

BACCALAURÉAT
SESSION 2022Durée : 4 H
Coefficient : 4

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1 sur 3, 2 sur 3, 3 sur 3 et une feuille annexe à rendre avec la copie. Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.

EXERCICE 1 (2 points)

On donne les groupes de mots (la droite de régression, des primitives, une bijection, fonction dérivable, extremum relatif) et les phrases incomplètes dans le tableau ci-dessous :

N°	Phrases incomplètes
1.	Toute fonction f continue et strictement croissante sur un intervalle K définit de K sur $f(K)$.
2.	Soit (X, Y) une série statistique double ayant une forte corrélation entre X et Y et telle que $V(X) \neq 0$. Une équation de de Y en X est $y = ax + b$ où $a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$, $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ étant les moyennes respectives de X et Y .
3.	Toute fonction continue sur un intervalle I admet sur I .
4.	Toute en un point a est continue en a .

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque phrase incomplète suivi du groupe de mots à écrire à la place des pointillés pour que la phrase soit vraie.

EXERCICE 2 (2 points)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des colonnes A, B et C permettent d'obtenir trois affirmations dont une seule est vraie.

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Enoncés	A	B	C
1.	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{-2x+5}$ est ...	$x \mapsto -2e^{-2x+5}$.	$x \mapsto \frac{1}{2}e^{-2x+5}$.	$x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2x+5}$.
2.	Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = 0$ sont de la forme ...	$x \mapsto ke^{2x} + k'e^{-2x}$ $(k, k') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.	$x \mapsto k\cos(2x) + k'\sin(2x)$ $(k, k') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.	$x \mapsto ke^{4x} + k'e^{-4x}$ $(k, k') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
3.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x)$ est égale à ...	$-\infty$.	$+\infty$.	0.
4.	La forme exponentielle du nombre complexe $-1 + i$ est ...	$2e^{i\frac{\pi}{4}}$.	$\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.	$\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

EXERCICE 3**(3 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C, D et I sont les points du plan complexe d'affixes respectives : $-\sqrt{2}$; $1+i$; $1-i$; $3+i$ et 1.

1. Justifie que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Soit S la similitude directe du plan d'écriture complexe : $z' = (1+i)z + 1 - 3i$.
 - a) Justifie que : $S(D) = D$ et $S(B) = C$.
 - b) Détermine les éléments caractéristiques de S.
 - c) Détermine l'image (C') du cercle (C) de diamètre [BD] par S.

EXERCICE 4**(4 points)**

On donne la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{5x+2}{4x+7}$.

(C) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Sur la feuille annexe à rendre avec la copie, construis à l'aide de (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$, les quatre premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
2. On admet que la fonction f est dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
 - a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{1}{2}$.
 - b) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{2(u_n+1)(-2u_n+1)}{4u_n+7}$.
 - c) Dédus de 2.a) et 2.b) que la suite (u_n) est décroissante.
3.
 - a) Dédus de 2.a) et 2.c) que la suite (u_n) est convergente.
 - b) Justifie que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 5**(4 points)**

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x \ln x - 2x, & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .
L'unité graphique est 2 cm.

1.
 - a) Justifie que f est continue en 0.
 - b) Justifie que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$.
 - c) Interprète graphiquement le résultat de 1. b).
2. On admet que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
Interprète graphiquement ces résultats.
3.
 - a) On suppose que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.
Justifie que : $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = -1 + \ln x$.
 - b) Étudie les variations de f .
 - c) Dresse le tableau de variation de f .

4. Trace la courbe (C_f) .

(Tu pourras tracer l'axe des abscisses dans le sens de la longueur du papier millimétré).

5. a) À l'aide d'une intégration par parties, justifie que l'intégrale K telle que

$$K = \int_1^2 x \ln x dx \text{ est égale à } 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

b) On admet que, sur $[1 ; 2]$, (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses (OI).

Calcule l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

EXERCICE 6 (5 points)

Lors de la kermesse en fin d'année dans ton lycée, le comité d'organisation a initié un jeu d'adresse. Le jeu comprend quatre épreuves.

Le joueur reçoit 4 boules après une mise de 100 F CFA.

Une épreuve consiste à lancer une boule dans un trou situé à 10 m.

Le jeu est terminé lorsque le joueur a lancé les quatre boules.

On suppose que les 4 lancers sont indépendants.

À chaque épreuve :

- si le joueur réussit à loger la boule dans le trou, le comité d'organisation lui remet 2 tickets.
- s'il ne réussit pas à loger la boule dans le trou, il ne gagne aucun ticket.

On admet que le joueur a 25% de chance de loger une boule dans le trou.

Le comité d'organisation récompense à hauteur de 2 500 F CFA le joueur qui possède à la fin du jeu au moins 4 tickets.

Un élève affirme qu'un joueur a moins de 20% de chance de gagner les 2 500 F CFA.

À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si l'affirmation de cet élève est justifiée ou non.