Bac D 2011 session normale

Exercice 1

On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$

1.a. Démontrer que la suite (v_n) est convergente après avoir déterminé sa limite

b. Démontrer que la suite (v_n) est croissante

c. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{3}{4} \leq v_n < 1$

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $a_n = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$

a. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

b. En déduire la limite de la suite (a_n)

3. On pose pour tout entier naturel n : $b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \ldots + \ln(v_n)$

a. Démontrer que (b_n) est une suite à termes négatifs.

b. Calculer la limite de la suite (b_n).

Exercice 2

La société "Gnamienlait" de Gnamien produit des sachets de lait caillé.
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit, sa masse en gramme (g). La loi de probabilité de X est définie par le tableau ci-dessous.

x_i (g)	220	230	240	250	260	270	280
P_i	0.08	0.10	a	b	0.16	0.15	0.04

a et b sont deux nombres réels.
x_i représente la masse du sachet de lait caillé ;
P_i la probabilité qu'un sachet de lait ait la masse x_i

1.a. Calculer E(X) l'espérance mathématique de X en fonction de a et b.

b. Sachant que E(X) = 250 , justifier que a = 0,14 et b = 0,33.

Dans la suite de l'exercice , on conservera les valeurs de a et b données ci-dessus.

2. Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de sa société.

Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250 g.

Tiéplé, la fille de Gnamien, prend au hasard de façon indépendante cinq sachets de lait caillé.

Calculer la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220g.

On prendra l'arrondi d'ordre 3 du résultat.

4. Les sachets de lait caillé sont contrôlés par une machine.

Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse inférieure à 250g

- Si un sachet de lait caillé a 240g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7.
- Si un sachet de lait caillé a 230g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8.
- Si un sachet de lait caillé a 220g, il est systématiquement éliminé.
- Si un sachet de lait caillé a une masse supérieure ou égale à 250g, il est systématiquement accepté.

a. Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240g soit éliminé est de 0,098.

b. Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

PROBLEME

Partie A

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $g(x) = \frac{-2x+1}{x^2} + \ln x$.

1.a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

b. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$

2.a. Démontrer que $\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

b. En déduire le sens de variation de g

c. Dresser le tableau de variation de g

3.a. Démontrer que l'équation $x \in]0;+\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α

b. Justifier que $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$

c. Démontrer que $\begin{cases} \forall x \in]0;\alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

On considère la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J).
(Uniés graphiques : OI = 2cm et OJ = 10 cm)

1.a. Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$, puis donner une interprétation graphique du résultat.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis donner une interprétation graphique du résultat.

2. Démonter que $f(a) = -\frac{1+a}{a^2}e^{-a}$

3.a Démontrer que $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = e^{-x}.g(x)$

b. En utilisant la partie A, déterminer les variations de f.

c. Dresser le tableau de variation de f

4. Démontrer qu'une équation de la tangente (*T*) à la courbe (*C*) au point d'abscisse 1 est $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$

5. Construire la droite (*T*) et la courbe (*C*) dans le plan muni du repère (O,I,J). On prendra **a = 2,6**

Partie C

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $h(x) = e^{-x}\ln x$.

Démontrer que h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$

2. Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$.

a. Calculer, en cm^2 et en fonction de λ l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (OI), et les droites d'équation : $x = 3$ et $x = \lambda$.

b. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

Salanon Aime

CORRECTION BAC D 2011 SESSION NORMALE

Salanon Aime

EXERCICE 1

On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \dfrac{n^2+2n}{(n+1)^2}$

1.a Démontrons que la suite (V_n) est convergente après avoir déterminé sa limite.

$$\lim V_n = \lim \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \lim \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} = \lim \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$\Rightarrow \lim V_n = 1$

$\lim V_n$ existe et est finie donc la suite (V_n) est convergente.

b. Démontrons que la suite (V_n) est croissante.

$$V_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \Rightarrow V_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+2)}{((n+1)+1)^2} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} - \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^3(n+3)}{(n+2)^2(n+1)^2} - \frac{n(n+2)^3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{(n+1)^3(n+3) - n(n+2)^3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{(n+1)^2(n+1)(n+3) - n(n+2)(n+2)^2}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{(n^2+2n+1)(n^2+4n+3) - (n^2+2n)(n^2+4n+4)}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{(n^4+6n^3+12n^2+10n+3)-(n^4+6n^3+12n^2+8n)}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $2n+3 > 0$ et $(n+2)^2(n+1)^2 > 0 \Rightarrow \dfrac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2} > 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n > 0$

On déduit que la suite (V_n) est croissante.

c. Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{3}{4} \leq V_n < 1$

$\lim V_n = 1 \Rightarrow V_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

La suite V_n est une suite croissante.

Son terme le plus petit est son premier terme V_1 c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_1 \leq V_n$

Or $v_1 = \dfrac{1^2 + 2 \times 1}{(1+1)^2} = \dfrac{1+2}{2^2} = \dfrac{3}{4}$ D'où $\dfrac{3}{4} \leq v_n$

Finalement : $\dfrac{3}{4} \leq v_n < 1$

2. On pose pour tout entier naturel non nul n, $a_n = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$

a. Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$

$a_n = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n \Rightarrow a_1 = v_1 = \dfrac{3}{4}$

$a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)} \Rightarrow a_1 = \dfrac{1+2}{2(1+1)} = \dfrac{3}{2(2)} = \dfrac{3}{4}$

La propriété est donc vraie à l'ordre 1.

Supposons que $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_k = \dfrac{k+2}{2(k+1)}$

Et montrons que $a_{k+1} = \dfrac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$

$a_k = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_k$

$a_{k+1} = \underbrace{v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_k}_{a_k} \times v_{k+1}$

$a_{k+1} = a_k \times v_{k+1} = \dfrac{k+2}{2(k+1)} \times \dfrac{(k+1)^2 + 2(k+1)}{((k+1)+1)^2}$

$a_{k+1} = \dfrac{k+2}{2(k+1)} \times \dfrac{(k+1)((k+1)+2)}{(k+2)^2}$

$a_{k+1} = \dfrac{k+2}{2(k+1)} \times \dfrac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$

$a_{k+1} = \dfrac{(k+2) \times (k+1)(k+3)}{2(k+1)(k+2)^2} = \dfrac{(k+3)}{2(k+2)}$

$a_{k+1} = \dfrac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$

On a supposé que $a_K = \dfrac{(k+2)}{2(k+1)}$ et on a montré que $a_{k+1} = \dfrac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$

Finalement, on conclue que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$

b. En déduire la limite de la suite (a_n).

$a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)} = \dfrac{n+2}{2n+2} \Rightarrow \lim a_n = \lim \dfrac{n+2}{2n+2} = \lim \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$

3. On pose pour tout entier naturel n : $b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(v_n)$

a. Démontrons que (b_n) est une suite à termes négatifs.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{3}{4} \leq v_n < 1 \Rightarrow v_n < 1 \Rightarrow \ln(v_n) < \ln 1 \Rightarrow \ln(v_n) < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Donc (b_n) est une suite à termes négatifs (car somme de valeurs toutes négatives).

b. Calculons la limite de la suite (b_n)

$a_n = v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n$

$\ln a_n = \ln(v_1 \times v_2 \times \cdots \times v_n)$

$\ln a_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \cdots + \ln(v_n) = b_n \Rightarrow \lim b_n = \lim(\ln a_n) = \ln \lim(a_n) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim b_n = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

<u>Exercice 2</u>

1.a. Calculons E(X) l'espérance mathématique de X en fonction de a et b.

$E(X) = 220 \times 0{,}08 + 230 \times 0{,}10 + 240 \times a + 250 \times b + 260 \times 0{,}16 + 270 \times 0{,}15 + 280 \times 0{,}04$

$E(X) = 17{,}6 + 23 + 240a + 250b + 41{,}6 + 40{,}5 + 11{,}2$

$E(X) = 133{,}9 + 240a + 250b$

b. Sachant que E(X) = 250, justifions que a = 0,14 et b = 0,33

$E(X) = 250 \Leftrightarrow 133{,}9 + 240a + 250b = 250$

De plus, $\sum_{i=1}^{7} Pi = 1 \Leftrightarrow 0{,}08 + 0{,}1 + a + b + 0{,}16 + 0{,}15 + 0{,}04 = 1 \Leftrightarrow 0{,}53 + a + b = 1$

On en déduit le système : $\begin{cases} 133{,}9 + 240a + 250b = 250 \\ 0{,}53 + a + b = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 133{,}9 + 240a + 250b = 250 & (1) \\ 132{,}5 + 250a + 250b = 250 & (2) \end{cases}$

$(1) - (2) \Rightarrow 1{,}4 - 10a = 0 \Rightarrow -10a = -1{,}4 \Rightarrow a = \frac{-1{,}4}{-10} = 0{,}14$

$0{,}53 + a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - 0{,}53 - a = 0{,}47 - a = 0{,}47 - 0{,}14 = 0{,}33$

Finalement : a = 0,14 et b = 0,33

2. Calculons la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250g.

$P(X \geq 250) = b + 0{,}16 + 0{,}15 + 0{,}04 = 0{,}33 + 0{,}16 + 0{,}15 + 0{,}04$

$P(X \geq 250) = 0{,}68$

3. Calculons la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220g.

Chaque choix conduit à 2 éventualités : soit le sachet a 220g ou non. Chaque événement est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre 5 et 0,08.
Ces épreuves de Bernoulli se répètent de manière indépendante.
La probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220g se calcule à l'aide de la loi binômiale :

$P(X = 3) = C_5^3 (0{,}08)^3 \times (0{,}92)^2 = 10 \times (0{,}00051) \times (0{,}8464)$

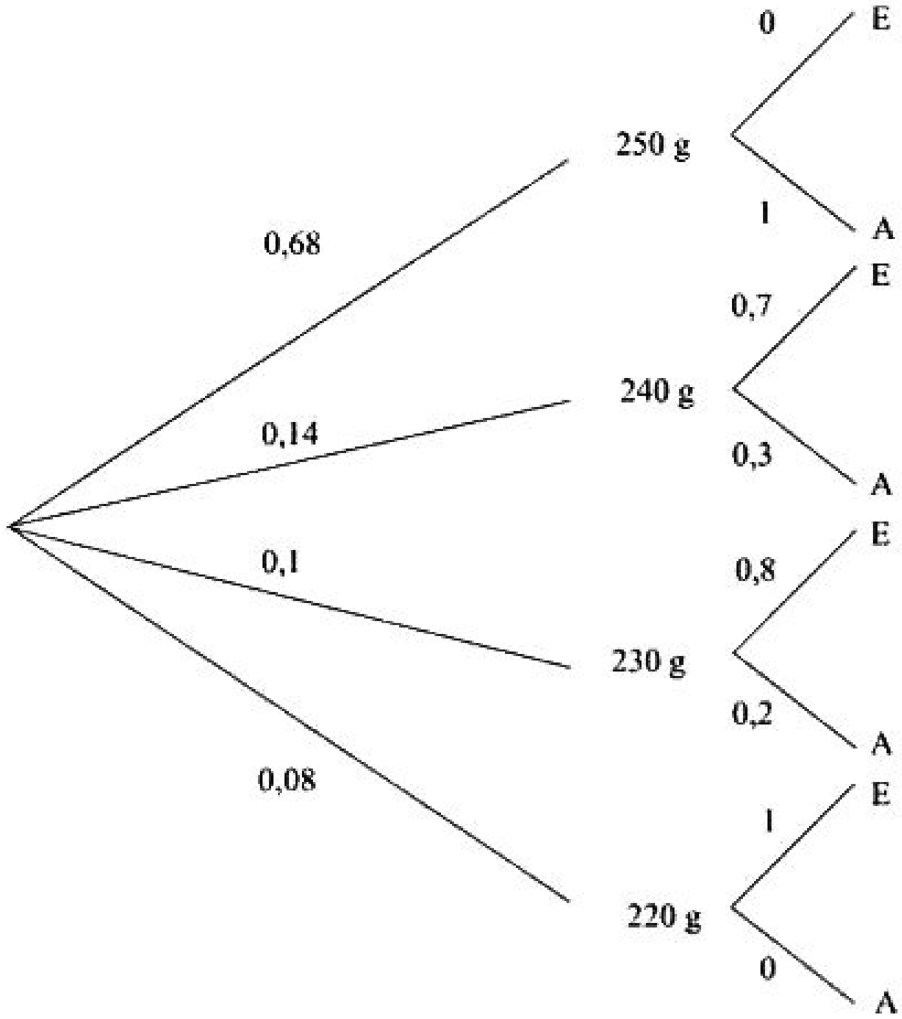
$P(X = 3) = 0{,}00432$

4. Arbre de probabilité

On note :

A : l'événement " le sachet est accepté".

E : l'événement " le sachet est éliminé".



a. Justifions que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est de 0,098.

Soit G : l'événement "le sachet a 240g".

Et E : l'événement "le sachet est éliminé".

$P(G \cap E) = P(G) \times P_G(E)$

$P(G \cap E) = 0,14 \times 0,7 = 0,098$

b. Calculons la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

$P(E) = 0,14 \times 0,7 + 0,1 \times 0,8 + 0,08 \times 1 = 0,098 + 0,08 + 0,08$

$P(E) = 0,258$

PROBLEME

Partie A

Soit la fonction numérique dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par $g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$

1. a. Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x+1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x} = 0 \end{cases}$

b. Calculons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -\infty$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -\frac{2x+1}{x^2} = -\infty \end{cases}$ En effet $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -(2x+1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ avec $x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

2.a. Démontrons que : $\forall\ x \in]0\,;+\infty[\quad g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

$$g'(x) = \left(-\frac{2x+1}{x^2} + \ln x\right)' = \left(\frac{-2x-1}{x^2}\right)' + (\ln x)'$$

$$= \frac{-2x^2-(2x)(-2x-1)}{(x^2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-2x^2+4x^2+2x}{x^4} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2x^2+2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+2x}{x^4} + \frac{x^3}{x^4} = \frac{x^3+2x^2+2x}{x^4}$$

$$= \frac{x(x^2+2x+2)}{xx^3} = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$$

Donc $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

b. En déduire le sens de variation de g.

$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

$\forall x \in]0\,;+\infty[$, $x^3 > 0$ Donc le signe de $g'(x)$ est le même que celui de x^2+2x+2

Etudions le signe de x^2+2x+2

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0$

Le signe de x^2+2x+2 est le même que celui du coefficient de x^2 qui est 1. On en déduit que :

$x^2+2x+2 > 0\ \forall x \in]0\,;+\infty[$. Donc $\forall x \in]0\,;+\infty[\ g'(x) > 0$

Finalement, g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

c). Dressons le tableau de variation de la fonction g.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3. a. Démontrons que $x \in]0\,;+\infty[$ $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$g\left(]0\,;+\infty[\right) =]-\infty\,;+\infty[$, $0 \in]-\infty\,;+\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\,;+\infty[$.

b. Justifions que : $2,55 < \alpha < 2,56$

g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et en particulier sur $]2,55; 2,56[$.

$$\left.\begin{array}{l} g(2,55) = -0,002 \quad < 0 \\ g(2,56) = 0,006 \quad > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g(2,55) \times g(2,56) < 0 \quad \text{donc} \quad 2,55 < \alpha < 2,56$$

c. Démontrons que : $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in]0\,;\alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;+\infty[, g(x) > 0 \end{array}\right.$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit : $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in]0\,;\alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha\,;+\infty[, g(x) > 0 \end{array}\right.$

Partie B

1.a. Calculons $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ puis donnons une interprétation graphique du résultat.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x} = +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} -\ln x = +\infty \\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} e^{-x} = e^{-0} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$$

La droite (OJ) d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C).

b. Calculons $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis donnons une interprétation graphique du résultat.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{xe^{x}} - \frac{\ln x}{e^{x}}\right)$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{xe^{x}}\right) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{e^{x}}\right) = 0$ (croissance comparée des fonctions lnx et e^x).

La droite (OJ) d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

2. Démontrons que : $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$

$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - \ln\alpha\right)e^{-\alpha}$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\alpha+1}{\alpha^2} + \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$

$\Rightarrow f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2} - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha} = \left(\frac{\alpha - 2\alpha - 1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}$

$\Rightarrow f(\alpha) = \left(\frac{-\alpha - 1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha} = \left(-\frac{\alpha+1}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha}$ donc $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$

3.a. Démontrons que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$

$f'(x) = \left(\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}\right)' = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)'e^{-x} + \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)(e^{-x})'$

$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)e^{-x} + \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)(-e^{-x}) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \ln x\right)e^{-x}$

$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \ln x\right)e^{-x} = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \ln x\right)e^{-x}$

$f'(x) = \left(-\frac{1+2x}{x^2} + \ln x\right)e^{-x} = g(x)e^{-x}$

Donc $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$

b. En utilisant la partie A, déterminons les variations de f.

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $e^{-x} > 0$ Donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$.

Or $\begin{cases} \forall x \in \left]0\,;\alpha\right[, g(x) < 0 \\ \forall x \in \left]\alpha\,;+\infty\right[, g(x) > 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \forall x \in \left]0\,;\alpha\right[, f'(x) < 0 \\ \forall x \in \left]\alpha\,;+\infty\right[, f'(x) > 0 \end{cases}$

On en déduit que : sur $\left]0\,;\alpha\right[$ f est strictement décroissante, et sur $\left]\alpha\,;+\infty\right[$ f est strictement croissante.

c. Dressons le tableau de variation de f.

x	0		α		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	$+$	
g(x)	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$	$\nearrow$	0

4. Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est : $y = -\dfrac{3}{e}x + \dfrac{4}{e}$

(T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

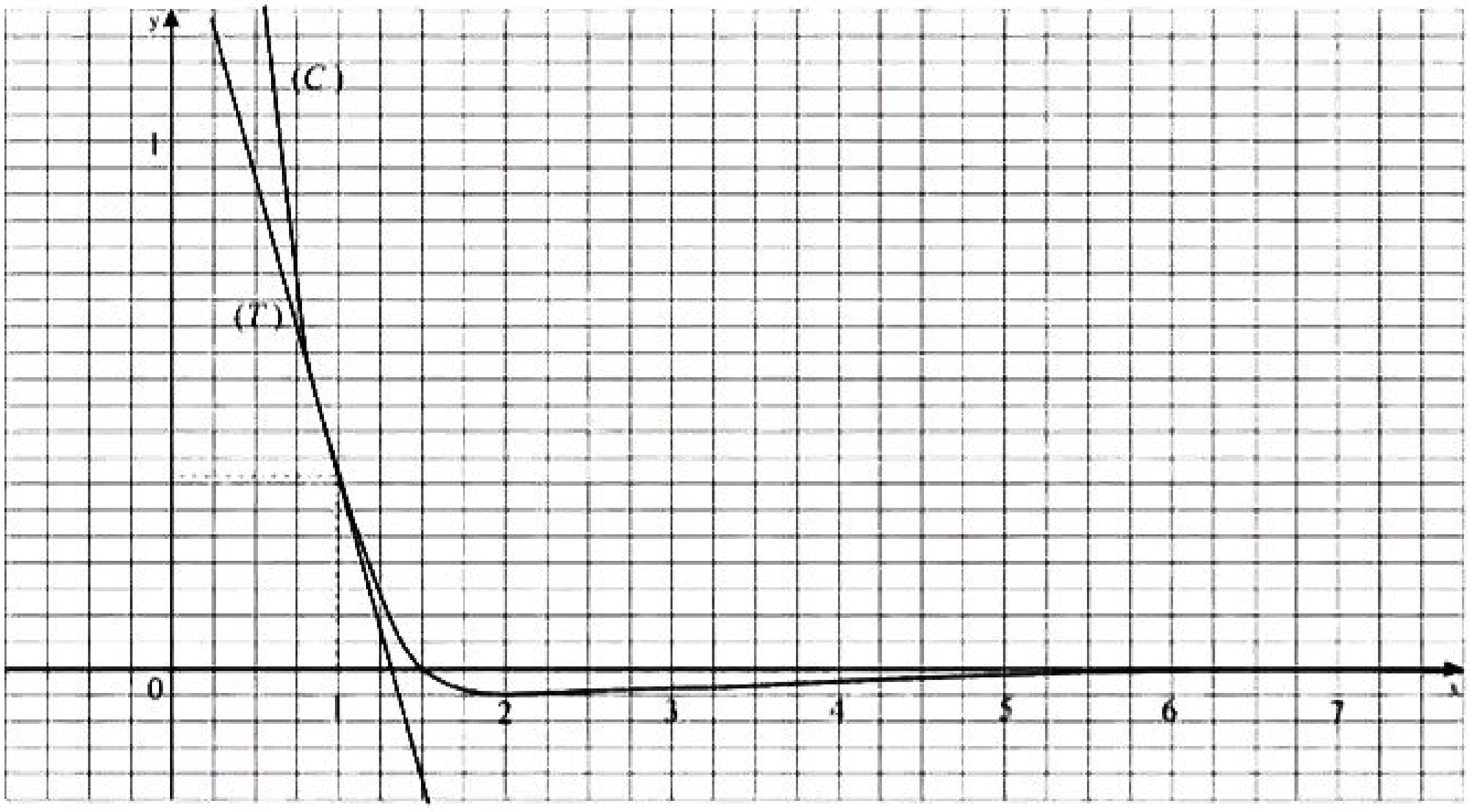
$f'(1) = \left(-\dfrac{1+2\times 1}{1^2} + \ln 1\right)e^{-1} = (-3+0)\dfrac{1}{e} = \dfrac{-3}{e}$

$f(1) = \left(\dfrac{1}{1} - \ln 1\right)e^{-1} = (1-0)\dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{e}$

(T) : $y = \dfrac{-3}{e}(x-1) + \dfrac{1}{e} = \dfrac{-3}{e}x + \dfrac{3}{e} + \dfrac{1}{e} = \dfrac{-3}{e}x + \dfrac{4}{e}$

(T) : $y = -\dfrac{3}{e}x + \dfrac{4}{e}$

5. Construisons la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni d'un repère (O; I; J). On prendra $\alpha = 2{,}6$



Partie C

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et définie par $h(x) = e^{-x}\ln x$

Démontrons que h est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

En d'autres termes il s'agit de montrer que : $h'(x) = f(x)$

$h'(x) = \left(e^{-x}\ln x\right)' = (e^{-x})' \times (\ln x) + (e^{-x}) \times (\ln x)'$

$h'(x) = (-e^{-x}) \times (\ln x) + (e^{-x}) \times \left(\frac{1}{x}\right) = (e^{-x}) \times \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)$

$h'(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)(e^{-x}) = f(x)$ Donc h est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$.

a. Calculons, en cm^2 et en fonction de λ, l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (*C*), (*OI*) et les droites d'équation $x = 3$ et $x = \lambda$.

Sur $]3\,;+\infty[$, (*C*) est en dessous de (*OI*), donc $A(\lambda) = -\int_3^\lambda (f(x) - 0)\,dx \cdot UA = -\int_3^\lambda f(x)\,dx \cdot UA$

avec $UA = 2cm \times 10cm = 20cm^2$

$A(\lambda) = -\left[h(x)\right]_3^\lambda \times 20cm^2$ (car h est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$)

$A(\lambda) = -\left[h(\lambda) - h(3)\right] \times 20cm^2 = -\left[e^{-\lambda}\ln\lambda - e^{-3}\ln 3\right] \times 20cm^2$

$A(\lambda) = -\left(\frac{1}{e^\lambda}\ln\lambda - \frac{1}{e^3}\ln 3\right) \times 20cm^2 = \left(\frac{\ln 3}{e^3} - \frac{\ln\lambda}{e^\lambda}\right) \times 20cm^2$

Calculons $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty}\left[\frac{\ln 3}{e^3} - \frac{\ln\lambda}{e^\lambda}\right] \times 20cm^2 = \frac{\ln 3}{e^3} \times 20cm^2$ car $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\ln\lambda}{e^\lambda} = 0$ (croissance comparée des fonctions $\ln x$ et e^x).