude directe de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

1. a. Déterminer l'écriture complexe de S.

   b. Justifier que $S(M_0)=M_1$ et $S(M_1)=M_2$.

2. Soit M_n un point du plan d'affixe z_n.

On pose pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1}=S(M_n)$

Justifier que $z_{n+1}=\left(1-\sqrt{3}i\right)z_n$ où z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1}

3. On considère la suite $\left(U_n\right)$ définie pour tout entier naturel n par $U_n=|z_n|$

a. Démontrer que $\left(U_n\right)$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b. Justifier que la distance $OM_{12}=2048.$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 2

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.

Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8.

On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1. Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.
2. Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.
3. On soumet au test un individu pris au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.
4. On contrôle 5 individus au hasard.
a. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.
b. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.
5. On contrôle n individus pris au hasard. (n est un entier naturel non nul).
Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98.

PROBLEME

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par: $g(x)=1+x\ln x$.

1. a. Justifier que: $\forall x\in]0;+\infty[,\ g'(x)=1+\ln x$.
   b. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
   (On ne calculera pas les limites de g)
2. En déduire que: $\forall x\in]0;+\infty[,\ g(x)>0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=\dfrac{x}{1+x\ln x} \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). *(Unité: 4 cm).*

1. a. Étudier la continuité de f en O.
   b. Étudier la dérivabilité de f en O.
   c. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est: $y=x$.

Scanned by CamScanner

d. Démontrer que :

(C') est au-dessus de (T) sur $]0;1[$

(C') est au-dessous de (T) sur $]1;+\infty[$.

2. Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C') en $+\infty$.

3. a. On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Démontrer que: $\forall x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$

b. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Construire la droite (T) et la courbe (C') dans le plan muni du repère (O, I, J).

Partie C

1. a. Justifier que: $\forall x \in]0;+\infty[, \quad f(x) \leq 1$.

b. Démontrer que: $\forall x \in [1;e], \quad 1 - \dfrac{1}{1+x} \leq f(x)$.

2. Soit A l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (C'), (OI) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Démontrer que : $16(e-1) + 16\ln(\dfrac{2}{1+e}) \leq A \leq 16(e-1)$

Scanned by CamScanner

EXAMEN 7: BAC D SESSION NORMALE 2009

EXERCICE 1

L'entreprise Ivoirbois, spécialisée dans l'industrie du bois, envisage de faire des prévisions pour l'année 2007 du coût de production de feuilles de contre-plaqués en fonction du chiffre d'affaires.

Elle dispose à cet effet des statistiques résumées dans le tableau ci-dessous :

Années	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Chiffre d'affaires X (en millions de francs)	350	380	500	450	580	650	700
Coût de production Y (en millions de francs)	40	45	50	55	60	65	70

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série double (X, Y) dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J).
On prendra 1 cm pour 50 millions de francs en abscisse et 1 cm pour 5 millions de francs en ordonnées.

2. a. Calculer le chiffre d'affaires moyen $\overline{X}$.
   b. Calculer le coût moyen de production $\overline{Y}$.

3. a. Vérifier qu'un arrondi à l'entier de la covariance cov (X, Y) de la série statistique est égal à **1193**.
   b. Justifier l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y.

4. a. Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés.
   b. Construire (D) dans le repère (O, I, J).

5. Utiliser l'ajustement précédent pour prévoir le coût de production de l'entreprise Ivoirbois de l'année 2007 si le chiffre d'affaires de l'année 2007 est de 800 millions de francs.

EXERCICE 2

Soit la suite définie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1 \end{cases}$

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), représenter sur l'axe des abscisses les termes U_0 ; U_1 ; U_2 et U_3 de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (unité : 2 cm).

2. a. Démontrer par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.
   b. Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ V_n = U_n - \frac{5}{2}$

a. Démontrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Scanned by CamScanner

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x)=(1-x)e^{1-x}-1$

1. a. Justifier que la limite de g en $+\infty$ est -1.

   b. Déterminer la limite de g en $-\infty$.

2. a. Démontrer que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g_1'(x)=(x-2)e^{1-x}$.

   b. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3. a. Démontrer que l'équation $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=0$ admet une solution unique α.

   b. Justifier que : $0,4<\alpha<0,5$.

5. En déduire que : $\begin{cases}\forall x\in]-\infty;\alpha[, g(x)>0;\\ \forall x\in]\alpha;+\infty[, g(x)<0.\end{cases}$

PARTIE B

On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x)=xe^{1-x}-x+2$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a. Démontrer que f est une primitive de g.

   b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3. a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y=-x+2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

   b. Etudier la position relative de (D) et (C).

4. Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

6. Démontrer que $f(\alpha)=1-\alpha+\dfrac{1}{1-\alpha}$

7. Justifier que, pour tout nombre réel x, $f(-x+2)=e^{x-1}f(x)$

8. On admet que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions.
On appelle β l'une de ces solutions. Démontrer que $-\beta+2$ est l'autre solution.

9. Tracer (D), (T) et (C). (On prendra $\alpha=0,4$ et $\beta=2,5$).

PARTIE C

Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par (C), la droite (D) d'équation $y=-x+2$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\lambda$

1. Calculer $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

2. Déterminer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Scanned by CamScanner

EXAMEN 8: BAC D SESSION NORMALE 2008

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, e_1, e_2).

On considère l'équation (E) : $Z \in \mathbb{C}$, $Z^3 + (6-5i)Z^2 + (1-20i)Z - 14 - 5i = 0$

1. a. Vérifier que i est une solution de l'équation (E).

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + (6-4i)Z + 5 - 14i = 0$

c. Résoudre à l'aide des questions qui précèdent l'équation (E).

2. On considère les points A, B et D d'affixes respectives $u = i$; $v = -2+3i$ et $t = -4+i$.

a. Placer les points A, B et D dans le repère.

b. Ecrire le nombre complexe $Z = \frac{u-v}{t-v}$ sous forme trigonométrique.

c. En déduire que le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

3. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme D en B.

B' est l'image de B par S.

a. Justifier que le triangle ABB' est rectangle isocèle en B'.

b. En déduire la construction du point B'.

4. a. Déterminer l'écriture complexe de S.

b. Calculer l'affixe de B'.

EXERCICE 2

Le tableau ci-dessous donne les notes sur 20 obtenues en mathématiques et en sciences physiques par huit candidats de la série D au baccalauréat 2005.

X_i est la note de mathématiques, Y_i la note en sciences physiques.

X_i	4	6	7	9	11	14	12	17
Y_i	3	4	6	8	10	12	9	14

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 1 cm.

2. Calculer les cordonnées du point moyen G du nuage puis le placer dans le repère.

3. a. Vérifier que la covariance cov (X, Y) de la série statistique est égale à $\frac{57}{4}$

b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

4. Démontrer qu'une équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés est : $Y = \frac{19}{22}X - \frac{17}{44}$

5. Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, calculer la note probable de mathématiques d'un candidat qui a obtenu 15 sur 20 en sciences physiques.

Scanned by CamScanner

PROBLEME

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par $f(x)=2x-3+\frac{\ln x}{x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

PARTIE A

Soit g la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x)=2x^2+1-\ln x$.

1. Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation.
   (On ne demande pas de calculer les limites).
2. Justifier que : $\forall x\in]0;+\infty[,\ g(x)>0$.

PARTIE B

1. a. Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.
2. a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y=2x-3$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.
   b. Préciser la position de (C) par rapport à (D).
3. a. Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$
   b. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
   c. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : $y=3x-4$.
4. a. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α.
   b. Justifier que : $1{,}3<\alpha<1{,}4$.

PARTIE C

On pose $\varphi(x)=f(x)-(3x-4)$ et $h(x)=-x^2+1-\ln x$

1. a. Déterminer le sens de variation de h sur $]0;+\infty[$.
   b. Calculer $h(1)$ puis justifier que : $\forall x\in]0;1[,\ h(x)>0$ et $\forall x\in]1;+\infty[,\ h(x)<0$.
2. a. Démontrer que : $\forall x\in]0;+\infty[,\ \varphi'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$.
   b. Etudier les variations de φ puis en déduire le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.
   c. Déterminer la position de (C) par rapport à la tangente (T).

PARTIE D

1. Tracer la courbe (C), la droite (D) et la tangente (T). On prendra $\alpha=1{,}35$
2. Calculer en cm² l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Scanned by CamScanner

EXAMEN 9: BAC D SESSION NORMALE 2007

EXERCICE 1

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_0 = 4$ et $V_0 = 9$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n}$ et $V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n)$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$ et $V_n > 0$.

2. a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n - U_n)^2}{2(U_n + V_n)}$

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}.\ U_n \leq V_n$ et que :

$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

c. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$

3. a. Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante

b. En déduire que les suites (U_n) et (V_n) convergent.

c. Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite ℓ

4. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} \cdot V_{n+1} = U_n \cdot V_n$

b. En déduire la valeur exacte de ℓ.

EXERCICE 2

Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école.

Ce test a donné les résultats suivants :
- 75% des bacheliers sont admis
- 52% des non bacheliers sont admis

PARTIE A

On choisit au hasard un élève de la population. On note :
B l'évènement : « l'élève est bachelier » ;
T l'évènement : « l'élève est admis au test » ;
A l'évènement : « l'élève est bachelier et est admis au test ».

1. Préciser chacune des probabilités suivantes :

a. La probabilité P (B) de l'évènement B ;

b. La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé ;

c. La probabilité $P_{\bar{B}}(T)$ sachant que B n'est pas réalisé.

Scanned by CamScanner

2. Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,3.

3. Calculer la probabilité de l'évènement T.

4. Déduire des questions précédentes que les évènements B et T ne sont pas indépendants.

5. Démontrer que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est $\frac{25}{51}$.

PARTIE B

On choisit au hasard 5 élèves de la population étudiée.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis.

1. Démontrer que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves choisis soient bacheliers et admis au test est égale à **0,1323**.

2. Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLEME

L'objet de ce problème est l'étude de chacune des fonctions f, g et h ci-dessous.

- f est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ et définie par : $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$
- g est la fonction définie sur l'ensemble $D_g=\left[0;\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$ par : $g(x)=f(\ln x)$ et $g(0)=1$
- h est la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x)=f(e^x)$.

PARTIE A

1. Démontrer que :

a. $\forall x\in D_g$ et $x\neq 0$, $g(x)=1-\frac{4}{\ln x+1}$;

b. $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=1-\frac{4}{e^x+1}$.

2. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)$.

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

PARTIE B

On note (C_g) la courbe représentative de g dans le plan muni du repère orthogonal $R_1=(O, I, J)$. L'unité sur (OI) est 1 cm et sur (OJ) est 2 cm.

1. a. Démontrer que g est continue en 0.

b. Démontrer que (C_g) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

Scanned by CamScanner

2. a. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

b. Déterminer $\lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ <}} g(x)$ et $\lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ >}} g(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

3. Démontrer que g est strictement croissante puis dresser son tableau de variation.

4. Tracer (C_g) et ses asymptotes dans le repère R_1.

PARTIE C

On note (C_h) la courbe représentative de h dans le plan muni du repère orthogonal $R_2 = (O, I, J)$.

L'unité graphique est 1 cm.

1. Déterminer $\lim_{x \to -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $h'(x) = \frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$

3. En déduire les variations de h puis dresser son tableau de variation.

4. On note A et B les points d'intersection respectifs de (C_h) avec les droites (OI) et (OJ).

a. Déterminer les coordonnées de chacun des points A et B.

b. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C_h) en B est $y = x - 1$

c. Démontrer que B est un centre de symétrie de (C_h).

5. a. Démontrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

b. Déterminer l'expression explicite de la bijection réciproque h^{-1} de h.

6. a. Tracer (T), (C_h) et ses asymptotes dans le repère R_2.

b. En déduire la représentation graphique (Γ) de la fonction h^{-1} dans le repère R_2.

Scanned by CamScanner

EXAMEN 10: BAC D SESSION NORMALE 2006

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité est le centimètre.

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives Z_A, Z_B et Z_C. tels que

$Z_A = 2+6i$; $Z_B = 4+2i$; $Z_C = 6i$.

1. Placer les points A, B et C dans le plan.

2. a. Déterminer la forme algébrique de $Z = \dfrac{Z_O - Z_A}{Z_B - Z_A}$ où Z_O est l'affixe du point O.

   b. Ecrire Z sous forme trigonométrique.

   c. Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right)$.

3. Soit r la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$

a. Déterminer l'écriture complexe de r.

b. Déterminer l'image de O par r.

c. En déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en B.

4. a. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle OAB. Construire (C).

b. Démontrer que les points O, A, B et C appartiennent à un même cercle.

EXERCICE 2

Une banque dispose de guichets automatiques où certains clients peuvent faire des retraits d'argent à l'aide d'une carte magnétique.

Chaque carte magnétique a un code secret connu seulement du titulaire de la carte.

Ce code secret est une suite de quatre chiffres du système décimal.

Exemples de codes : 0375 ; 9918 ; 2400.

Les deux parties A) et B) suivantes sont indépendantes.

PARTIE A

1. Combien de cartes magnétiques la banque peut-elle distribuer à ses clients ?

2. Démontrer que la probabilité pour que le code d'une carte magnétique commence par 0 est égale à $\dfrac{1}{10}$.

3. Calculer la probabilité pour que le code d'une carte magnétique soit composée des chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7.

PARTIE B

Monsieur KONE, un client de la banque, titulaire d'une carte magnétique a oublié son code.

Son épouse lui rappelle que celui-ci comporte les chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7.

Il décide alors de tenter sa chance au guichet automatique.

Scanned by CamScanner

Les guichets automatiques sont équipés de mémoires leur permettant de confisquer une carte après trois essais infructueux successifs.

Monsieur KONE joue la prudence et s'impose deux essais au maximum.

1. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a. E : « Monsieur KONE réussit à retirer de l'argent au premier essai »

b. F : « Monsieur KONE échoue au premier essai et réussit au deuxième essai ».

2. Soit G l'évènement : « Monsieur KONE retire de l'argent ».

Démontrer que la probabilité de G est égale à $\frac{1}{12}$.

3. De retour à la maison, Monsieur KONE annonce fièrement à son épouse qu'il a pu retirer de l'argent au guichet automatique.

Calculer la probabilité qu'il ait effectué le retrait au premier essai.

4. La banque prélève une taxe pour chaque essai de retrait au guichet automatique. Cette taxe s'élève à 30 francs par essai fructueux et à 60 francs par essai infructueux.

X désigne la variable aléatoire qui détermine la taxe totale à payer sur l'ensemble des essais faits par Monsieur KONE.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 115 francs.

PROBLEME

PARTIE A

Soit la fonction g dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x^2-\ln x-1$.

1. Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, $g'(x)=\frac{2x^2-1}{x}$

3. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

4. a. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions sur $]0;+\infty[$.

b. On désigne par α la plus petite des solutions. Démontrer que $0{,}4<\alpha<0{,}5$.

c. Calculer $g(1)$.

d. En déduire que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$\begin{cases} si \quad x\in]0;\alpha[\cup]1;+\infty[& alors\ g(x)>0. \\ si \quad x\in]\alpha;1[& alors\ g(x)<0. \end{cases}$$

PARTIE B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). L'unité est 4 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ).

1. a. Déterminer la limite de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.

Scanned by CamScanner

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

3. a. Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$.

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Démontrer que la droite (D) d'équation y = x est asymptote à (C) en $+\infty$.

5. Etudier la position de (D) par rapport à (C).

6. Tracer (D) et (C). On prendra $\alpha = 0{,}45$ et $f(\alpha) = 3{,}1$

7. Soit A l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations respectives $x = e^{-2}$ et $x = 1$.

Calculer A.

Scanned by CamScanner

Correction EXAMEN 1 : Bac D Session normale 2015

EXERCICE I

PARTIE I

Soit la fonction p définie sur $\mathbb{C}$ par : $\forall z \in \mathbb{C},\ p(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$

1. a) Calculons $p(i)$.

$p(i) = i^3 - (3+2i)i^2 + (1+5i)i + 2 - 2i = -i - (3+2i)\times(-1) + i - 5 + 2 - 2i$

$p(i) = -i + (3+2i) + i - 5 + 2 - 2i = -i + 3 + 2i + i - 5 + 2 - 2i$

$p(i) = 3 + 2 - 5 - i + i - 2i + 2i = 0$

b) Déterminons deux nombres a et b tels que : $p(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$

$p(z) = (z-i)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - iz^2 - iaz - ib$

$p(z) = z^3 + az^2 - iz^2 + bz - iaz - ib$

$p(z) = z^3 + (a-i)z^2 + (b-ia)z - ib$

Or $p(z) = z^3 - (3+2i)z^2 + (1+5i)z + 2 - 2i$

Par identification :

$$\begin{cases} a - i = -(3+2i) \\ -ib = 2 - 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 - 2i + i = -3 - i \\ b = (2-2i)\times i = 2i - 2i\times i = 2i + 2 = 2 + 2i \end{cases}$$

Donc $a = -3 - i$ *et* $b = 2 + 2i$

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$, **l'équation :** $z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$

$z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$

$\Delta = [-(3+i)]^2 - 4\times1\times(2+2i) = (3+i)^2 - 4\times(2+2i)$

$\Delta = 3^2 + 2\times3\times i + i^2 - 8 - 8i = 9 + 6i - 1 - 8 - 8i$

$\Delta = -2i$

$|\Delta| = |-2i| = 2$

Soit $d = x + iy$ *une racine carrée de* $\Delta = -2i$, *on a :*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) \\ 2xy = \mathrm{Im}(\Delta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x^2 - y^2 = 0 & (2) \\ 2xy = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 & (1)+(2) \\ 2y^2 = 2 & (1)-(2) \\ xy < 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \quad ou \quad x = -1 \\ y = 1 \quad ou \quad y = -1 \\ x \text{ et } y \text{ sont de signe contraire} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 - i \\ d' = -1 + i \end{cases}$$

Les racines carrées de $\Delta = -2i$ *sont* $d = 1 - i$ *et* $d' = -1 + i$

Les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{(3+i)+(1-i)}{2} = \frac{3+i+1-i}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$z_2 = \frac{(3+i)+(-1+i)}{2} = \frac{3+i-1+i}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

$S_{\mathbb{C}} = \{2; 1+i\}$

3. En déduisons les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) : $p(z) = 0$.

$$p(z) = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z^2 - (3+i)z + 2 + 2i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z - i = 0 \quad ou \quad z^2 - (3+i)z + 2 + 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = i \quad ou \quad z = 2 \quad ou \quad z = 1+i$$

$S_{\mathbb{C}} = \{2; i; 1+i\}$

PARTIE II

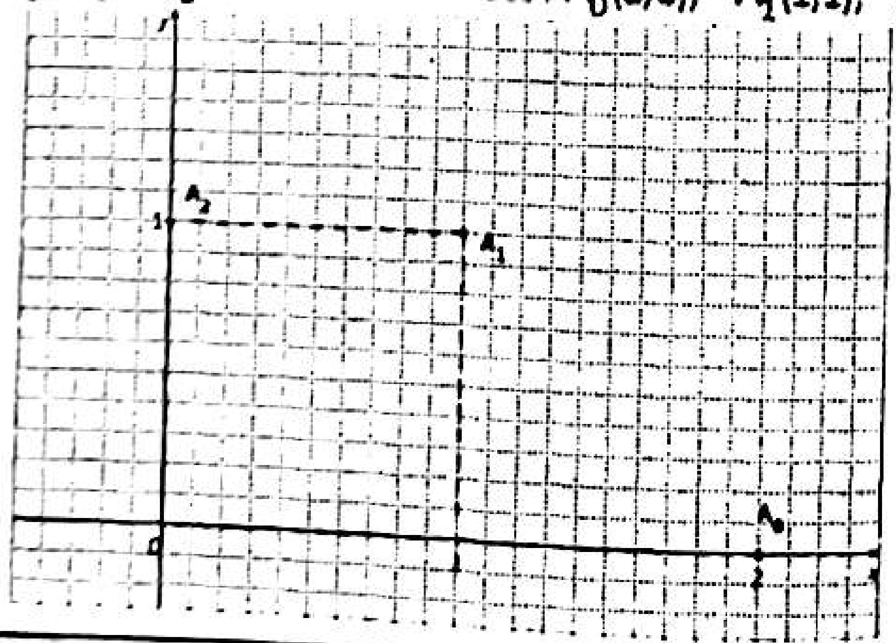
1. a) Calculons Z_1 et Z_2.

$$z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 = \frac{1+i}{2} \times 2 = 1+i$$

$$z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \frac{1+i}{2} \times (1+i) = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

b) Plaçons les points A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

Les points A_0, A_1 et A_2 ont pour coordonnées : $A_0(2;0)$; $A_1(1;1)$; $A_2(0;1)$



Scanned by CamScanner

2. On considère la suite U définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Justifions que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$

$$U_n = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1+i}{2}z_n - z_n\right| = \left|(\frac{1+i}{2} - 1)z_n\right| = \left|\frac{1+i}{2} - 1\right||z_n|$$

$$= \left|\frac{1+i-2}{2}\right||z_n| = \left|\frac{-1+i}{2}\right||z_n| = \left|\frac{1}{2}(-1+i)\right||z_n| = \left|\frac{1}{2}\right||-1+i||z_n|$$

$$= \frac{1}{2}|-1+i||z_n| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+1^2}\,|z_n| = \frac{1}{2}\sqrt{1+1}|z_n| = \frac{1}{2}\sqrt{2}|z_n|$$

$$U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$$

b) Montrons que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de 1er terme $\sqrt{2}$

$$U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n| \quad \Rightarrow \quad U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_{n+1}|$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}|z_{n+1}|}{\frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|} = \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{\left|\frac{1+i}{2}z_n\right|}{|z_n|} = \frac{\left|\frac{1+i}{2}\right||z_n|}{|z_n|} = \left|\frac{1+i}{2}\right|\frac{|z_n|}{|z_n|}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *donc* (U_n) *est une suite géométrique de raison* $\frac{\sqrt{2}}{2}$

et de premier terme $U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_0| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$

c) Exprimons U_n en fonction de n.

U est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de 1er terme $U_0 = \sqrt{2}$ donc ona :

$$U_n = U_0 \times q^n = \sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^n = \frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{2^n} = \frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2}^2)^n} = \frac{(\sqrt{2})^{n+1}}{(\sqrt{2})^{2n}} = (\sqrt{2})^{n+1-2n}$$

$$U_n = (\sqrt{2})^{1-n}$$

Scanned by CamScanner

3. On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ell n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$

a) Calculons ℓn

$$\ell n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$$

$$\ell n = |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \ldots + |z_n - z_{n-1}|$$

$$\ell n = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$$

$$\ell n = U_0 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} = \sqrt{2} \times \frac{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

b) En déduisons $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell n$

$$\ell n = \sqrt{2} \times \frac{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \ell n = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{2} \times \frac{1 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \ell n = \sqrt{2} \times \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \textit{car} \quad \lim_{n \to +\infty} (\frac{\sqrt{2}}{2})^n = 0 \quad (\textit{en effet } \frac{\sqrt{2}}{2} < 0)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \ell n = \frac{\sqrt{2}}{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\frac{2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \ell n = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{1} = 2(\sqrt{2} + 1)$$

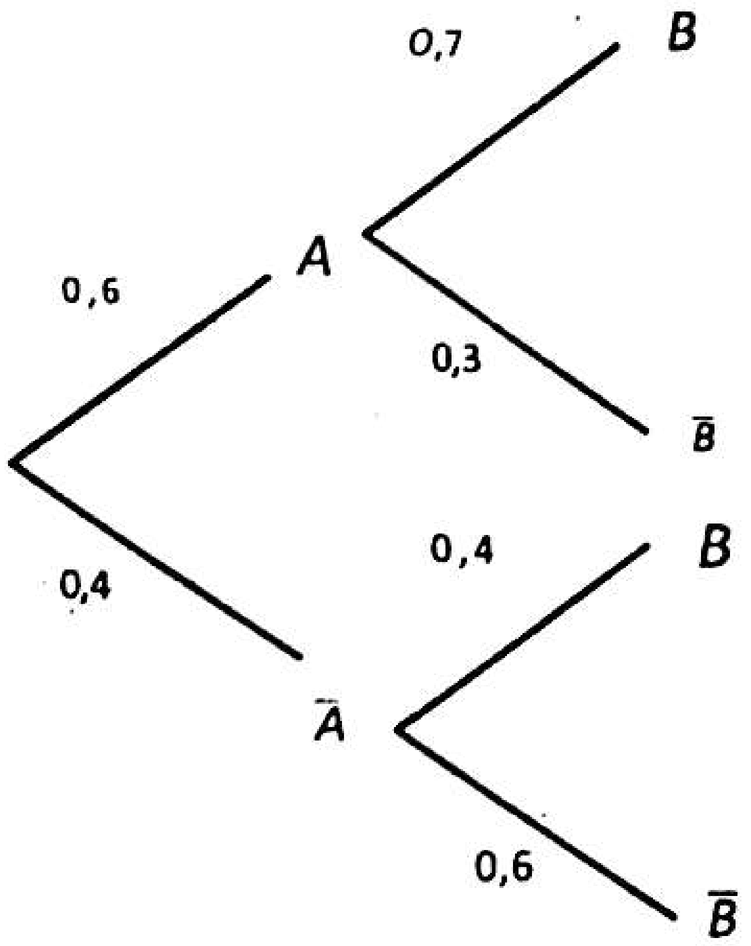
Scanned by CamScanner

EXERCICE 2

- Pour un jour donné, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est 0,6 ;
- Lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7 ;
- Lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4.

On désigne par A l'évènement « il y a affluence de clients » et B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice ».

Arbre de probabilités :



1. On choisit un jour au hasard.

a) Calculons la probabilité de l'évènement E : « il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».

$p(E) = p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$

b) Démontrons que la probabilité p(B) de l'évènement B est 0,58.

$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = 0,6 \times 0,7 + 0,4 \times 0,4 = 0,42 + 0,16 = 0,58$

c) Mariam a réalisé un bénéfice. Calculons la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là. *On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.*

$p = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,42}{0,58} = 0,72$

Scanned by CamScanner

2. Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les 3 jours successifs.

a) Déterminons les valeurs prises par X. $X=\{0;1;2;3\}$

b) Déterminons la loi de probabilité de X.

X=xi	0	1	2	3	Total
P(X=xi)	0,074	0,307	0,424	0,195	1

$p(X=k)=C_n^k p^k \times q^{n-k}$ *avec* $p=0{,}58$; $q=1-p=0{,}42$ *et* $n=3$

$p(X=0)=C_3^0 \times p^0 \times q^3=C_3^0 \times 0{,}58^0 \times 0{,}42^3=1\times 0{,}58^0 \times 0{,}42^3=0{,}42^3=0{,}074$

$p(X=1)=C_3^1 p^1 \times q^2=C_3^1 \times 0{,}58^1 \times 0{,}42^2=3\times 0{,}58\times 0{,}42^2=0{,}307$

$p(X=2)=C_3^2 p^2 \times q^1=C_3^2 \times 0{,}58^2 \times 0{,}42^1=3\times 0{,}58^2 \times 0{,}42=0{,}424$

$p(X=3)=C_3^3 p^3 \times q^0=1\times 0{,}58^3 \times 0{,}42^0=0{,}58^3=0{,}58^3=0{,}195$

c) Calculons l'espérance mathématique E(X) de X.

$E(X)=np=3\times 0{,}58=1{,}74$

3. Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.

a) Justifions que $\forall n\geq 2$: $p_n=1-(0{,}42)^n$.

Soit q_n la probabilité que Mariam ne réalise jamais de bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours.

$q_n=p(X=0)=C_n^n p^0 \times q^n=1\times 1\times q^n=q^n$ *avec* $q=1-p=0{,}42$

$q_n=(0{,}42)^n$ *donc* $p_n=1-q^n=1-(0{,}42)^n$

b) Déterminons la valeur minimale de n pour qu'on ait $p_n\geq 0{,}9999$.

Résolvons l'équation $p_n\geq 0{,}9999$

$$p_n\geq 0{,}9999 \Leftrightarrow 1-(0{,}42)^n\geq 0{,}9999 \Leftrightarrow -(0{,}42)^n\geq 0{,}9999-1$$

$$\Leftrightarrow -(0{,}42)^n\geq -0{,}0001 \Leftrightarrow (0{,}42)^n\leq 0{,}0001$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}42)^n\leq \ln(0{,}0001) \Leftrightarrow n\ln(0{,}42)\leq \ln(10^{-4})$$

$$\Leftrightarrow n\geq \frac{-4\ln(10)}{\ln(0{,}42)} \quad car\ \ln(0{,}42)<0 \quad (\text{en effet}: 0{,}42<1)$$

$$p_n\geq 0{,}9999 \Leftrightarrow n\geq 10{,}6 \Leftrightarrow n\geq 11$$

La valeur minimale de n est 11.

Scanned by CamScanner

PROBLEME

PARTIE A

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $r(x) = xe^{-x}$

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$

Soit g la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$

1. Démontrons que g est une solution de l'équation (E).

$$g'(x) = (\frac{1}{2}x^2e^{-x})' = \frac{1}{2}(2xe^{-x} - x^2e^{-x}) = xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} = (1 - \frac{1}{2}x)xe^{-x}$$

$$g'(x) + g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} = xe^{-x} = r(x)$$

Donc g est une solution de l'équation (E)

2. Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.

a) Démontrons qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est une solution de (F).

$$\left.\begin{array}{l} Si\ \varphi\ est\ solution\ de\ (E)\ alors\quad \varphi' + \varphi = r \\ Or\ g\ est\ solution\ de\ (E)\ alors\quad g' + g = r \end{array}\right\} \Rightarrow (\varphi' + \varphi) - (g' + g) = r - r = 0$$

$On\ en\ déduit\ que : (\varphi' - g') + (\varphi - g) = 0\quad donc\quad \varphi - g\quad est\ solution\ de\ (F)$

$Réciproquement : Si\ \varphi - g\quad est\ solution\ de\ (F)\quad alors\quad (\varphi' - g') + (\varphi - g) = 0$

$On\ en\ déduit\ que :\quad (\varphi' + \varphi) - (g' + g) = 0 \Rightarrow \varphi' + \varphi = g' + g$

$Or\ g\ est\ solution\ de\ (E)\ alors\quad g' + g = r\quad donc\quad \varphi' + \varphi = r$

$Donc\quad \varphi\quad est\ solution\ de\ (E)$

b) Résolvons l'équation différentielle (F).

Les solutions de l'équation différentielle (F) sont de la forme : $ke^{-x}\quad avec\quad k \in \mathbb{R}$

c) En déduisons la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$.

$\varphi - g$ est une solution de (F) donc $\varphi - g$ est de la forme $ke^{-x}\quad avec\quad k \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) - g(x) = ke^{-x} \Rightarrow \varphi(x) = g(x) + ke^{-x} = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + ke^{-x}\quad avec\quad k \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}0^2e^{-0} + ke^{-0} = 0 + k \times 1 = k$$

$$\varphi(0) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}\quad donc\quad \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} - \frac{3}{2}e^{-x} = \frac{x^2 - 3}{2}e^{-x}$$

Scanned by CamScanner

PARTIE B

1. a) Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3}{2} e^{-x} = +\infty$$

$$car \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-3}{2} = +\infty \quad et \quad \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$$

b) Démontrons que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2-3}{2}e^{-x}}{x} = \frac{x^2-3}{2x}e^{-x} = \frac{1}{2} \times \frac{x^2-3}{x} \times e^{-x} = \frac{1}{2}(x - \frac{3}{x})e^{-x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad car \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = 0 \quad et \lim_{x \to -\infty} x = -\infty \quad et \quad \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$$

Donc (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

2. Calculons la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3.a) Soit f' la fonction dérivée de f.

Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2} e^{-x}$

$$f'(x) = (\frac{x^2-3}{2} e^{-x})' = (\frac{x^2-3}{2})' e^{-x} + \frac{x^2-3}{2}(e^{-x})'$$

$$f'(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2})' e^{-x} + \frac{x^2-3}{2}(-e^{-x}) = (\frac{1}{2}2x)e^{-x} - \frac{x^2-3}{2}(e^{-x})$$

$$f'(x) = xe^{-x} - \frac{x^2-3}{2}(e^{-x}) = (x - \frac{x^2-3}{2})(e^{-x}) = (\frac{2x-x^2+3}{2})(e^{-x})$$

$$f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2} e^{-x}$$

b) Etudions les variations de f.

$$f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2} e^{-x} = \frac{1}{2}(-x^2+2x+3)e^{-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{2}e^{-x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $P(x) = -x^2+2x+3$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{2(-1)} = \frac{2}{-2} = -1 \quad ; \quad x_2 = \frac{-2-4}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Scanned by CamScanner

• Signe de $f'(x)$

$f'(x)=0 \quad \forall x \in \{-1;3\}$

$f'(x)>0 \quad \forall x \in]-1;3[$

$f'(x)<0 \quad \forall x \in]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$

• Variations de $f(x)$

f est strictement croissante sur $]-1;3[$

f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]3;+\infty[$

c) Dressons le tableau de variations de f.

x	0		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$3e^{-3}$	$\searrow$	0

4. Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est : $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

$f'(0)=\frac{3}{2} \quad ; \quad f(0)=-\frac{3}{2}$

$(T): \quad y=f'(0)(x-0)+f(0)=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

5. Etudions les positions ralatives de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{2}e^{-x}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{2}=0 \quad ou \quad e^{-x}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2-\sqrt{3}^2=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{3}=0 \quad ou \quad x+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3} \quad ou \quad x=-\sqrt{3}=0$$

• (C) coupe la droite (OI) aux points d'abscisses $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$

• (C) est au dessus de la droite (OI) sur les intervalles $]-\infty;-\sqrt{3}[$ et $]\sqrt{3};+\infty[$

• (C) est en dessous de la droite (OI) sur l'intervalle $]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$

6. Représentation graphique de (T) et (C).

(Voir la courbe)

Scanned by CamScanner

PARTIE C

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculons : $\int_0^1 xe^{-x}dx$

On pose : $u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1$$

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-1\times e^{-1} - (0\times e^0)] - [e^{-1} - e^{-0}] = -e^{-1} - (e^{-1} - 1)$$

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$$

2.a) Vérifions que f est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x};\quad f'(x) = \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x}$$

$$f(x) + f'(x) = \frac{x^2-3}{2}e^{-x} + \frac{3+2x-x^2}{2}e^{-x} = \frac{x^2-3+3+2x-x^2}{2}e^{-x}$$

$$f(x) + f'(x) = \frac{2x}{2}e^{-x} = xe^{-x} = r(x)$$

Donc f est une solution de l'équation différentielle (E).

b) En déduisons que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$

D'après la question 2.a), $f(x) + f'(x) = xe^{-x} \Rightarrow f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$

c) En utilisant la question précédente, calculons en cm2 l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations x= 0 et x=1.

$f(x) < 0$ sur l'intervalle $]-\sqrt{3};\sqrt{3}[$ et en particulier sur l'intervalle $[0;1]$

$$A = \int_0^1 -f(x)dx \times UA = \int_0^1 [f'(x) - xe^{-x}]dx \times UA$$

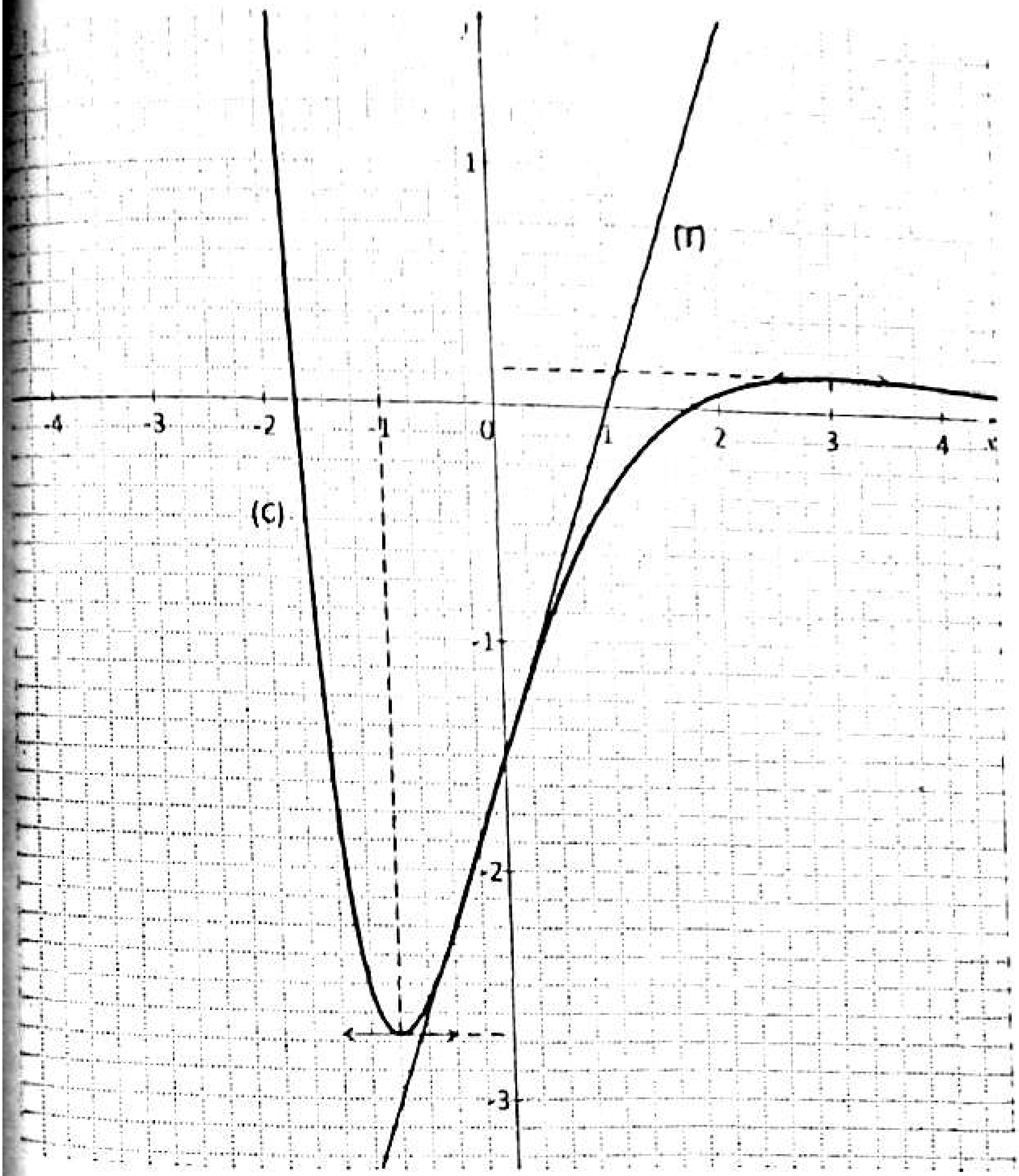
$$A = (\int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 xe^{-x}dx) \times UA = ([f(x)]_0^1 - (1 - \frac{2}{e})) \times UA$$

$$A = (-e^{-1} + \frac{3}{2} - 1 + \frac{2}{e}) \times UA = (-e^{-1} + \frac{3}{2} - 1 + 2e^{-1}) \times UA = (\frac{1}{2} + e^{-1}) \times UA$$

$$A = (\frac{1}{2} + e^{-1}) \times 8cm^2 = (4 + 8e^{-1})cm^2$$

Scanned by CamScanner

gure (représentation graphique de (T) et (C))



Scanned by CamScanner

Correction EXAMEN 2: Bac D Session normale 2014

EXERCICE 1

1. a) Démontrons que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z$.

L'écriture complexe de S est sous la forme $z' = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} S(O) = O \\ S(C) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0 + b = 0 \\ a(5+i) + b = 3 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{3-2i}{5+i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{1-i}{2} \end{cases}$$

Donc $z' = \frac{1}{2}(1-i)z$.

b) Déterminons les éléments caractéristiques de S.

- Le rapport : $k = \left|\frac{1}{2}(1-i)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- L'angle $\theta = Arg\left(\frac{1}{2}(1-i)\right)$

On a : $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

- Le centre est O

c) Déterminons l'affixe du point D qui pour image le point C par S.

On a : $S(D) = C \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-i)z_D = z_C$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-i)z_D = 5 + i$

$\Leftrightarrow z_D = \frac{10+2i}{1-i}$

$\Leftrightarrow z_D = 4 + 6i$

2. a) Justifions que l'affixe z_1 du point B_1, image de B par S est $\frac{1}{2}(1-5i)$

On a: $S(B) = B_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1-i)z_B = z_1$

$\Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{2}(1-i)(3-2i)$

$\Leftrightarrow z_1 = \frac{1}{2}(1-5i)$

b) Justifions que le triangle OBB_1 est rectangle et isocèle en B_1.

On a : $\frac{z_B - z_{B_1}}{z_O - z_{B_1}} = \frac{z_B - z_1}{z_O - z_1} = \frac{5+i}{-1+5i} = -i$ donc le triangle OBB_1 est rectangle et isocèle en B_1.

Scanned by CamScanner

3. a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$.

Soit la proposition $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$

- Vérifions que $P(0)$ est vraie

Pour $n = 0$, on a $z_0 = z_B = \left(\frac{1}{2}\right)^0 (1-i)^0 z_0$ donc $P(0)$ est vraie.

- Supposons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démontrons que $P(n+1)$ est vraie.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)(1-i)z_n$ or $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$

Donc $z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)(1-i) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$

$z_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (1-i)^{n+1} z_0$ et $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-i)^n z_0$

b) Calculons la distance OB_n en fonction de n.

On a :

$$OB_n = |z_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times |1-i|^n \times |z_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\sqrt{2}\right)^n \times \sqrt{13} \Rightarrow OB_n = \sqrt{13} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

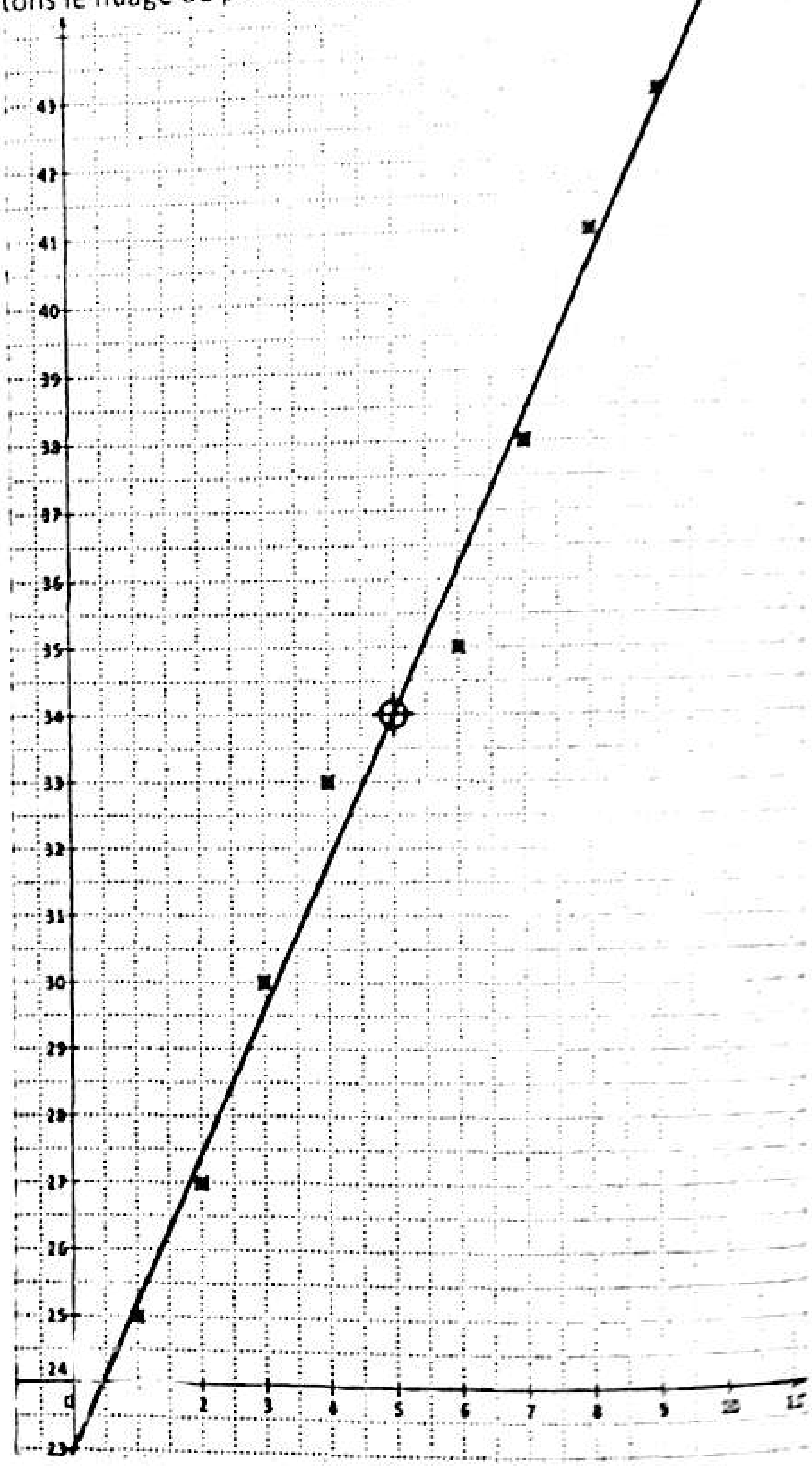
c) Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} OB_n$.

$$\lim_{n \to +\infty} OB_n = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0 \text{ car } \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 2

1. Représentons le nuage de points associé à la série statistique double (X, Y)



Scanned by CamScanner

2. Déterminons les coordonnées du point moyen G de la série (X, Y).

Calculons $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{1+2+3+4+5+7+7+8+9}{9} = \frac{45}{9} \Rightarrow \overline{X} = 5$$

Calculons $\overline{Y}$

$$\overline{Y} = \frac{25+27+30+33+34+35+38+41+43}{9} = \frac{306}{9} \Rightarrow \overline{Y} = 34$$

Donc le point moyen est : $G(5;34)$.

3. a) justifions que la variance $V(X) = \dfrac{20}{3}$

$$V(X) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2}{9} - 5^2$$

$$V(X) = \frac{285}{9} - 25 = \frac{285-225}{9} = \frac{60}{9} \Rightarrow V(X) = \frac{20}{3}$$

b) Justifions que la covariance de X et Y est $\dfrac{44}{3}$.

$$cov(X,Y) = \frac{1\times 25+2\times 27+3\times 30+4\times 33+5\times 34+6\times 35+7\times 38+8\times 41+9\times 43}{9} - 5\times 34$$

$$cov(X,Y) = \frac{1662}{9} - 170 = \frac{1662-1530}{9} = \frac{132}{9} \Rightarrow cov(X,Y) = \frac{44}{3}$$

4. a) Déterminons la valeur du coefficient de corrélation linéaire.

$$r = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\frac{44}{3}}{\sqrt{\frac{20}{3}\times\frac{98}{3}}} = \frac{44}{\sqrt{1960}} \Rightarrow r = 0{,}99$$

b) $|r| > 0{,}87$ donc on peut envisager un ajustement linéaire.

5. a) Déterminons une équation de (D).

On a $(D) : y = ax + b$

$$a = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{v(X)} = \frac{44}{3}\times\frac{3}{20} \Rightarrow a = \frac{11}{5}$$

$$b = \overline{Y} - a\overline{X} = 34 - \frac{11}{5}\times 5 \Rightarrow b = 23$$

Donc $(D) : y = \dfrac{11}{5}x + 23$

Scanned by CamScanner

b) Traçons (D). (Voir figure)

x	5	10
y	34	45

6. Donnons une estimation du nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020.

- 2020 correspond à $x = 18$.
- Donc $y = \frac{11}{5} \times 18 + 23 \Rightarrow y = 62{,}6$

Le nombre de bacheliers qui accéderont aux études supérieures en 2020 est estimé à 62600.

PROBLÈME

Partie A

1. a) Déterminons la valeur de b.

$$g(0) = 0 + (a \times 0 + b)e^0 = b$$

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow b = 1$$

b) Déterminons la valeur de a.

(T) est parallèle à (D) donc $g'(0) = 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 + (-ax + a - b)e^{-x}$

$$g'(0) = 1 \Leftrightarrow 1 + (-a \times 0 + a - 1)e^0 = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

2. a) Calculons $h'(x)$, pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $h'(x) = e^x - 1$

b) Dressons le tableau de variation de h.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$\forall x \in]-\infty;0[$, $h'(x) < 0$ Donc h est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $h'(x) > 0$ Donc h est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Tableau de variation de h

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$+$
$h(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

c) Déduisons que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) > 0$.

1 est le minimum de h sur $\mathbb{R}$ et $1 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) > 0$

Scanned by CamScanner

Partie B

1. a) Calculons la limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+(x+1)e^{-x} = -\infty$$

$$car \lim_{x\to-\infty} x = -\infty,\ \lim_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$$

b) Justifions que : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+(x+1)e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x} = +\infty$$

$$car \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$$

c) Interprétation graphique

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.

2. a) Calculons la limite de f en $+\infty$.

$$f(x) = x+(x+1)e^{-x} = x+\frac{x+1}{e^x} = x+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

b) Démontrons que (D) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

$$f(x)-x = x+(x+1)e^{-x}-x = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x} = \frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$$

Donc la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Etudions les positions relatives de (C) et (D).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)-x = (x+1)e^{-x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ *donc le signe de* $[f(x)-x]$ *dépend de* $x+1$

Pour tout $x \in]-\infty;-1[$, $f(x)-x < 0 \Rightarrow f(x) < x$

Pour tout $x \in]-\infty;-1[$, $f(x)-x > 0 \Rightarrow f(x) > x$

- (C) est au-dessous de (D) sur $]-\infty;-1[$
- (C) est au-dessus de (D) sur $]-1;+\infty[$.

Scanned by CamScanner

3. a) Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}h(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 + e^{-x} - (x+1)e^{-x} = 1 + e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x}$

$$= 1 - xe^{-x} = e^{-x}\left(e^{x} - x\right) \text{ or } h(x) = e^{x} - x$$

donc $f'(x) = e^{-x}h(x)$

b) Déterminons le sens de variation de f

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x}h(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0 \text{ et } h(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Dressons le tableau de variation de f .

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Construisons (C) et (D) et (T).

Voir figure à la fin de la correction

5. **a) Démontrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.**

f est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b) Calculons $\left(f^{-1}\right)'(1)$

- On a $f(0) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0$
- $f'\left[f^{-1}(1)\right] = f'(0) = 1$
- Donc $\left(f^{-1}\right)'(1) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$

c) Construction (Γ) voir figure

(Γ) et (C) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Scanned by CamScanner

Partie C

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrons que :

$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = (-2-n)e^{-n} + e.$

$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{1}^{n} (t+1)e^{-t}dt$

Posons: $u(t) = t+1$ et $v'(t) = e^{-t}$

$$u'(t) = 1 \qquad v(t) = -e^{-t}$$

donc $I_n = \left[-(t+1)e^{-t}\right]_{-1}^{n} - \int_{-1}^{n} -e^{-t}dt$

$$I_n = \left[-(t+1)e^{-t} - e^{-t}\right]_{-1}^{n}$$

$$I_n = \left[(-t-2)e^{-t}\right]_{-1}^{n}$$

$$I_n = (-2-n)e^{-n} - (1-2)e$$

$$I_n = (-2-n)e^{-n} + e$$

2. Calculons l'aire A_n en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = n$

On a : $A_n = \int_{-1}^{n}(f(x) - x)dx.cm^2 = \int_{-1}^{n}(x+1)e^{-x}dx.cm^2$

$$A_n = I_n.cm^2$$

$$A_n = \left[(-2-n)e^{-n} + e\right].cm^2$$

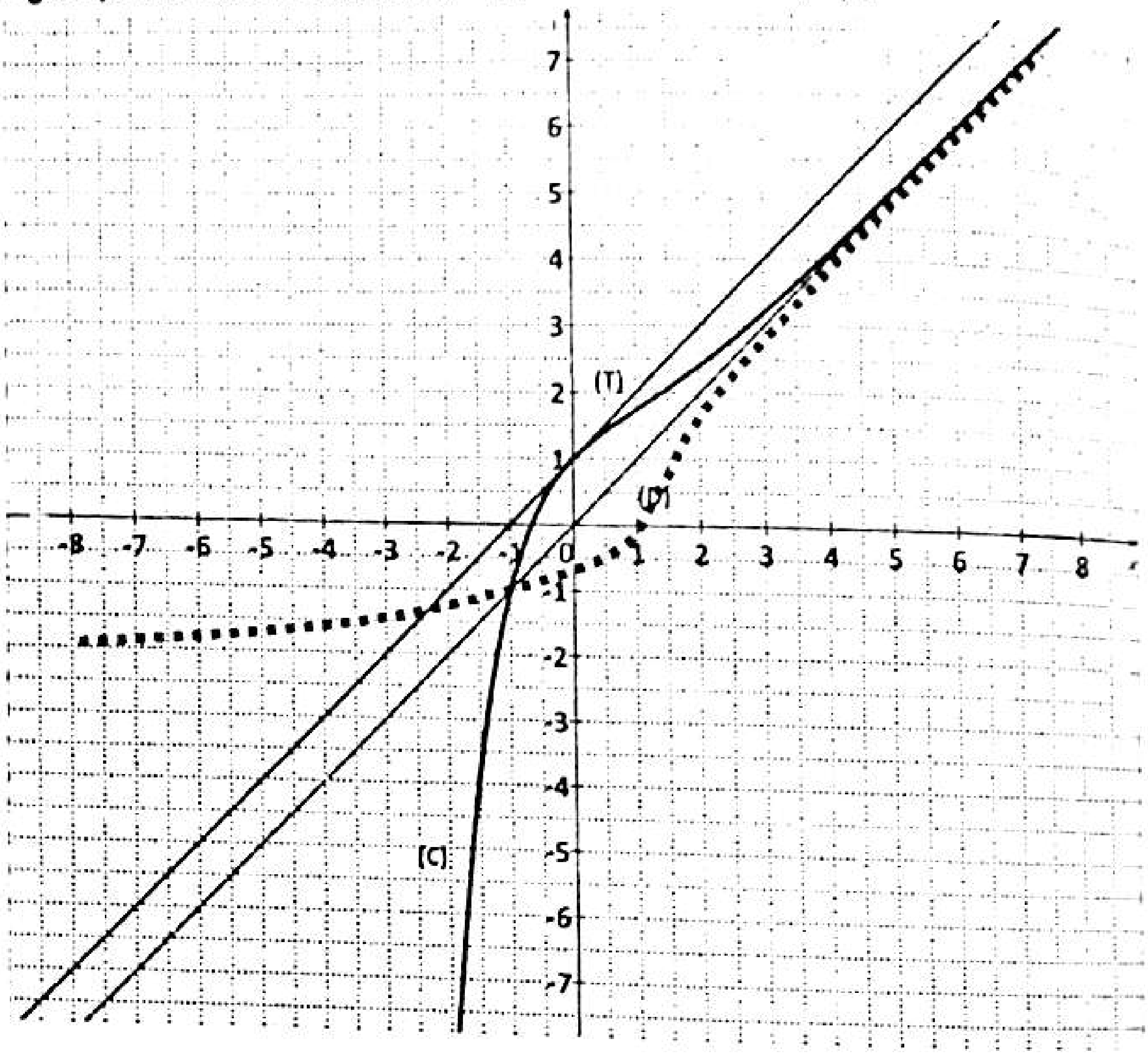
3. Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

$A_n = (-2-n)e^{-n} + e = \frac{-2-n}{e^n} + e = \frac{-2}{e^n} - \frac{n}{e^n} + e$

$\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = e$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-2}{e^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-n}{e^n} = 0$

Scanned by CamScanner

Figure (Construction de (C) et (D) et (T) et construction de (Γ)).

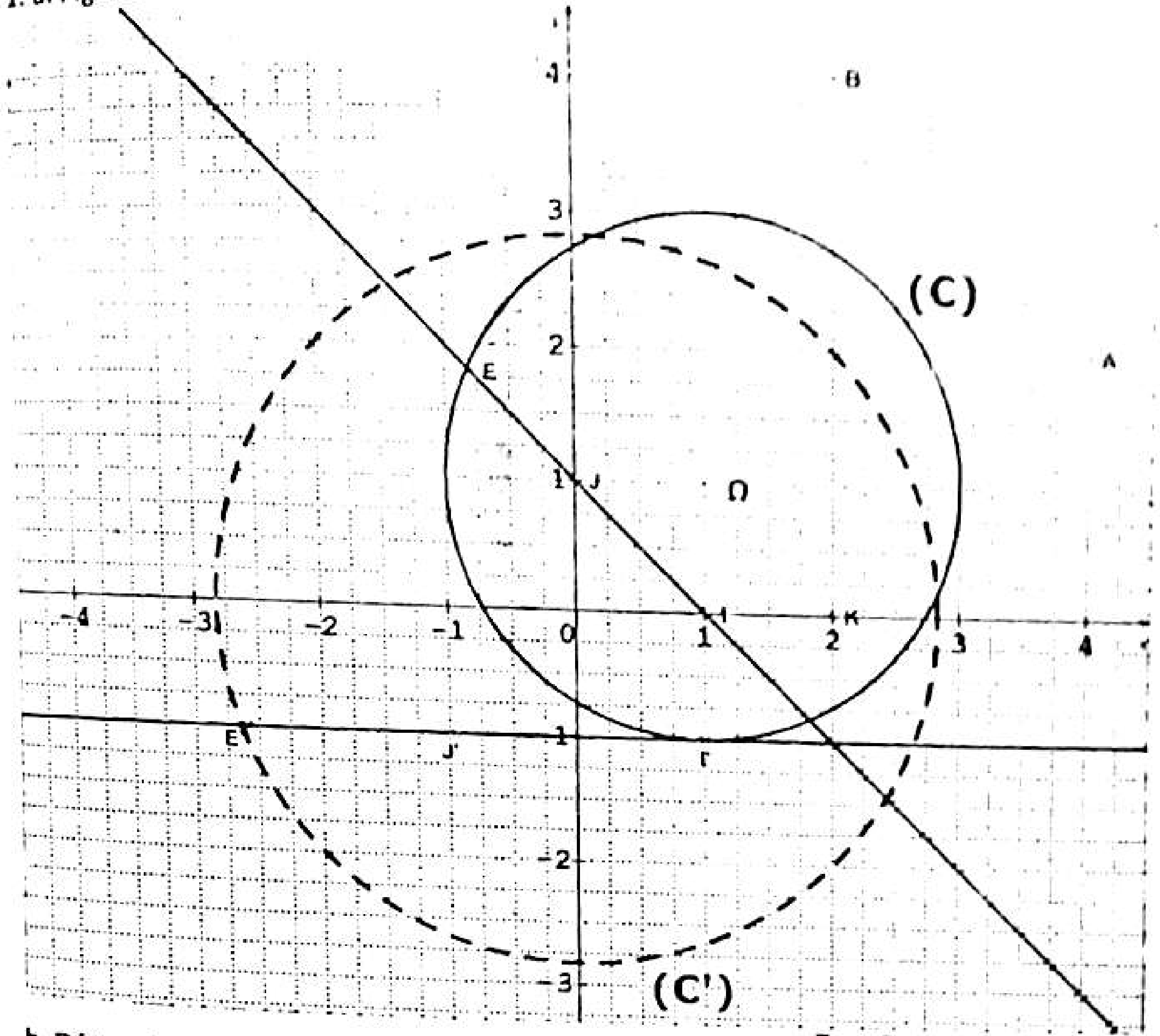


Scanned by CamScanner

Correction EXAMEN 3: Bac D Session normale 2013

EXERCICE 1

1. a. Figure



b. Déterminons la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{(2+4i)-2}{4+2i-2} = \frac{4i}{2+2i} = \frac{2\times 2i}{2(1+i)} = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i+2}{1^2+1^2}$$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{2+2i}{2} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

2. On note S la similitude directe de centre K qui transforme A en B.

$\overset{S}{\curvearrowright}$

K	K
A	B

Scanned by CamScanner

a. Démontrons que l'écriture complexe de S est $z' = (1+i)z - 2i$:

L'écriture complexe de S est de la forme : $z' = az + b$:

$$S(K) = K \Leftrightarrow z_K = az_K + b \Leftrightarrow z_1 = az_1 + b \quad (1)$$

$$S(A) = B \Leftrightarrow z_B = az_A + b \Leftrightarrow z_3 = az_2 + b \quad (2)$$

$$(2)-(1) \Leftrightarrow z_3 - z_1 = a(z_2 - z_1) \Leftrightarrow a = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = 1 + i$$

$$z_1 = az_1 + b \Leftrightarrow b = z_1 - az_1 = z_1(1-a) = 2(1-(1+i)) = 2(-i) = -2i$$

On déduit que : $z' = (1+i)z - 2i$

b. Déterminons les affixes respectives des points I' et J'.

$I(1,0)$ donc $Z_I = 1$; $J(0,1)$ donc $Z_J = i$

$$z_{I'} = (1+i)z_I - 2i = (1+i)\times 1 - 2i = 1 + i - 2i = 1 - i$$

$$z_{J'} = (1+i)z_J - 2i = (1+i)\times i - 2i = i - 1 - 2i = -1 - i$$

3. Déterminons le rapport et une mesure de l'angle orienté de la similitude S.

$z' = (1+i)z - 2i$

Soit k le rapport de S : $k = |1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Soit θ l'angle de S : $\theta = \arg(1+i)$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{|1+i|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{|1+i|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

4. Soit (C) le cercle de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 2.

a. Tracé de (C) (voir figure).

b. Déterminons le centre et le rayon de (C'), image de (C) par S.

<u>Rappel :</u> l'image d'un cercle par une similitude est un cercle dont le centre est l'image du centre du premier cercle par la similitude et son rayon est le rayon du premier cercle multiplié par le rapport de la similitude.

Le rayon de (C') *est* : $R' = k \times R = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$

Le centre de (C') *est* Ω' *image de* $\Omega\,(1;1)$ *par la similitude* S.

$$z_{\Omega'} = (1+i)z_\Omega - 2i = (1+i)(1+i) - 2i = 1 + i + i - 1 - 2i = 2i - 2i = 0$$

On en déduit que : $\Omega'(0;0)$ *soit* $\Omega' = O$

c. Construction de (C') (voir figure).

5. a. Déterminons l'image par S de la droite (IJ).

L'image de la droite (IJ) est le droite (I'J').

I' et J' étant les images respectives des points I et J (voir 2.b).

Construction de (I'J') (voir figure).

Scanned by CamScanner

b. On désigne par E le point d'intersection de (C) et la droite (IJ) d'abscisse négative.
Plaçons E et l'image E' de E par S (voir figure).
Justifions la position du point E'.
E étant le point d'intersection de (C) et de la droite (IJ), on en deduit que E'est le point d'intersection de (C') et de la droite (I'J')

De plus, S(E)=E' donc $Mes(\overline{KE},\overline{KE'})=\frac{\pi}{4}$

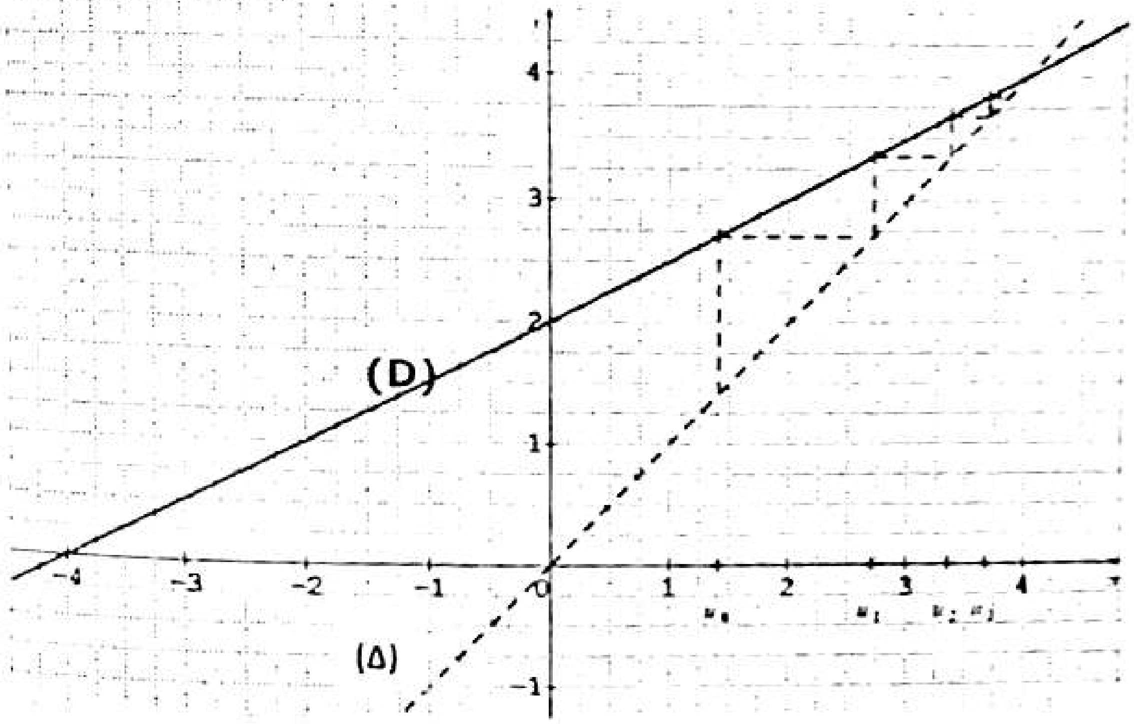
EXERCICE 2

1. **Déterminons les valeurs exactes de u_1 et u_2.**

$$u_1=2+\frac{1}{2}u_0=2+\frac{1}{2}\sqrt{2}=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$u_2=2+\frac{1}{2}u_1=2+\frac{1}{2}(2+\frac{\sqrt{2}}{2})=2+1+\frac{\sqrt{2}}{4}=3+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

2. a. b. et c. (Voir figure)



3. a. **Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 4$.**

$u_0=\sqrt{2}<4 \Rightarrow u_0 \leq 4$ *donc la propriété est vraie à l'ordre* 0.

Supposons qu'il existe un entier naturel k quelconque tel que : $u_k \leq 4$.

Démontrons que $u_{k+1} \leq 4$

$$u_k \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{2}\times u_k \leq \frac{1}{2}\times 4 \Rightarrow 2+\frac{1}{2}\times u_k \leq 2+\frac{1}{2}\times 4 \Rightarrow 2+\frac{1}{2}\times u_k \leq 4$$
$$\Rightarrow u_{k+1} \leq 4$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n \leq 4$.

Scanned by CamScanner

b. Démontrons que la suite (u) est croissante.

$u_{n+1}-u_n=2+\frac{1}{2}u_n-u_n=2+u_n(\frac{1}{2}-1)=2-\frac{1}{2}u_n$

Or $u_n\leq 4 \Rightarrow -\frac{1}{2}u_n\geq -\frac{1}{2}\times 4 \Rightarrow -\frac{1}{2}u_n\geq -2 \Rightarrow 2-\frac{1}{2}u_n\geq 0$

$\Rightarrow u_{n+1}-u_n\geq 0$

On en déduit que la suite (u) est croissante.

c. En déduisons que la suite (u) est convergente.

$u_n\leq 4 \Rightarrow (u)$ *est majorée.*

$u_{n+1}-u_n\geq 0 \Rightarrow (u)$ *est croissante.*

(u) étant croissante et majorée, elle est donc convergente.

4. Soit $v_n=u_n-4$, pour tout nombre entier naturel n.

Démontrons que (v) est une suite géométrique.

$v_{n+1}=u_{n+1}-4=2+\frac{1}{2}u_n-4=\frac{1}{2}u_n-2=\frac{1}{2}(u_n-4)=\frac{1}{2}v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}$

Donc (v) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=u_0-4=\sqrt{2}-4$.

5. On pose, pour tout nombre entier naturel n :

a. Déterminons une expression de T_n en fonction de n.

$T_n=v_0+v_1+....+v_n=v_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$T_n=(\sqrt{2}-4)\times\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=(\sqrt{2}-4)\times\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}}$

$T_n=2(\sqrt{2}-4)\times(1-(\frac{1}{2})^{n+1})=2(\sqrt{2}-4)\times(1-\frac{1}{2^{n+1}})$

b. Justifions que : $S_n=2(\sqrt{2}-4)(1-\frac{1}{2^{n+1}})+4(n+1)$

$v_n=u_n-4 \Rightarrow u_n=v_n+4$

$S_n=u_0+u_1+....+u_n=v_0+4+v_1+4....+v_n+4$

$S_n=v_0+v_1....+v_n+(4+4+...+4)=T_n+4(n+1)$

$S_n=2(\sqrt{2}-4)(1-\frac{1}{2^{n+1}})+4(n+1)$

Scanned by CamScanner

c. Déterminons la limite de S_n.

$S_n = T_n + 4(n+1) \Rightarrow \lim S_n = \lim T_n + \lim 4(n+1)$

Or T_n *est une suite géométrique de raison* $q = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim T_n = 0$

Donc $\lim S_n = \lim 4(n+1) = +\infty$

PROBLEME

1. a. Caculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 1 + \ln(1-x) = +\infty$

Car $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 1 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1-x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

b. Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis en donnons une interprétation graphique.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1 + \ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x - \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x} = -\infty$

Car $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{x} = 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$: (C) *admet une branche parabolique de direction* (OJ).

c. Calculons la limite de f à gauche en 1 puis en interprétons le résultat.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x^2 - 1 + \ln(1-x) = -\infty$

Car $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} x^2 - 1 = 0$ *et* $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \ln(1-x) = \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ >}} \ln(X) = -\infty$

2. a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, calculons $f'(x)$.

$f'(x) = (x^2 - 1 + \ln(1-x))' = 2x + \frac{(1-x)'}{1-x} = 2x + \frac{-1}{1-x}$

$f'(x) = \frac{2x(1-x) - 1}{1-x} = \frac{2x - 2x^2 - 1}{1-x} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x-1}$

b. Démontrons que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.

$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x-1}$

Soit $P(x) = 2x^2 - 2x + 1$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 4 - 8 = -4 < 0$

$\forall x \in]-\infty; 1[,\ 2x^2 - 2x + 1 > 0$ *et* $\forall x \in]-\infty; 1[,\ x - 1 < 0$

Scanned by CamScanner

Donc $\forall x \in]-\infty; 1[,\ f'(x) < 0$

D'où f *est strictement décroissante sur* $]-\infty; 1[$

c. Dressons le tableau de variation de f **.**

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

3. a. Démontrons que (E) : $x \in]-\infty; 1[,\ f(x) = 0$ **admet une solution unique** α

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$

$f(]-\infty; 1[) =]-\infty; +\infty[$

$0 \in]-\infty; +\infty[$

donc (E): $f(x) = 0$ *admet une solution unique* α *sur* $]-\infty; 1[$

b. Justifions que $-0,7 < \alpha < -0,6$.

f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et en particulier sur $]-0,7; -0,6[$

$$\left.\begin{array}{l} f(-0,7) = 0,02 \\ f(-0,6) = -0,17 \end{array}\right| \Rightarrow f(-0,7) \times f(-0,6) < 0 \ \ d'où \ \ -0,7 < \alpha < -0,6$$

4. a. Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = -x - 1$.

(T): $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$f'(0) = \frac{2\times 0^2 - 2\times 0 + 1}{0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$f(0) = 0^2 - 1 + \ln(1 - 0) = -1 + \ln 1 = -1 + 0 = -1$

(T): $y = -1(x - 0) + (-1) = -x - 1$

b. Traçons (T) et (C) (voir figure).

5. A est l'aire de la partie du plan délimitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ **et** $x = 0$.

a. Calculons $\int_{\alpha}^{0} \ln(1 - x)dx$ **à l'aide d'une intégrale par parties.**

$u' = 1 \qquad\qquad u = x$

$v = \ln(1 - x) \qquad v' = \frac{-1}{1 - x}$

$$\int_{\alpha}^{0} \ln(1 - x)dx = [x.\ln(1 - x)]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} \frac{-x}{1 - x}dx$$

Scanned by CamScanner

$\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx = [x.\ln(1-x)]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} 1 + \frac{-1}{1-x}dx$

$= [x.\ln(1-x)]_{\alpha}^{0} - [x+\ln(1-x)]_{\alpha}^{0}$

$= [x.\ln(1-x) - x - \ln(1-x)]_{\alpha}^{0}$

$= [0.\ln(1-0) - 0 - \ln(1-0)] - [\alpha.\ln(1-\alpha) - \alpha - \ln(1-\alpha)]$

$\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx = -\alpha.\ln(1-\alpha) + \alpha + \ln(1-\alpha) = \alpha + (1-\alpha).\ln(1-\alpha)$

b. Démontrons que la valeur de A en unités d'aire est $A = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$.

$A = -\int_{\alpha}^{0} f(x)dx.UA = -\int_{\alpha}^{0} x^2 - 1 + \ln(1-x)dx.UA$

$A = -(\int_{\alpha}^{0} x^2 - 1dx + \int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx).UA = -([\frac{x^3}{3} - x]_{\alpha}^{0} + \int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx).UA$

$A = -((\frac{0^3}{3} - 0) - (\frac{\alpha^3}{3} - \alpha) + \int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx).UA = -(-\frac{\alpha^3}{3} + \alpha + \int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx).UA$

$A = -(-\frac{\alpha^3}{3} + \alpha + \alpha + (1-\alpha).\ln(1-\alpha)).UA = -(-\frac{\alpha^3}{3} + 2\alpha + (1-\alpha).\ln(1-\alpha)).UA$

$A = (\frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha).\ln(1-\alpha)).UA$

c. Déterminons en cm² l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de A pour $\alpha = -0,65$.

$A = (\frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha).\ln(1-\alpha)).UA = (\frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha).\ln(1-\alpha)).4cm^2$

$A = (\frac{(-0,65)^3}{3} - 2\times(-0,65) - (1-(-0,65)).\ln(1-(-0,65)).4cm^2$

$A = (\frac{(-0,65)^3}{3} + (1,30) - (1,65)).\ln(1,65)).4cm^2$

$A = 1,53cm^2$

6. a. Calculons $f(-1)$.

$f(-1) = (-1)^2 - 1 + \ln(1-(-1)) = 1 - 1 + \ln 2 = \ln 2$

b. Démontrons que le nombre dérivé de f^{-1} **en ln2 existe puis le calculer.**

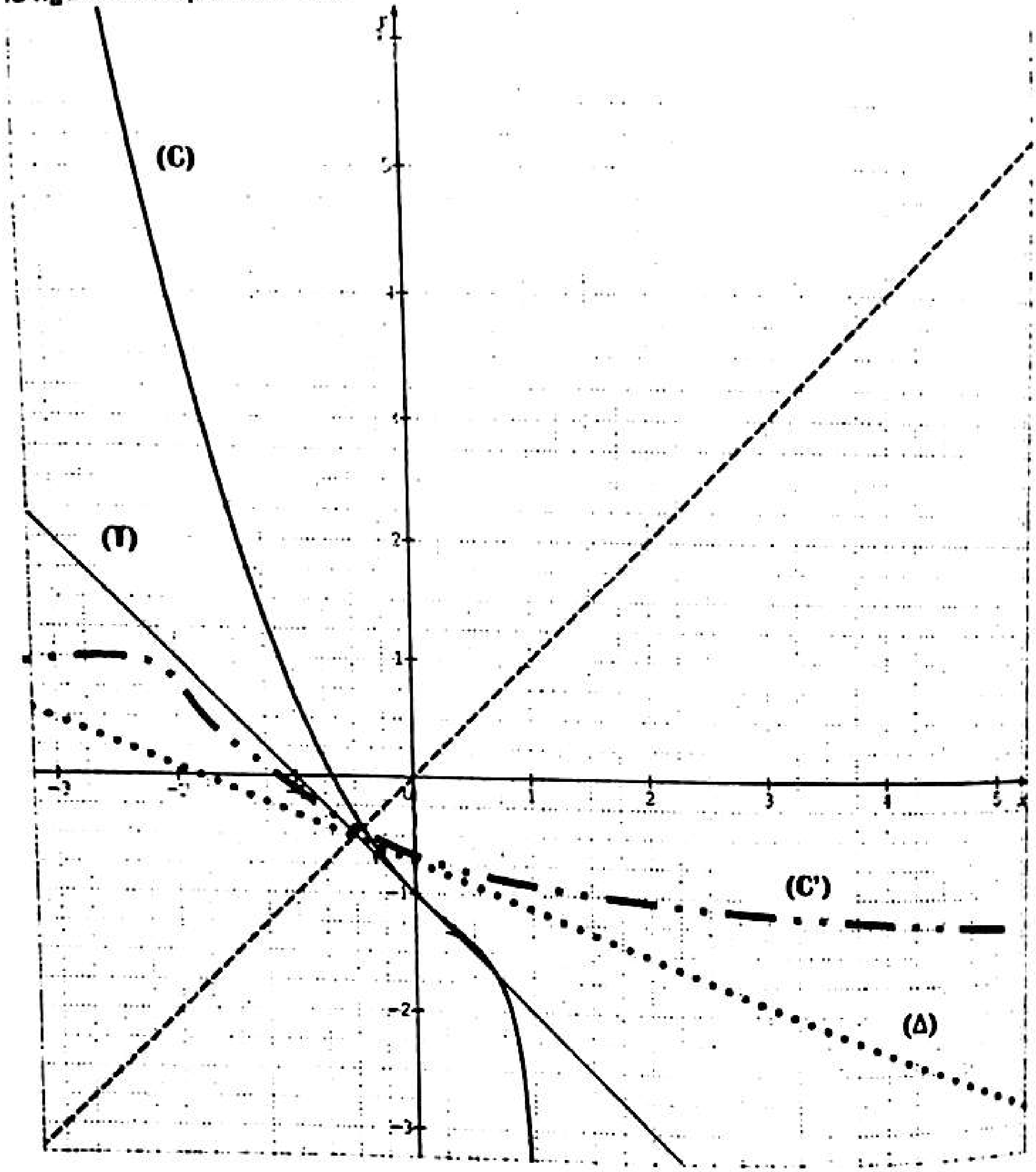
$f'(-1) = \frac{2(-1)^2 - 2(-1) + 1}{(-1) - 1} = \frac{2\times1 + 2 + 1}{-2} = \frac{5}{-2} = \frac{-5}{2}$

$f'(-1) \neq 0$, *on en déduit que* f^{-1} *est dérivable en* $\ln 2$

et $(f^{-1})'(\ln 2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{\frac{-5}{2}} = \frac{-2}{5}$

Scanned by CamScanner

c. Construction de la courbe (C') et de sa tangente (Δ) au point d'abscisse ln2 sur la figure de la question°4.b.



Correction EXAMEN 4: Bac D Session normale 2012

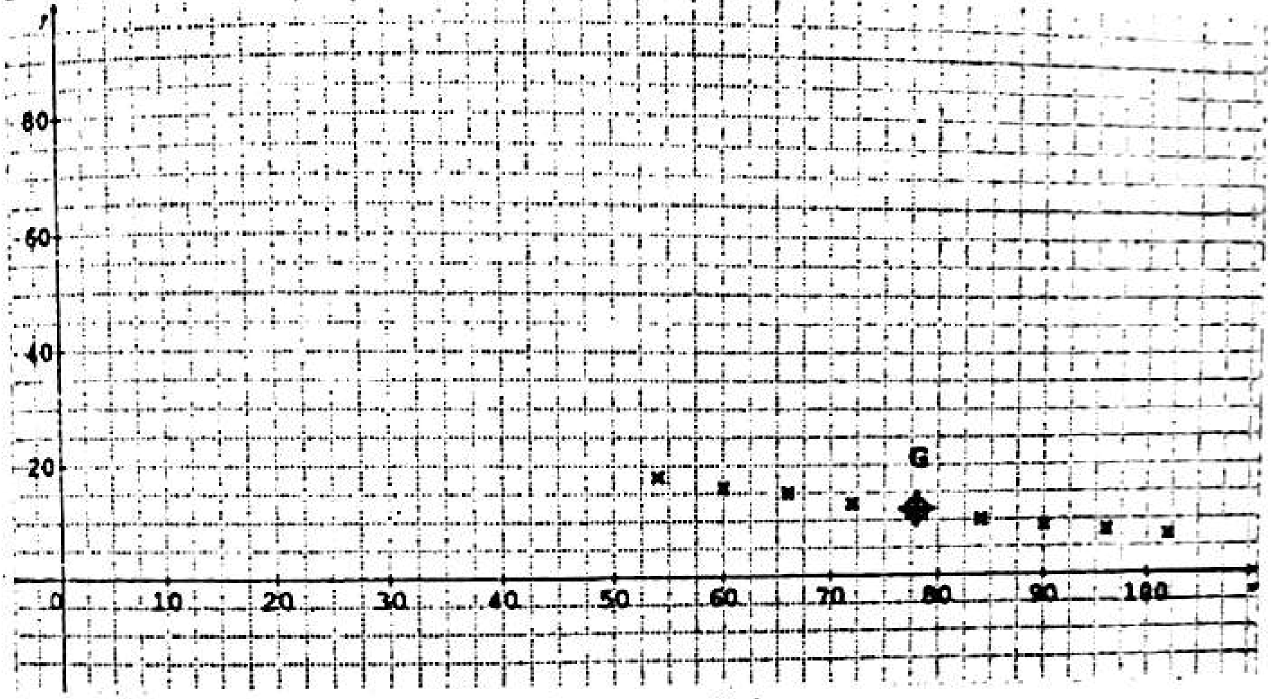
EXERCICE 1

1. Représentation graphique du nuage de points.

Echelle :

2 cm pour 10 centaines de francs sur (OI)

2 cm pour 2 dizaines de colliers sur (OJ).



2. Calculons les coordonnées du point moyen G du nuage.

$$\overline{X}=\frac{54+60+66+72+84+90+96+102}{8}=\frac{624}{8}=78$$

$$\overline{Y}=\frac{18+16+15+13+10+9+8+7}{8}=\frac{96}{8}=12$$

$G(78;12)$

3. a. Calculons la variance V(X) de X.

$$V(X)=\frac{54^2+60^2+66^2+72^2+84^2+90^2+96^2+102^2}{8}-78^2$$

$$V(X)=\frac{50832}{8}-78^2=6354-6084=270$$

b. Calculons la covariance COV(X ;Y) .

$$COV(X,Y)=\frac{54\times18+60\times16+66\times15+72\times13+84\times10+90\times9+96\times8+102\times7}{8}-78\times12$$

$$COV(X,Y)=\frac{6990}{8}-936=-62,25$$

c. On admet que V(Y)=14,50.

Démontrons que le coefficient de corrélation linéaire est égal à - 0,99.

$$r=\frac{COV(X;Y)}{\sqrt{V(X)\times V(Y)}}=\frac{-62,25}{\sqrt{270\times14,5}}=\frac{-62,25}{\sqrt{3915}}=-0,994$$

$r=-0,99$

Scanned by CamScanner

4. Soit (D) la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.

a. Justifions que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à -0,23.

$$a=\frac{COV(X;Y)}{V(X)}=\frac{-62,25}{270}=-0,23$$

b. Démontrons qu'une équation de la droite (D) est : $y=-0,23x+29,94$.

$$y=ax+b \Rightarrow \bar{y}=a\bar{x}+b \Rightarrow b=\bar{y}-a\bar{x}=12-(-0,23)\times 78=29,94$$

$$Donc\ \ (D)\ \ a\,pour\,équation:\ y=-0,23x+29,94$$

5. Pour l'année 2011, Madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11 500 francs CFA l'unité.

Déterminons le nombre de colliers de ce type qu'elle pourrait vendre selon l'ajustement linéaire réalisé.

11 500 francs CFA = 115 centaines de francs CFA

Pour X= 115, déterminons y en utilisant l'équation de la droite d'ajustement.

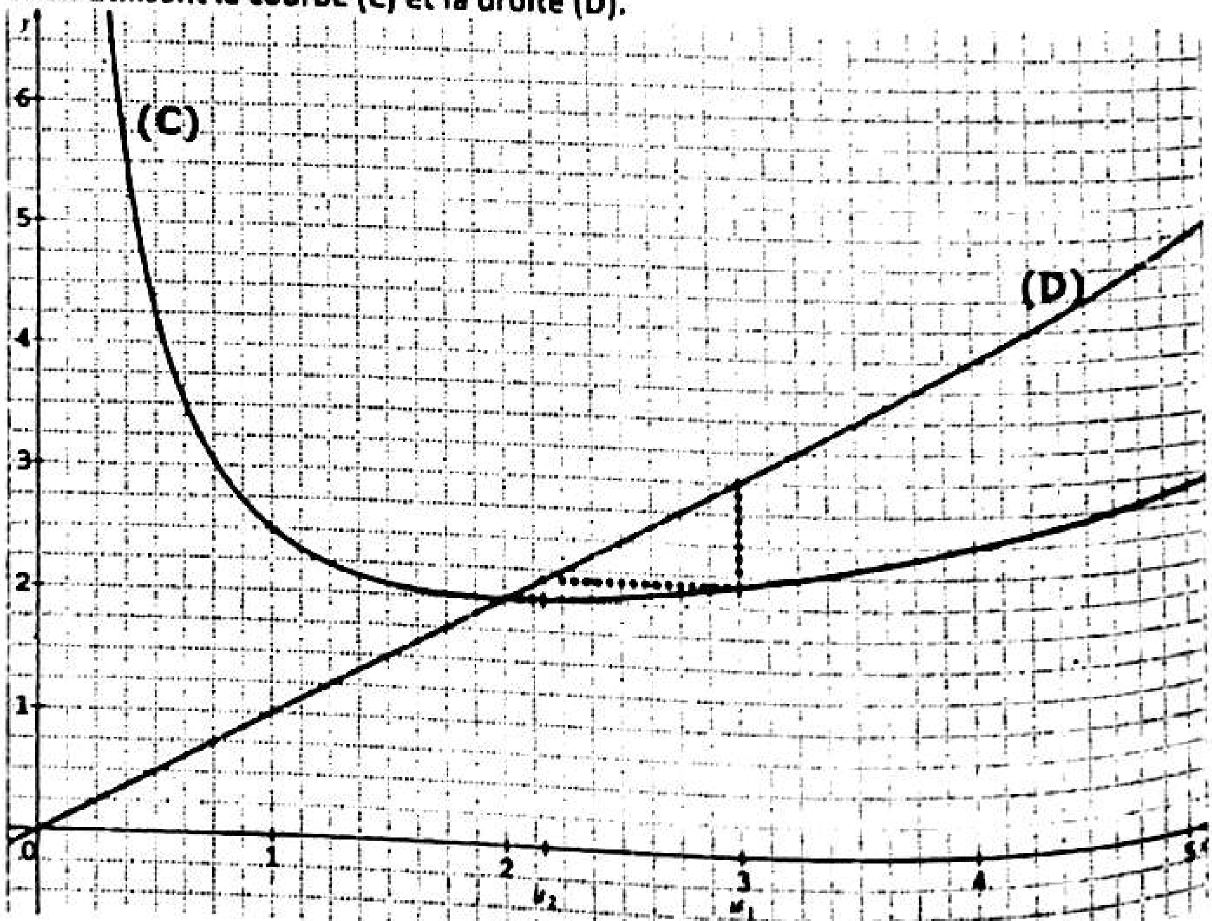
$$y=-0,23\times 115+29,94=3,49$$

y = 3.49 dizaines de colliers or 3,49 dizaines sont égales à 34,9 soit 35 colliers.

Elle pourrait donc vendre 35 colliers au prix de 11 500 francs CFA l'unité.

EXERCICE 2

1. a. Représentons sur l'axe des abscisses (OI) les termes U_1, U_2 et U_3 de la suite U en utilisant la courbe (C) et la droite (D).



Scanned by CamScanner

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite U ?

La représentation graphique des termes de la suite U permet de conjecturer que la suite U converge vers 2.

2. On admet que f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$.

a. Démontrons que $f([2;3]) \subset [2;3]$

f est continue et strictement croissante sur $[2;3]$.

$$f([2;3]) = [f(2); f(3)] = \left[\frac{1}{2}\left(2+\frac{4}{2}\right); \frac{1}{2}\left(3+\frac{4}{3}\right)\right] = \left[2; \frac{13}{6}\right] \subset [2;3]$$

donc $f([2;3]) \subset [2;3]$.

b. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $2 \leq U_n \leq 3$

Pour $n=1$, $U_1 = 3 \Rightarrow 2 \leq U_1 \leq 3$ la propriété est donc vraie à l'ordre 1.

Pour $n>1$, on suppose que $2 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow 2 \leq f(U_n) \leq 3$

d'après la question 2.a)

Donc $2 \leq U_{n+1} \leq 3$ la propriété est donc vraie à l'ordre n+1.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 \leq U_n \leq 3$

3. a. Démontrons que la suite U est décroissante.

Calculons la différence $U_{n+1} - U_n$ et montrons que $U_{n+1} - U_n \leq 0$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) - U_n = \frac{1}{2}U_n + \frac{2}{U_n} - U_n = \frac{1}{2}U_n - U_n + \frac{2}{U_n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n - \frac{2}{2}U_n + \frac{2}{U_n} = -\frac{1}{2}U_n + \frac{2}{U_n} = \frac{-U_n^2 + 4}{2U_n} = \frac{4 - U_n^2}{2U_n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(2+U_n)(2-U_n)}{2U_n} = \frac{2+U_n}{2U_n} \times (2-U_n)$$

$$2 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow U_n > 0 \Rightarrow \frac{2+U_n}{2U_n} > 0$$

Donc le signe de $U_{n+1} - U_n = \frac{2+U_n}{2U_n} \times (2-U_n)$ *est celui de* $(2-U_n)$

Etudions le signe de $(2-U_n)$

$$2 \leq U_n \leq 3 \Rightarrow -2 \geq -U_n \geq -3 \Rightarrow -3 \leq -U_n \leq -2$$

$$\Rightarrow -3+2 \leq -U_n + 2 \leq -2+2 \Rightarrow -1 \leq 2 - U_n \leq 0$$

$$\Rightarrow 2 - U_n \leq 0 \quad \textit{Donc} \quad U_{n+1} - U_n \leq 0$$

On en déduit que U est décroissante.

Scanned by CamScanner

b. En déduisons que la suite U est convergente.

La suite U est décroissante.

U est minorée par 2 (car $2 \leq U_n \leq 3$).

Donc U est convergente.

4. On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 2}$

a. Démontrons que pour tout entier $n \geq 1$, $V_{n+1} = (V_n)^2$

$$V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2} \Rightarrow V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} + 2}$$

Or $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{4}{U_n}\right) = \frac{1}{2}U_n + \frac{2}{U_n} = \frac{U_n}{2} + \frac{2}{U_n} = \frac{U_n^2 + 4}{2U_n}$

Donc $$V_{n+1} = \frac{\frac{U_n^2+4}{2U_n} - 2}{\frac{U_n^2+4}{2U_n} + 2} = \frac{\frac{U_n^2+4-4U_n}{2U_n}}{\frac{U_n^2+4+4U_n}{2U_n}} = \frac{\frac{(U_n-2)^2}{2U_n}}{\frac{(U_n+2)^2}{2U_n}}$$

$$V_{n+1} = \frac{(U_n-2)^2}{2U_n} \times \frac{2U_n}{(U_n+2)^2} = \frac{(U_n-2)^2}{(U_n+2)^2} = \left(\frac{U_n-2}{U_n+2}\right)^2 = (V_n)^2$$

b. Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

$\forall n \geq 1,\ V_{n+1} = (V_n)^2$

On en déduit, $V_{1+1} = (V_1)^2 \Leftrightarrow V_2 = (V_1)^2 = (V_1)^{2^{2-1}}$

Donc la propriété énoncé est vraie pour $n = 2$.

On suppose que $\forall n \geq 1,\ V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

Montrons que $V_{n+1} = (V_1)^{2^{n+1-1}} = (V_1)^{2^n}$

$V_{n+1} = (V_n)^2$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \left[(V_1)^{2^{n-1}}\right]^2 = (V_1)^{2\times 2^{n-1}} = (V_1)^{2^1 \times 2^{n-1}} = (V_1)^{2^{n-1+1}} = (V_1)^{2^n}$$

Donc $\forall n \geq 1,\ V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$

Scanned by CamScanner

c. Calculons V_1 puis exprimer V_n en fonction de n.

$$V_n=\frac{U_n-2}{U_n+2} \Rightarrow V_1=\frac{U_1-2}{U_1+2}=\frac{3-2}{3+2}=\frac{1}{5}$$

$$V_n=(V_1)^{2n-1} \Rightarrow V_n=\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1}$$

d. Exprimons U_n en fonction de n.

$$V_n=\frac{U_n-2}{U_n+2} \Rightarrow V_n\times(U_n+2)=U_n-2 \Rightarrow V_n\times U_n+2V_n=U_n-2$$

$$\Rightarrow V_n\times U_n-U_n=-2-2V_n \Rightarrow U_n(V_n-1)=-2-2V_n$$

$$\Rightarrow U_n=\frac{-2-2V_n}{V_n-1} \Rightarrow U_n=\frac{2+2V_n}{1-V_n}$$

$$\Rightarrow U_n=\frac{2+2\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1}}$$

e. Démontrons que $\lim V=0$.

$$\lim V_n=\lim\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-1}=0 \quad car \quad -1<\frac{1}{5}<1$$

En déduisons la limite de U.

$$\lim U_n=\lim\frac{2+2V_n}{1-V_n}=\lim\frac{2+0}{1-0}=\frac{2}{1}=2$$

PROBLEME

PARTIE A

1. a. Déterminons $\lim\limits_{x\to0}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}e^x+2\ln x=-\infty$$

$$car \lim_{x\to0}e^x=e^0=1 \text{ et } \lim_{x\to0}\ln x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}e^x+2\ln x=+\infty$$

$$car \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

Scanned by CamScanner

b. Calculons $g'(x)$

$g'(x)=(e^x+2\ln x)'=(e^x)'+2(\ln x)'=e^x+2\left(\frac{1}{x}\right)=e^x+\frac{2}{x}$

c. Etudions le sens de variation de g puis dressons son tableau de variation.

$g'(x)=e^x+\frac{2}{x}$

$\forall x\in]0;+\infty[,\ e^x>0$ *et* $\frac{2}{x}>0$

Donc $g'(x)=e^x+\frac{2}{x}>0\ \ \forall x\in]0;+\infty[$.

On en déduit que: g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. a. Démontrons que $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$

g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$g(]0;+\infty[)=]-\infty;+\infty[$

$0\in]-\infty;+\infty[$

Donc l'équation $g(x)=0$ *admet une solution unique* α *sur* $]0;+\infty[$.

b. Vérifions que $0,4<\alpha<0,5$.

g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

et en particulier sur $[0,4;0,5]$

$g(0,4)=e^{0,4}+2\ln 0,4=-0,34$

$g(0,5)=e^{0,5}+2\ln 0,5=0,26$

$g(0,4)\times g(0,5)<0$

Donc $0,4<\alpha<0,5$

Scanned by CamScanner

c. Démontrons que : $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[, & g(x)<0; \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, & g(x)>0. \end{cases}$

Tableau de signe

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit :

$\forall x \in]0;\alpha[, \quad g(x)<0;$

$\forall x \in]\alpha;+\infty[, \quad g(x)>0.$

PARTIE B

1. a. Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

- $f(x)=e^x+2x\ln x-2x = x\left(\dfrac{e^x}{x}+2\ln x-2\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x}+2\ln x-2\right)=+\infty$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} x=+\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x=+\infty$

- $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{e^x+2x\ln x-2x}{x}=\dfrac{x\left(\dfrac{e^x}{x}+2\ln x-2\right)}{x}=\dfrac{e^x}{x}+2\ln x-2$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}+2\ln x-2=+\infty$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x=+\infty$

b. Interprétons graphiquement les résultats.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

donc (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe* (OJ).

Scanned by CamScanner

2. a. Démontrons que f est continue en 0.

$f(0)=1$

$\lim_{x\to 0} f(x)=1$ *car* $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$; $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$ *et* $\lim_{x\to 0} 2x = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ *donc* f *est continue en* 0.

b. Démontrons que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$.

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e^x + 2x\ln x - 2x - 1}{x} = \frac{e^x - 1 + x(2\ln x - 2)}{x}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e^x - 1}{x} + 2\ln x - 2$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ *car* $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ *et* $\lim_{x\to 0} 2\ln x - 2 = -\infty$

c. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Justifions la réponse.

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ *n'est pas finie donc* f *n'est pas dérivable en* 0.

d. Interprétons graphiquement le résultat de la question 2.b.

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ *donc* (C) *admet en* 0 *une tangente verticale.*

3. On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

a. Démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = g(x)$.

$f'(x) = (e^x + 2x\ln x - 2x)' = (e^x)' + (2x\ln x)' - (2x)' = e^x + 2\ln x + 2x\cdot\frac{1}{x} - 2$

$f'(x) = e^x + 2\ln x + 2 - 2 = e^x + 2\ln x = g(x)$

b. Etudions les variations de f puis dressons son tableau de variation.

$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = g(x)$

Donc le signe de $f'(x)$ *est le même que celui de* $g(x)$.

Or d'après Partie A, 2.c.: $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[, & g(x) < 0; \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, & g(x) > 0. \end{cases}$

Donc: $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[, & f'(x) < 0; \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, & f'(x) > 0. \end{cases}$

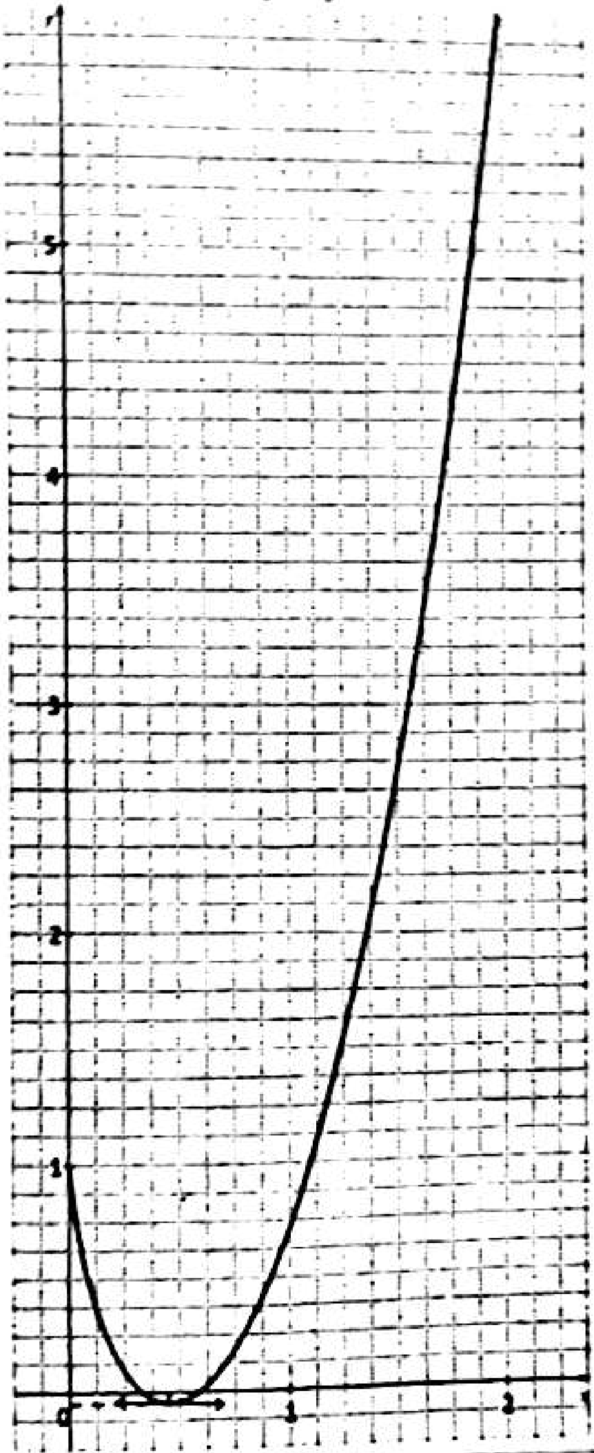
On en déduit que: $\begin{cases} f \text{ est strictement décroissante sur }]0;\alpha[, \\ f \text{ est strictement croissante sur }]\alpha;+\infty[. \end{cases}$

Scanned by CamScanner

Tableau de variation

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Traçons la courbe (C) sur l'intervalle $[0;2]$.



Scanned by CamScanner

5. a. Démontrons que $K=\int_1^2 x\ln x\,dx=2\ln 2-\frac{3}{4}$.

$u'=x \qquad u=\frac{x^2}{2}$

$v=\ln x \qquad v'=\frac{1}{x}$

$$K=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2-\int_1^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$K=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2=\left(\frac{2^2}{2}\ln 2-\frac{1^2\ln 1}{2}\right)-\left(\frac{2^2}{4}-\frac{1^2}{4}\right)$$

$$K=\left(\frac{4}{2}\ln 2-\frac{0}{2}\right)-\left(\frac{4}{4}-\frac{1}{4}\right)=(2\ln 2-0)-\left(\frac{3}{4}\right)=2\ln 2-\frac{3}{4}$$

b. Soit A l'aire en cm2 de la partie du plan délimitée par la courbe , la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$.
Calculons A puis donnons l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

$$A=\int_1^2\left(f(x)-0\right)dx\bullet UA=\int_1^2\left[e^x+2x\ln x-2x\right]-(0)\;dx\bullet UA$$

$$A=\int_1^2\left(e^x+2x\ln x-2x\right)dx\bullet UA=\int_1^2\left(e^x-2x+2x\ln x\right)dx\bullet UA$$

$$A=\int_1^2\left(e^x-2x\right)dx\bullet UA+2\int_1^2\left(x\ln x\right)dx\bullet UA$$

$$A=\left[\int_1^2\left(e^x-2x\right)dx+2\int_1^2\left(x\ln x\right)dx\right]\bullet UA$$

$$A=\left[\left[e^x-2\frac{x^2}{2}\right]_1^2+2K\right]\bullet UA=\left[\left[(e^2-2^2)-(e^1-1)\right]+2K\right]\bullet UA$$

$$A=\left[\left[(e^2-4)-(e-1)\right]+2K\right]\bullet UA=\left[\left[e^2-4-e+1\right]+2K\right]\bullet UA$$

$$A=\left[\left[e^2-e-3\right]+2K\right]\bullet UA=\left[\left[e^2-e-3\right]+2\left[2\ln 2-\frac{3}{4}\right]\right]\bullet UA$$

$$A=\left(e^2-e-3+4\ln 2-\frac{3}{2}\right)\bullet UA=\left(e^2-e+4\ln 2-\frac{9}{2}\right)\bullet UA$$

$$A=2{,}94\bullet UA\simeq 47cm^2 \qquad (UA=4cm\times 4cm=16cm^2)$$

Scanned by CamScanner

Correction EXAMEN 5: Bac D Session normale 2011

EXERCICE 1

1. a. Démontrons que la suite (v_n) est convergente.

$$\lim v_n = \lim \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \lim \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} = \lim \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$\Rightarrow \lim v_n = 1$$

$\lim v_n$ *existe et est finie donc la suite* (v_n) *est convergente.*

b. Démontrons que la suite (v_n) est croissante.

$$v_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+2)}{((n+1)+1)^2} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} - \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^3(n+3)}{(n+2)^2(n+1)^2} - \frac{n(n+2)^3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^3(n+3) - n(n+2)^3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^2(n+1)(n+3) - n(n+2)(n+2)^2}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n^2+2n+1)(n^2+4n+3) - (n^2+2n)(n^2+4n+4)}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n^4+6n^3+12n^2+10n+3) - (n^4+6n^3+12n^2+8n)}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2n+3 > 0 \text{ et } (n+2)^2(n+1)^2 > 0 \Rightarrow \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2} > 0$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n > 0.$

On en déduit que la suite (v_n) *est croissante.*

Scanned by CamScanner

c. Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{3}{4} \leq v_n < 1$

$\lim v_n = 1 \Rightarrow v_n < 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

La suite (v_n) *est une suite croissante.*

Son terme le plus petit est son premier terme v_1.

C'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_1 \leq v_n$

Or $v_1 = \frac{1^2 + 2\times 1}{(1+1)^2} = \frac{1+2}{(2)^2} = \frac{3}{4}$ *d'où* $\frac{3}{4} \leq v_n$.

Finalement : $\frac{3}{4} \leq v_n < 1$

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $a_n = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$

a. Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* : $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

$a_n = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n \Rightarrow a_1 = v_1 = \frac{3}{4}$

$a_n = \frac{n+2}{2(n+1)} \Rightarrow a_1 = \frac{1+2}{2(1+1)} = \frac{3}{2(2)} = \frac{3}{4}$

La propriété est donc vraie à l'ordre 1.

Supposons que pour $k \in \mathbb{N}^*$, *on a* : $a_k = \frac{k+2}{2(k+1)}$

Et montrons que $a_{k+1} = \frac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$

$a_k = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_k$

$a_{k+1} = \underbrace{v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_k}_{a_k} \times v_{k+1}$

$a_{k+1} = a_k \times v_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)^2 + 2(k+1)}{((k+1)+1)^2}$

$a_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)((k+1)+2)}{(k+2)^2}$

Scanned by CamScanner

$$a_{k+1}=\frac{k+2}{2(k+1)}\times\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$$

$$a_{k+1}=\frac{(k+2)\times(k+1)(k+3)}{2(k+1)(k+2)^2}=\frac{(k+3)}{2(k+2)}$$

$$a_{k+1}=\frac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$$

On a supposé *que* $a_k=\frac{k+2}{2(k+1)}$

et on a montré *que* $a_{k+1}=\frac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$.

Finalement, on conclue que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\frac{n+2}{2(n+1)}$

b. En déduisons la limite de la suite (a_n).

$$a_n=\frac{n+2}{2(n+1)}=\frac{n+2}{2n+2}\ \Rightarrow\ \lim a_n=\lim\frac{n+2}{2n+2}=\lim\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

3. On pose pour tout entier naturel n : $b_n=\ln(v_1)+\ln(v_2)+\cdots+\ln(v_n)$

a. Démontrons que (b_n) **est une suite à termes négatifs.**

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{3}{4}\leq v_n<1\Rightarrow v_n<1\Rightarrow \ln v_n<\ln 1\Rightarrow \ln v_n<0, \forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc (b_n) *est une suite à termes négatifs*

(car somme de valeurs toutes négatives)

b. Calculons la limite de la suite (b_n).

$a_n=v_1\times v_2\times\cdots\times v_n$

$\ln a_n=\ln(v_1\times v_2\times\cdots\times v_n)$

$\ln a_n=\ln(v_1)+\ln(v_2)+\cdots+\ln(v_n)=b_n$

$\Rightarrow \lim b_n=\lim(\ln a_n)=\ln\lim(a_n)=\ln\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim b_n=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 2

1. a. Calculons E(X) l'espérance mathématique de X en fonction de a et b.

$E(X)=220\times0{,}08+230\times0{,}10+240\times a+250\times b+260\times0{,}16+270\times0{,}15+280\times0{,}04$

$E(X)=17{,}6+23+240a+250b+41{,}6+40{,}5+11{,}2$

$E(X)=133{,}9+240a+250b$

b. Sachant que E(X) = 250, justifions que a = 0,14 et b = 0,33.

$E(X)=250 \Leftrightarrow 133{,}9+240a+250b=250$

$$De\,plus,\ \sum_{i=1}^{7}Pi=1 \Leftrightarrow 0{,}08+0{,}1+a+b+0{,}16+0{,}15+0{,}04=1$$

$$\Leftrightarrow 0{,}53+a+b=1$$

$$On\,en\,déduit\,le\,système:\ \begin{cases}133{,}9+240a+250b=250\\0{,}53+a+b=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}133{,}9+240a+250b=250 & (1)\\132{,}5+250a+250b=250 & (2)\end{cases}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow 1{,}4-10a=0 \Rightarrow -10a=-1{,}4 \Rightarrow a=\frac{-1{,}4}{-10}=0{,}14$$

$$0{,}53+a+b=1 \Rightarrow b=1-0{,}53-a=0{,}47-a=0{,}47-0{,}14=0{,}33$$

$$Finalement:\ a=0{,}14\ \ et\ \ b=0{,}33$$

2. Calculons la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250 g.

$P(X\geq250)=b+0{,}16+0{,}15+0{,}04=0{,}33+0{,}16+0{,}15+0{,}04$

$P(X\geq250)=0{,}68$

3. Calculons la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220 g.

Chaque choix conduit à 2 éventualités : soit le sachet a 220g ou non.
Chaque évènement est donc une épreuve de Bernoulli de paramètres 5 et 0,08.
Ces épreuves de Bernoulli se répètent de manière indépendante.
La probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220g se calcule à l'aide de la loi binomiale :

$$P(X=3)=C_5^3(0{,}08)^3\times(0{,}92)^2=10\times(0{,}00051)\times(0{,}8464)$$

$$P(X=3)=0{,}00432$$

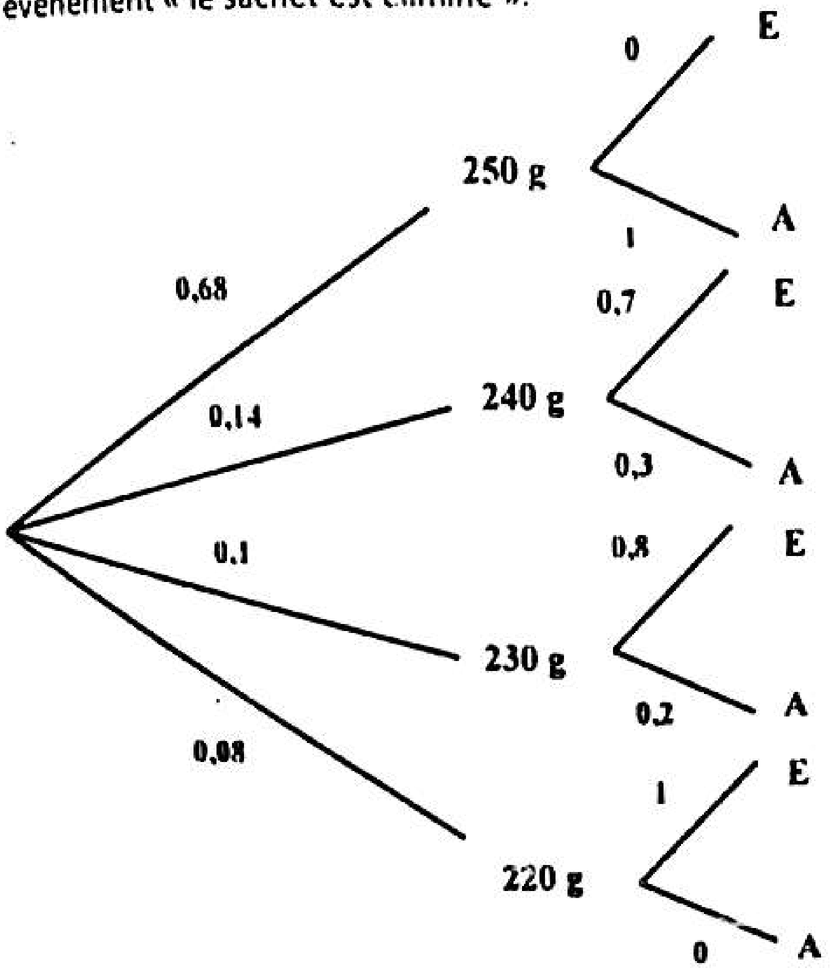
Scanned by CamScanner

4. Arbre de probabilité

On note :

A : l'évènement « le sachet est accepté ».

E : l'évènement « le sachet est éliminé ».



a. Justifions que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est de 0,098.

Soit les évènements G : « le sachet a 240g » et E : « le sachet est éliminé ».

$$P(G\cap E)=P(G)\times P_G(E)$$

$$P(G\cap E)=0,14\times 0,7=0,098$$

b. Calculons la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

$$P(E)=0,14\times 0,7+0,1\times 0,8+0,08\times 1=0,098+0,08+0,08$$

$$P(E)=0,258$$

Scanned by CamScanner

PROBLEME

Partie A

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par $g(x)=-\frac{2x+1}{x^2}+\ln x$

1. a. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

$$car \left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x}=0\end{array}\right.$$

b. Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} g(x)$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} g(x)=-\infty$$

$$car\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\ln(x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{2x+1}{x^2}=-\infty \text{ car } \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(2x+1)=0 \text{ et } \lim\limits_{x\to0}x^2=0 \text{ avec } x^2\geq0,\forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right.$$

2. a. Démontrons que : $\forall x\in]0;+\infty[,\ g'(x)=\frac{x^2+2x+2}{x^3}$

$$g'(x)=\left(-\frac{2x+1}{x^2}+\ln x\right)'=\left(\frac{-2x-1}{x^2}\right)'+(\ln x)'$$

$$=\frac{-2x^2-(2x)\cdot(-2x-1)}{(x^2)^2}+\frac{1}{x}=\frac{-2x^2+4x^2+2x}{x^4}+\frac{1}{x}$$

$$=\frac{2x^2+2x}{x^4}+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+2x}{x^4}+\frac{x^3}{x^4}=\frac{x^3+2x^2+2x}{x^4}$$

$$=\frac{\cancel{x}(x^2+2x+2)}{\cancel{x}\cdot x^3}=\frac{x^2+2x+2}{x^3}$$

Donc $\forall x\in]0;+\infty[,\ g'(x)=\frac{x^2+2x+2}{x^3}$

Scanned by CamScanner

b. En déduisons le sens de variation de g.

$\forall x \in]0;+\infty[,\ g'(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x^3}$

$\forall x \in]0;+\infty[,\ x^3 > 0$ *donc le signe de* $g'(x)$ *est le même que celui de* x^2+2x+2.

Etudions le signe de x^2+2x+2.

$\Delta = 2^2 - 4\times1\times2 = 4-8 = -4 < 0$.

Le signe de x^2+2x+2 *est le même que celui du coefficient de* x^2 *qui est* 1.

On en déduit que: $x^2+2x+2 > 0\ \forall x \in]0;+\infty[$

Donc $\forall x \in]0;+\infty[,\ g'(x) > 0$

Finalement, g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

c. Dressons le tableau de variation de la fonction g.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3. a. Démontrons que $x \in]0;+\infty[, g(x) = 0$ admet une solution unique α.

g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$g(]0;+\infty[) =]-\infty;\ +\infty[$.

$0 \in]-\infty;\ +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ *admet une solution unique sur* $]0;+\infty[$.

Scanned by CamScanner

b. Justifions que : $2{,}55<\alpha<2{,}56$.

g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

et en particulier sur $[2{,}55;\ 2{,}56]$.

$$\left.\begin{array}{l} g(2{,}55)=-0{,}002\ <0 \\ g(2{,}56)=\ 0{,}006\ \ >0 \end{array}\right| \Rightarrow g(2{,}55)\times g(2{,}56)<0$$

Donc $2{,}55<\alpha<2{,}56$.

c. Démontrons que : $\begin{cases} \forall x\in]0;\alpha[,\ g(x)<0 \\ \forall x\in]\alpha;+\infty[,\ g(x)>0 \end{cases}$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit : $\begin{cases} \forall x\in]0;\alpha[,\ g(x)<0 \\ \forall x\in]\alpha;+\infty[,\ g(x)>0 \end{cases}$

Partie B

1. a. Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ **puis en donnons une interprétation graphique.**

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)e^{-x}=+\infty$$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}}\dfrac{1}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}}\ln x=-\infty \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}}-\ln x=+\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}}e^{-x}=e^{-0}=1 \end{cases}$

La droite (OJ) d'équation $x=0$ *est asymptote verticale à (C)*

Scanned by CamScanner

b. Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis en donnons une interprétation graphique.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)e^{-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{xe^{x}}-\frac{\ln x}{e^{x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

car $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^{x}}=0$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^{x}}=0$

(croissance comparée des fonctions $\ln x$ *et* e^{x}*)*

La droite (OI) d'équation $y=0$ *est asymptote horizontale à (C) en* $+\infty$

2. Démontrons que : $f(\alpha)=-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$

$$f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}-\ln\alpha\right)e^{-\alpha}$$

Or $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow -\frac{2\alpha+1}{\alpha^2}+\ln\alpha=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=\frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$

$$\Rightarrow f(\alpha)=\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}=\left(\frac{\alpha}{\alpha^2}-\frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}=\left(\frac{\alpha-2\alpha-1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow f(\alpha)=\left(\frac{-\alpha-1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}=\left(-\frac{\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}$$

donc $f(\alpha)=-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$

3. a. Démontrons que : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[,\ f'(x)=e^{-x}\cdot g(x)$

$$f'(x)=\left[\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)e^{-x}\right]'=\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)'e^{-x}+\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)\left(e^{-x}\right)'$$

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}+\left(\frac{1}{x}-\ln x\right)\left(-e^{-x}\right)=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\ln x\right)e^{-x}$$

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+\ln x\right)e^{-x}=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\ln x\right)e^{-x}$$

$$f'(x)=\left(-\frac{1+2x}{x^2}+\ln x\right)e^{-x}=g(x)\cdot e^{-x}$$

Donc $\forall x\in\left]0;+\infty\right[,\ f'(x)=e^{-x}\cdot g(x)$

Scanned by CamScanner

b. En utilisant la partie A, déterminons les variations de f .

$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$

$\forall x \in]0;+\infty[, e^{-x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$

or $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[,\ g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[,\ g(x) > 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[,\ f'(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[,\ f'(x) > 0 \end{cases}$

On en déduit que :

Sur $]0;\alpha[$ f est strictement décroissante

Sur $]\alpha;+\infty[$ f est strictement croissante

c. Dressons le tableau de variation de f .

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$	$\nearrow$	0

4. Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est : $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$.

$(T):\ y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = \left(-\frac{1+2\times1}{1^2} + \ln 1\right)e^{-1} = (-3+0)\frac{1}{e} = \frac{-3}{e}$

$f(1) = \left(\frac{1}{1} - \ln 1\right)e^{-1} = (1-0)\frac{1}{e} = \frac{1}{e}$

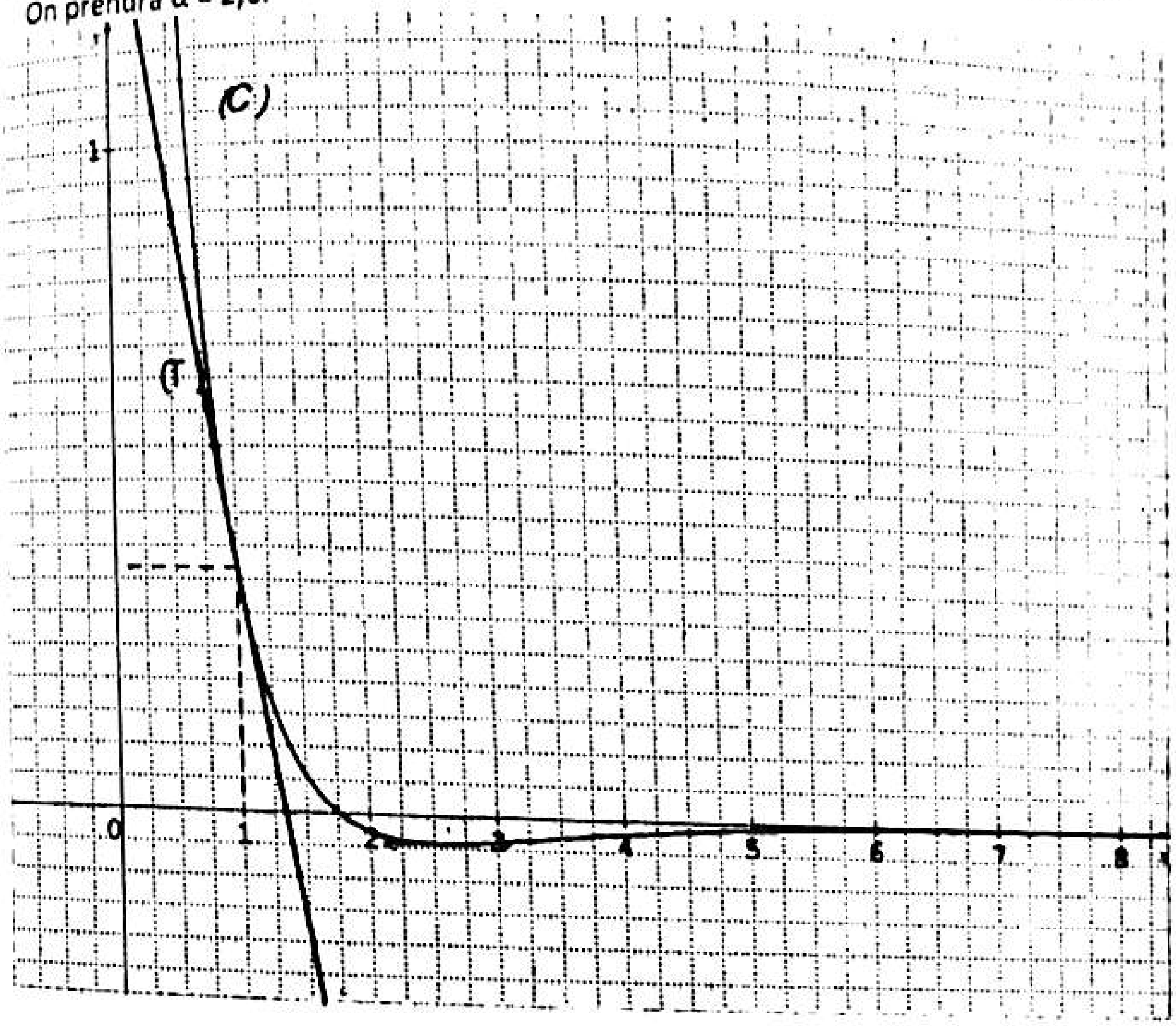
$(T):\ y = \frac{-3}{e}(x-1) + \frac{1}{e} = -\frac{3}{e}x + \frac{3}{e} + \frac{1}{e} = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$

$(T):\ y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$

Scanned by CamScanner

5. Construisons la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère $(0, I, J)$.

On prendra $\alpha = 2,6$.



Partie C

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $h(x) = e^{-x} \cdot \ln x$

Démontrons que h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

En d'autres termes, il s'agit de montrer que : $h'(x) = f(x)$

$$h'(x) = (e^{-x} \cdot \ln x)' = (e^{-x})' \times (\ln x) + (e^{-x}) \times (\ln x)'$$

$$h'(x) = (-e^{-x}) \times (\ln x) + (e^{-x}) \times \left(\frac{1}{x}\right) = (e^{-x}) \times \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)$$

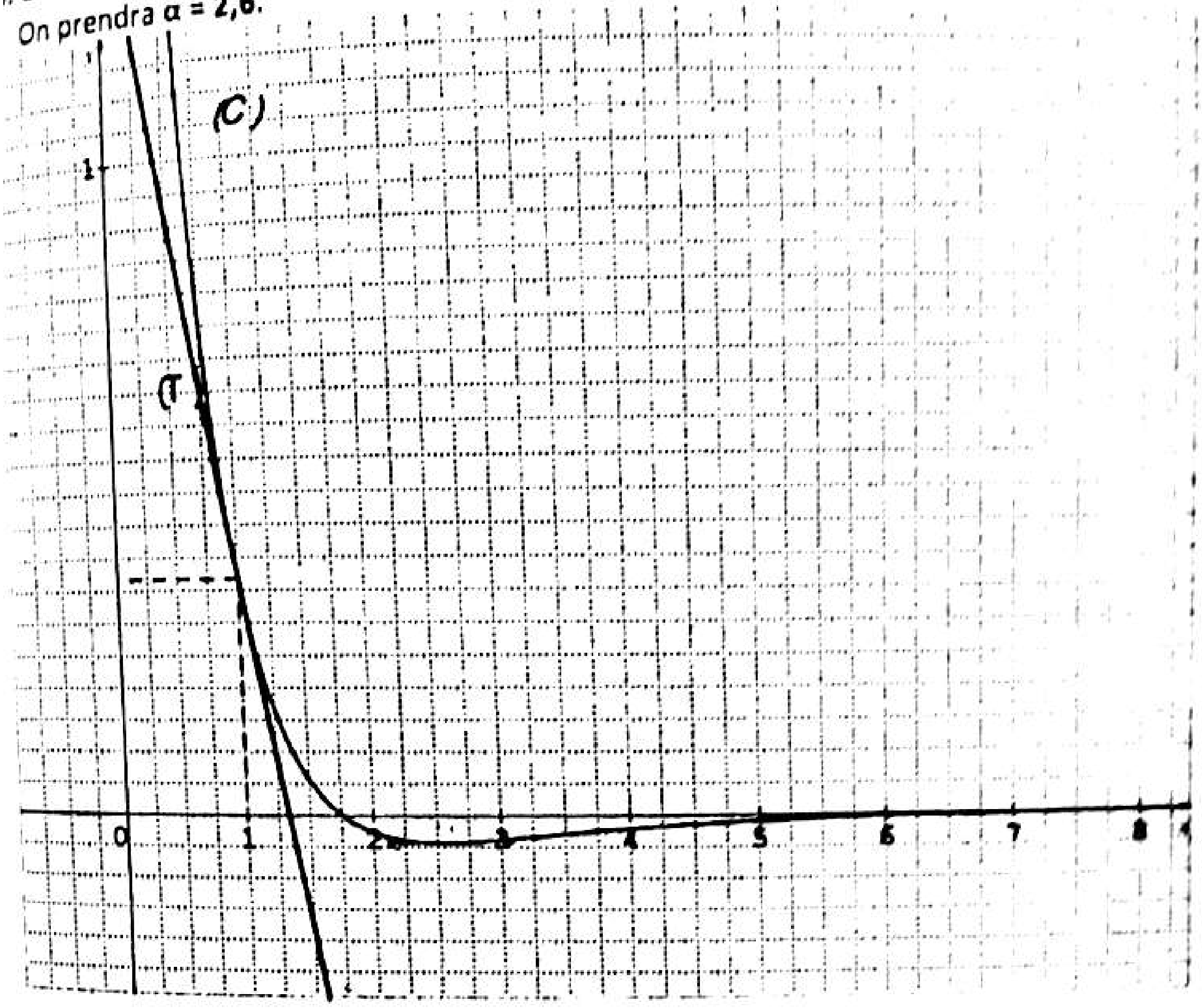
$$h'(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)(e^{-x}) = f(x)$$

Donc h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Scanned by CamScanner

i. Construisons la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

On prendra $\alpha = 2{,}6$.



Partie C

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $h(x) = e^{-x} \cdot \ln x$

Démontrons que h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

En d'autres termes, il s'agit de montrer que : $h'(x) = f(x)$

$$h'(x) = (e^{-x} \cdot \ln x)' = (e^{-x})' \times (\ln x) + (e^{-x}) \times (\ln x)'$$

$$h'(x) = (-e^{-x}) \times (\ln x) + (e^{-x}) \times \left(\frac{1}{x}\right) = (e^{-x}) \times \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)$$

$$h'(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)(e^{-x}) = f(x)$$

Donc h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Scanned by CamScanner

2. Soit λ un nombre réel tel que λ>3.

a. Calculons, en cm² et en fonction de λ, l'aire A(λ) de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équation x = 3 et x = λ.

Sur $]3;+\infty[$, (C) *est en dessous de* (OI), *donc*

$$A(\lambda)=-\int_3^\lambda [f(x)-0]\ dx \cdot UA=-\int_3^\lambda f(x)\ dx \cdot UA$$

avec $UA=2cm\times 10cm=20cm^2$

$$A(\lambda)=-[h(x)]_3^\lambda \times 20cm^2 \ (car\ h\ est\ une\ primitive\ de\ f\ sur\ ]0;+\infty[)$$

$$A(\lambda)=-[h(\lambda)-h(3)]\times 20cm^2=-[e^{-\lambda}\cdot\ln\lambda-e^{-3}\cdot\ln 3]\times 20cm^2$$

$$A(\lambda)=-\left[\frac{1}{e^\lambda}\ln\lambda-\frac{1}{e^3}\ln 3\right]\times 20cm^2=\left[\frac{\ln 3}{e^3}-\frac{\ln\lambda}{e^\lambda}\right]\times 20cm^2$$

b. Calculons $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[\frac{\ln 3}{e^3}-\frac{\ln\lambda}{e^\lambda}\right]\times 20cm^2=\frac{\ln 3}{e^3}\times 20cm^2$$

$$car \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\ln\lambda}{e^\lambda}=0\ \ [croissance\ comparée\ des\ fonctions\ \ln x\ et\ e^x]$$

Scanned by CamScanner

Correction EXAMEN 6: Bac D Session normale 2010

EXERCICE 1

PARTIE A

1. Les racines carrées de $6+6i\sqrt{3}$

Soit $\Delta=6+6i\sqrt{3}$

$|\Delta|=|6+6i\sqrt{3}|=\sqrt{6^2+(6\sqrt{3})^2}=\sqrt{36+36\times 3}=\sqrt{36+108}=\sqrt{144}=\sqrt{12}$

Soit $d=x+iy$ une racine carrée de $\Delta=6+6i\sqrt{3}$, On a :

$$\begin{cases} x^2+y^2=|\Delta| \\ x^2-y^2=\mathrm{Re}(\Delta) \\ 2xy=\mathrm{Im}(\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=12 & (1) \\ x^2-y^2=6 & (2) \\ 2xy=6\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=18 & (1)+(2) \\ 2y^2=6 & (1)-(2) \\ xy=3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ y^2=3 \\ xy>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ou } x=-3 \\ y=\sqrt{3} \text{ ou } y=-\sqrt{3} \\ x \text{ et } y \text{ sont de même signe} \end{cases}$$

On en déduit que les racines carrées de $\Delta=6+6i\sqrt{3}$ sont:

$d=3+\sqrt{3}i$ et $d'=-3-\sqrt{3}i$

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4=0$

$\Delta=(1+3i\sqrt{3})^2-4\times 2\times(-4)=1+2\times 1\times(3i\sqrt{3})+(3i\sqrt{3})^2+32$

$\Delta=1+6i\sqrt{3}-27+32=6+6i\sqrt{3}$

Les racines carrées de $\Delta=6+6i\sqrt{3}$ **sont** $d=3+\sqrt{3}i$ et $d'=-3-\sqrt{3}i$ **(voir 1.)**

$$z_1=\frac{-b-d}{2a}=\frac{(1+3i\sqrt{3})-3-\sqrt{3}i}{2\times 2}=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2=\frac{-b+d}{2a}=\frac{(1+3i\sqrt{3})+3+\sqrt{3}i}{2\times 2}=\frac{4+4\sqrt{3}i}{4}=1+\sqrt{3}i$$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{1+\sqrt{3}i;-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

3.a. Développons, réduisons et ordonnons : $(2z+1)(2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4)$

$$\begin{aligned}(2z+1)(2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4)&=4z^3-2(1+3i\sqrt{3})z^2-8z+2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4\\&=4z^3-2(1+3i\sqrt{3}-1)z^2-(8+1+3i\sqrt{3})z-4\\&=4z^3-2(3i\sqrt{3})z^2-(9+3i\sqrt{3})z-4\\&=4z^3-6i\sqrt{3}z^2-3(3+i\sqrt{3})z-4\end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

b. En déduisons les solutions de (E).

$$4z^3-6i\sqrt{3}z^2-3(3+i\sqrt{3})z-4=0 \Leftrightarrow (2z+1)\left(2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2z+1=0 \text{ ou } 2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4=0$$

$$\Leftrightarrow z=-\frac{1}{2} \text{ ou } 2z^2-(1+3i\sqrt{3})z-4=0$$

$$z_0=-\frac{1}{2}\ ;\ z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\ ;\ z_2=1+\sqrt{3}i$$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{-\frac{1}{2}\ ;1+\sqrt{3}i\ ;\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

4. Expression de z_0; z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

- $z_0=-\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}|z_0|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\\ \arg(z_0)=\arg\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi\end{array}\right| z_0=\frac{1}{2}(\cos\pi+i\sin\pi)$$

- $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$|z_1|=\left|\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)\right|=\left|\frac{1}{2}\right|\times\left|-1+\sqrt{3}i\right|=\left|\frac{1}{2}\right|\times\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{4}=\frac{2}{2}=1$$

Soit $\theta=\arg(z_1)$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right| \theta=\frac{2\pi}{3}$$

$$z_1=1\times\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$

- $z_2=1+\sqrt{3}i$

$$|z_2|=\left|1+\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$$

Soit $\theta'=\arg(z_1)$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta'=\frac{1}{2}\\ \sin\theta'=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right| \theta'=\frac{\pi}{3}$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Scanned by CamScanner

PARTIE B

S similitude directe de centre O, d'angle $\theta=-\frac{\pi}{3}$ **et de rapport** $k=2$.

1. a. Ecriture complexe de S.

$z'=az+b$

$$a=ke^{i\theta}=2e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}=2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=1-\sqrt{3}i$$

$$\omega=\frac{b}{1-a} \Rightarrow b=\omega(1-a)=0\times(1-a)=0$$

$z'=\left(1-\sqrt{3}i\right)z$

b. Justifions que $S(M_0)=M_1$ **et** $S(M_1)=M_2$

- $z_0'=\left(1-\sqrt{3}i\right)z_0=\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=z_1$

$z_0'=z_1 \Rightarrow S(M_0)=M_1$

- $z_1'=\left(1-\sqrt{3}i\right)z_1=\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{2}$

$z_1'=\frac{2}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{2}i=1+\sqrt{3}i=z_2$

$z_1'=z_2 \Rightarrow S(M_1)=M_2$

2. Justifions que $z_{n+1}=\left(1-\sqrt{3}i\right)z_n$

$$M_{n+1}=S(M_n) \Leftrightarrow z_{n+1}=f\left(z_n\right) \Leftrightarrow z_{n+1}=\left(1-\sqrt{3}i\right)z_n$$

3. Soit (U_n) **définie pour tout entier naturel** n **par** $U_n=|z_n|$

a. Démontrons que (U_n) **est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.**

$$U_{n+1}=|z_{n+1}|=\left|\left(1-\sqrt{3}i\right)z_n\right|=\left|1-\sqrt{3}i\right||z_n|=\sqrt{4}\times|z_n|=2\times|z_n|=2\times U_n$$

$$U_{n+1}=2\times U_n \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n}=2$$

Donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme

$U_0=|z_0|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

Scanned by CamScanner

b. Justifions que la distance $OM_{12} = 2048$

$OM_{12} = |z_{M_{12}} - z_O| = |z_{M_{12}}| = |z_{12}| = U_{12}$

Or $U_n = U_0 q^n = \frac{1}{2} \times 2^n$ car (U_n) est une suite géométrique

$U_{12} = \frac{1}{2} \times 2^{12} = \frac{1}{2} \times 4096 = 2048$

Donc $OM_{12} = U_{12} = 2048$

EXERCICE 2

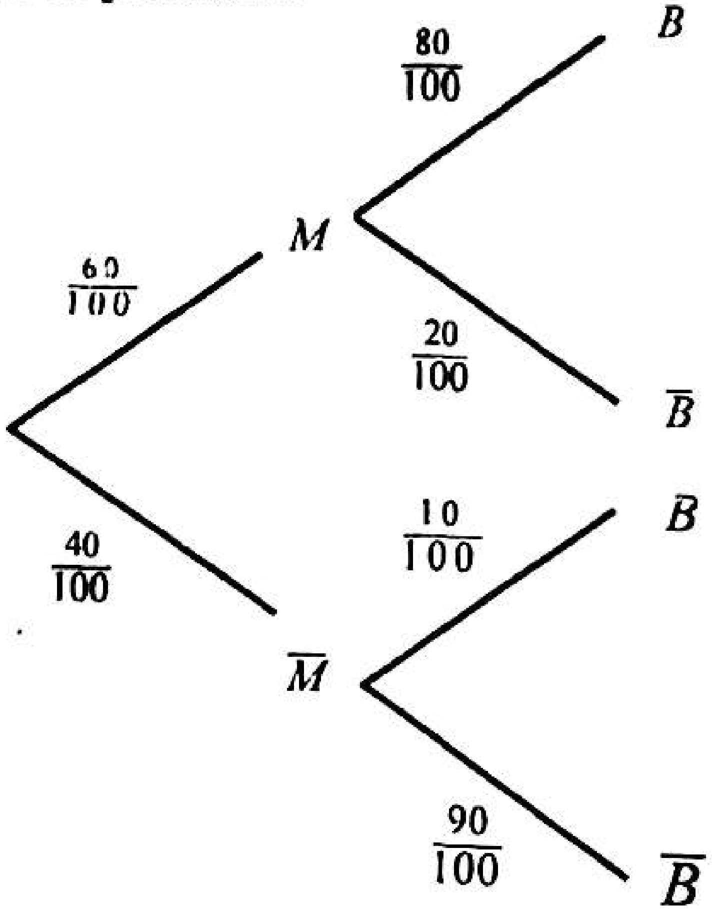
M : Prise du médicament

$\overline{M}$: Pas de prise du médicament

B : Baisse du taux de glycémie

$\overline{B}$: Pas de baisse du taux de glycémie

Arbre de probabilité



1. La probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament : $P_M(B) = \frac{80}{100}$

Scanned by CamScanner

2. Démontrons que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.

$$P(B)=P(M\cap B)+P(\overline{M}\cap B)$$
$$=P(M)\times P_M(B)+P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(B)$$
$$=\frac{60}{100}\times\frac{80}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{10}{100}=\frac{4800}{100\times100}+\frac{400}{100\times100}=\frac{48}{100}+\frac{4}{100}$$
$$P(B)=\frac{52}{100}=0,52$$

3. Probabilité que l'individu ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.

$$P_B(M)=\frac{P(M\cap B)}{P(B)}=\frac{P(M)\times P_M(B)}{P(B)}=\frac{\frac{60}{100}\times\frac{80}{100}}{\frac{52}{100}}$$

$$P_B(M)=\frac{\frac{48}{100}}{\frac{52}{100}}=\frac{48}{100}\times\frac{100}{52}=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}=0,93$$

4. Soit p la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie :

$p=0,52$; $q=1-p=0,48$.

Le contrôle sur un individu conduit à 2 éventualités :

- une baisse du taux de glycémie de probabilité $p=0,52$
- ou une absence de baisse du taux de glycémie de probabilité $q=0,48$.

C'est donc une épreuve de Bernoulli.

On répète 5 fois cette épreuve.

On calculera les probabilités à l'aide de la loi binomiale $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$

a. La probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé : $P(X=2)=C_5^2p^2q^3=10\times(0,52)^2\times(0,48)^3=0,299$

b. La probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.

$$P(X\geq1)=1-P(X=0)=1-C_5^0p^0q^5=1-q^5=1-(0,48)^5=0,975$$

5. Déterminons n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98.

$$P(X\geq1)=1-P(X=0)=1-C_n^0p^0q^n=1-q^n=1-(0,48)^n$$

$$P(X\geq1)>0,98 \Leftrightarrow 1-(0,48)^n>0,98 \Leftrightarrow -(0,48)^n>0,98-1$$
$$\Leftrightarrow -(0,48)^n>-0,02 \Leftrightarrow (0,48)^n<0,02$$
$$\Leftrightarrow \ln(0,48)^n<\ln(0,02) \Leftrightarrow n\ln(0,48)<\ln(0,02)$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{\ln(0,02)}{\ln(0,48)} \Leftrightarrow n>5,33$$

$$P(X\geq1)>0,98 \Leftrightarrow n=6$$

Scanned by CamScanner

PROBLEME

PARTIE A

1. a. Justifions que $\forall x \in]0;+\infty[,\ g'(x)=1+\ln x$

$g'(x)=(1+x\ln x)'=(x\ln x)'=(x)'\times(\ln x)+x\times(\ln x)'=1\times(\ln x)+x\times\frac{1}{x}$

$g'(x)=\ln x+1=1+\ln x$

b. Etude des variations puis tableau de variation de g

$g'(x)=1+\ln x$

$g'(x)>0 \iff 1+\ln x>0 \iff \ln x>-1 \iff x>e^{-1} \iff x>\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	

$\forall x \in]0;\frac{1}{e}[,\quad g'(x)<0$

$\forall x \in]\frac{1}{e};+\infty[,\quad g'(x)>0$

On en déduit : $\begin{cases} Sur\ ]0;\frac{1}{e}[,\ g \text{ est strictement décroissante.} \\ Sur\ ]\frac{1}{e};+\infty[,\ g \text{ est strictement croissante.} \end{cases}$

Tableau de variation

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	

2. g admet sur $]0;+\infty[$, $\frac{e-1}{e}>0$ comme minimum absolu.

Donc $\forall x \in]0;+\infty[,\ g(x)>0$

Scanned by CamScanner

PARTIE B

1. a. Etude de la continuité de f en 0

$f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x\ln x}=\frac{0}{1+0}=0 \text{ car } \lim_{x\to 0} x\ln x=0$$

$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x) \Rightarrow f$ est continue en 0.

b. Etude de la dérivabilité de f en 0

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x}{1+x\ln x}-0}{x-0}=\frac{\frac{x}{1+x\ln x}}{x}=\frac{x}{1+x\ln x}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{1+x\ln x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x\ln x}=1 \text{ car } \lim_{x\to 0} x\ln x=0$$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe et est finie donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$

c. Tangente au point d'abscisse 0

(T): $y=f'(0)(x-0)+f(0)=1\times(x-0)+0$

(T): $y=x$

d. Position relative de (C) et (T)

$$f(x)-x=\frac{x}{1+x\ln x}-x=\frac{x-x-x^2\ln x}{1+x\ln x}=\frac{-x^2\ln x}{1+x\ln x}=\frac{x^2}{1+x\ln x}\times(-\ln x)$$

$\forall x\in]0;+\infty[, g(x)=1+x\ln x>0$ et $x^2>0$

donc le signe de $f(x)-x$ dépend du signe de $(-\ln x)$

$f(x)-x>0 \Leftrightarrow -\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow x<e^0 \Leftrightarrow x<1$

On en déduit :

Sur $]0;1[$, (C) est au dessus de (T).

Sur $]1;+\infty[$, (C) est en dessous de (T).

2. Démontrons que (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

$$f(x)=\frac{x}{1+x\ln x}=\frac{x}{x(\frac{1}{x}+\ln x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}+\ln x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+\ln x}=0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \Rightarrow (OI)$: $y=0$ est asymptote à (C) en $+\infty$

Scanned by CamScanner

3.a. Démontrons que : $f'(x)=\dfrac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{x}{1-x\ln x}\right)'=\frac{x'\times(1-x\ln x)-(x)\times(1-x\ln x)'}{(1-x\ln x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1\times(1+x\ln x)-(x)\times\left(0+1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}\right)}{(1+x\ln x)^2}=\frac{1+x\ln x-x\times(\ln x-1)}{(1+x\ln x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1+x\ln x-x-x\ln x}{(1+x\ln x)^2}=\frac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$$

b. Etude des variations puis tableau de variation de f

$$f'(x)=\frac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$$

$(1+x\ln x)^2>0 \Rightarrow$ le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

$\forall x\in]0;1[,\quad f'(x)>0$

$\forall x\in]1;+\infty[,\quad f'(x)<0$

On en déduit :

Sur $]0;1[$, f est strictement croissante.

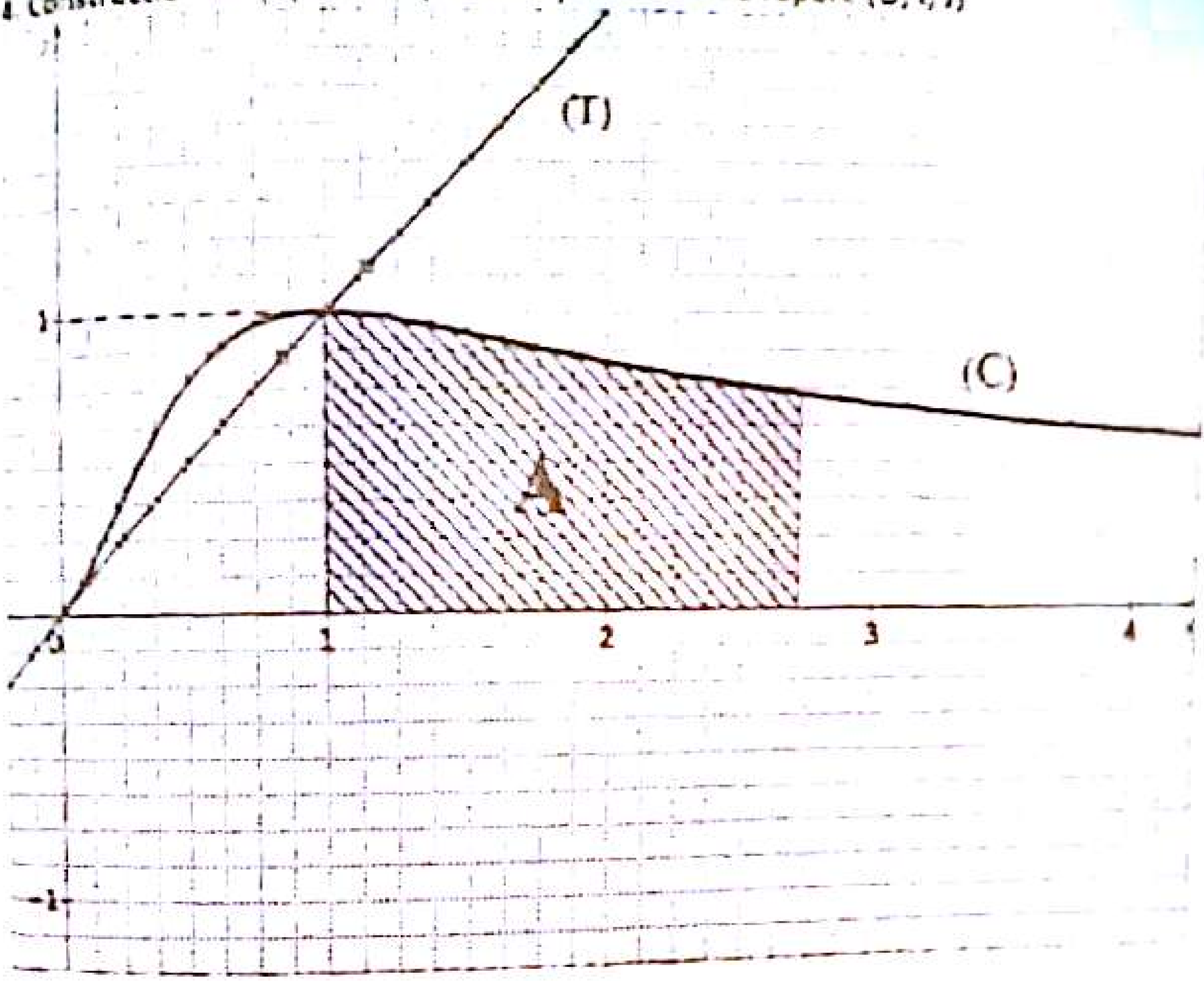
Sur $]1;+\infty[$, f est strictement décroissante.

Tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Scanned by CamScanner

4. Construction de (T) et de (C) dans le plan muni du repère (O, I, J)



PARTIE C

1.a. Justifions que : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad f(x) \leq 1$

f admet sur $]0; +\infty[$, 1 comme maximum absolu et $f(1) = 1$.

Donc $\forall x \in]0; +\infty[, \quad f(x) \leq 1$

b. Démontrons que : $\forall x \in [1; e], \quad 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$

$x \in [1; e] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq e \Leftrightarrow \ln 1 \leq \ln x \leq \ln e$ car $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante

$\Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x\ln x \leq x \Leftrightarrow 1 + x\ln x \leq 1 + x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+x\ln x} \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} \leq \frac{x}{1+x\ln x} \Leftrightarrow \frac{1+x-1}{1+x} \leq \frac{x}{1+x\ln x}$

$\Leftrightarrow \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} \leq \frac{x}{1+x\ln x} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1+x} \leq \frac{x}{1+x\ln x}$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$

Scanned by CamScanner

2. $\mathcal{A}$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

Démontrons que : $16(e-1)+16\ln(\frac{2}{1+e}) \leq \mathcal{A} \leq 16(e-1)$

$$A=\int_1^e |f(x)-0|dx \times UA=\int_1^e f(x)dx \times UA=\int_1^e \frac{x}{1+x\ln x}dx \times UA$$

$UA=4\times 4=16cm^2$

On a montré:

en 1.a. que $\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x)\leq 1$

en 1.b. que $\forall x \in [1;e],\ 1-\frac{1}{1+x}\leq f(x)$

Donc $\forall x \in [1;e],\ 1-\frac{1}{1+x}\leq f(x)\leq 1$

$$1-\frac{1}{1+x}\leq f(x)\leq 1 \Leftrightarrow \int_1^e\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx \leq \int_1^e f(x)dx \leq \int_1^e 1dx$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx \times UA \leq \int_1^e f(x)dx \times UA \leq \int_1^e 1dx \times UA$$

$$\Leftrightarrow [x-\ln(1+x)]_1^e \times 16 \leq A \leq [x]_1^e \times 16$$

$$\Leftrightarrow 16[e-\ln(1+e)-(1-\ln(1+1))] \leq A \leq (e-1)\times 16$$

$$\Leftrightarrow 16[e-\ln(1+e)-1+\ln 2] \leq A \leq 16(e-1)$$

$$\Leftrightarrow 16\left[e-1+\ln\frac{2}{1+e}\right] \leq A \leq 16(e-1)$$

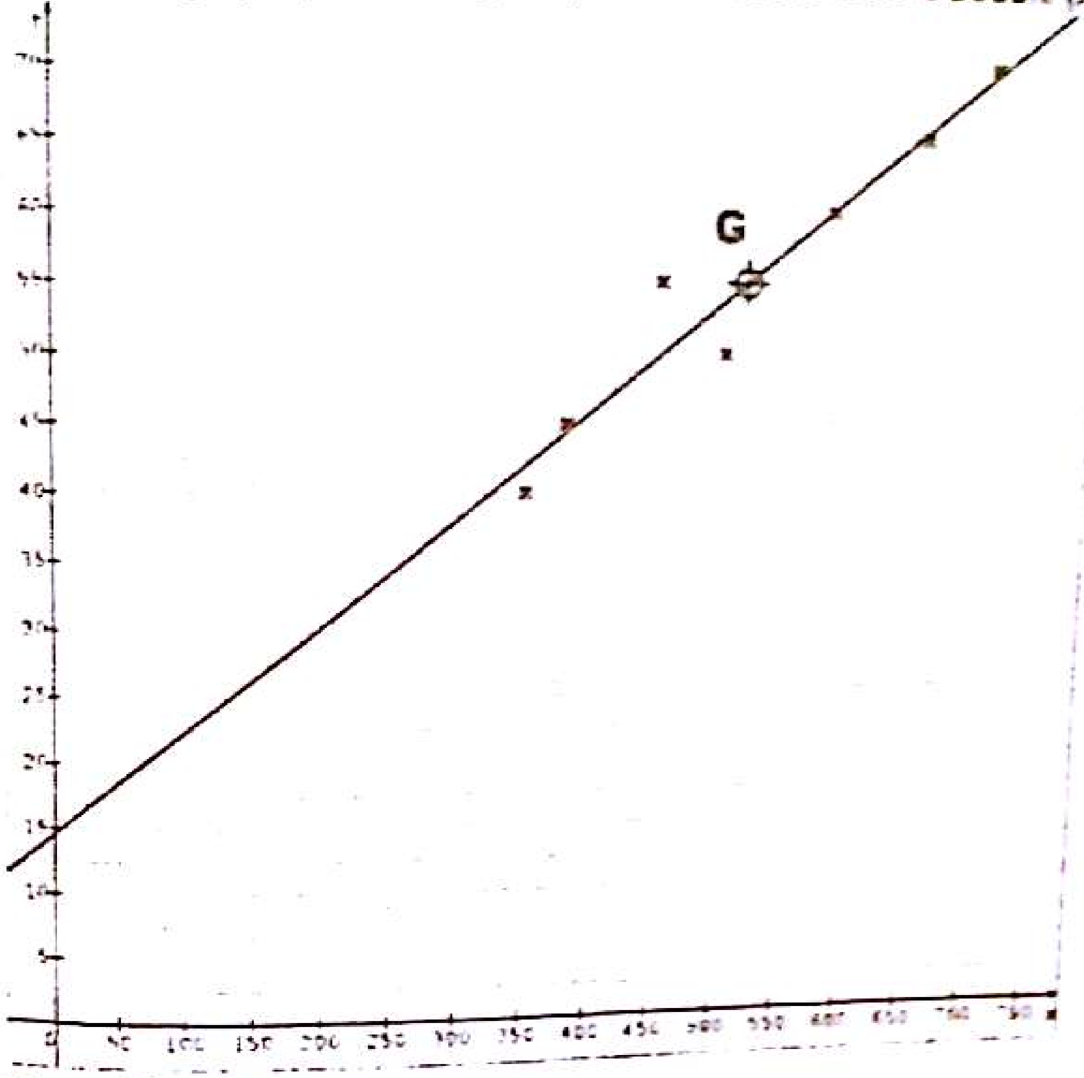
$$\Leftrightarrow 16(e-1)+16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$$

Scanned by CamScanner

Correction EXAMEN 7: Bac D Session normale 2009

EXERCICE 1

1. Représentation graphique du nuage de points associé à la série double (X, Y).



2. a. Calcul de $\overline{X}$ le chiffre d'affaires moyen.

$$\overline{X}=\frac{\sum X_i}{N}=\frac{350+380+500+450+580+650+700}{7}=\frac{3610}{7}=515,714$$

b. Calcul de $\overline{Y}$ le coût moyen de production.

$$\overline{Y}=\frac{\sum Y_i}{N}=\frac{40+45+50+55+60+65+70}{7}=\frac{385}{7}=55$$

3. a. Vérifions qu'un arrondi à l'entier de cov (X, Y) est égal à 1193.

$$cov(X,Y)=\frac{\sum Y_i \cdot X_i}{N}-\overline{X}\cdot\overline{Y}$$

$$=\frac{350\times 40+380\times 45+500\times 50+450\times 55+580\times 60+650\times 65+700\times 70}{7}-515,714\times 55$$

$$cov(X,Y)=1192,86\simeq 1193$$

b. Justifions l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y.

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{350^2 + 380^2 + 500^2 + 450^2 + 580^2 + 650^2 + 700^2}{7} - 515{,}714^2$$

$$V(X) = 15224{,}6$$

$$V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{40^2 + 45^2 + 50^2 + 55^2 + 60^2 + 65^2 + 70^2}{7} - 55^2$$

$$V(Y) = 100$$

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{1193}{\sqrt{15224{,}6 \times 100}} = 0{,}967$$

$0{,}87 \leq r \leq 1$: il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y

L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

4. a. Equation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X.

$(D) : y = ax + b$

$$a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{1193}{15224{,}6} = 0{,}078$$

$\bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} = 55 - 0{,}078 \times 515{,}714 = 14{,}593$

$(D) : y = 0{,}078x + 14{,}593$

b. Construction de (D) (voir repère ci dessus).

((D) passe par le point moyen G (515,714 ; 55))

Tableau de valeurs

X	515,714	0
Y	55	14,593

5. Coût de production Y de l'entreprise Ivoirbois de l'année 2007 si le chiffre d'affaires de l'année 2007 est de X= 800 millions de francs.

$y = 0{,}078 \times 800 + 14{,}593 = 76{,}993 \text{ millions}$

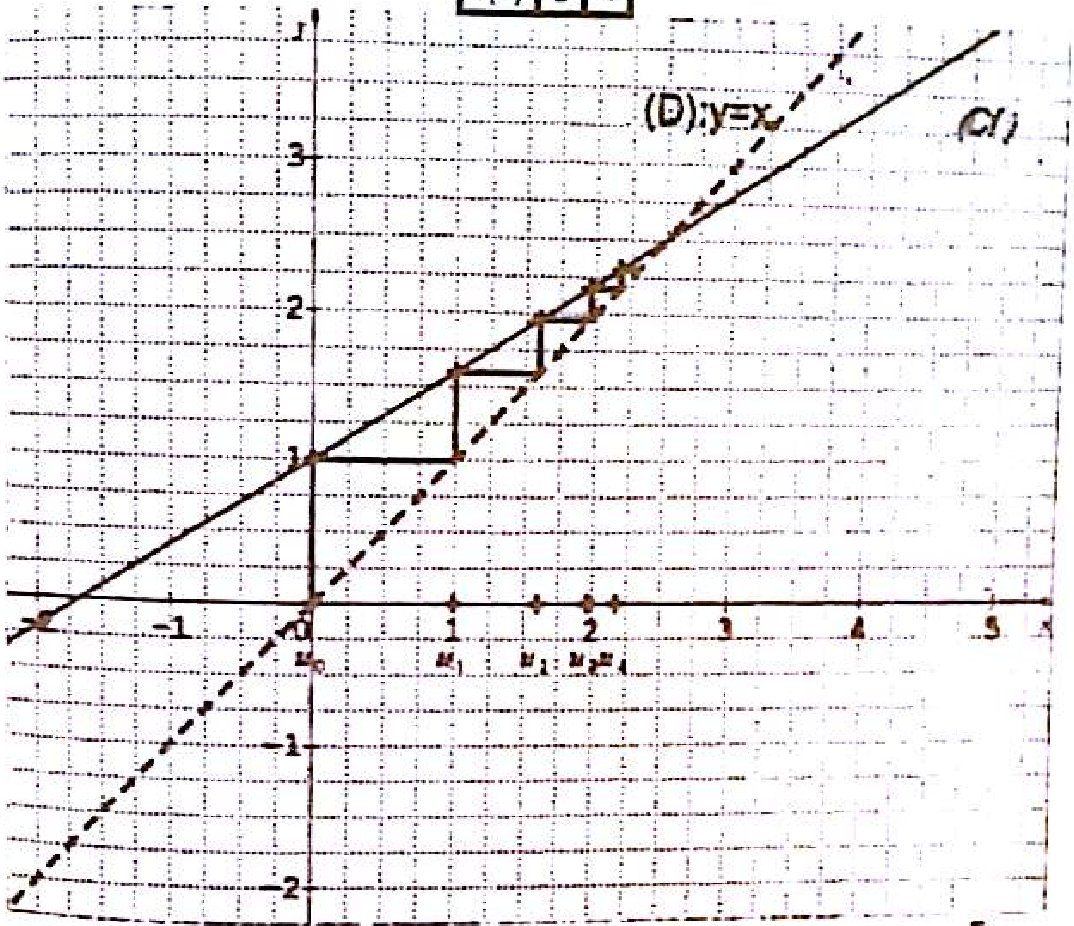
Scanned by CamScanner

EXERCICE 2

1. Représentation sur l'axe des abscisses des termes U_0 ; U_1 ; U_2 et U_3.

$U_{n+1}=\frac{3}{5}U_n+1$ on en déduit: $f(x)=\frac{3}{5}x+1$

x	0	5
f(x)	1	4



2. a. Démontrons par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.

$U_0=0<\frac{5}{2}$ donc U_0 est majorée par $\frac{5}{2}$: la propriété est vraie à l'ordre 0.

Supposons que pour tout k élément de $\mathbb{N}$, U_k est majorée par $\frac{5}{2}$

On a: $U_k<\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{3}{5}U_k<\frac{3}{5}\times\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{3}{5}U_k<\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{3}{5}U_k+1<\frac{3}{2}+1\Rightarrow\frac{3}{5}U_k+1<\frac{5}{2}$

$\Rightarrow U_{k+1}<\frac{5}{2}$ donc U_{k+1} est également majorée par $\frac{5}{2}$.

Finalement, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, (U_n) est majorée par $\frac{5}{2}$

Scanned by CamScanner

b. Démontrons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(U_n) est majorée par $\frac{5}{2}$ donc (U_n) converge si est elle croissante.

Etudions les variations de la suite (U_n).

$$U_{n+1}-U_n=\frac{3}{5}U_n+1-U_n=\frac{3}{5}U_n+1-\frac{5}{5}U_n=\frac{-2}{5}U_n+1$$

$$U_n<\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{-2}{5}U_n>\frac{-2}{5}\times\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{-2}{5}U_n>-1\Rightarrow\frac{-2}{5}U_n+1>-1+1\Rightarrow\frac{-2}{5}U_n+1>0$$

Donc $U_{n+1}-U_n>0$; par suite (U_n) est croissante.

(U_n) est croissante et majorée donc elle converge.

3. Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ V_n=U_n-\frac{5}{2}$

a. Démontrons que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$$V_n=U_n-\frac{5}{2}\ \Rightarrow V_{n+1}=U_{n+1}-\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow V_{n+1}=\frac{3}{5}U_n+1-\frac{5}{2}\ \text{car}\ U_{n+1}=\frac{3}{5}U_n+1$$

$$\Rightarrow V_{n+1}=\frac{3}{5}U_n-\frac{3}{2}=\frac{3}{5}\left(U_n-\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{5}V_n\ \Rightarrow\ \frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{3}{5}$$

$\Rightarrow (V_n)$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{3}{5}$ et de premier terme $V_0=\frac{-5}{2}$

b. Exprimons V_n puis U_n en fonction de n.

(V_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{3}{5}$ et de premier terme $V_0=\frac{-5}{2}$

$$\Rightarrow V_n=V_0q^n\ \Rightarrow\ V_n=\frac{-5}{2}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$V_n=U_n-\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ U_n=\frac{5}{2}+V_n$$

$$\Rightarrow U_n=\frac{5}{2}+\left(\frac{-5}{2}\times\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)\ \Rightarrow\ U_n=\frac{5}{2}\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$$

Scanned by CamScanner

c. Déterminons la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(V_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{3}{5}$

$-1<q<1 \Rightarrow \lim V_n = 0$

Or $U_n=\frac{5}{2}+V_n \Rightarrow \lim U_n = \frac{5}{2}+\lim V_n$

Donc $\lim U_n = \frac{5}{2}+0=\frac{5}{2}$

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x)=(1-x)e^{1-x}-1$

1. a. Justifions que la limite de g en $+\infty$ est -1.

On pose $X=1-x$

Quand x tend vers $+\infty$; X tend vers $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X-1=-1$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$)

b. Déterminons la limite de g en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x}=\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$

2. a. Démontrons que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g'(x)=(x-2)e^{1-x}$.

$g'(x)=\left[(1-x)e^{1-x}-1\right]'=(1-x)'e^{1-x}+(1-x)\left(e^{1-x}\right)'-(1)'$

$g'(x)=-e^{1-x}+(1-x)\left(-e^{1-x}\right)=(1+1-x)\left(-e^{1-x}\right)=(2-x)\left(-e^{1-x}\right)$

$g'(x)=(x-2)e^{1-x}$

b. Etudions les variations de g et dressons son tableau de variation.

$g'(x)=(x-2)e^{1-x}$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{1-x}>0$ donc le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $(x-2)$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

On en déduit que:

- $\forall x\in\left]-\infty;2\right[$, $g'(x)<0$. Donc g est strictement décroissante sur $\left]-\infty;2\right]$
- $\forall x\in\left]2;+\infty\right[$, $g'(x)>0$. Donc g est strictement croissante sur $\left[2;+\infty\right[$

Scanned by CamScanner

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-(e^{-1}+1)$	$\nearrow$	1

3. a. Démontrons que l'équation $x \in \mathbb{R},\ g(x)=0$ admet une solution unique α.

- g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;2]$

$g(]-\infty;2])=[-(e^{-1}-1);+\infty[$ or $0 \in [-(e^{-1}-1);+\infty[$

donc l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α sur $]-\infty;2]$

- $\forall x \in [2;+\infty[,\ g(x) < -1 < 0.$

Donc l'équation g(x) = 0 n'admet pas de solution sur $[2;+\infty[$

Finalement, l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

b. Justifions que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty;2]$

et en particulier sur $[0{,}4;0{,}5]$

$g(0{,}4) = 0{,}04$
$g(0{,}5) = -0{,}1$ $\Big|$ $g(0{,}4)\times g(0{,}5) < 0$ *donc* $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

5. Signe de $g(x)$

x	$-\infty$		α		2		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-(e^{-1}+1)$	$\nearrow$	-1
signe de $g(x)$		$+$	0		$-$		

On déduit du tableau ci-contre que :

$\begin{cases} \forall x \in]-\infty;\alpha[, g(x) > 0; \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) < 0. \end{cases}$

Scanned by CamScanner

PARTIE B

1. Déterminons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$f(x) = xe^{1-x} - x + 2 = x(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x})$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{e^{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -1 + \frac{2}{x} = -1$

$f(x) = xe^{1-x} - x + 2 = x(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x})$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -1 + \frac{2}{x} = -1$

2. a. Démontrons que f est une primitive de g.

$f'(x) = (xe^{1-x} - x + 2)' = (xe^{1-x})' + (-x + 2)'$

$f'(x) = (x)'e^{1-x} + x(e^{1-x})' + (-x + 2)' = e^{1-x} + x(-e^{1-x}) - 1$

$f'(x) = (1 - x)e^{1-x} - 1 = g(x)$

$f'(x) = g(x)$ donc f est une primitive de g

b. Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation.

$f'(x) = g(x)$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de g

or $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) > 0; \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in]-\infty; \alpha[, f'(x) > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty; \alpha[; \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0 \text{ donc } f \text{ est strictement décroissante sur }]\alpha; +\infty[\end{cases}$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3. a. Démontrons que $(D): y = -x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

$f(x) - (-x + 2) = (xe^{1-x} - x + 2) - (-x + 2) = xe^{1-x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (-x + 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e\frac{x}{e^{x}} = 0$

donc la droite d'équation $(D): y = -x + 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$

Scanned by CamScanner

b. Etudions la position relative de (D) et (C).

$f(x)-(-x+2)=xe^{1-x}$

$\forall x\in\mathbb{R},\ e^{1-x}>0$ donc le signe de $f(x)-(-x+2)$ est le même que celui de x

$f(x)-(-x+2)>0\Leftrightarrow x>0$ donc (C) est au dessus de (D) sur $]0;+\infty[$

$f(x)-(-x+2)<0\Leftrightarrow x<0$ donc (C) est en dessous de (D) sur $]-\infty;0[$

4. Démontrons que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{xe^{1-x}-x+2}{x}=\frac{x(e^{1-x}-1+\frac{2}{x})}{x}=e^{1-x}-1+\frac{2}{x}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-1+\frac{2}{x}=-1$s.

donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe (OJ) en $-\infty$

Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

$(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$f'(1)=g(1)=(1-1)e^{1-1}-1=-1$ et $f(1)=(1)e^{1-1}-1+2=e^{0}+1=1+1=2$

$(T):y=-1\times(x-1)+2=-x+3$

6. Démontrons que $f(\alpha)=1-\alpha+\frac{1}{1-\alpha}$

$f(\alpha)=\alpha e^{1-\alpha}-\alpha+2$

$g(\alpha)=0\Leftrightarrow(1-\alpha)e^{1-\alpha}-1=0\Leftrightarrow(1-\alpha)e^{1-\alpha}=1\Leftrightarrow e^{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$

$$\text{d'où}: f(\alpha)=\alpha\times\frac{1}{1-\alpha}-\alpha+2=\frac{\alpha+(1-\alpha)(-\alpha+2)}{1-\alpha}=\frac{\alpha-\alpha+2+\alpha^2-2\alpha}{1-\alpha}$$

$$=\frac{2+\alpha^2-2\alpha}{1-\alpha}=\frac{1+\alpha^2-2\alpha+1}{1-\alpha}=\frac{(1-\alpha)^2-1}{1-\alpha}$$

$$\text{donc } f(\alpha)=\frac{(1-\alpha)^2}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}=1-\alpha+\frac{1}{1-\alpha}$$

7. Justifions que pour tout nombre réel x, $f(-x+2)=e^{x-1}f(x)$

$f(x)=xe^{1-x}-x+2$

$f(-x+2)=(-x+2)e^{1-(-x+2)}-(-x+2)+2=(-x+2)e^{1+x-2}+x-2+2$

$f(-x+2)=(-x+2)e^{-1+x}+x=e^{-1+x}\left[(-x+2)+\frac{x}{e^{-1+x}}\right]$

$f(-x+2)=e^{x-1}\left[-x+2+xe^{1-x}\right]=e^{x-1}\left[xe^{1-x}-x+2\right]=e^{x-1}f(x)$

$\Rightarrow f(-x+2)=e^{x-1}f(x)$

Scanned by CamScanner

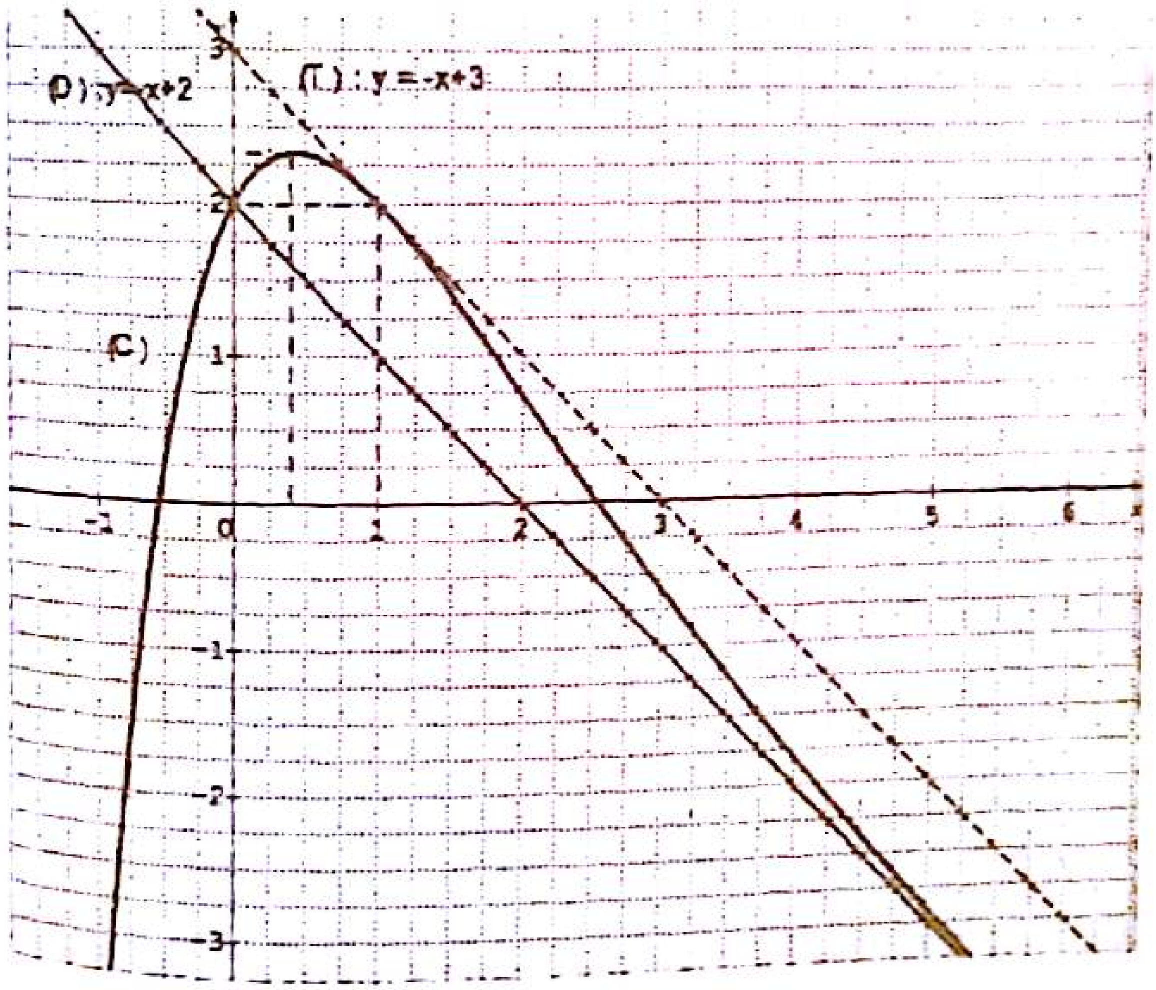
8. Démontrons que si β est l'une des solutions de l'équation $f(x)=0$ alors $-\beta+2$ est l'autre solution.

On sait que: $f(-x+2)=e^{x-1}f(x)$

β est solution de $f(x)=0 \Leftrightarrow f(\beta)=0 \Leftrightarrow e^{\beta-1}f(\beta)=0 \Leftrightarrow f(-\beta+2)=0$

$\Leftrightarrow -\beta+2$ est solution de $f(x)=0$

9. Construction de (D), (T) et (C). (On prendra $\alpha=0.4$ et $\beta=2.5$).



Scanned by CamScanner

PARTIE C

1. Calcul de $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

$$f(x)-(-x+2)=xe^{1-x}$$

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda}[f(x)-(-x+2)]dx\times UA$$

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda}\left[xe^{1-x}\right]dx\times UA$$

On pose :

$u(x)=x$ $\qquad$ $u'(x)=1$

$v'(x)=e^{1-x}$ $\qquad$ $v(x)=-e^{1-x}$

$$\int_0^{\lambda}\left[xe^{1-x}\right]dx=\left[-xe^{1-x}\right]_0^{\lambda}-\int_0^{\lambda}\left[-e^{1-x}\right]dx$$

$$=\left[-xe^{1-x}\right]_0^{\lambda}-\left[e^{1-x}\right]_0^{\lambda}=\left[-xe^{1-x}-e^{1-x}\right]_0^{\lambda}$$

$$=\left[(-x-1)e^{1-x}\right]_0^{\lambda}=\left[(-\lambda-1)e^{1-\lambda}\right]-\left[(-0-1)e^{1-0}\right]$$

$$=(-\lambda-1)e^{1-\lambda}+e$$

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda}\left[xe^{1-x}\right]dx\times UA$$

$$A(\lambda)=\left[(-\lambda-1)e^{1-\lambda}+e\right]\times UA \text{ avec } UA=2cm\times 2cm=4cm^2$$

$$A(\lambda)=\left[(-\lambda-1)e^{1-\lambda}+e\right]\times 4cm^2$$

2. Déterminons la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

$$A(\lambda)=\left[(-\lambda-1)e^{1-\lambda}+e\right]\times UA=\left[(-\lambda-1)e^{-\lambda}\times e+e\right]\times UA$$

$$A(\lambda)=e\times\left[(-\lambda-1)e^{-\lambda}+1\right]\times UA=e\times\left[-\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1\right]\times UA$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=e\times UA=e\times 4cm^2=4e\ cm^2=10{,}872\ cm^2$$

$$\text{Car}\begin{cases}\lim\limits_{\lambda\to+\infty}-\lambda e^{-\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}Xe^{X}=0\\ \lim\limits_{\lambda\to+\infty}e^{-\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}e^{X}=0\end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Correction EXAMEN 8: Bac D Session normale 2008

EXERCICE 1

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Soit l'équation (E) : $Z \in \mathbb{C},\ Z^3 + (6-5i)Z^2 + (1-20i)Z - 14 - 5i = 0$

1. a. Vérifions que i est une solution de l'équation (E).

$i^3 + (6-5i)i^2 + (1-20i)i - 14 - 5i = -20 + 20 = 0$

i est une solution de l'équation (E).

b. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + (6-4i)Z + 5 - 14i = 0$

$\Delta = (6-4i)^2 - 4(5-14i) = 8i$

$$\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x^2-y^2=0 \\ 2xy=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=8 \\ 2y^2=8 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=4 \\ xy>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ ou } x=-2 \\ y=2 \text{ ou } y=-2 \\ xy>0 \end{cases}$$

$d = 2+2i$ ou $d' = -2-2i$

$x_1 = \dfrac{-6+4i+2+2i}{2} = \dfrac{-4+6i}{2} = -2+3i$

$x_2 = \dfrac{-6+4i-2-2i}{2} = \dfrac{-8+2i}{2} = -4+i$

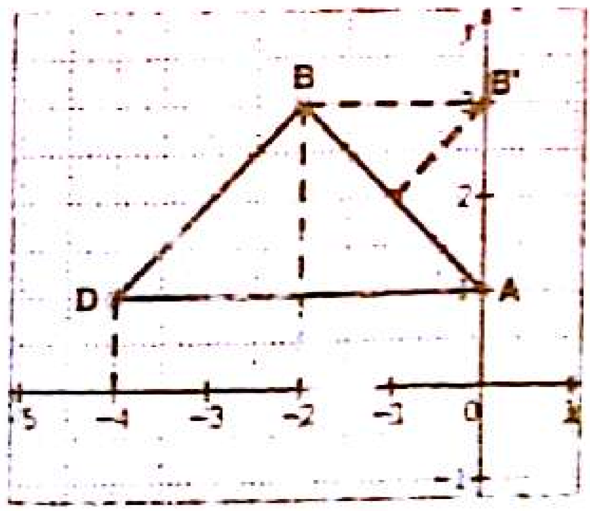
$S_{\mathbb{C}} = \{-2+3i\ ;\ -4+i\}$

c. Résolvons à l'aide des questions qui précèdent l'équation (E).

$Z^3 + (6-5i)Z^2 + (1-20i)Z - 14 - 5i = (z-i)(Z^2 - (6-4i)Z + 5 - 14i)$

$S_{\mathbb{C}} = \{i;\ -2+3i\ ;\ -4+i\}$

2. a. Plaçons les points A, B et D d'affixes $u = i$; $v = -2+3i$ et $t = -4+i$ dans le repère.



Scanned by CamScanner

b. Ecriture du nombre complexe $Z = \frac{u-v}{t-v}$ sous forme trigonométrique.

$$Z = \frac{u-v}{t-v} = \frac{i-(-2+3i)}{-4+i-(-2+3i)} = \frac{2-2i}{-2-2i} = \frac{1-i}{-1-i} = \frac{(1-i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$|Z| = 1 \quad \arg Z = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad Z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

c. Déduisons que le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

$Z = \frac{u-v}{t-v} = \frac{Z_A - Z_B}{Z_D - Z_B} = i$. Donc le triangle ABD est rectangle isocèle en B.

3. S est la similitude directe de centre A qui transforme D en B.

B' est l'image de B par S

a. Justifions que le triangle ABB' est rectangle isocèle en B'.

S (A) = A; S (D) = B; S (B) = B' donc S (ADB) = ABB'.

Or ADB est rectangle isocele en B donc ABB' est rectangle isocele en B'.

(Car toute similitude directe conserve les angles)

b. Déduisons la construction du point B' (voir figure ci-dessus).

ABB' est isocèle en B' donc B' appartient à la médiatrice de [AB].

ABB' est rectangle en B' donc B' appartient au cercle de centre le milieu de [AB].

4. a. Déterminons l'écriture complexe de S.

S (A)= A ; S (D)= B

$z' = az + b$

$$\left.\begin{array}{l} S(A) = A \Leftrightarrow z_A = az_A + b \\ S(D) = B \Leftrightarrow z_B = az_D + b \end{array}\right| \Rightarrow z_A - z_B = az_A - az_D = a(z_A - z_D)$$

$$\Rightarrow a = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_D} = \frac{i-(-2+3i)}{i-(-4+i)} = \frac{2-2i}{4} = \frac{1}{2}(1-i)$$

$$z_A = az_A + b \Leftrightarrow b = z_A - az_A = z_A(1-a)$$

$$\Leftrightarrow b = i\left(1 - \frac{1}{2}(1-i)\right) = i\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

D'où $z' = \frac{1}{2}(1-i)z + \frac{1}{2}(-1+i)$

b. Calculons l'affixe de B'.

$$B' = S(B) \Leftrightarrow z_{B'} = \frac{1}{2}(1-i)z_B + \frac{1}{2}(-1+i) = \frac{1}{2}(1-i)(-2+3i) + \frac{1}{2}(-1+i)$$

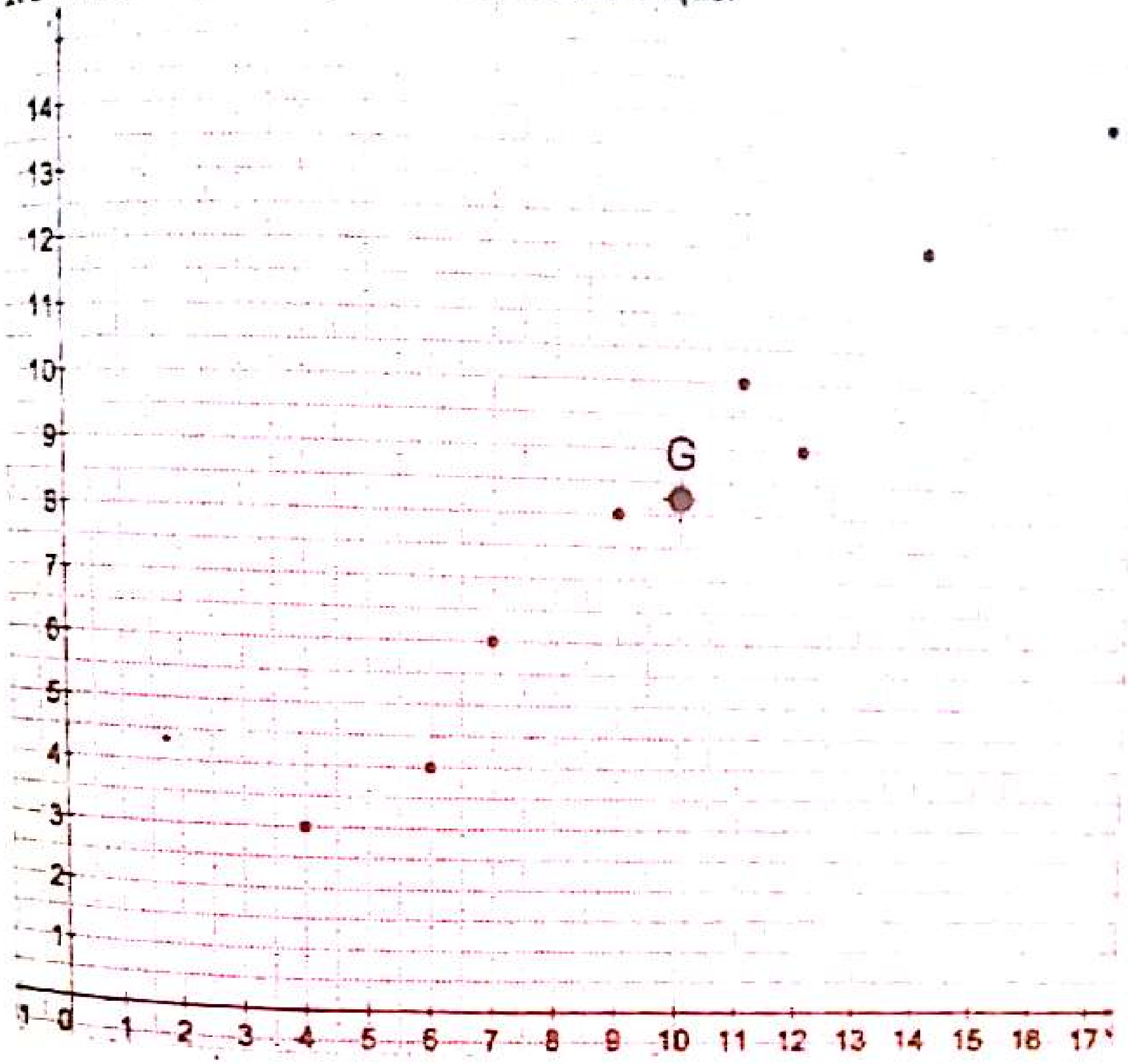
$$\Leftrightarrow z_{B'} = \frac{1}{2}(-2+3i+2i+3) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1+5i) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\Leftrightarrow z_{B'} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{6}{2}i = 3i$$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 2

1. Le nuage de points associé à la série statistique.



2. Les cordonnées du point moyen G du nuage.

$$\left.\begin{array}{l} X_G = \bar{X} = \dfrac{4+6+7+9+11+14+12+17}{8} = \dfrac{80}{8} = 10 \\ Y_G = \bar{Y} = \dfrac{3+4+6+8+10+12+9+14}{8} = \dfrac{66}{8} = 8{,}25 \end{array}\right| \Rightarrow G(10;8{,}25)$$

3. a. Vérifions que la covariance cov (X, Y) de la série statistique est égale à $\frac{57}{4}$

$$COV(X;Y) = \sum_{i=1}^{8} x_i \times y_i - \bar{X} \times \bar{Y}$$

$$COV(X;Y) = \frac{4\times3+6\times4+7\times6+9\times8+11\times10+14\times12+12\times9+17\times14}{8} - 10\times\frac{66}{8}$$

$$COV(X;Y) = \frac{774}{8} - \frac{660}{8} = \frac{114}{8} = \frac{57}{4}$$

b. Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

$$V(X)=\frac{4^2+6^2+7^2+9^2+11^2+14^2+12^2+17^2}{8}-10^2=\frac{33}{2}=16{,}5$$

$$V(Y)=\frac{3^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2+9^2+14^2}{8}-\left(\frac{33}{4}\right)^2=\frac{203}{16}=12{,}68$$

$$COV(X;Y)=\frac{57}{4}=14{,}25 \quad\Rightarrow\quad r=\frac{COV(X;Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}}=0{,}98$$

4. Déterminons une équation de la droite (D) de régression de Y en X.

$$y=ax+b \text{ avec } a=\frac{COV(X;Y)}{V(X)} \text{ et } b=\overline{Y}-a\overline{X}$$

$$a=\frac{COV(X;Y)}{V(X)}=\frac{\frac{57}{4}}{\frac{33}{2}}=\frac{19}{22}$$

$$b=\overline{Y}-a\overline{X}=\frac{66}{8}-\frac{19}{22}\times10=\frac{66}{8}-\frac{190}{22}=\frac{1452-1520}{176}=-\frac{68}{176}=-\frac{17}{44}$$

$$y=ax+b=\frac{19}{22}x+\left(-\frac{17}{44}\right) \Rightarrow y=\frac{19}{22}x-\frac{17}{44}$$

5. Sur la base de cet ajustement linéaire, calculons la note probable de mathématiques d'un candidat qui a obtenu 15 sur 20 en sciences physiques.

$$y=\frac{19}{22}x-\frac{17}{44} \Rightarrow \frac{19}{22}x=y+\frac{17}{44} \Rightarrow x=\frac{22}{19}\left(y+\frac{17}{44}\right)$$

Pour $y=15$, on obtient : $x=\frac{22}{19}\left(15+\frac{17}{44}\right)=\frac{22}{19}\left(\frac{660+17}{44}\right)=\frac{22}{19}\left(\frac{677}{44}\right)$

Soit $x=\frac{677}{38}=17{,}81\simeq18$

PROBLEME

PARTIE A

1. Les variations de g et son tableau de variation.

$$g'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}=\frac{(2x)^2-1}{x}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{x}=(2x-1)\times\frac{(2x+1)}{x}$$

Sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{(2x+1)}{x}>0$ donc le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $(2x-1)$

Or, $2x-1>0 \Leftrightarrow 2x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

et $2x-1<0 \Leftrightarrow 2x<1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$

Scanned by CamScanner

On en déduit que:

$g'(x)<0$ si $x<\frac{1}{2}$ donc g est strictement décroissante sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$

$g'(x)>0$ si $x>\frac{1}{2}$ donc g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$g'(x)=0$ si $x=\frac{1}{2}$

Tableau de variation

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\frac{3}{2}+\ln 2$	$\nearrow$	

2. Justifions que : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[,\ g(x)>0$

Le minimum de $g(x)$ sur $\left]0;+\infty\right[$ est $\frac{3}{2}+\ln 2>0$ donc $\forall x\in\left]0;+\infty\right[,\ g(x)>0$.

PARTIE B

1. a. Calcul de la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x-3+\frac{\ln x}{x}=+\infty \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\end{cases}$$

b. Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$ puis interprétons graphiquement le résultat.

$f(x)=2x-3+\frac{\ln x}{x}=2x-3+\frac{1}{x}\times\ln x$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}} 2x-3+\frac{1}{x}\times\ln x=-\infty \text{ car } \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} 2x-3=-3\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{x}=+\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\ln x=-\infty\end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à (C).

Scanned by CamScanner

2. a. Démontrons que (D) : $y=2x-3$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

$$f(x)-(2x-3)=\frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-3)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

Donc la droite (D) d'équation $y=2x-3$ est asymptote oblique à (C).

b. Position relative de (C) par rapport à (D).

$$f(x)-(2x-3)=\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\times\ln x$$

Sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x}>0$ donc le signe de $[f(x)-(2x-3)]$ dépend de celui de $\ln x$

Or, $\ln x>0 \Leftrightarrow x>1$

et $\ln x<0 \Leftrightarrow x<1$

On en déduit que:

$[f(x)-(2x-3)]<0$ si $x<1$ donc (C) est en dessous de (D) sur $]0;1[$

$[f(x)-(2x-3)]>0$ si $x>1$ donc (C) est au dessus de (D) sur $]1;+\infty[$

$[f(x)-(2x-3)]=0$ si $x=1$ donc (C) et (D) se coupent au point d'abscisse 1.

3. a. Démontrons que pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=\left[2x-3+\frac{\ln x}{x}\right]'=(2x-3)'+\left[\frac{\ln x}{x}\right]'=2+\frac{(\ln x)'x-x'\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=2+\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=2+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{2x^2+1-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b. Les variations de f et son tableau de variation.

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

$x^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or, $\forall x\in\,]0;+\infty[\,, g(x)>0$ alors $\forall x\in\,]0;+\infty[\,, f'(x)>0$.

Donc f est strictement croissante sur $]0;-\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

c. Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=3(x-1)+(-1)=3x-3-1=3x-4$

$y=3x-4$ *est une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1*

4. a. Démontrons que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α.

f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

$f(]0;+\infty[)=]-\infty;+\infty[$ et $0\in]-\infty;+\infty[$

donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$

b. Justifions que : $1{,}3<\alpha<1{,}4$.

f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et en particulier sur $[1{,}3;1{,}4]$.

$\left.\begin{array}{l} f(1{,}3)\simeq-0{,}208 \\ f(1{,}4)\simeq0{,}014 \end{array}\right| \Rightarrow f(1{,}3)\times f(1{,}4)<0$

donc la solution unique α de l'équation $f(x)=0$ est tel que: $1{,}3<\alpha<1{,}4$

PARTIE C

On pose $\varphi(x)=f(x)-(3x-4)$ et $h(x)=-x^2+1-\ln x$

1. a. Déterminons le sens de variation de h sur $]0,+\infty[$.

$h'(x)=(-x^2+1-\ln x)'=(-x^2+1)'-(\ln x)'=-2x-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{2x^2+1}{x}$

$h'(x)=-\dfrac{2x^2+1}{x}<0\ \forall x\in]0,+\infty[$, *donc h est strictement décroissante sur* $]0,+\infty[$

b. Calcul de $h(1)$

$h(1)=-1^2+1-\ln 1=-1+1+0=0$

Justifions que : $\left|\begin{array}{l} \forall x\in]0;1[,\ \ h(x)>0; \\ \forall x\in]1;+\infty[,\ \ h(x)<0. \end{array}\right.$

Scanned by CamScanner

Tableau de signe

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
Signe de $h(x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x \in]0;1[, \quad h(x) > 0; \\ \forall x \in]1;+\infty[, \quad h(x) < 0. \end{cases}$$

2. a. Démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ \varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$

$$\varphi'(x) = \left(f(x) - (3x-4)\right)' = f'(x) - (3x-4)' = \frac{g(x)}{x^2} - 3 = \frac{g(x) - 3x^2}{x^2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{2x^2 + 1 - \ln x - 3x^2}{x^2} = \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$

b. Les variations de φ

$\varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$, $x^2 > 0$ *donc le signe de* $\varphi'(x)$ *dépend du signe de* $h(x)$

Or, $\forall x \in]0;1[, h(x) > 0 \Rightarrow \varphi'(x) > 0$ *donc* φ *est strictement croissante sur* $]0;1[$;

Et $\forall x \in]1;+\infty[, h(x) < 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0$ *donc* φ *est strictement décroissante sur* $]1;+\infty[$.

- **Le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.**

$$\varphi(1) = f(1) - (3\times1-4) = f(1) - (3\times1-4) = -1-(-1) = -1+1 = 0$$

Tableau de signe

x	0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	
Signe de $\varphi(x)$			$-$		

Donc $\forall x \in]0;+\infty[,\ \varphi(x) < 0$

Scanned by CamScanner

c. Position relative de (C) par rapport à la tangente (T).

$\forall x \in]0;+\infty[,\ \varphi(x)<0 \Rightarrow \forall x \in]0;+\infty[,\ f(x)-(3x-4)<0$

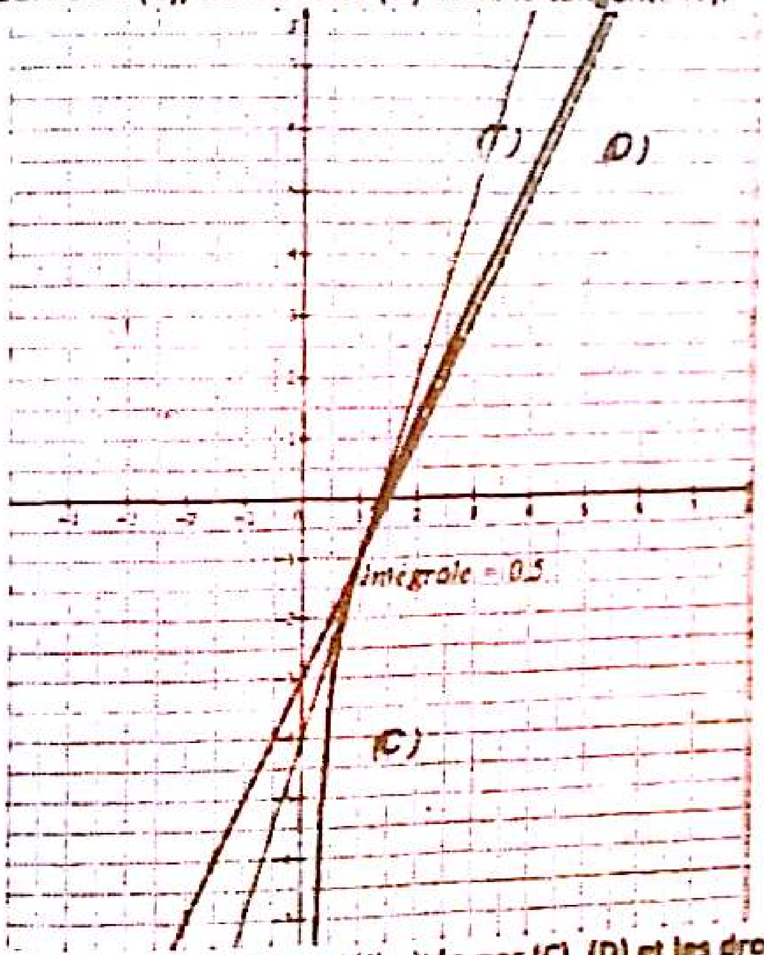
$\Rightarrow \forall x \in]0;+\infty[,\ f(x)<(3x-4)$

Donc sur $]0;+\infty[$, (C) est en dessous de sa tangente (T)

au point d'abscisse 1 qui a pour équation $y=3x-4$

PARTIE D

1. Tracé de la courbe de (C), de la droite (D) et de la tangente (T).



2. Calcul de l'aire de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites $x=1$ et $x=e$.

Soit B l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

$$B=\left|\int_1^e f(x)-(2x-3)\right|dx\cdot UA=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx\cdot UA=\int_1^e \frac{1}{x}\ln x\,dx\cdot UA=\left|\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_1^e\cdot UA$$

$$B=\left|\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}\right|\cdot UA=\left|\frac{(1)^2}{2}-\frac{(0)^2}{2}\right|\cdot UA=\frac{1}{2}\cdot UA$$

On a : $UA=2\times 2cm^2=4cm^2$

$B=\frac{1}{2}\cdot UA=\frac{1}{2}\times 4cm^2=2cm^2$

Scanned by CamScanner

Correction EXAMEN 9: Bac D Session normale 2007

EXERCICE 1

On a : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n+V_n} \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 9 \\ V_{n+1} = \dfrac{1}{2}(U_n+V_n) \end{cases}$

1. Démontrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, U_n>0$ et $V_n>0$.

$\left.\begin{array}{l} U_0 = 4>0 \\ V_0 = 9>0 \end{array}\right| \Rightarrow$ *la propriété est vraie à l'ordre 0*

On suppose que : $\forall p\in\mathbb{N}, U_p>0$ et $V_p>0$

Montrons alors que $U_{p-1}>0$ et $V_{p+1}>0$

$U_p>0$ et $V_p>0 \Rightarrow U_p+V_p>0$ et $U_p\times V_p>0$

d'où $\dfrac{2U_p\times V_p}{U_p+V_p}>0$ *donc* $U_{p+1}>0$

$U_p>0$ et $V_p>0 \Rightarrow U_p+V_p>0$

d'où $\dfrac{1}{2}(U_p+V_p)>0$ *donc* $V_{p+1}>0$

On conclue : $\forall n\in\mathbb{N}, U_n>0$ et $V_n>0$

2. a. Démontrons que : $\forall n\in\mathbb{N},\ V_{n+1}-U_{n+1} = \dfrac{(V_n-U_n)^2}{2(U_n+V_n)}$

$$V_{n+1}-U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n+V_n) - \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} = \frac{(U_n+V_n)^2-4U_nV_n}{2(U_n+V_n)}$$

$$V_{n+1}-U_{n+1} = \frac{U_n^2+V_n^2+2U_nV_n-4U_nV_n}{2(U_n+V_n)} = \frac{U_n^2+V_n^2-2U_nV_n}{2(U_n+V_n)}$$

$$V_{n+1}-U_{n+1} = \frac{(U_n-V_n)^2}{2(U_n+V_n)}$$

Scanned by CamScanner

b. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq V_n$

$\left.\begin{array}{l} U_0 = 4 \\ V_0 = 9 \end{array}\right| \Rightarrow\ U_0 \leq V_0$ donc la propriété est vraie à l'ordre 0

On suppose que $\forall p \in \mathbb{N},\ U_p \leq V_p$

Montrons alors que $\forall p \in \mathbb{N},\ U_{p+1} \leq V_{p+1}$

$$\forall p \in \mathbb{N},\ V_{p+1} - U_{p+1} = -\frac{\left(V_p - U_p\right)^2}{2\left(U_p + V_p\right)} \geq 0$$

$\Rightarrow\ V_{p+1} - U_{p+1} \leq 0$ donc $U_{p+1} \leq V_{p+1}$

On conclue: $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq V_n$

• Montrons que : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(V_n - U_n\right)$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} - U_{n+1} = -\frac{\left(V_n - U_n\right)^2}{2\left(U_n + V_n\right)} = \frac{1}{2}\left(V_n - U_n\right)\frac{\left(V_n - U_n\right)}{\left(U_n + V_n\right)}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq V_n \Rightarrow V_n - U_n \geq 0$

cependant $\forall n \in \mathbb{N}, V_n - U_n \leq V_n + U_n$

d'où $\dfrac{\left(V_n - U_n\right)}{\left(U_n + V_n\right)} \leq 1$

donc $V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(V_n - U_n\right)\dfrac{\left(V_n - U_n\right)}{\left(U_n + V_n\right)} \leq \frac{1}{2}\left(V_n - U_n\right) \times 1$

Finalement: $\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(V_n - U_n\right)$

Scanned by CamScanner

c. Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$

$V_0 - U_0 = 9-4=5 \leq \frac{5}{2^0}$ *donc la propriété est vraie à l'ordre 0*

On suppose que $\forall p \in \mathbb{N},\ V_p - U_p \leq \frac{5}{2^n}$

Montrons alors que $\forall n \in \mathbb{N},\ V_{p+1} - U_{p-1} \leq \frac{5}{2^{p+1}}$

$V_{p+1} - U_{p-1} \leq \frac{1}{2}(V_p - U_p) \Rightarrow V_{p-1} - U_{p+1} \leq \frac{1}{2} \times \frac{5}{2^p}$

$\left(\text{car on a supposé que: } V_p - U_p \leq \frac{5}{2^p}\right)$

$\Rightarrow V_{p+1} - U_{p+1} \leq \frac{5}{2^{p+1}}$ *la propriété est vraie à l'ordre n+1*

On conclue : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$

3. a. Démontrons que la suite (U_n) est croissante

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} - U_n = \frac{2U_nV_n - U_n^2 - U_nV_n}{U_n+V_n}$$

$$= \frac{U_nV_n - U_n^2}{U_n+V_n} = \frac{U_n(V_n-U_n)}{U_n+V_n}$$

$V_n > U_n \Rightarrow V_n - U_n > 0$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{U_n+V_n}(V_n - U_n) > 0$ *donc* $U_{n+1} - U_n > 0$

Finalement, (U_n) *est croissante.*

• Démontrons que la suite (V_n) est décroissante

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(U_n + V_n) - V_n = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2}V_n - V_n = \frac{1}{2}U_n - \frac{1}{2}V_n = \frac{1}{2}(U_n - V_n)$

Or $U_n \leq V_n \Rightarrow U_n - V_n \leq 0$

Donc $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(U_n - V_n) \leq 0$

Finalement, (V_n) *est décroissante.*

Scanned by CamScanner

b. Montrons que la suite (U_n) converge.

La suite (V_n) est décroissante d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n \leq V_0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq V_n \Rightarrow U_n \leq V_0 \Rightarrow (U_n)$ est majorée par V_0.

(U_n) est croissante et majorée par V_0 donc (U_n) converge.

• Montrons que la suite (V_n) converge.

La suite (U_n) est croissante d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ U_0 \leq U_n$.

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq V_n \Rightarrow U_0 \leq V_n \Rightarrow (V_n)$ est minorée par U_0.

(V_n) est décroissante et minorée par U_0 donc (V_n) converge.

c. Démontrons que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite ℓ

$V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$ *or* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{2^n} = 0$ *donc* $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n - U_n = 0$.

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Donc les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite notée ℓ.

4. a. Démontrons que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} \cdot V_{n+1} = U_n \cdot V_n$

$$U_{n+1} \cdot V_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \cdot \frac{1}{2}(U_n + V_n) = \frac{2U_nV_n\cancel{(U_n + V_n)}}{\cancel{2(U_n + V_n)}} = U_n \cdot V_n$$

b. Déterminons la valeur exacte de ℓ.

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} \cdot V_{n+1} = U_n \cdot V_n$

d'où $U_n \cdot V_n = U_{n-1} \cdot V_{n-1} = \ldots = U_1 \cdot V_1 = U_0 \cdot V_0 = 4 \times 9 = 36$

$\lim U_n \cdot V_n = 36$

Or $\lim U_n \cdot V_n = \lim U_n \cdot \lim V_n = \lim U_n \cdot \lim U_n = (\lim U_n)^2 = \ell^2$

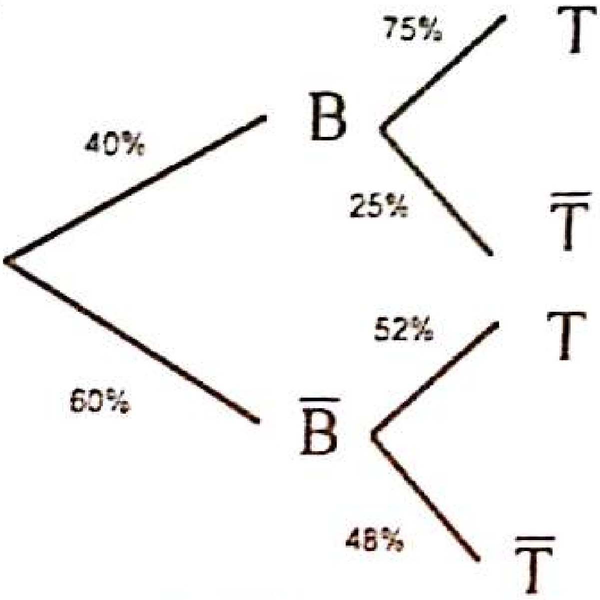
Donc $\ell^2 = 36 \Rightarrow \ell = \sqrt{36} = 6$ (car $U_n > 0$ et $V_n > 0$)

Finalement, $\lim U_n = \lim V_n = \ell = 6$

Scanned by CamScanner

EXERCICE 2

Partie A



1. Précisons chacune des probabilités suivantes :

a. $P(B)=\dfrac{40}{100}=0{,}4$

b. $P_B(T)=\dfrac{P(B\cap T)}{P(B)}=\dfrac{\frac{75}{100}\times\frac{40}{100}}{\frac{40}{100}}=\dfrac{75}{100}=0{,}75$

c. $P_B(T)=\dfrac{P(\overline{B}\cap T)}{P(\overline{B})}=\dfrac{\frac{60}{100}\times\frac{52}{100}}{\frac{60}{100}}=\dfrac{52}{100}=0{,}52$

2. $P(A)=P(B)\times P_B(T)=\dfrac{40}{100}\times\dfrac{75}{100}=\dfrac{3}{10}=0{,}3$

3. $P(T)=P(B\cap T)+P(\overline{B}\cap T)=P(B)\times P_B(T)+P(\overline{B})\times P_B(T)$

$$=0{,}3+\frac{60}{100}\times\frac{52}{100}=0{,}3+\frac{312}{1000}=0{,}3+0{,}312=0{,}612$$

4. $\left.\begin{array}{l} P_B(T)=0{,}75 \\ P(T)=0{,}612 \end{array}\right| P_B(T)\neq P(T) \Rightarrow$ *les évènements B et T ne sont pas indépendants.*

5. *Soit C :"un élève admis au test est bachelier"*

$$P(C)=\frac{P(A)}{P(T)}=\frac{0{,}3}{0{,}612}=\frac{300}{612}=\frac{25\times 12}{51\times 12}=\frac{25}{51}$$

Partie B

1. Il s'agit d'une loi binômiale telle que n = 5 ; p = 0,3 et q = 0,7

$$P(X=3)=C_5^3(0{,}3)^3(0{,}7)^2=0{,}1323$$

2. L'espérance mathématique de X est :

$$E(X)=n\times p=5\times 0{,}3=1{,}5$$

Scanned by CamScanner

PROBLEME

PARTIE A

1. $f(x)=\frac{x-3}{x+1}=\frac{x+1-4}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{4}{x+1}=1-\frac{4}{x+1}$

a. $\forall x \in D_g$ et $x \neq 0$, $g(x)=f(|\ln x|)=1-\frac{4}{|\ln x|+1}$

b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x)=f(e^x)=1-\frac{4}{e^x+1}$

2. a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-3}{x+1}=\frac{1}{1}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-3}{x+1}=\frac{1}{1}=1$

b. $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=+\infty$ car sur $]-\infty;-1[$, $x+1<0$ et $\lim\limits_{x\to-1} x-3=-4<0$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-\infty$ car sur $]-1;+\infty[$, $x+1>0$ et $\lim\limits_{x\to-1} x-3=-4<0$

3. $f'(x)=\left(\frac{x-3}{x+1}\right)'=\frac{1\times1-1\times(-3)}{(x+1)^2}=\frac{1+3}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$, $f'(x)=\frac{4}{(x+1)^2}>0$.

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

PARTIE B

1. a. $g(0)=1$

$\lim\limits_{x\to0} g(x)=1$ *car* $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to0}\frac{4}{|\ln x|+1}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0} g(x)=g(0)$ *donc g est continue en 0.*

b. $\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{1-\frac{4}{|\ln x|+1}-1}{x}=\frac{-\frac{4}{|\ln x|+1}}{x}=\frac{-4}{x|\ln x|+x}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-4}{x|\ln x|+x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=-\infty$

donc (C_g) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

Scanned by CamScanner

2 a $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{4}{(\ln x)+1} = 1$ car $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{(\ln x)+1} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$ donc la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à (Cg) en $+\infty$

b. $\lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ <}} 1 - \frac{4}{(\ln x)+1} = +\infty$

car $\left| \begin{array}{l} \lim_{x \to \frac{1}{e}} (\ln x)+1 = 0 \\ \lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ <}} \frac{4}{(\ln x)+1} = -\infty \text{ car } (\ln x)+1 < 0 \text{ si } x < \frac{1}{e} \end{array} \right.$

$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ >}} 1 - \frac{4}{(\ln x)+1} = -\infty$

car $\left| \begin{array}{l} \lim_{x \to \frac{1}{e}} (\ln x)+1 = 0 \\ \lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ >}} \frac{4}{(\ln x)+1} = +\infty \text{ car } (\ln x)+1 > 0 \text{ si } x > \frac{1}{e} \end{array} \right.$

$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ <}} g(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to \frac{1}{e} \\ >}} g(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $x = \frac{1}{e}$ est asymptote verticale à (Cg)

3. $g'(x) = \left(1 - \frac{4}{(\ln x)+1}\right)' = \left(-\frac{4}{(\ln x)+1}\right)' = -4 \times \frac{-(\ln x+1)'}{(\ln x+1)^2}$

$g'(x) = -4 \times \frac{-\left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x+1)^2} = 4 \times \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln x+1)^2} = \frac{4}{x(\ln x+1)^2}$

$\forall x \in \left]0; \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$, $g'(x) = \frac{4}{x(\ln x+1)^2} > 0$

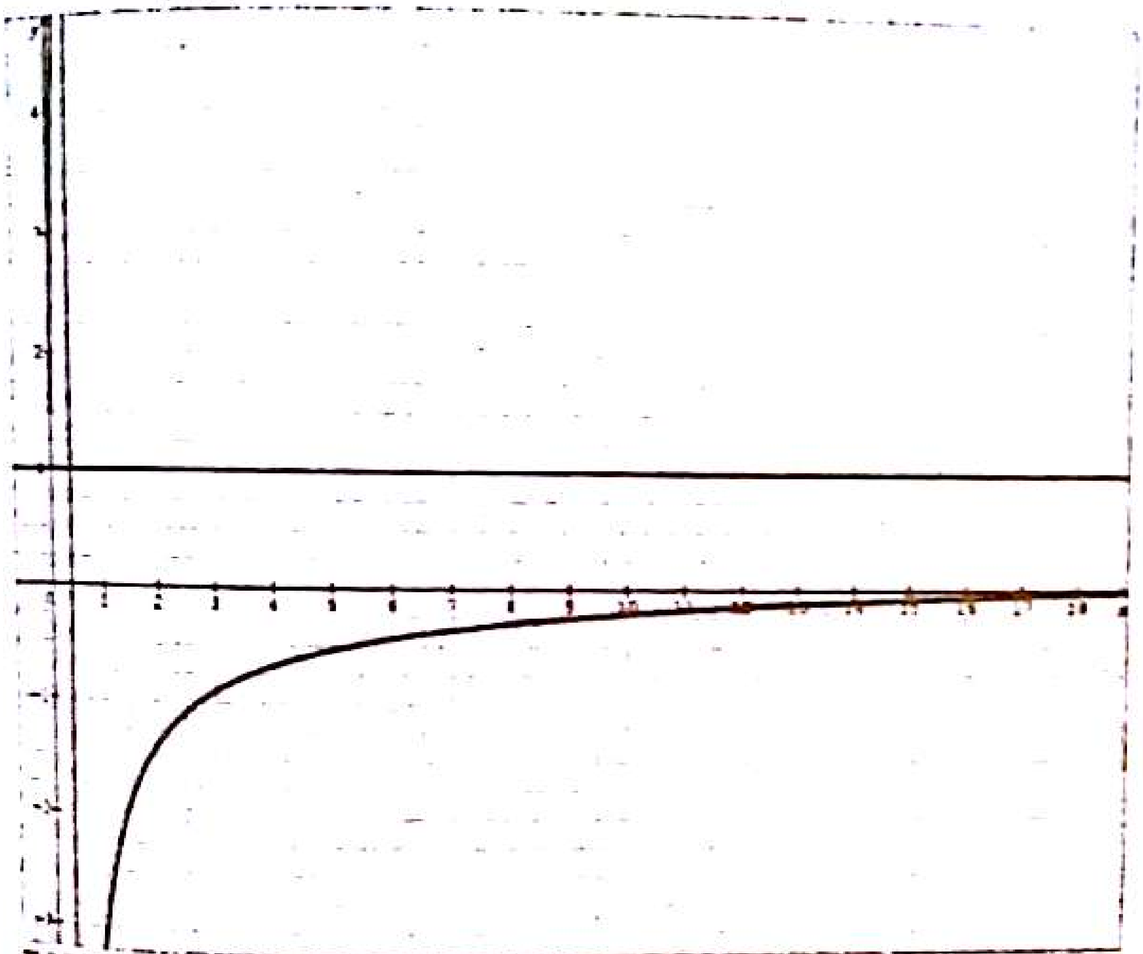
Donc g est strictement croissante sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$

Scanned by CamScanner

Tableau de variation

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

4. Tracé de (C_g) et ses asymptotes dans le repère R_1.



PARTIE C

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} H(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{4}{e^x+1}=-3$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{e^x+1}=4$

$\lim\limits_{x\to-\infty} H(x)=-3 \Rightarrow$ *la droite d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à (C_h)*

$\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{4}{e^x+1}=1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x+1}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)=1 \Rightarrow$ *la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à (C_h)*

2. $h'(x)=\left(1-\frac{4}{e^x+1}\right)'=\left(-\frac{4}{e^x+1}\right)'=-4\times\frac{-(e^x+1)'}{(1+e^x)^2}=\frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$

Scanned by CamScanner

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variation de h.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	-3 ↗	1

4. a. Déterminons les coordonnées de chacun des points A et B.

- A point d'intersection de (C_h) avec la droite $(OI) \Leftrightarrow h(x_A) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{4}{e^{x_A}+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{e^{x_A}+1} = 1 \Leftrightarrow e^{x_A}+1 = 4 \Leftrightarrow e^{x_A} = 3 \Leftrightarrow x_A = \ln 3$$

$x_A = \ln 3$ et $h(x_A) = 0 \Rightarrow A(\ln 3\ ;\ 0)$

- B point d'intersection de (C_h) avec la droite $(OJ) \Leftrightarrow x_B = 0$

$$y_B = h(x_B) = h(0) = 1 - \frac{4}{e^0+1} = 1 - \frac{4}{1+1} = 1 - \frac{4}{2} = 1 - 2 = -1$$

$x_B = 0$ et $h(x_B) = -1 \Rightarrow B(0\ ;-1)$

b. Equation de la tangente (T) à (C_h) en B.

$y = h'(x_B)\cdot(x - x_B) + h(x_B)$ avec $h(x_B) = y_B = -1$ et $h'(x_B) = h'(0) = 2$

D'où (T): $y = 2(x-0) + (-1) = 2x - 1$

c. Démontrons que B (0 ; 1) est un centre de symétrie de (C_h).

$\forall x \in \mathbb{R}$, $0 - x = -x \in D_h = \mathbb{R}$ et $0 + x = x \in D_h = \mathbb{R}$

$$h(0+x) = h(x) = 1 - \frac{4}{e^x+1} = \frac{e^x+1-4}{e^x+1} = \frac{e^x-3}{e^x+1}$$

$$h(0-x) = h(-x) = 1 - \frac{4}{e^{-x}+1} = \frac{e^{-x}+1-4}{e^{-x}+1} = \frac{e^{-x}-3}{e^{-x}+1}$$

$$h(0+x) + h(0-x) = \frac{e^x-3}{e^x+1} + \frac{e^{-x}-3}{e^{-x}+1} = \frac{e^0 + e^x - 3e^{-x} - 3 + e^0 + e^{-x} - 3e^x - 3}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$$

$$= \frac{1 - 2e^{-x} - 3 + 1 - 2e^x - 3}{e^0 + e^x + e^{-x} + 1} = \frac{-2e^{-x} - 2e^x - 4}{1 + e^x + e^{-x} + 1} = \frac{-2(e^{-x} + e^x + 2)}{(2 + e^x + e^{-x})}$$

Scanned by CamScanner

$h(0+x)+h(0-x)=-2$

$\frac{h(0+x)+h(0-x)}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \Rightarrow B(0;-1)$ est centre de symétrie de (C_h)

5. a. *h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$*

donc h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $h(]-\infty;+\infty[)=]-3;1[$

b. *Pour déterminer l'expression explicite de la bijection réciproque h^{-1} de h, on résoud l'équation: $h(x)=y$*

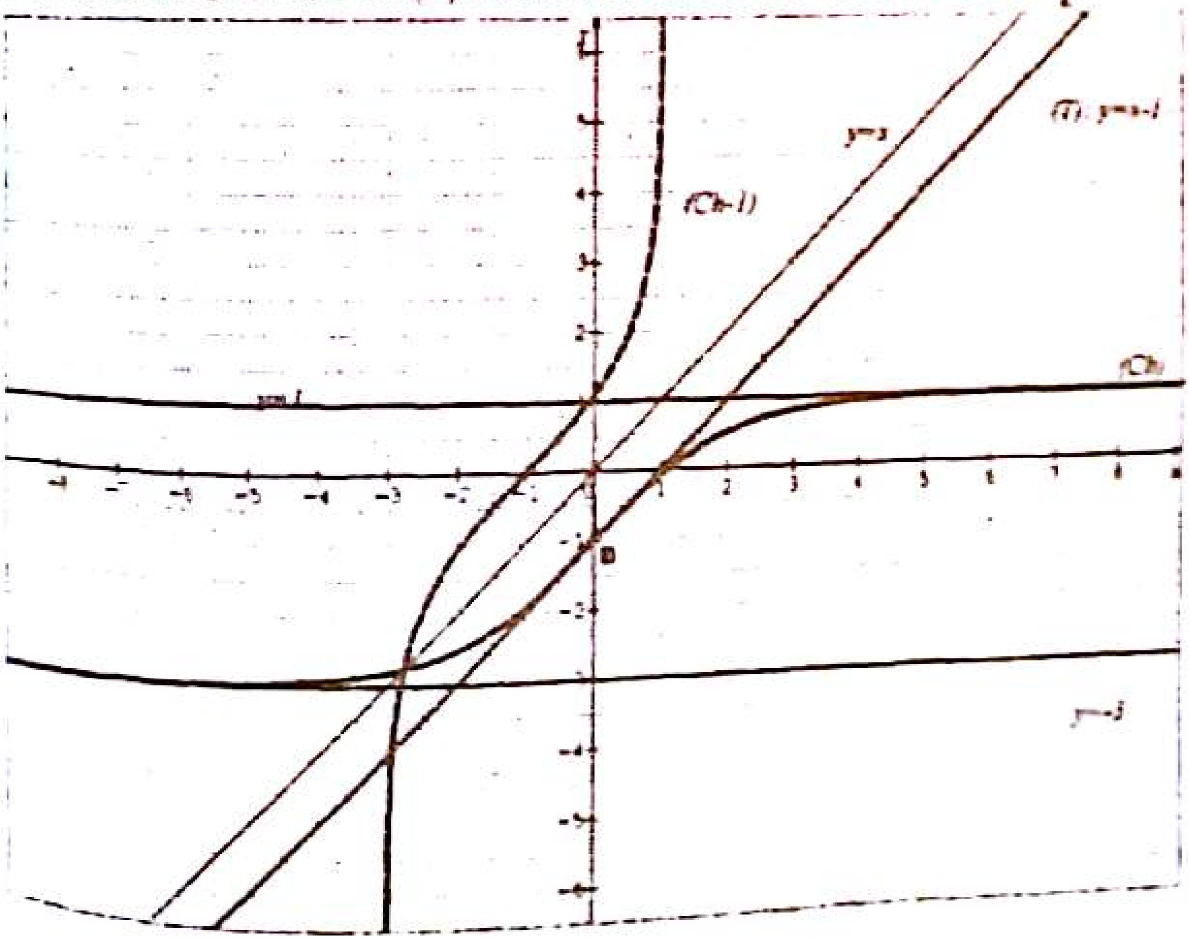
$$h(x)=y \Leftrightarrow 1-\frac{4}{e^x+1}=y \Leftrightarrow \frac{4}{e^x+1}=1-y \Leftrightarrow \frac{e^x+1}{4}=\frac{1}{1-y}$$

$$\Leftrightarrow e^x+1=\frac{4}{1-y} \Leftrightarrow e^x=\frac{4}{1-y}-1 \Leftrightarrow e^x=\frac{3+y}{1-y}$$

$$\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{3+y}{1-y}\right) \text{ d'où } \forall x\in]-3;1[,\ h^{-1}(x)=\ln\left(\frac{3+x}{1-x}\right)$$

6. Tracé de (T), (C_h) et ses asymptotes dans le repère R_2.

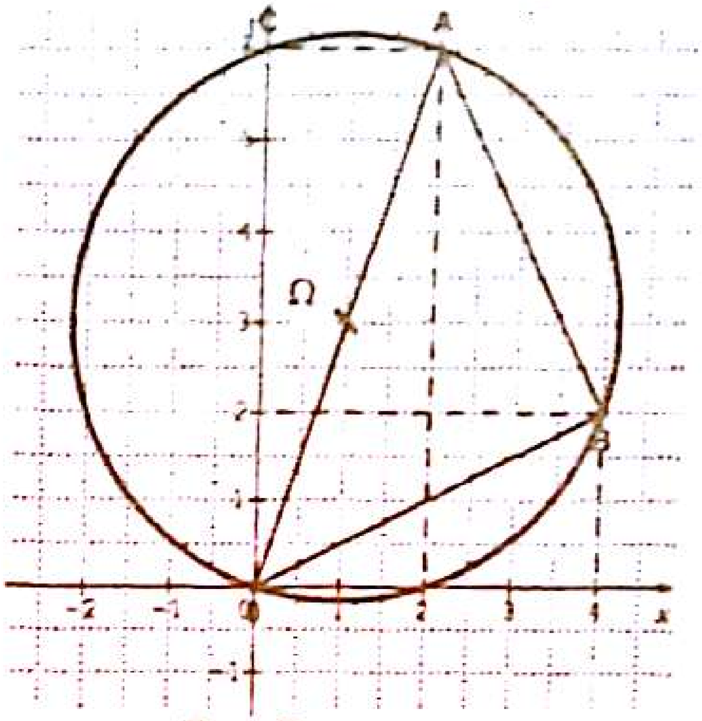
Représentation graphique de (Γ) courbe de la fonction h^{-1} dans le repère R_2.



Correction EXAMEN 10: Bac D Session normale 2006

EXERCICE 1

1. Placé des points A, B et C tels que $Z_A = 2 + 6i$; $Z_B = 4 + 2i$; $Z_C = 6i$.



2\. a. Forme algébrique de $Z = \dfrac{Z_O - Z_A}{Z_B - Z_A}$.

$$Z = \frac{Z_O - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{0-(2+6i)}{(4+2i)-(2+6i)} = \frac{-2-6i}{4+2i-2-6i} = \frac{-2-6i}{2-4i}$$

$$Z = \frac{(-2-6i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \frac{(-2-6i)(2+4i)}{20} = \frac{20-20i}{20} \Rightarrow Z = 1-i$$

b. Forme trigonométrique de Z.

$$Z = 1-i \Rightarrow |Z| = |1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

Soit θ un argument de Z. on a:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \quad \theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow Z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Scanned by CamScanner

c. Mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$.

$$mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \arg\left(\frac{z_O - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg Z = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$

3. Soit r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

a. Écriture complexe de r.

$f(z) = az + b$

$a = e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$ (en effet, pour une rotation, $k = 1$)

$f(z_B) = z_B \Leftrightarrow az_B + b = z_B$ (B étant le centre de la rotation, B est invariant par r)

$$\Leftrightarrow b = z_B - az_B = z_B(1-a) = (4+2i)(1-(-i)) \Leftrightarrow b = (4+2i)(1+i) = 2+6i$$

Finalement : $f(z) = -iz + 2 + 6i$

b. L'image de O par r.

$f(z) = -iz + 2 + 6i \Rightarrow f(z_O) = -iz_O + 2 + 6i = -i \times 0 + 2 + 6i = 2 + 6i = z_A$

On en déduit que l'image de O par la rotation r est le point $A(2+6i)$

c. En déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en B.

r est la rotation de centre B qui transforme le point O en le point A $\Rightarrow BO = BA$ donc OAB est un triangle isocèle en B. (1)

r une rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme le point O en le point A

$\Rightarrow mes(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow (BO) \perp (BA)$ donc OAB est un triangle rectangle en B. (2)

Finalement, le triangle OAB est rectangle et isocèle en B.

4. a. Le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle OAB.

Le triangle OAB étant rectangle en B, son hypoténuse [OA] est le diamètre du cercle circonscrit.

Le centre du cercle (C) est donc le milieu de [OA].

Soit Ω le centre du cercle (C) et z_Ω son affixe.

$$z_\Omega = \frac{z_O + z_A}{2} = \frac{0 + 2 + 6i}{2} = 1 + 3i \Rightarrow \Omega(1;3)$$

Soit R le rayon de (C).

R est la moitié de la longueur OA puisque [OA] est le diamètre de (C).

$$R = \frac{OA}{2} = \frac{|z_A - z_O|}{2} = \frac{|2+6i|}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$$

Construction de (C). (Voir figure précédente)

Scanned by CamScanner

b. Démontrer que les points O, A, B et C appartiennent à un même cercle.

1ère méthode :

On montre que le point C appartient également au cercle (C) circonscrit au triangle OAB.

Vérifions pour cela que la distance ΩC est égale à $\sqrt{10}$, le rayon du cercle (C).

$$\Omega C = |z_C - z_\Omega| = |(6i) - (1+3i)| = |-1-3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

Le point C appartient au cercle (C) circonscrit au triangle OAB donc les points O, A, B et C sont cocycliques.

2ème méthode : On montre que $\frac{Z_O - Z_B}{Z_A - Z_B} : \frac{Z_O - Z_C}{Z_A - Z_C} \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{Z_O - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{0-(4-2i)}{(2-6i)-(4+2i)} = \frac{-4-2i}{-2+4i} = \frac{-2-i}{-1+2i}$$

$$\frac{Z_O - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{(-2-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{5i}{5} = i$$

$$\frac{Z_O - Z_C}{Z_A - Z_C} = \frac{0-(6i)}{(2-6i)-(6i)} = \frac{-6i}{2} = -3i$$

$$\frac{Z_O - Z_B}{Z_A - Z_B} : \frac{Z_O - Z_C}{Z_A - Z_C} = i : -3i = \frac{i}{-3i} = -\frac{1}{3} \in \mathbb{R}^*$$

Donc les points O, A, B et C sont cocycliques.

EXERCICE 2

Partie A

1. Nombre de cartes magnétiques que la banque peut distribuer à ses clients.

Dans un numéro de cartes magnétiques, l'ordre est important et on peut répéter les chiffres.

Il s'agit donc d'une liste de 4 éléments pris parmi les 10 chiffres du système décimal.

$card\,\Omega = 10^4$ cartes.

2. Probabilité pour que le code d'une carte magnétique commence par 0.

Un code peut commencer par un des 10 chiffres du système décimal.

Le tirage étant équiprobable, il y a une chance sur 10 que le code commence par 0.

D'où la probabilité $\frac{1}{10}$

3. Probabilité pour que le code d'une carte magnétique soit composée des chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7.

Le nombre de cartes dont le code est constitué uniquement des chiffres 2 ; 4 ; 5 ; et 7 est $card\,A = 4! = 24$ Car il s'agit d'une permutation des 4 chiffres.

Scanned by CamScanner

La probabilité est donc : $P=\frac{card\,A}{card\,\Omega}=\frac{24}{10^4}=\frac{3}{1250}$

Partie B

1. Calcul de la probabilité de chacun des évènements suivants :

a. E : « Monsieur KONE réussit à retirer de l'argent au premier essai »

Le nombre de codes possibles est : $card\,\Omega'=4!=24$ codes.

La probabilité de retirer de l'argent au premier essai est donc $P(E)=\frac{card\,E}{card\,\Omega}=\frac{1}{24}$

b. F : « Monsieur KONE échoue au premier essai et réussit au deuxième essai ».

Il échoue au premier essai avec une probabilité $P_1=\frac{23}{24}$

Au second essai, il réussit avec une probabilité $P_2=\frac{1}{23}$

Finalement, on a : $P(F)=P_1\times P_2=\frac{23}{24}\times\frac{1}{23}=\frac{1}{24}$ *(théorème de la multiplication).*

2. G : « Monsieur KONE retire de l'argent ».

$G=E\cup F$ avec E et F incompatibles donc $P(G)=P(E)+P(F)=\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$

3. Calcul de la probabilité qu'il ait effectué le retrait au premier essai.

Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle de faire un retrait au premier essai sachant que le retrait a eu lieu.

$$P_G(E)=\frac{P(E\cap G)}{P(G)}=\frac{P(E)}{P(G)}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{12}}=\frac{1}{24}\times\frac{12}{1}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}.$$

4. Valeurs prises par la variable aléatoire X, qui détermine la taxe totale à payer sur l'ensemble des essais faits par Monsieur KONE.

- 30 francs : retrait dès le premier essai.
- 90 francs : échec au premier essai (60 frs) et retrait au deuxième essai (30 frs).
- 120 francs : échec aux deux essais (60 frs + 60 frs).

Les valeurs prises par X sont donc : **X = {30 ; 90 ; 120}**

a. La loi de probabilité de X.

$P(X=30)=P(E)=\frac{1}{24}$;

$P(X=90)=P(F)=\frac{1}{24}$;

$P(X=120)=1-P(G)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}=\frac{22}{24}$

X	30	90	120	Total
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{22}{24}$	1

Scanned by CamScanner

b. Espérance mathématique de X.

$$E(X)=30\times\frac{1}{24}+90\times\frac{1}{24}+120\times\frac{22}{24}$$

$$E(X)=\frac{30+90+2640}{24}$$

$$E(X)=\frac{2760}{24}=115$$

PROBLEME

PARTIE A

1. Les limites de g en 0 et en $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} x^2-\ln x-1=+\infty \quad car \text{ [illegible]}$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty} x^2-\ln x-1=\lim_{x\to +\infty} \text{[illegible]}$$

$$car \begin{cases} \lim_{x\to +\infty} x=+\infty \\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}=0 \end{cases}$$

2. Calcul de $g'(x)$: $g'(x)=(x^2-\ln x-1)'=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$

3. Etude des variations de g et tableau de variation.

$$g'(x)=\frac{2x^2-1}{x}=\frac{(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}{x}=\frac{(\sqrt{2}x+1)}{x}(\sqrt{2}x-1)$$

$\forall x\in]0;+\infty[,\ \frac{(\sqrt{2}x+1)}{x}>0$ donc le signe de $g'(x)$ est le même que le signe de $(\sqrt{2}x-1)$.

Or, $(\sqrt{2}x-1)>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

On en déduit que :

$\forall x\in\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[,\ g'(x)<0$ donc g est strictement décroissante sur $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$\forall x\in\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[,\ g'(x)>0$ donc g est strictement croissante sur $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

$\forall x\in\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\},\ g'(x)=0$

Scanned by CamScanner

D'où le tableau de variation ci-dessous :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}(1-\ln 2)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a. Démontrons que l'équation $g(x)=0$ admet deux solutions sur $]0;+\infty[$.

$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}(1-\ln 2)\approx -0{,}1534$

• g est continue et strictement décroissante sur $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

$g\left(\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\right)=\left]g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right);+\infty\right[$ et $0\in\left]g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right);+\infty\right[$ car $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0$

donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution sur $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

• g est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

$g\left(\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[\right)=\left]g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right);+\infty\right[$ et $0\in\left]g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right);+\infty\right[$ car $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<0$

donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution sur $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$

Finalement, l'équation $g(x)=0$ admet 2 solutions sur $]0;+\infty[$

α est la solution appartenant à $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

b. Démontrons que $0{,}4<\alpha<0{,}5$.

g est continue et strictement décroissante sur $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et en particulier sur $[0{,}4;0{,}5]$

$\left.\begin{array}{l} g(0{,}4)=0{,}076 \\ g(0{,}5)=-0{,}057 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0{,}4)\times g(0{,}5)<0$

donc $0{,}4<\alpha<0{,}5$

Scanned by CamScanner

5. Position de (D) par rapport à (C).

$f(x)-x=x+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}-x=\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}=\frac{2+\ln x}{x}$

sur $]0;+\infty[$, $x>0$ donc le signe de $f(x)-x$ dépend de celui $2+\ln x$

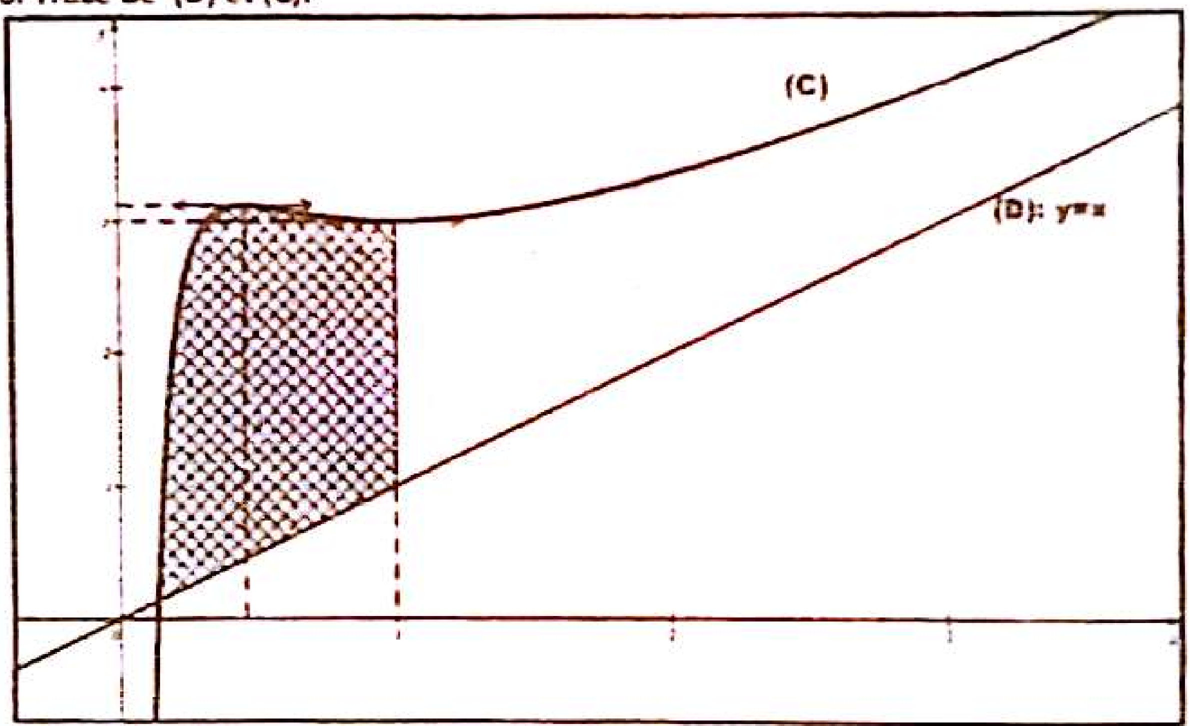
• $f(x)-x>0 \Leftrightarrow \frac{2-\ln x}{x}>0 \Leftrightarrow 2+\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>-2 \Leftrightarrow x>e^{-2}$

(C) est au − dessus de (D) sur $]e^{-2};+\infty[$

• $f(x)-x<0 \Leftrightarrow \frac{2-\ln x}{x}<0 \Leftrightarrow 2-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x<-2 \Leftrightarrow x<e^{-2}$

(C) est en dessous de (D) sur $]0;e^{-2}[$

6. Tracé de (D) et (C).



7. A est l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations respectives $x=e^{-2}$ et $x=1$. Calcul de A.

$$A=\int_{e^{-2}}^{1}(f(x)-y)dx=\int_{e^{-2}}^{1}\left(\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx.UA=\int_{e^{-2}}^{1}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x}\times\ln x\right)dx.UA$$

$$A=\left[2\ln x+\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_{e^{-2}}^{1}.UA=\left[2\ln 1+\frac{1}{2}(\ln 1)^2-\left(2\ln e^{-2}+\frac{1}{2}(\ln e^{-2})^2\right)\right].UA$$

$$A=\left[0+0-\left(2\times(-2)+\frac{1}{2}(-2)^2\right)\right]UA=\left[-(-4+2)\right]UA=2\times UA$$

$A=2\times 8cm^2=16\ cm^2$

Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

Les éditions Matrice, Novembre 2015
© ISBN : 978-2-36553-025-5
EAN : 9782365530255
Tous droits réservés pour tous pays.

Dépôt légal : N° 12257 du 28 Juillet 2015

Les éditions Matrice
23 BP 2605 Abidjan 23
(00225) 20 01 08 72
03 07 20 90 / 07 25 49 25

Email: matrice.editions@gmail.com
Site web: www.topmatrice.com
Achevé d'imprimer sur les presses des Editions Matrice à Abidjan le 30 Novembre 2015

Maths BAC D

YAO Denis

Le "TOP CHRONO" est notre collection d'annales d'exercices corrigés avec méthodes de résolution, rappels de cours et sujets d'examen résolus. Cette collection couvre la classe de CM2 et les classes du secondaire de la sixième à la terminale dans toutes les séries, dans les principales matières des programmes (Mathématiques, Physique et Chimie, Sciences de la Vie et de la Terre, Philosophie, Français, Histoire et Géographie, Anglais, Espagnol, Allemand, EDHC).

Autres Collections

Le "COURS MAGISTRAL" est notre collection de manuels de cours [illegible] d'applications [illegible] progressive de savoirs et savoir-faire. Cette collection vous aide à maîtriser vos cours et vous permet de vous préparer efficacement en vue d'affronter sereinement vos interrogations écrites, vos devoirs, vos examens et concours.

Le "TOP EXPRESS" est une collection de [illegible] et d'aide-mémoire vous permettant de faire la revue complète de tout le programme de l'examen en un clin d'œil.

Le "CHRONOMAITRE" est une collection de cahiers d'apprentissage et de répétition. Cette collection, destinée aux élèves des classes du CP1 à la terminale, permet un suivi quotidien de l'acquisition des savoirs et savoir-faire par l'apprenant.

"EDEN" est une collection de la littérature [illegible]. Dans cette collection [illegible] l'Amour [illegible].

"BOUSSOLE" est une collection de [illegible].

Dans la même collection :

Tout document non estampillé est un faux avec un contenu douteux. Tout détenteur de ce document est passible de poursuite judiciaire.

ISBN : [illegible]

Les Éditions Matrice

Annales corrigées 2016

Scanned by CamScanner