EXERCICES

Exercice 1 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{Un}{2+Un^2} \end{cases}$$

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $Un > 0$

2°/ a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} U_n$

b) Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N} : \; Un \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3°/Montrer que (U_n) est convergente vers 0

4°/Soit $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

a) Montrer que (S_n) est croissante

b) Montrer que $S_n \leq 2\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

c) En déduire que (S_n) est convergente vers un réel $\ell \in [1,2]$

Exercice 2 :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{1+U_n^{\,2}} \end{cases}$$

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < U_n < 1$

2°/

a) Montrer que (U_n) est une suite croissante

b) Montrer que (U_n) est convergente

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n$

3°/ $V_n = \dfrac{1-U_n}{1+U_n}$

a) Montrer que : $V_{n+1} = V_n^2$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$

4°/

a) Montrer que $0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \frac{4}{5}(1 - U_n)$

b) Montrer que $0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) Montrer que Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 - \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} U_K}{n} \leq 1$$

Exercice 3 :

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que $U_n = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{p^2}\right)$

1°/ Calculer U_1 et U_2

2°/ Montrer que (U_n) est croissante

3°/ Montrer que

a) Pour tout $p \geq 2$: $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$

b) En déduire que (U_n) est majorée

4°/ Montrer que (U_n) est convergente .

Exercice 4 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}$.

1°/ Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.

2°/ Etudier la monotonie de (u_n).

3°/ On pose $v_n = u_n^2$.

a) Prouver que (v_n) est une suite arithmétique.

b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

4°/ Etudier ainsi la convergence de (u_n) .

Exercice 5 :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$u_1 = \dfrac{5}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3 - \dfrac{n}{2(n+1)} \cdot (3 - u_n)$.

1°/ Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 3$.

2°/a) Justifier que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}(3 - u_n)$.

b) Etudier ainsi la monotonie de (u_n).

3°/ Montrer que (u_n) est convergente.

4°/ On pose $v_n = n(3 - u_n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Prouver que (v_n) est une suite géométrique.

b) Calculer v_n en fonction de n.

5°/a) En déduire le terme général de (u_n) .

b) Calculer ainsi la limite de (u_n) .

Exercice 6 :

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

1°/Calculer u_1 et v_1.

2°/On pose pour tout entier n : $w_n = u_n - v_n$.

a) Prouver que (w_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.

3°/a) Etudier la monotonie de chacune des suites (u_n) et (v_n).

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et $v_n \leq 2$.

c) Justifier que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

4°/ On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = u_n + v_n$.

a) Prouver que (a_n) est une suite constante.

b) Calculer alors l.

5°/ Exprimer en fonction de n, le terme général de (u_n) et (v_n).

Exercice 7 :

Soient les suites tels que : $U_0 = 1$ et $V_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

1°/ Démontrer que $0 < U_n < V_n$.

2°/ a) Démontrer que (U_n) est une suite croissante et que (V_n) est une suite décroissante.

b) Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes vers la même limite l.

3°/ a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \cdot V_n = 2$.

b) En déduire la valeur de l.

Exercice 8 :

Soient les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définis par :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et } V_n = U_n + \frac{1}{n!}$$

1°/ Montrer que (U_n) est une suite croissante et que (V_n) est une suite décroissante.

2°/ Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_p \le V_q$.

3°/ Montrer en utilisant le 2°/ que (U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes vers la même limite.

Exercice 9 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_0 = 1\ ,\ U_1 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$$

1°/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \dfrac{1}{2^{2n}}$

2°/ Soit $n \in \mathbb{N}$ et V $V_n = (n+1) U_n U_{n+1}$.

Montrer que (V_n) est une suite constante.

3°/ Exprimer U_{2n-1} en fonction de n.

Exercice 10 :

Soit la suite $(U_n)_{n\in N^*}$ définie par : $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^3+k}$.

1°/ Calculer U_1 et U_2.

2°/ Démontrer que $\forall n \in N^*$, $\frac{n+1}{n^2+1} \leq U_n \leq \frac{1+n}{n^2}$.

3°/ Démontrer que $(U_n)_{n\in N^*}$ converge vers 0.

Exercice 11 :

1°/ Démontrer que $\forall x > 0$, $\forall n \geq 2$ on a : $(1+x)^n > C_n^2 x^2$.

2°/ Soit la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par $U_n = \frac{n+1}{2^n}$.

a) Prouver que $\forall n \leq 2$, $U_n \leq \frac{2(n+1)}{n^2-n}$.

b) Etudier ainsi la convergence de (U_n).

Exercice 12 :

1°/ Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

2°/ Montrer que $\forall n \in N$, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3°/ Soit la suite (U_n) définie par : $U_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{\alpha k}{n^2})$ où α est un paramètre réel ≥ 0.

Prouver en utilisant le 1°/ que :

$$\forall n \geq 1 \text{ on a : } \frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4} \leq U_n(\alpha) \leq \alpha\frac{n+1}{2n}$$

4°/ En déduire que $(U_n(\alpha))$ converge vers $\frac{\alpha}{2}$.

5°/ Soit la suite $V_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^3(\frac{k}{n^2})$; $(n \geq 1)$

a) Etablir que $\forall x \in R$ on a : $\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$.

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ On a : $U_0 = 1 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 0$, montrons que $U_{n+1} > 0$

On a : $U_{n+1} = \dfrac{Un}{2+Un^2} > 0$

Conclusion : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n > 0$

2°/

a) $U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n = \dfrac{Un}{2+Un^2} - \dfrac{1}{2}U_n = \dfrac{2U_n - 2U_n - U_n^3}{2(2+U_n^2)} = \dfrac{-U_n^{\ 3}}{2+U_n^{\ 2}} < 0$

D'où pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}U_n$

b) Pour n = 0 , on a : $U_0 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$

$1 \leq 1$ vraie

Soit $n \in \mathbb{N}$: et $U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; Montrons que $U_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a : $U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \dfrac{1}{2}U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

Or : $U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}U_n$ D'où : $U_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

Conclusion : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3°/ On a : $\begin{cases} 0 < U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \left(\dfrac{1}{2} \in]-1,1[\right) \end{cases}$

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

4°/ a) $S_{n+1} - S_n = (U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_{n+1}) - (U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n)$
$= U_{n+1} > 0$

D'où : (S_n) est croissante .

b) On a : $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où : $S_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

D'où : $S_n \leq 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

c) On a : $S_n \leq 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 2$

$\begin{cases} (S_n) \text{ est une suite croissante} \\ (S_n) \text{ est majorée par 2} \end{cases}$ D'où (S_n) est convergente

On note $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} S_n$

on a : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n > U_0$ car $U_n > 0$

d'où : $S_n > 1$ et par suite $\ell \geq 1$

on a : $S_n \leq 2$ d'où $\ell \leq 2$

conclusion : $1 \leq \ell \leq 2$

Solution 2 :

1°/ On a : $U_0 = \frac{1}{2}$ d'où $0 < u_0 < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < U_n < 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 1$

On a : $U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{U_n^2+1} > 0$ car $U_n > 0$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{2U_n}{U_n^2+1} - 1 = \frac{2U_n - U_n^2 - 1}{Un^2+1} = \frac{-(U_n-1)^2}{U_n^2+1} < 0$$

D'où : $0 < U_{n+1} < 1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < U_n < 1$.

2°/

a) $U_{n-1} - U_n = \dfrac{2U_n}{U_n^{\,2}+1} - U_n \quad = \dfrac{U_n(1-U_n^2)}{1+U_n^{\,2}}$

On a : $0 < U_n < 1$ d'où : $(1 - U_n^2) > 0$

Et par suite : $U_{n+1} - U_n > 0$

Conclusion : (U_n) est une suite croissante

b) $\begin{cases} (Un) \text{ est une suite croissante} \\ (Un) \text{ est majorée par } 1 \end{cases}$

d'où (U_n) est convergente

c) Soit $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} U_n$

$U_{n+1} = f(U_n)$ où $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

f est continue sur $\mathbb{R}$

D'où : $\ell = f(\ell)$ et par suite

$\ell = \dfrac{2\ell}{1+\ell^2}$ d'où $\ell^3 + \ell = 2\ell$ signifie : $\ell = 0 ou\ \ell = 1 ou\ \ell = -1$

On a : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ (U_n) \text{est croissante} \end{cases}$ alors $U_n \geq \dfrac{1}{2}$ or $U_n < 1$

d'où $\dfrac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ et par suite $\dfrac{1}{2} \leq \ell < 1$

Conclusion : $\ell = 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3°/

a) $V_{n+1} = \dfrac{1-U_{n+1}}{1+U_{n+1}} = \dfrac{1-\dfrac{2U_n}{1+U_n^2}}{1+\dfrac{2U_n}{1+U_n^2}} = \dfrac{1+U_n^2-2Un}{1+U_n^2+2U_n} = \left(\dfrac{1-U}{1+U_n}\right)^2 = V_n^2$

b) $V_0 = \dfrac{1-U_0}{1+U_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{(2^n)}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$ Montrons que : $V_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^{n+1})}$

On a : $V_{n+1} = V_n^2 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}\right]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)\times 2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^{n+1})}$

Conclusion : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$

4°/

a) On a : $U_{n+1} < 1$ d'où : $1 - U_{n+1} > 0$

$$1 - U_{n+1} = 1 - \frac{2U_n}{1+U_n^2} = \frac{(1-U_n)^2}{1+U_n^2}$$

$$(1 - U_{n+1}) - \frac{4}{5}(1 - U_n) = \frac{(1-U_n)^2}{1+U_n^2} - \frac{4}{5}(1 - U_n)$$

$$= (1 - U_n)\left[\frac{1-U_n}{1+U_n^2} - \frac{4}{5}\right] = (1 - U_n)\left(\frac{5-5U_n-4-4U_n^2}{5(1+U_n)}\right)$$

$$= \frac{(1-U_n)(1-5U_n-4U_n^2)}{5(1+U_n)}$$

Soit $P(x) = -4x^2 - 5x + 1$

$\Delta = 25 + 16 = 41$

$x' = \frac{5-\sqrt{41}}{-8}$; $x'' = \frac{5+\sqrt{41}}{-8}$

x		x''		x'	
P(x)	-	0	+	0	-

Or $U_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ d'où : $1 - 5U_n - 4U_n^2 < 0$

$(x' < \frac{1}{2} < 1)$ et par suite $0 < 1 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(1 - U_n)$

b) Soit n = 0

$$0 \leq 1 - U_0 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^0 \quad \text{vraie car on a : } U_0 = \frac{1}{2}$$

Soit n $\in \mathbb{N}$, supposons que : $0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ et montrons que :

$$0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

On a : $0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow 0 \leq \frac{4}{5}(1 - U_n) \leq \frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 1\text{-}\ U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^k$

c) On a : $0 \leq 1 - U_k \leq \left(\frac{4}{5}\right)^k$ pour tout k $\in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} U_k \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^k \Rightarrow 0 \leq n - \sum_{k=1}^{n} U_k \leq \frac{4}{5}\,\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq n - \sum_{k=1}^{n} U_k \leq 4\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$$

Et par suite : $1 - \frac{4}{n}\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} U_K}{n} \leq 1$

Solution 3 :

1°/ $$U_1 = \sum_{p=1}^{1}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$U_2 = \sum_{p=1}^{2}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$$

2°/ $$U_{n+1} - U_n = \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

D'où (U_n) est une suite croissante

3°/

a) • $$\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{(p-1)p}$$

• $$\frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p-1)p} = \frac{(p-1)-p}{p^2(p-1)} = \frac{-1}{p^2(p-1)}$$

D'où : $$\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

b) On a : $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$ pour tout $p \geq 2$

D'où : $\forall n \geq 2$ on a :

$$\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p^2} \leq \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p-1} - \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}$$

$$U_n - 1 \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)$$

$$U_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n}$$

$$U_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$$

$\Rightarrow$ (U_n) est majorée par 2

4°/ $\begin{cases} (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ (U_n) \text{ est majorée par 2} \end{cases}$ Alors (U_n) est convergente

Solution 4 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > 0$ donc l'inégalité est vraie pour $n = 0$;
- Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.

On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2} > 0$.

Conclusion : $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2°/ $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + 2} - u_n = \frac{u_n^2 + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + 2} + u_n} = \frac{2}{\sqrt{u_n^2 + 2} + u_n} > 0.$$

(Car $u_n > 0$). D'où la suite (u_n) est croissante.

3°/a) $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = (u_n^2 + 2) - u_n^2 = 2$ donc la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de 1^er^ terme $v_0 = u_0^2 = 1$.

b) On a : $v_n = v_0 + n \cdot r = 1 + 2n$; $u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{1 + 2n}$

4°/ On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{1+2n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Conclusion : (u_n) n'est pas convergente.

Solution 5 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 3$.

- Pour $n = 1$, on a $u_1 < 3$ car $u_1 < \frac{5}{2}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $u_n < 3$ et montrons que $u_{n+1} < 3$.

$$u_{n+1} - 3 = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) - 3 = -\frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n)$$

Or $u_n < 3 \Rightarrow 3 - u_n > 0$ d'où $-\frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) < 0$ et par suite

$u_{n+1} - 3 < 0 \Rightarrow u_{n+1} < 3$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.

2°/a) $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) - u_n = 3 - u_n - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n)$

$$=(3-u_n)\left(1-\frac{n}{2(n+1)}\right)=(3-u_n)\frac{n+2}{2(n+1)}.$$

b) On a $\forall n\in \mathbb{N}$, $u_n<3 \Rightarrow 3-u_n>0$ et $\frac{n+2}{2(n+1)}>0$ d'où

$\forall n\in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n>0$ et par suite (u_n) est une suite croissante.

3°/ La suite (u_n) est croissante et majorée par 3 donc (u_n) est convergente.

4°/a) $v_{n+1}=(n+1)(3-u_{n+1})$ or $u_{n+1}=3-\frac{n}{2(n+1)}\cdot(3-u_n)$ donc

$3-u_{n+1}=\frac{n}{2(n+1)}\cdot(3-u_n)$ et par suite

$$v_{n+1}=(n+1)\cdot\frac{n}{2(n+1)}\cdot(3-u_n)=\frac{n}{2}(3-u_n)=\frac{1}{2}v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1er terme

$v_1=3-u_1=\frac{1}{2}$.

b) $v_n=v_1\cdot q^{n-1}$ où q est la raison de la suite (v_n) d'où

$$v_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

5°/a) On a $v_n=n(3-u_n)$, pour $n\in \mathbb{N}^*\Rightarrow 3-u_n=\frac{v_n}{n}\Rightarrow$

$u_n=3-\frac{v_n}{n}$. Or $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ d'où $u_n=3-\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) On a : $-1<\frac{1}{2}<1\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

Solution 6 :

1°/ $u_1=\frac{3+2}{4}=\frac{5}{4}$; $v_1=\frac{1+6}{4}=\frac{7}{4}$.

2°/ a) $w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\frac{3u_n+v_n}{4}-\frac{u_n+3v_n}{4}$

$$=\frac{2u_n-2v_n}{4}=\frac{1}{2}(u_n-v_n)=\frac{1}{2}\cdot w_n$$

donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1[er] terme

$w_0 = u_0 - v_0 = -1$.

b) On a $w_n = w_0 \cdot q^n$ où q est la raison de (w_n) donc

$w_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$ donc $w_n < 0 \Rightarrow u_n - v_n < 0 \Rightarrow u_n < v_n$.

3°/a) • $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + v_n}{4} - u_n = \frac{v_n - u_n}{4} > 0$ car $u_n < v_n$

donc la suite (u_n) est croissante.

• $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} < 0$ car $u_n < v_n$

donc la suite (v_n) est décroissante.

b) • (u_n) est une suite croissante donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq u_0$ or $u_0 = 1 \Rightarrow u_n \geq 1$.

• (v_n) est une suite décroissante donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n \leq v_0$ or $v_0 = 2 \Rightarrow v_n \leq 2$.

c) • On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq v_n \leq 2 \Rightarrow u_n \leq 2$. On a : (u_n) est croissante et majorée par 2 donc (u_n) converge vers un réel l.

• On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq v_n$ or $u_n \geq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}$, $1 \leq v_n$.
On a : (v_n) est décroissante et minorée par 1 donc la suite (v_n) converge vers un réel l'.

• On a $\forall n \in \mathbf{N}$, $w_n = u_n - v_n$. Or (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} w_n = 0 \Rightarrow 0 = l - l' \Rightarrow l = l'$.

Conclusion : (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.

4°/a) $\forall n \in \mathbf{N}$, on a : $a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} + \frac{u_n + 3v_n}{4} = u_n + v_n = a_n$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N}$, on a $a_{n+1} = a_n$ ce qui prouve que la suite (a_n) est constante et $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = a_0 = u_0 + v_0 = 3$ donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = 3$.

b) On a $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = u_n + v_n \Rightarrow u_n + v_n = 3 \Rightarrow$

$\lim_{n \to +\infty} u_n + \lim_{n \to +\infty} v_n = 3 \Rightarrow 2l = 3 \Rightarrow l = \frac{3}{2}$.

5°/ on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n + v_n = 3 \\ u_n - v_n = w_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \dfrac{3+w_n}{2} \\ v_n = \dfrac{3-w_n}{2} \end{cases}$

Or $w_n = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2}\left(3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ et $v_n = \dfrac{1}{2}\left(3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.

Solution 7 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < U_n < V_n$.

• Pour $n=0$ on a : $0 < U_0 < V_0$ (car $U_0 = 1$ et $V_0 = 2$).

• Supposons que pour un entier donné n on a : $0 < U_n < V_n$ et montrons que $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$.

$U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n+V_n}$ est le quotient de réel strictement positifs d'où $U_{n+1} > 0$.

$$U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} - \frac{U_n+V_n}{2}$$

$$= \frac{4U_nV_n - (U_n+V_n)^2}{2(U_n+V_n)} = \frac{-(U_n-V_n)^2}{2(U_n+V_n)} < 0$$

d'où $U_{n+1} < V_{n+1}$ et par suite $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < U_n < V_n$.

2°/ a) • $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2U_nV_n}{U_n+V_n} - U_n = \dfrac{U_nV_n - U_n^2}{U_n+V_n} = \dfrac{U_n(V_n-U_n)}{U_n+V_n}$

on a : $0 < U_n < V_n$ d'où $U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est une suite croissante.

• $V_{n+1} - V_n = \dfrac{U_n+V_n}{2} - V_n = \dfrac{U_n - V_n}{2}$

or $U_n < V_n$ d'où (V_n) est une suite décroissante.

b) On a : $U_n \le V_n$ et $V_n \le V_0$ (car (V_n) est une suite décroissante) d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \le 2$.

(U_n) est une suite croissante, majorée par 2 donc (U_n) est convergente.

(V_n) est une suite décroissante, minorée par 0 donc (V_n) est convergente.

Soit $l = \lim_{n \to +\infty} U_n$ et $l' = \lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} V_{n+1}$

Comme $V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$ d'où $l' = \frac{l + l'}{2} \Rightarrow l = l'$.

3°/ a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \cdot V_n = 2$.

- pour $n = 0$: $U_0 \cdot V_0 = 1 \cdot 2 = 2$
- Supposons que pour un entier donné n on a : $U_n \cdot V_n = 2$ et montrons que $U_{n+1}V_{n+1} = 2$.

$$U_{n+1}V_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \cdot \frac{U_n + V_n}{2} = U_nV_n = 2.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \cdot V_n = 2$.

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \cdot V_n = 2$

comme $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} V_n = l$ donc $l^2 = 2$ et par suite $|l| = \sqrt{2}$

comme $l \geq 0$ donc $l = \sqrt{2}$.

Solution 8 :

1°/ • $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

donc la suite (U_n) est croissante.

• $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - U_n - \frac{1}{n!} = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

$= \frac{2 - n - 1}{(n+1)!} = \frac{-n+1}{(n+1)!} \leq 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On a $\forall n \geq 1$, $V_{n+1} - V_n \leq 0$ d'où $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

2°/ Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

1er Cas :

Si $p \leq q \Rightarrow U_p \leq U_q$ (car (U_n) est croissante)

Or $V_q = U_q + \frac{1}{q!} \Rightarrow V_q \geq U_q$ d'où $U_p \leq U_q \leq V_q \Rightarrow U_p \leq V_q$.

2ème Cas :

Si $q \leq p \Rightarrow V_p \leq V_q$ (car (V_n) est décroissante)

Et on a : $V_p \geq U_p$ d'où $U_p \leq V_p \leq V_q \Rightarrow U_p \leq V_q$.

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N}\ \ q \in \mathbb{N}^*$, $U_p \leq V_q$.

• On a : $\forall p \in \mathbb{N}\ \ q \in \mathbb{N}^*$, $U_p \leq V_q$

On choisit $p = n$ et $q = 1$ donc $U_n \leq V_1 = 3$

(U_n) est une suite croissante majorée par 3 donc elle converge.

• On choisit $p = 0$ et $q = n$ donc $U_0 \leq V_n$.

Or $U_0 = 1 \Rightarrow V_n \geq 1$ et par suite (V_n) est décroissante minorée par 1 donc elle converge.

3°/ Soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ et $l' = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

$V_n - U_n = \frac{1}{n!}$ or $n! \geq n \Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \leq V_n - U_n \leq \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n - U_n = 0$ et par suite $l = l'$.

Solution 9 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$

• Pour $n = 0$, $U_0 = 1 = \frac{(2 \cdot 0)!}{(0!)^2} \cdot \frac{1}{2^0}$

• Supposons que pour un entier donné n, $U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$ et montrons que

$U_{2(n+1)} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2(n+1)}}$

On a : $U_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot U_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$

$$=\frac{(2n+1)!}{2(n+1)(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n}}=\frac{(2n+2)(2n+1)!}{4(n+1)(n+1)(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n}}=\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n+2}}$$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},\ U_{2n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n}}$.

2°/ On a : $\begin{cases} V_{n+1}=(n+2)U_{n+1}\cdot U_{n+2} \\ U_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}U_n \end{cases} \Rightarrow V_{n+1}=(n+1)U_{n+1}\cdot U_{2n}=V_n$

donc $\forall n\in\mathbb{N},\ V_{n+1}=V_n$ et par suite (V_n) est une suite constante.

3°/ On a : $\forall n\in\mathbb{N},\ V_n=V_0=2 \Rightarrow U_n\cdot U_{n+1}=\frac{2}{n+1}$

$\Rightarrow U_{2n}\cdot U_{2n+1}=\frac{2}{n+1}$ or $U_{2n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n}}$

$\Rightarrow U_{2n+1}=\frac{2}{(2n+1)}\cdot\frac{(n!)^2\cdot 2^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow U_{2n+1}=\frac{2^{2n+1}\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Solution 10 :

1°/ $U_1=\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{1+k}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$; $U_2=\sum_{k=0}^{2}\frac{2}{8+k}=\frac{2}{8}+\frac{2}{9}+\frac{2}{10}=\frac{121}{180}$.

2°/ On a : $0\le k\le n \Rightarrow n^3\le n^3+k\le n^3+n \Rightarrow \frac{1}{n^3+n}\le\frac{1}{n^3+k}\le\frac{1}{n^3}$

$\Rightarrow \frac{n}{n^3+n}\le\frac{n}{n^3+k}\le\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^3+n}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^3+k}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^2} \Rightarrow$

$\frac{n(n+1)}{n^3+n}\le U_n\le\frac{n+1}{n^2}$ d'où $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{n+1}{n^2+1}\le U_n\le\frac{n+1}{n^2}$

3°/ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

donc (U_n) converge vers 0.