COLLECTION TERRACHER

MATHEMATIQUES

1re

ANALYSE

S et E

HACHETTE
Classiques

COLLECTION TERRACHER

MATHEMATIQUES

1re S et E

Analyse

Une équipe dirigée par **Pierre-Henri TERRACHER**

Christian ARTIGUES
Jean-Marie BOUSCASSE
Marie-Claude CHAUMET
Antoine GOUTEYRON
Bernard PINET

avec la collaboration de

Pierre DARGELAS
Yves ROBERT

HACHETTE
Classiques

Table des matières

Couverture : Alain GRAMMAT
Maquette et mise en pages : Louis de CAYEUX et Claire BARBICHON
Exécution des schémas : Alain GRAMMAT et Christiane PÉROT
Illustrations : Bernard SOHM

Nous remercions bien vivement Monsieur Alfredo NASTA pour sa précieuse collaboration.

ISBN 2.01.012634.3

© Hachette, 1987.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droits ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contre-façon sanctionnée par les articles 425 et suivant du Code pénal.

Ce livre est dédié
à Christophe MENUT
qui l'aurait lu
avec passion et fantaisie ...

Préface

— **Dis, il y a un trésor dans la maison d'à côté.**
— **Mais il n'y a pas de maison à côté.**
— **Et bien, nous en construirons une.**

Marx Brothers
Dialogue

Introduction

Cet ouvrage **centre l'enseignement de l'analyse** en premières S et E **autour d'activités de résolution de problèmes** en dégageant quelles **méthodes essentielles** permettent l'attaque de ces problèmes et en affirmant **une conception ouverte et vivante** d'un livre de Mathématiques.

Les problèmes

L'analyse ne sort pas du néant... en un squelette achevé de définitions et théorèmes, subtilement articulés. Elle constitue, au contraire, un domaine privilégié, où ne cessent de s'interpeller **approfondissement théorique** et **résolution de problèmes.**
C'est dans une telle optique que cet ouvrage a été élaboré, avec le double souci, d'une part de **conformité au programme** et à ses commentaires, d'autre part d'une **gestion** raisonnable et **accessible** des notions d'analyse qui y sont inscrites.
A cet égard, les **grands problèmes** qui suivent jouent un rôle fondamental : ce sont eux qui fixent l'essentiel des activités proposées :

1° Approximation de nombres.

2° Résolution d'équations numériques (solutions exactes; solutions approchées).

3° Étude de situations nécessitant l'intervention des suites de nombres.

4° Construction, interprétation, exploitation de graphiques.

5° Comparaison et approximation de fonctions.

6° Optimisation : recherche de maximum et de minimum.

Les méthodes

On ne peut disposer, à l'évidence, d'une clef universelle qui « ouvrirait toutes les portes et résoudrait tous les problèmes ». Il s'agit surtout de **construire**, des méthodes variées d'attaque d'un problème, l'objectif essentiel étant **élaborer avec et pour l'élève des moyens solides, efficaces pour entreprendre et réussir la résolution de problèmes.**
Cette démarche est permanente tout au long de ce livre, y compris dans les diverses rubriques d'exercices de fin de chapitre. Nous avons jugé indispensable de la souligner par des **commentaires, remarques, points de méthode** (que peut accompagner un exercice, un exemple ou contre-exemple crucial, un schéma explicatif, etc.) qui jouent un rôle plus spécifique; par exemple :

- dégager les diverses étapes d'une procédure qui vient d'être utilisée;
- examiner comment fonctionne tel ou tel résultat et en cerner ses limites;
- repérer quelques situations privilégiées pouvant servir de modèles;
- comparer sur un même problème, l'efficacité de diverses techniques;
- élaborer peu à peu des stratégies de démonstration;
- etc.

Une conception ouverte et vivante

Les **problèmes** que traitent les Mathématiques ne sont pas les éléments d'un univers fermé, borné — disons compact — dont l'apparition ne se ferait qu'en cours de Mathématiques sur la feuille blanche ou le tableau noir...
C'est pourquoi, nous avons valorisé à l'intérieur de cet ouvrage, de **nombreuses situations issues de domaines extrêmement variés** : cinématique, mécanique, dénombrement, jeux, vie courante, navigation, etc. Nous n'avons pas hésité non plus à faire appel à des ouvrages de casse-tête ou **divertissements mathématiques** (d'origine russe ou américaine pour la plupart...) ainsi qu'aux divers numéros de la revue *« Jeux et Stratégies »* : de tels sujets ne peuvent susciter qu'**intérêt, initiative et recherche.**
Enfin, mise en page, textes, dessins, clins d'œil, parenthèses..., en plus du choix de certains thèmes, entendent soutenir qu'en Mathématiques aussi, l'**humour** à droit de cité et peut être une tentative décapante...

1

Activités et Systèmes

Intentions

• L'objectif essentiel de ce chapitre est de remettre en jeu les résultats et méthodes du calcul algébrique dans $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre habituelle.

• A cet égard, le support « **problèmes** (résolus ou non) - **activités** » nous a paru mieux adapté qu'un rappel théorique des propriétés de $\mathbb{R}$: il facilite en effet l'approfondissement des méthodes de résolution en mettant l'accent sur les principaux résultats (c'est le rôle qui a été attribué aux **commentaires, remarques, tableaux,** etc., qui accompagnent ces activités).

• Le volume important des exercices et problèmes proposés montre — si besoin en était — qu'il ne saurait être question d'entreprendre leur résolution complète en une période limitée (qui serait située par exemple au début de l'année) : il serait plus judicieux de considérer que **ce chapitre fournit** à tout moment de l'année **de nombreuses occasions** de s'exercer, de reprendre un point de méthode, de comparer avec des techniques ou résultats nouveaux, de revoir quelques exemples significatifs du fonctionnement d'un concept, etc.

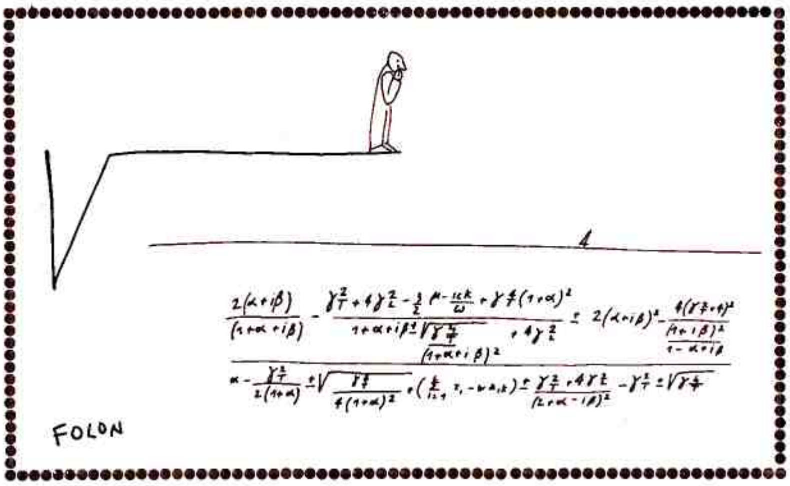
• Signalons, pour être relativement complet que :

1° hormis les exemples de systèmes linéaires résolus par la méthode du pivot de Gauss, il n'est fait appel qu'aux acquis de la classe de Seconde;

2° les activités à l'intérieur du chapitre ont été choisies, en général, en fonction d'un point de méthode important à souligner ou de certains résultats dont le maniement s'avère délicat (les exercices et problèmes en fin de chapitre étant plus diversifiés).

• Ce chapitre a donc une structure particulière par rapport à l'ensemble des autres chapitres de cet ouvrage.

numériques algébriques :



« On me tordait, depuis les ailes jusqu'au bec,
Sur l'affreux chevalet des X et des Y »

Victor HUGO.

Plan du Chapitre

I. CALCUL NUMÉRIQUE

1. Calculs dans $\mathbb{R}$
2. Les puissances
3. Les racines
4. Autour de la proportionnalité

II. TRANSFORMATIONS D'ÉCRITURES. ÉQUATIONS

1. Des équations
2. Des transformations d'écritures
3. Le rôle de certaines données

III. L'ORDRE DANS $\mathbb{R}$

1. Inégalités; comparaison
2. Inéquations
3. Valeur absolue. Distance
4. Valeur approchée. Approximation
5. Extrémums : le rôle des identités remarquables

IV. SYSTÈMES

1. Les systèmes (n, n)
2. Autres systèmes
3. La méthode du pivot de Gauss

I. Calcul numérique

1. Calculs dans $\mathbb{R}$

a. Activité 1

1. Quel est le chiffre des unités du produit de tous les nombres (entiers) **impairs** de 1 à 99?

2. Dans l'expression $4 \times 3 : 5 - 2$ placer des parenthèses pour que le résultat soit :

a) 0,4 ; *b*) 4 ; *c*) −5,6.

3. La pesée impossible. (D'après *Jeux et Stratégies* n° 3.)

« On dispose d'une balance (juste), de 5 masses de 3 g, 6 g, 8 g, 12 g et 16 g et de 33 pièces, une de 1 g, une de 2 g, etc., une de 33 g. Une seule de ces pièces ne peut être équilibrée avec les masses données. Laquelle? »

4. Traduire par une expression algébrique de x les suites de commandes[1] (x est le nombre à l'affichage) :

a) x $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{x^2}$

b) x $\boxed{+}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 5 $\boxed{1/x}$

c) x $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{+}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{-}$ 5 $\boxed{=}$

5. Vingt six réels distincts sont désignés par a, b, c, ..., x, y, z. Exprimer le produit :

$$(x-a)(x-b)\dots(x-y)(x-z).$$

6. Club de jeux. (D'après *Jeux et Stratégies*, n° 27.)

Ce club de jeux compte 1 220 membres qui se répartissent de la manière suivante : 792 jouent au bridge, 829 au poker et 618 aux échecs. Mais 213 savent jouer aux trois jeux : 206 ne jouent qu'aux échecs et au poker et 320 ne jouent qu'aux cartes.
Par contre 806 connaissent au moins deux des jeux.
Combien de joueurs ne pratiquent que le bridge, que le poker et que les échecs?

b. Activité 2

1. Vérifier les égalités suivantes :

$$78^2 - 23^2 = 5\,555 \;;\quad 778^2 - 223^2 = 555\,555$$
$$7\,778^2 - 2\,223^2 = 55\,555\,555.$$

Généraliser ces résultats.

2. Soit a, b, k des entiers relatifs. Vérifier que les nombres : $x = k(a^2 - b^2)$, $y = k(2ab)$ et $z = k(a^2 + b^2)$ sont des entiers qui vérifient la relation[2] : $x^2 + y^2 = z^2$.

3. Établir que pour tous réels A, B et C on a :

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$
$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$
$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2).$$
$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

puis : $(A+B+C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3A^2B + 3A^2C + 3B^2A + 3B^2C + 3C^2A + 3C^2B + 6ABC.$

4. (D'après HARDY and WRIGHT : « *An introduction to the theory of numbers.* » Oxford University press.)

« The equation $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$. There are a number of other Diophantine equations which it would be natural to consider here; and the most interesting is :

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3. »$$

Vérifier dans chaque cas, que x, y, z et t sont des **entiers**, solutions de l'équation.

1° $x = 1$; $y = 6$; $z = 8$; $t = 9$.

2° $x = 17$; $y = 14$; $z = 7$; $t = 20$.

3° $x = 3a^2 + 5a - 5$; $y = 4a^2 - 4a + 6$;
$z = 5a^2 - 5a - 3b^2$; $t = 6a^2 - 4a + 4b^2$
(a entier).

---

(1) $\boxed{\text{Min}}$ est le stockage en mémoire, $\boxed{\text{MR}}$ est le rappel du contenu mémoire.

(2) Dans le chapitre 1 du tome de Géométrie, il est établi — au moyen de la géométrie analytique — que, réciproquement, les solutions **entières** de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ sont de cette forme :

$$x = k(a^2 + b^2) \;;\quad y = k(2ab) \;;\quad z = k(a^2 - b^2).$$

Le mathématicien grec Diophante (cf. livre de Seconde pages 47 et 48) fût l'un des premiers à procéder à une étude systématique des solutions **entières** de certaines équations : d'où le nom d'« équation diophantienne » à propos de tels problèmes (cf. exercice 4).

c. Commentaires

Le tableau 1 résume les identités remarquables qu'il est indispensable de connaître sans hésitation (vu leur rôle important dans des problèmes où interviennent : équations, inéquations, factorisations, minimums, etc.).

REMARQUABLE
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Tableau 1

2. Les puissances

a. Activité 3: "Calcul"

1. Utiliser la calculatrice pour vérifier les égalités :

$$3^6 + 19^6 + 22^6 = 10^6 + 15^6 + 23^6$$

$$560^3 + 70^3 = 525^3 + 315^3 = 552^3 + 198^3$$

(certaines remarques permettent de résoudre les problèmes de dépassement de capacité).

2. Simplifier au maximum les écritures suivantes :

$$\frac{8^{73} \times 3^{-31}}{9^{15} \times 2^{220}} \ ; \ \left(\frac{5^3 \times 2^{-3}}{4 \times 25}\right)^2 : \frac{10^2 \times 5}{28}.$$

3. On pose $x = 12^6$, $y = 6^8$ et $z = 2^{11} \times 3^7$. Vérifier que $x^x \times y^y = z^z$ (d'après CHAO-KO. *Note on the Diophantine equation* $x^x \times y^y = z^z$ - in Journal Chinese Mathematical Society - 1940).

Tableau 2

PUISSANCE	
a, b réels non nuls m, n exposants entiers relatifs	
produits	$a^n \times a^m = a^{m+n}$ $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
quotients	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
puissances	$(a^m)^n = a^{m \times n}$

b. Activité 4: "Ordre de grandeur"

1. Combien de parties différentes le jeu d'échecs permet-il (parties de 40 coups maximum, comme cela est en vigueur dans les tournois et compétitions officiels)? En réponse à cette question extrêmement difficile, le mathématicien belge KRAITCHIK a fourni l'approximation suivante : $(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35}$. Montrer que l'on peut estimer ce nombre à 2×10^{116} (un tel nombre « dépasse l'imagination » : le nombre d'atomes d'hydrogène dans l'univers est estimé par Hubert Reeves à 10^{77}).

2. On suppose que l'on plie en deux une feuille de papier à cigarette très mince d'un cinquantième de millimètre d'épaisseur; puis on replie en deux la feuille ainsi obtenue, etc. : on effectue 50 pliages successifs. Quelle est « l'épaisseur » de la dernière « feuille »?

3. Le mécanisme d'ouverture d'un coffre-fort est constitué de 5 cylindres. Chacun porte sur sa circonférence les 36 lettres de l'alphabet russe.

Аа Бб Вв Гг Дд Ее Жж Зз Ии Й
a b h,v ghé d yé jé zé i i

(Іі)Кк Лл Мм Нн Оо Пп Рр Сс
i k l m n o p r s

Тт Уу Фф Хх Цц Чч Шш Щщ
t ou f ka tsé tché cha chtcha

Ъъ Ьь Ыы (Ѣѣ) Э Юю Яя (Ѳѳ) Ѵѵ
(dur) (mou) y yat é you ya f i

- Calculer le nombre de combinaisons possibles.
- Chaque manipulation des cylindres demande 3 secondes, combien de temps faut-il pour tester toutes les combinaisons? (On suppose que l'on travaille sur le coffre-fort 24 h sur 24.)
- Combien de combinaisons peut-on tester en 10 jours?

c. Un point de méthode

Notre système de numération privilégie les puissances de 10 (à exposants positifs et négatifs). Lorsque l'on vise à **approximer la puissance d'un nombre**, on cherche donc parmi les puissances de ce nombre celles que l'on peut estimer de façon simple à l'aide d'une puissance de 10.

Exemples

$2^{10}=1\,024$ sera estimé à 10^3.
$3^4=81$ est estimé à $2^3\times 10$.

On peut aussi utiliser $3^{13}=1\,594\,323\approx 2^4\times 10^5$. Avec cette dernière estimation, on pourra, par exemple, obtenir une approximation de 3^p en effectuant la **division euclidienne** de p par 13 :

$$p=320\ ;\quad 320=24\times 13+8\ ,$$

d'où :

$$3^{320}=3^8\times(3^{13})^{24}\approx 3^8\times(2^4\times 10^5)^{24}=3^8\times 2^{96}\times 10^{120}.$$

On reprend le même procédé pour 2^{96} :

$$2^{96}=2^{9\times 10+6}=(2^{10})^9\times 2^6\approx 2^6\times 10^{27}\ ,$$

d'où $3^{320}\approx 3^8\times 2^6\times 10^{147}\approx 4\times 10^{152}$.
(On pourra vérifier — à titre d'exercice — que si l'on base l'approximation de 3^{320} sur $3^4\approx 2^3\times 10$, on obtient $3^{320}\approx 10^{152}$).

3. Les racines

a. Activité 5

1. Écrire les nombres suivants sans radicaux au dénominateur :

$$x=\frac{\sqrt3-\sqrt5}{2\sqrt3-\sqrt5}\ ;\quad y=\frac{\sqrt7}{1-\dfrac{2}{\sqrt7-1}}\ ;$$

$$z=\frac{\sqrt2+1}{\dfrac{1}{\sqrt2}+1}\ ;\quad t=\frac{\sqrt6}{\dfrac{1}{\sqrt2}-\dfrac{1}{\sqrt3}}\ .$$

2. Soit α, β, γ les nombres réels :

$$\alpha=\sqrt2+\sqrt3\ ;\quad \beta=\frac{1}{\sqrt3+\sqrt2}\ ;\quad \gamma=\frac{1+\sqrt5}{2}\ .$$

Montrer que : $\alpha^4=10\alpha^2-1$;

$$\beta^4=10\beta^2-1;\quad \gamma=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\gamma}}.$$

3. Simplifier chacune des écritures suivantes après avoir élevé au carré :

$$\sqrt{9-4\sqrt5}-\sqrt{9+4\sqrt5}\ ,\quad \sqrt{3-2\sqrt2}-\sqrt{3+2\sqrt2}.$$

4. Le plan est rapporté à un repère $(O,\vec i,\vec j)$. Existe-t-il des points à coordonnées entières sur la droite d'équation $y=\dfrac{x}{\sqrt2}$?

Même question avec la droite (OA) où A est le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{\sqrt3},\sqrt{12}\right)$.

RACINE CARRÉE

$a>0$: $\sqrt a$ est le seul réel **positif** dont le carré est égal à a.	
L'équation $x^2=a$	$a<0$ pas de solution $a=0$ une solution $x=0$ $a>0$ deux solutions $\sqrt a,-\sqrt a$
a et b positifs	
produit :	$\sqrt{ab}=\sqrt a\sqrt b$
quotient : $b\neq0$	$\sqrt{\dfrac ab}=\dfrac{\sqrt a}{\sqrt b}$
puissance :	$\sqrt{a^n}=(\sqrt a)^n$ (n entier, $a\neq0$ si $n\leqslant0$)
carré	$\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$ pour tout réel a

Tableau 3

b. *Activité 6*

1. Déterminer les racines carrées des nombres : 121 , 12321 , 1234321 et 12345678987654321.

2. On appelle format d'une feuille rectangulaire le rapport entre la longueur et la largeur. Quels sont les formats qui se conservent après pliage (figure 1)?

Comparer avec le format d'une feuille ordinaire (machine à écrire) : dimensions 29,7 cm × 21 cm.

3. Montrer que pour tout point $M(x, y)$ du domaine $\mathcal{D}$ (figure 2) l'expression :

$$\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}$$

est définie et égale à $\sqrt{2(x-y)}$.

4. (D'après « *Le petit Archimède* », n^{os} 33-34, Nov.-déc. 1976.)

Ne pas trébucher sur les racines!

$$(n+1)^2=n^2+2n+1$$

$$(n+1)^2-(2n+1)=n^2.$$

Retranchons $n(2n+1)$ aux deux membres :

$$(n+1)^2-(n+1)(2n+1)=n^2-n(2n+1).$$

Ajoutons $\frac{1}{4}\times(2n+1)^2$.

$$(n+1)^2-(n+1)(2n+1)+\frac{1}{4}\times(2n+1)^2$$
$$=n^2-n(2n+1)+\frac{1}{4}\times(2n+1)^2.$$

$$\left[(n+1)-\frac{1}{2}\times(2n+1)\right]^2=\left[n-\frac{1}{2}\times(2n+1)\right]^2.$$

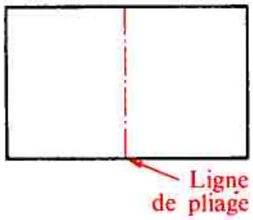
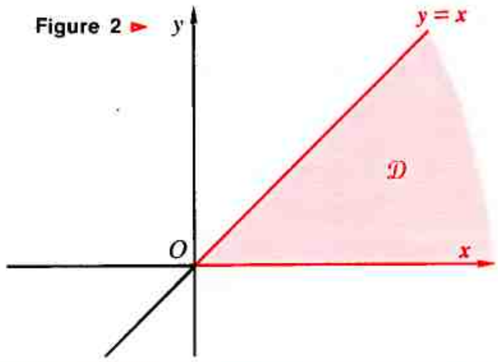


Figure 1

Figure 2 ►



L'extraction de racine donne :

$$n+1-\frac{1}{2}\times(2n+1)=n-\frac{1}{2}\times(2n+1)$$

$$n+1=n.$$

Tous les éléments de ℕ sont égaux.

(D'après « *Mathematics and the imagination* » KASNER NEWMAN.)

Où est l'erreur?

c. *Remarque*

Il faut souligner, à propos de la manipulation des racines carrées, un certain nombre **d'écueils** qui se présentent lors de la résolution d'équations $x^2=a$ ou du traitement d'égalités $a^2=b^2$.

Si une équation telle que $x^2=-3$ ne pose aucun problème (normalement), par contre une égalité telle que $(2-\sqrt{7})^2=11-4\sqrt{7}$ nécessite quelques **précautions :** en effet, avant d'écrire quoi que ce soit pour $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$, il faut **effectuer un contrôle du signe** de $2-\sqrt{7}$.
Comme, manifestement $2-\sqrt{7}<0$, on a : $\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\sqrt{7}-2$ (et non $2-\sqrt{7}$).
(L'exercice 4 ci-dessus (activité 6) est significatif des erreurs qui peuvent advenir lorsque l'on néglige une telle étude préalable...).

4. *Autour de la proportionnalité* (*)

a. *Activité 7*

1. Une horloge sonne six heures du matin en six secondes. En combien de temps sonne-t-elle midi?

2. « Un fermier a de quoi nourrir 6 vaches pendant 60 jours. Pendant combien de jours pourrait-il nourrir 8 vaches? »

(*) Ces problèmes sont à résoudre « directement », en faisant intervenir les notions relatives à la proportionnalité (en évitant, donc, la mise en équation).

3. On considère deux suites proportionnelles (x_1, x_2, x_3, ...), (y_1, y_2, y_3, ...) de nombres réels non nuls. Pour chacune des fonctions f suivantes préciser si les suites $(f(x_1), f(x_2), \dots)$ et $(f(y_1), f(y_2), \dots)$ sont proportionnelles :

- $f : x \longmapsto 3x$;
- $f : x \longmapsto 1/x$;
- $f : x \longmapsto 3x + 1$;
- $f : x \longmapsto x^2$.

b. Activité 8

1. Les deux montres

Je fis marcher deux montres en même temps et constatais que l'une retardait de deux minutes par heure et que l'autre avançait d'une minute par heure. Quand je les regardais de nouveau, celle qui avançait indiquait exactement une heure de plus que l'autre. Combien de temps les montres ont-elles marché?

(D'après *Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd*. Martin GARDNER. Dunod.)

2. La grande évasion

Quinze prisonniers ont décidé de s'évader de leur pénitencier en creusant un tunnel, qui, d'après leurs renseignements, devrait avoir 540 m de longueur.
Ils ont appris que pour creuser un tunnel identique de 360 m de longueur, dix prisonniers, lors d'une précédente évasion, avaient mis dix-huit nuits en travaillant huit heures chaque nuit.
Ces quinze prisonniers se demandent combien ils mettront de nuits pour creuser leur tunnel, en travaillant neuf heures par nuit pour gagner du temps. Pouvez-vous les aider à résoudre leur problème?

(D'après *Jeux et Stratégies*, n° 8.)

II. Transformations d'écritures. Equations

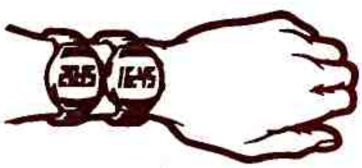
1. Des équations

a. Activité 9: "Petits problèmes"

1. Bertrand court deux fois plus vite qu'il ne marche. Un jour, en allant à l'école, il marche deux fois plus longtemps qu'il ne court et il met 20 min. Le lendemain il court deux fois plus longtemps qu'il ne marche. Combien de minutes met-il pour aller à l'école ce jour-là?

1er Critérium mathématique d'Aquitaine 1985 (pour classe de 4e).

2. (D'après *Jeux et Stratégies*, n° 40.)



On vous a vendu deux montres pour le prix d'une seule. Quelle aubaine! Mais hélas, l'une avance de 10 minutes par heure tandis que l'autre retarde de 10 minutes par heure. Comme vous les mettez toutes deux à l'heure une fois par jour, il vous suffit d'un petit calcul pour savoir l'heure à tout moment de la journée. Et, actuellement, quelle heure est-il?

3. (*Avez-vous (très) mal aux maths?* Jeu-test. (J. LUBCZANSKI). *Monde de l'Éducation*, n° 131, octobre 1986.)

Sur une route sinueuse, vous parvenez enfin à dépasser le poids lourd qui se traînait devant vous à 60 km/h. Combien de kilomètres devrez-vous parcourir à 90 km/h pour avoir le temps de faire un arrêt-pipi (5 min) avant qu'il ne repasse devant vous?

4. Une bouteille pleine de whisky coûte 110 F. Le whisky seul coûte 100 F de plus que la bouteille. Quel est le prix de la bouteille? (Non, ce n'est pas 10 F.)

5. Cette année-là, les prix avaient augmenté de 3 % et les salaires de 5 %. De combien avait augmenté le pouvoir d'achat? (Non, ce n'est pas 2 %.)

b. Activité 10

1. Résoudre les équations suivantes :

- $\left(\frac{1}{2}-x\right)(5x-3)+3x(2x-1)=0.$
- $x^3+2x^2-x-2=0.$
- $\sqrt{2}x^4-4x^2+2\sqrt{2}=0.$
- $\frac{2}{3x-1}-\frac{3x}{3x+1}=\frac{4}{9x^2-1}-1.$
- $\frac{1}{x^2-3}-\frac{1}{x^2+3}=\frac{6}{x^4-9}.$

2. **Au forum.** (D'après *Jeux et Stratégies*, n° 23.)

C'était en l'an 78 avant Jésus-Christ. Deux capitaines de César ont disposé les hommes de leur légion en deux carrés parfaits pour les faire défiler sur le forum. Les effectifs de ces deux légions diffèrent de 217 hommes. La plus nombreuse a sept rangées de soldats de plus que l'autre.
Quel est l'effectif total de ce corps d'armée de César?

3. **Le problème du nénuphar**
(D'après *Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd*. Martin GARDNER. Dunod.)

Quelle est la profondeur du lac?
Le poète Longfellow était un excellent mathématicien qui a souvent insisté sur l'avantage qu'il y a à enrober les problèmes mathématiques dans un vêtement attrayant qui fasse appel à l'imagination des étudiants plutôt que de s'en tenir au langage technique et desséchant des manuels.
Le problème du nénuphar est un de ceux que Longfellow a introduits dans son roman «Kavanagh». Il est si simple que quiconque peut le résoudre même sans connaissances de mathématiques ni de géométrie et cependant il illustre un théorème de géométrie d'une façon qui le rend inoubliable. Je ne me souviens plus des termes exacts dans lesquels Longfellow m'avait décrit le problème lors d'une discussion que nous avions eue à ce sujet.

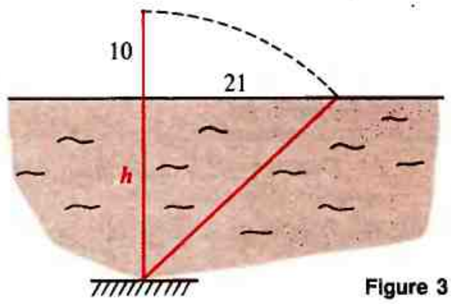


Figure 3

Supposons que le nénuphar se trouve à 10 centimètres au-dessus de la surface. Si on le tire de côté il disparaît sous l'eau à 21 cm de l'endroit où il se trouvait à l'origine.
Quelle est la profondeur de l'eau?

4. **La grosse caisse et le petit scout**
(D'après «*Les Jeux Mathématiques d'Eurêka*». Dunod.)

En l'honneur de la fête du village, un défilé long de 250 m est organisé. Les scouts sont en tête, la fanfare en queue. Vite après le départ, le plus jeune des scouts, chargé de porter le drapeau, se souvient qu'il a confié à la grosse caisse (située dans la dernière rangée de la fanfare) son foulard d'uniforme. Il part alors en courant à 10 km/h pour le chercher et revient à sa place 3 min 18 s plus tard.
A quelle vitesse avance le défilé?

2. Des transformations d'écritures

a. Activité 11 : "Opération étoile"

Soit a, b deux réels avec $b \neq 0$. On pose $a \star b = 1-\frac{a}{b}$.
En utilisant des écritures qui ne font intervenir que 1, a, b, puis $\star$ et les parenthèses — autant que nécessaires — exprimer $a+b$, $a-b$, $a \times b$ et $\frac{a}{b}$.

Exemples

1. $a \star 1 = 1 - a$: « on sait soustraire un nombre à 1 ».
Comme $\frac{a}{b} = 1 - \left(1 - \frac{a}{b}\right) = 1 - a \star b$, on aura $(a \star b) \star 1 = \frac{a}{b}$: « on sait effectuer le quotient de a par b ».

2. On a $(b \star a) = 1 - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{a}$. Dès que l'on connaîtra le procédé de « multiplication par a », on pourra obtenir la différence $a - b$ en appliquant ce procédé à $b \star a$.

Note : On voit donc que cette activité nécessite quelques essais et tâtonnements : on aura intérêt à lister au fur et à mesure les opérations que l'on sait effectuer ou qu'il suffirait que l'on sache effectuer (cf. exemples).
(On ne tiendra pas compte des conditions à imposer à a ou à b; comme dans l'exemple 2 où il faudrait supposer $a \neq 0$.)

b. Activité 12

1. Dans ce qui suit V, a, b désignent des réels positifs non nuls.
On pose $x = \frac{V}{a}$, $y = \frac{V}{b}$ et $z = \frac{V}{a+b}$.

a) Exprimer z en fonction de x et y seuls.

b) Vérifier que la formule obtenue est la même que celle qui donne la résistance équivalente à deux résistances x et y montées en parallèle.

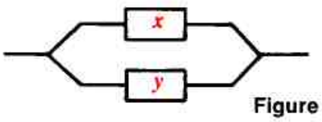


Figure 4

c) Un robinet R_1 peut remplir un réservoir en x minutes. Un robinet R_2 peut remplir ce même réservoir en y minutes. En ouvrant les deux robinets en même temps combien de minutes faudra-t-il?
(Introduire le volume V du réservoir et les débits a et b de chaque robinet.)

2. Les réels V, a, b et c sont positifs. On pose :
$u = \frac{V}{b+c}$; $v = \frac{V}{c+a}$; $w = \frac{V}{a+b}$; $z = \frac{V}{a+b+c}$.
Exprimer z en fonction de u, v et w seuls.

Application : Problème de robinets
(D'après *Jeux et Stratégies*, n° 5)

Au lavoir municipal; il existe trois robinets-vannes. Le débit de chacun d'eux est constant, que les autres soient ouverts ou fermés.
Lorsque l'on ouvre les 1er et 2e robinets, en laissant le 3e fermé, le bac du lavoir se remplit en 1 h 10 minutes.
Lorsque l'on ouvre les 1er et 3e robinets, en laissant le 2e fermé, le bac se remplit en 50 minutes.
Lorsque l'on ouvre les 2e et 3e robinets, en laissant le 1er fermé, le bac se remplit en 56 minutes.
En ouvrant les 3 robinets en même temps, sauriez-vous dire en combien de temps se remplira le bac du lavoir?

c. Activité 13

On se propose de déterminer — s'ils existent — deux nombres réels x et y connaissant leur somme S et leur produit[1] P. (La méthode utilisée est due à Diophante.)

1. On effectue le changement de variable défini par $x = \frac{S}{2} + h$. Montrer qu'alors $y = \frac{S}{2} - h$ et que h est solution (si elle existe) de $h^2 = \frac{S^2 - 4P}{4}$.

2. Conclure sur le problème posé suivant le signe de $S^2 - 4P$ (préciser — lorsqu'ils existent — les réels x et y en fonction de S et P et le cas d'égalité $x = y$).

3. Applications

1° Trouver les dimensions d'un champ rectangulaire de périmètre 740 m et d'aire 3 hectares.

2° Trouver deux nombres connaissant leur moyenne arithmétique 20 et leur moyenne géométrique 12. ($\sqrt{ab}$ est la moyenne géométrique des réels a et b positifs.)

[1] Cette question sera reprise dans le chapitre 2 lors de l'étude du trinôme du second degré.

3. Le rôle de certaines données

a. Exemple 1

Le texte qui suit est extrait de « *La découverte des mathématiques* » par G. POLYA. DUNOD.

Un homme marche pendant cinq heures. Il part sur un terrain plat, puis monte sur une colline, fait demi-tour et revient à son point de départ en prenant la même route. Il fait 4 kilomètres à l'heure sur du plat, 3 en montée et 6 en descente. Calculer la distance totale parcourue.
Le problème est-il raisonnable? Les données sont-elles suffisantes pour déterminer l'inconnue? ou bien insuffisantes? ou redondantes?
Il semble bien que les données sont insuffisantes, que manquent quelques renseignements sur la longueur de la partie inclinée sur la route. Si l'on connaissait la durée du parcours en montée, ou de la descente, il n'y aurait aucune difficulté. Mais sans de telles indications le problème paraît indéterminé.
Tentons pourtant de le résoudre. Soit x la distance totale parcourue, y la longueur de la montée.

Le parcours comporte quatre phases différentes : plat, montée, descente, plat.

Il est facile d'exprimer le temps total du parcours de deux manières différentes : $\dfrac{x/2-y}{4}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{x/2-y}{4}=5.$

Nous avons seulement une équation pour déterminer deux inconnues — cela est insuffisant. Cependant, lorsqu'on regroupe les termes, on trouve que le coefficient de y, est égal à zéro. Il reste seulement $\dfrac{x}{4}=5$ **ou** $x=20.$

Les données suffisent donc à déterminer x, la seule inconnue demandée dans l'énoncé du problème. Finalement le problème n'est donc pas indéterminé. Nous nous étions trompés.

Nous nous étions trompés, on ne peut le nier, mais nous soupçonnons tort que l'auteur du problème a mis de la bonne volonté à nous tromper par un choix astucieux des trois nombres 3, 6 et 4. Pour tirer cette astuce au clair, substituons aux trois nombres 3, 6, 4 les lettres u, v, w qui représentent les distances de marche en montée, en descente, sur le plat.

On pourrait refaire le problème en substituant aux nombres initiaux les lettres précédentes, et exprimer ainsi le temps total du parcours de deux manières différentes : $\dfrac{x/2-y}{w}+\dfrac{y}{u}+\dfrac{y}{v}+\dfrac{x/2-y}{w}=5$ **ou** $\dfrac{x}{w}+\left(\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}-\dfrac{2}{w}\right)y=5.$

Il n'est pas possible de déterminer x à partir de cette équation, à moins que le coefficient de y ne disparaisse. Le problème est donc indéterminé, à moins que $\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}\right).$

Lorsque les trois allures de marche sont choisies au hasard, elles ne vérifient pas la relation et le problème est indéterminé. Nous avons été induits en erreur par une astuce vicieuse!

(La relation critique peut s'exprimer par la formule $w=\dfrac{2uv}{u+v}$ **qui signifie que l'allure sur terrain plat est la moyenne *harmonique* de l'allure de montée et de l'allure de descente.)**

b. Exemple 2

Activité 14

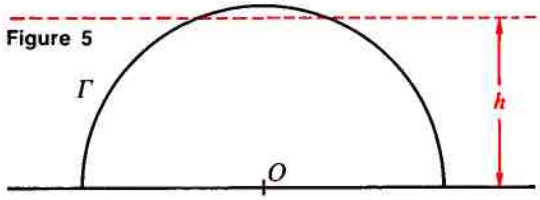
On considère un demi-cercle Γ de rayon 1. A tout réel h tel que $0<h<1$, on fait correspondre suivant le schéma de la figure 5 le domaine $\mathcal{D}$ (en rose) dont il s'agit d'exprimer l'aire.
On désigne par x et y les rayons des demi-cercles intérieurs.

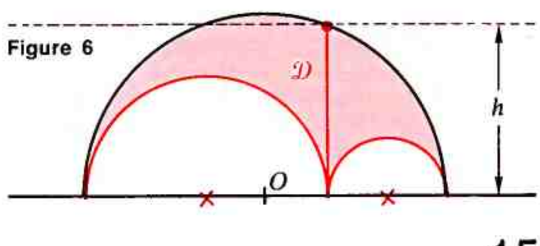
1° Établir la relation $x^2+y^2=1-\dfrac{h^2}{2}$.

2° En déduire l'expression de l'aire cherchée.

3° Reprendre le problème en supposant que Γ a pour rayon R (avec $0<h<R$).

4° Remarques?





c. Commentaires

Ces deux exemples confirment certains points de vue sur le **calcul algébrique** (et les transformations d'écritures) déjà sensibles à propos des problèmes de vitesse, de débit, etc. Le calcul algébrique (ou littéral) permet en effet, d'aborder un problème dans un cadre plus général[1] et donc :

1° d'approfondir notre vision et notre compréhension du problème;

2° de cerner le rôle de certaines variables et notamment l'absence de certaines données : est-ce un cas d'espèce (cf. l'exemple de Polya)? est-ce une loi générale?

III. L'ordre dans $\mathbb{R}$

1. Inégalités, comparaison

a. Activité 15

1. Le rouge et le bleu

On considère un tableau de réels **distincts**, de forme rectangulaire. Dans chaque **ligne** on colorie en **rouge** la case comportant **le plus grand** nombre de la ligne et dans chaque **colonne** on colorie en **bleu** la case comportant le **plus petit** nombre de la colonne.
(On pourra être amené à donner des exemples de tels tableaux dans les questions ci-dessous.)

1° Peut-on avoir une case bicolore (rouge et bleu)?

2° Une case bleue peut-elle contenir un nombre plus grand qu'une case rouge?

3° On sélectionne dans **chaque colonne** le réel le **plus grand.** L'un de ces nombres peut-il être plus petit que l'un de ceux situés dans une case bleue?

2. Systèmes de vente

(D'après la *Magie des Paradoxes*. Martin GARDNER. Diffusion Belin.)

1° Un magasin de disques solde des vieux disques. En supposant dans chaque cas que **tous** les disques ont été vendus, quel est le système de vente le plus avantageux?

30 disques (rock) — 30 disques (classique) : vente séparée

60 disques (30 rock) (30 classique) : vente groupée

Figure 6 A

2° Même question dans la situation suivante :

30 disques (rock) — 30 disques (sud-américain) : vente séparée

60 disques (30 rock) (30 sud-américain) : vente groupée

Figure 6 B

3° Étude du cas général

- N, p et q sont des entiers supérieurs à 1 tels que p et q divisent N et $p+q$ divise $2N$.
- a et b sont des réels positifs.

a F les p objets	b F les q objets	$(a+b)$ F les $p+q$ objets
N objets	N objets	$2N$ objets
vente séparée		vente groupée

a) Calculer les prix **moyens** de chaque objet : en vente séparée m_S, et en vente groupée m_G.

b) Montrer que si $p=q$ le système de vente est indifférent.

c) On suppose $p<q$. Montrer que m_S et m_G sont rangés dans le même ordre que les prix moyens de chaque objet dans la vente séparée, à savoir $\frac{a}{p}$ et $\frac{b}{q}$.

d) Retrouver les résultats obtenus en *1°* et *2°*.

[1] En substituant, par exemple, des données littérales à des données numériques fixées.

b. Activité 16

1. Ranger par ordre croissant les nombres :

$$-\frac{1}{2\sqrt{13}}\ ;\ \frac{\sqrt{10}}{6}-\frac{2}{3}\ ;\ \sqrt{3}-\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\ ;\ \frac{-\sqrt{15}+\sqrt{11}}{4}.$$

a) en utilisant la calculatrice;

b) sans la calculatrice.

2. Soit u, v deux réels de l'intervalle $]-1, 1[$. Montrer que $1+uv\neq 0$ et que $\dfrac{u+v}{1+uv}$ appartient à $]-1, 1[$.

3. Soit a, b deux réels positifs. Montrer que $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.
En déduire que pour a, b, c réels positifs, on a :

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc.$$

Quand obtient-on une égalité?

4. Soit E un ensemble à n éléments, A et B deux parties de E ayant respectivement p et q éléments. Montrer qu'il y a au moins $p+q-n$ éléments communs à A et B.

5. Bains de soleil

Sur cette plage, 90 % des femmes qui prennent leur bain de soleil portent des lunettes noires, 85 % un soutien-gorge (tout de même...), 80 % ont un chapeau et 75 % de la crème solaire. Quel est alors le pourcentage minimal de celles qui ont à la fois des lunettes noires, un soutien-gorge, un chapeau et de la crème solaire?

(D'après *« Jeux et Stratégies »*, n° 2.)

c. Commentaires

Deux points sont à dégager des activités précédentes.

1° La nécessité, pour obtenir des inégalités ou effectuer des comparaisons, de disposer des règles concernant l'ordre et les opérations[1].

2° La mise en œuvre fréquente de la **méthode** suivante : « **pour comparer deux réels, on compare leurs images par une fonction monotone sur un intervalle** ».
C'est le cas notamment, pour des réels **positifs**, des fonctions $x\longmapsto x^2$, $x\longmapsto \dfrac{1}{x}$, $x\longmapsto\sqrt{x}$. Rappelons à ce sujet que :

- deux réels positifs, leurs **carrés** et leurs **racines carrées** sont rangés dans le **même ordre;**
- deux réels positifs (strictement) et leurs **inverses** sont rangés dans l'**ordre contraire.**

2. Inéquations

a. Exemple résolu

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $\dfrac{x}{x-2}-2\geqslant\dfrac{-x+3}{x+1}.$

- Ensemble de définition de l'inéquation $\mathbb{R}-\{-1; 2\}$.
- L'inéquation est équivalente à chacune des inéquations suivantes :

$$\frac{-x+4}{x-2}\geqslant\frac{-x+3}{x+1}\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}\frac{-x+4}{x-2}-\frac{-x+3}{x+1}\geqslant 0\Longleftrightarrow\frac{(-x+4)(x+1)-(-x+3)(x-2)}{(x-2)(x+1)}\geqslant 0\overset{(2)}{\Longleftrightarrow}\frac{2(5-x)}{(x-2)(x+1)}\geqslant 0.$$

- Tableau de signes **(3)** avec $f(x)=\dfrac{2(5-x)}{(x-2)(x+1)}$.

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$5-x$		+		+		+	0	−	
$x-2$		−		−	0	+		+	
$x+1$		−	0	+		+		+	
$f(x)$		**+**	‖	**−**	‖	**+**	0	**−**	

- L'inéquation admet pour solution $]-\infty, -1[\cup]2, 5]$.

[1] Voir chapitre 3 du livre de Seconde.

Commentaires

(1) Multiplier par $x-2$ ou par $x+1$ ou par le produit $(x-2)(x+1)$, chaque membre de l'inégalité suppose que l'on contrôle le signe de ces expressions : cette méthode conduirait à l'examen de plusieurs cas et à une discussion des résultats obtenus. Un tel procédé est à éviter : il est beaucoup plus sûr d'effectuer un regroupement des termes dans un des membres de l'inégalité.

(2) Comme il n'y a pas a priori de factorisation possible, on développe et on réduit le numérateur.

(3) Les «doubles barres» correspondent aux valeurs -1 et 2 pour lesquelles l'inéquation n'est pas définie.
Notons que dans l'élaboration d'un tel tableau le résultat essentiel est :

L'expression $ax+b$ $(a\neq 0)$ change de signe en $-\dfrac{b}{a}$.

b. Activité 17

1. Résoudre les inéquations ou systèmes d'inéquations suivants :

a) $\dfrac{2x+5}{1+2x} > \dfrac{1-2x}{5-2x}$. *b*) $\dfrac{2x-3}{x+1} + \dfrac{3}{x-1} < \dfrac{2x^2}{x^2-1}$.

c) $\begin{cases} \dfrac{x^2-(2x-3)^2}{2-x} \leqslant 0 \\ x^2 \geqslant x. \end{cases}$

2. Un mobile effectue la moitié d'un trajet à la vitesse constante v, l'autre moitié à la vitesse constante x ($v>0$ et $x>0$). On suppose v fixé.

1° Exprimer la vitesse moyenne $f(x)$ sur le trajet total.

2° Résoudre et interpréter les inéquations suivantes :

a) $f(x)>0{,}5v$, *b*) $f(x)>1{,}5v$, *c*) $f(x)>2v$.

3. Valeur absolue. Distance

a. Activité 18

1. Soit a, x des réels quelconques et r un réel strictement positif. Justifier que les énoncés suivants ont la même signification :

- $|x-a| \leqslant r$ **(en termes de *valeur absolue*)**,
- $d(a, x) \leqslant r$ **(en termes de *distance*)**,
- $x \in [a-r, a+r]$ **(en termes d'*intervalle*)**,
- $a-r \leqslant x \leqslant a+r$ **(en termes d'*encadrement*)**.

Compléter le tableau ci-dessous :

En termes de :			
valeur absolue	distance	intervalle	encadrement
$\lvert x-3\rvert \leqslant 1$			
	$d(x, -4) \leqslant 2$		
			$-2 \leqslant x \leqslant 2$
		$x \in [6, 10]$	

VALEUR ABSOLUE

définitions	$\begin{cases} \text{pour } x \geqslant 0 : \lvert x\rvert = x \\ \text{pour } x \leqslant 0 : \lvert x\rvert = -x \end{cases}$ $d(x, y) = \lvert x-y\rvert$ distance
opérations	$\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert \times \lvert y\rvert$ $\lvert x^n\rvert = \lvert x\rvert^n$ $\left\lvert \dfrac{x}{y}\right\rvert = \dfrac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$ $(y\neq 0)$ $\lvert x+y\rvert \leqslant \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ $\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$
équations inéquations	$\lvert x\rvert = \lvert y\rvert \iff \left\{ x=y \text{ ou } x=-y \right.$ $m>0$ $\lvert x\rvert = m \iff \left\{ x=m \text{ ou } x=-m \right.$ $\lvert x\rvert \leqslant m \iff -m \leqslant x \leqslant m$

2. Résoudre les équations suivantes :

a) $4|x+1| = 3|x+2|$,

b) $|x+7| = 2x+1$,

c) $x+7 = |2x+1|$.

3. Représenter graphiquement les réels x vérifiant :

a) $2 \leqslant |x| < 5$, *c*) $|x-4| \leqslant |x-8|$,

b) $5 \leqslant |3x-1| \leqslant 14$, *d*) $|x| \leqslant x$.

4. On pose, pour x réel :
$$A(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \ldots + |x-99| + |x-100|.$$
Montrer avec un minimum de calculs que $A(x)$ est constant sur l'intervalle $[50, 51]$.

5. Identifier dans les schémas de la figure 7 les courbes représentatives des fonctions :

$x \longmapsto 1 + |x|$; $x \longmapsto |1+x|$;
$x \longmapsto |x-1|$; $x \longmapsto |x| - 1$.

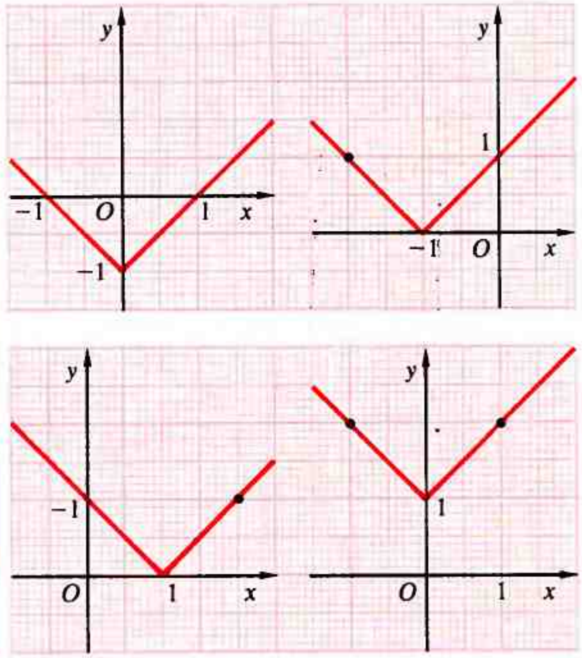


Figure 7

b. Exercice résolu

Résoudre l'équation $\mathbf{3\,|2-x| + 2\,|5-x| = 7}$.

• On exprime à l'aide d'un tableau l'expression $3\,|2-x| + 2\,|5-x|$ sans valeur absolue :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$3\,\lvert 2-x\rvert$		$3(2-x)$	0	$3(x-2)$	9	$3(x-2)$	
$2\,\lvert 5-x\rvert$		$2(5-x)$	6	$2(5-x)$	0	$2(x-5)$	
$3\,\lvert 2-x\rvert + 2\,\lvert 5-x\rvert$		$16-5x$	6	$x+4$	9	$5x-16$	

Nous sommes donc ramenés à résoudre trois équations :

(1) Résoudre $16-5x=7$ dans l'intervalle $]-\infty ; 2]$.

(2) Résoudre $x+4=7$ dans l'intervalle $[2 ; 5]$.

(3) Résoudre $5x-16=7$ dans l'intervalle $[5 ; +\infty[$.

La technique mise en œuvre s'appuie sur les deux points suivants :

1° On résout les équations dans $\mathbb{R}$;

2° On contrôle l'appartenance des solutions obtenues à l'intervalle envisagé.

Résolution de $16-5x=7$ dans $]-\infty ; 2]$	Résolution de $x+4=7$ dans $[2 ; 5]$	Résolution de $5x-16=7$ dans $[5 ; +\infty[$
$-5x=-9$	$x=7-4$	$5x=23$
$x=\frac{9}{5}$	$x=3$	$x=\frac{23}{5}$
$\frac{9}{5} \in]-\infty ; 2]$	$3 \in [2 ; 5]$	$\frac{23}{5} \notin [5 ; +\infty[$
donc $\frac{9}{5}$ est solution	donc 3 est solution	$\frac{23}{5}$ n'est pas solution

En résumé : **l'ensemble des solutions de $3\,|2-x| + 2\,|5-x| = 7$ est $\left\{\frac{9}{5}, 3\right\}$.**

Commentaires

L'utilisation de la **représentation graphique** de la fonction $x \longmapsto 3|2-x|+2|5-x|$ permet de préciser parmi les intervalles précédents ceux qui contiennent une solution de l'équation (et donc d'éviter des résolutions inutiles). Cette méthode, plus économique, déjà entrevue en Seconde[1] sera largement développée dans les chapitres consacrés aux fonctions.

c. Activité 19

Résoudre l'inéquation $|x+3|+|x-3| \leqslant 2|x|$ à l'aide d'un tableau permettant d'exprimer « sans valeur absolue » :

$x \longmapsto 2|x|-|x+3|-|x-3|$ (par exemple).

Autre méthode : montrer que si x est solution de l'inéquation, $-x$ l'est également.
Résoudre l'inéquation sur $[0, +\infty[$ et conclure.

4. Valeur approchée. Approximation

a. Activité 20

1. Comparer les aires de ces deux domaines en utilisant successivement comme valeurs approchées de π : $\frac{22}{7}$ puis 3,14 et 3,15.

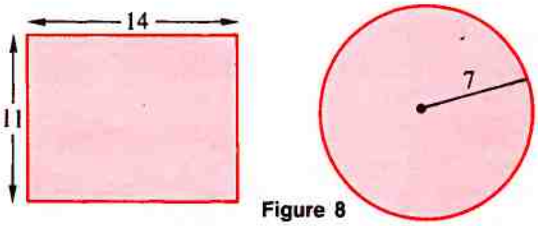


Figure 8

Conclure... tout de même.

2. Ptolémée, mathématicien grec du IIe siècle, utilisait comme valeur approchée de $\sqrt{3}$ le nombre :

$$a = \frac{103}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3}.$$

En utilisant votre machine à calculer :

1° dire si a est une valeur approchée par excès ou par défaut;

2° chercher le nombre de décimales exactes et en déduire la précision de cette approximation.

3. Encadrer le plus précisément possible les nombres suivants.

- $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (volume de la sphère de rayon R) avec $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ et $1{,}51 < R < 1{,}52$;
- l'aire d'un triangle équilatéral de côté a, avec $12 < a < 12{,}1$ et $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ à 10^{-2} près par défaut;
- la hauteur d'eau dans une cuve cylindrique à base circulaire avec :

V (volume de l'eau) : $|V-1| < 3 \times 10^{-4}$
R (rayon de la base) : $R \approx 2$ à 10^{-3} près;
(le choix de l'encadrement de π est libre...).

4. Deux nombres x et y sont connus à ε près chacun. Quelle valeur doit-on imposer au plus à ε afin de connaître $x+y$ à 10^{-3} près? $x-y$ à 10^{-2} près? $3x-7y$ à 10^{-1} près?

b. Activité 21

1. Un document EDF donne les informations suivantes.

- *électricité*

CONSOMMATION DU 07/11/85 AU 07/03/86
29 JOURS A 0,6133 F + 91 JOURS A 0,6072 F
SOIT 120 JOURS A 0,6087 F

- *gaz*

CONSOMMATION DU 07/11/85 AU 07/03/86
29 JOURS A 0,1844 F + 91 JOURS A 0,1825 F
SOIT 120 JOURS A 0,1830 F

- **Électricité**

On pose $a = 0{,}6133$ et $b = 0{,}6072$.
Vérifier que 0,6087 est une valeur approchée de $\frac{29a+91b}{120}$ à 10^{-4} près.
Examiner s'il s'agit d'une valeur par défaut ou par excès.

- **Gaz**

Reprendre les mêmes questions.

[1] Cf. en particulier le chapitre 12 du livre de Seconde.

2. Montrer que si x et y sont des valeurs approchées de a et b à ε près, $\varepsilon > 0$, pour tout couple de réels (α, β) strictement positifs $\dfrac{\alpha x + \beta y}{\alpha + \beta}$ est une valeur approchée de $\dfrac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta}$ à ε près.

3. Vérifier que :

$$1+\sqrt{3} = 2 + \frac{2}{1+\sqrt{3}} \qquad (1)$$

En déduire : $$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\sqrt{3}}} \qquad (2)$$

puis : $$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{1+\sqrt{3}}}} \qquad (3)$$

On suppose (seulement) connu $1 < \sqrt{3} < 2$. Quelle précision obtient-on sur le calcul approché de $\sqrt{3}$ à l'aide des relations (1), (2) et (3)?

5. Extrémums : le rôle des identités remarquables

a. La relation $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

Elle montre :

- d'une part, que le **produit** de deux nombres réels x et y, de **somme fixée** est **maximum** lorsque ces deux nombres sont égaux;
- d'autre part, que la **somme** de deux nombres réels x et y, de **produit fixé** est **minimum** lorsque ces deux nombres sont égaux.

Remarque

Dans de nombreuses situations, ces résultats ne s'appliquent pas « tels quels » : il faut parfois procéder à une transformation d'écritures ou à un changement de variables. Ainsi, par exemple :
soit a, b deux réels donnés, pour obtenir le minimum de $ax + by$ lorsque le produit xy est fixé, on pourra raisonner ainsi :

1° On pose $X = ax$ et $Y = by$.

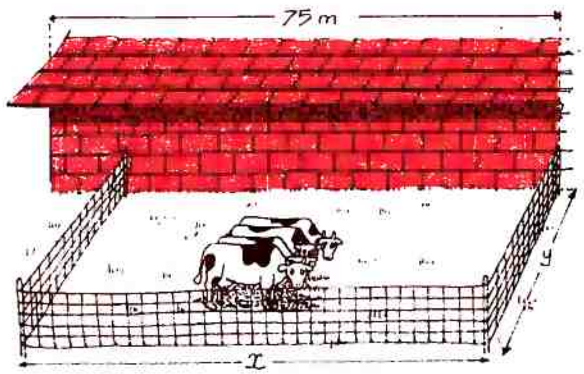
2° Le produit $XY = (ab)(xy)$ est fixé. La somme $X + Y$ est donc minimum lorsque $X = Y$, c'est-à-dire lorsque $ax = by$ ou encore $\dfrac{x}{y} = \dfrac{b}{a}$.

Activité 22

1. Montrer que parmi les losanges d'aire donnée, le carré est celui de périmètre minimum.

2. De même, parmi les losanges de périmètre donné, montrer que c'est le carré qui a l'aire maximum.

3. Le mur d'une étable a 75 m de long. Le propriétaire veut appuyer un enclos rectangulaire contre ce mur. Il dispose de 100 m de clôture. On veut déterminer x et y de façon que l'aire A de l'enclos soit la plus grande possible.



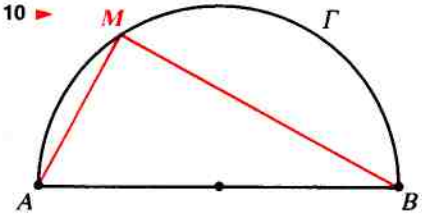
b. La relation $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$

On en déduit que :

- $x + y$ **étant fixé,** $x^2 + y^2$ est **minimum** pour $x = y$.
- $x^2 + y^2$ **étant fixé,** $x + y$ est **maximum** pour $x = y$.

Exemple

Figure 10 ►



Soit un demi-cercle Γ de diamètre $[A, B]$.
Déterminer M sur Γ de façon que le périmètre du triangle AMB soit maximum.

Désignons par R le rayon de Γ et notons x et y les distances AM et BM. Il s'agit donc de déterminer le **maximum de $x+y+2R$** lorsque M décrit Γ.
Le triangle AMB étant rectangle en M (résultat classique de géométrie), d'après le théorème de Pythagore : $AM^2+BM^2=AB^2$, c'est-à-dire $x^2+y^2=(2R)^2$. Il découle de l'identité précédente que $x+y$ est maximum lorsque $x=y$. Il est clair alors que le maximum de $x+y+2R$ est atteint lorsque $x=y$, autrement dit, lorsque **M est le point de Γ situé sur la médiatrice de $[A, B]$.**

Activité 23[1]

1. Déterminer les rectangles inscrits dans un cercle donné de centre O et de rayon R et qui sont de périmètre maximum.

2. Comment choisir I sur la diagonale $[A, C]$ de façon que l'aire du domaine en rose (figure 11) soit minimum.

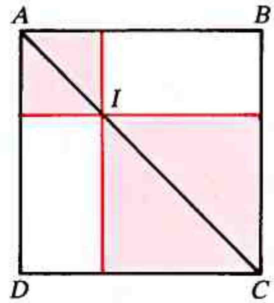


Figure 11 ►

IV. Systèmes

Les activités proposées dans ce paragraphe sont accompagnées de **problèmes résolus,** avec pour objectifs :

1° de rappeler les notions et techniques relatives à la résolution de systèmes linéaires : **déterminant, méthode de substitution, méthode des combinaisons linéaires, interprétation graphique;**

2° d'initier à la méthode de résolution appelée méthode du **pivot de Gauss.**

1. Les systèmes (n, n)

Les systèmes (n, n) sont les systèmes linéaires de n équations à n inconnues ($n \geqslant 1$).

[1] Les deux exercices sont extraits de *« Les problèmes de recherche de configurations astreintes à des conditions extrémales de mesure »* Publications du groupe de Recherche sur l'Enseignement de la Géométrie de l'IREM d'Aix-Marseille. (Juin 1982.)

a. Exemples 1

• $\begin{cases} 7x+8y=2 \\ 9x+10y=4. \end{cases}$

On calcule le **déterminant** du système $D=\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}=70-72=-2$. Le déterminant étant non nul, le système admet une **solution unique** que nous pouvons déterminer par deux méthodes :

méthode de substitution

1° On exprime y en fonction de x à l'aide d'une des équations, par exemple avec la seconde :

$$y=\frac{4-9x}{10}.$$

2° On remplace y dans l'autre équation par le résultat ainsi obtenu :

$$7x+8\times\frac{4-9x}{10}=2.$$

3° On résout l'équation du premier degré en x :

$$x=6.$$

4° On calcule la valeur de y avec l'expression du 1° : $y=-5$.

méthode des combinaisons linéaires

1° On multiplie chacune des équations du système par des nombres réels non nuls de façon que par addition ou soustraction, l'une des inconnues soit éliminée :

$$\begin{cases} 7x+8y=2 \\ 9x+10y=4 \end{cases} \begin{vmatrix} (\times 5) \\ (\times(-4)) \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 35x+40y=10 \\ -36x-40y=-16 \end{cases}$$

après addition : $-x=-6$, d'où :

$$x=6.$$

2° On peut utiliser le même procédé[1] pour trouver y :

$$\begin{cases} 7x+8y=2 \\ 9x+10y=4 \end{cases} \begin{vmatrix} (\times 9) \\ (\times 7) \end{vmatrix} \quad \begin{cases} 63x+72y=18 \\ 63x+70y=28 \end{cases}$$

après soustraction : $2y=-10$, d'où

$$y=-5.$$

Solution du système
$x=6$; $y=-5$.

• $\begin{cases} (\sqrt{3}+1)x+4y=7-m \\ \frac{1}{2}x+(\sqrt{3}-1)y=1 \end{cases}$ m réel donné.

Le déterminant du système est :

$$D=\begin{vmatrix} \sqrt{3}+1 & 4 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3}-1 \end{vmatrix}=0.$$

On peut **interpréter géométriquement** ce résultat par : les droites définies par les équations ci-dessus sont parallèles.
Elles sont confondues si et seulement si les suites des coefficients sont des suites **proportionnelles.**

LES SYSTÈMES (2,2)

$\begin{cases} ax+bx=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ **déterminant**

$D\neq 0$: 1 seule solution (substitution, combinaisons linéaires).
$D=0$: pas de solution **ou** une droite de solutions.

[1] On peut aussi reporter la valeur de x dans l'une des équations et résoudre l'équation du premier degré en y ainsi obtenue.

On est donc amené à étudier le déterminant (par exemple) :

$$\begin{vmatrix} \sqrt{3}+1 & 7-m \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(m+2\sqrt{3}-5).$$

D'où :

. $m=5-2\sqrt{3}$; le déterminant est nul : les droites sont confondues. **L'ensemble des solutions du système correspond à la droite d'équation $\frac{x}{2}+(\sqrt{3}-1)y=1$.**

. $m \neq 5-2\sqrt{3}$: les droites sont parallèles mais distinctes. **Pas de solution.**

Activité 24

1. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} -5x+3y=-3 \\ 7x-5y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-y}{6}-\dfrac{8x-17y}{14}=\dfrac{2x+15y}{21}-1 \\ \dfrac{x+y}{2}=1-\dfrac{8x-5y}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{y+3}=14 \\ \dfrac{5}{x-1}-\dfrac{4}{y+3}=5. \end{cases}$$

2. Soit m un réel fixé. Résoudre et discuter les systèmes :

$a)$ $\begin{cases} (m-1)x-2y=1 \\ -4x+(m+1)y=2 \end{cases}$ $\quad b)$ $\begin{cases} -mx+y=1-m \\ m^2x-2y=m. \end{cases}$

3. (D'après *Jeux et Stratégies*, n° 23.)

« Una cum mulo vinum portabat asella
Atque suo graviter sub pondere pressa gemebat
Talibus at dictis mox increpat ipse gementen
Mater, quid luges, tenerae de more puellae?
Dupla luis, si des mensuram, pondera gesto;
At si mensuram accipias, aequalia porto.
Dic mihi mensuras, sapiens geometer, istas? »

Pour les non latinistes :

« Une ânesse accompagnée d'un mulet portait une charge de vin; écrasée sous le poids, elle se plaignait bruyamment.

Le mulet mit alors fin à ses plaintes en lui disant : « Qu'as-tu à te plaindre comme une petite fille, la mère? Si je prenais une de tes mesures, ma charge serait double de la tienne; mais si tu prenais une des miennes, j'en aurais encore autant que toi. »
Dis-moi, savant mathématicien, combien de mesures portait chacun d'eux? »

b. Exemple 2

Un problème d'Euler

« Trois personnes jouent ensemble. Ils conviennent qu'à chaque partie, le perdant doublera l'avoir de chacun des deux autres joueurs. Ils se retirent du jeu avec 24 louis chacun, on demande combien chacun avait d'argent en venant jouer sachant qu'ils ont joué trois parties et que chacun d'eux a perdu une partie.

Désignons par x, y, z les avoirs des joueurs au début du jeu (x désignant l'avoir de celui ayant perdu la 1[re] partie, y celui du perdant à la 2[e] partie, z celui du dernier perdant).

Le tableau ci-contre traduit les données de l'énoncé (on contrôlera les calculs intermédiaires).

	Avoir des joueurs		
parties	1[er] joueur	2[e] joueur	3[e] joueur
au début	x	y	z
après la 1[re] partie	$x-y-z$	$2y$	$2z$
après la 2[e] partie	$2(x-y-z)$	$3y-x-z$	$4z$
après la 3[e] partie	$4(x-y-z)$	$2(3y-x-z)$	$7z-x-y$

Nous sommes donc amenés à résoudre le système :

$$\begin{cases} 4(x-y-z)=24 \\ 2(3y-x-z)=24 \\ 7z-x-y=24 \end{cases} \quad \text{soit, après simplifications :} \quad \begin{cases} x-y-z=6 & (1) \\ -x+3y-z=12 & (2) \\ -x-y+7z=24 & (3) \end{cases}$$

On procède par **combinaisons linéaires :**

en additionnant (1) et (2) : $2y-2z=18$ ou $y-z=9$;
en additionnant (1) et (3) : $-2y+6z=30$ ou $-y+3z=15$.

On en déduit facilement : $z=12$ puis $y=21$ et enfin $x=39$.
On peut **vérifier** qu'effectivement $x=39$, $y=21$, $z=12$ est la solution du système.

Remarque

Ce problème peut être résolu sans faire appel à un système linéaire, en examinant les avoirs des joueurs dans l'**ordre inverse :** à la fin de la 3e partie **(24, 24, 24)**, puis à la fin de la 2e **(?, ?, ?)**, etc. (laissé à titre d'exercice).

Commentaires

1. On peut également résoudre le système à l'aide de la méthode de substitution.
Cette méthode a l'avantage de passer d'un système à un système **équivalent** (c'est-à-dire admettant les mêmes solutions), ce qui n'est pas le cas de la méthode par combinaisons linéaires :

Soit le système (S) :

$$(S) \begin{cases} x-y=0 & (1) \\ y-z=1 & (2) \\ z-x=0 & (3) \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution puisque, d'après (1) et (3), $x=y=z$ et donc $y-z=0$: l'équation (2) ne peut être satisfaite.
Considérons alors le système (S') obtenu par les combinaisons linéaires :

$(1)+(2) \longrightarrow x-z=1$
$(1)+(3) \longrightarrow z-y=0$ d'où $(S') \begin{cases} x-z=1 \\ z-y=0 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$
$(2)-(3) \longrightarrow x+y-2z=1$

Ce système (S') admet la solution $x=1$, $y=0$, $z=0$. Il n'est donc pas équivalent au système (S)!

Explication : La dernière combinaison linéaire $(2)-(3)$ ne rajoute rien aux deux premières : elle en découle par différence. Et donc le système (S') est équivalent à $\begin{cases} x-z=1 \\ z-y=0 \end{cases}$: on a égaré une équation en chemin.

Moralité : lorsque l'on résout un système par combinaisons linéaires, il faut procéder à une **vérification...**

2. Un système de 3 équations à 3 inconnues n'a pas systématiquement une solution unique :

Exemple *a*

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ n'a pas de solution.

Exemple *b*

$\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases}$ a une infinité de solutions; de façon plus précise, l'ensemble des solutions est $\{(t, t, t),\ t \in \mathbb{R}\}$.

Exemple *c*

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ -x-y-z=-1 \end{cases}$ a aussi une infinité de solutions à savoir tous les triplets (x, y, z) vérifiant $x+y+z=1$.

Activité 25

1. Résoudre les systèmes :

$$a) \begin{cases} x-y-2z=1 \\ 2x+2y+z=-1 \\ -3x-y+z=1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} \dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z}{2} \\ x+y+z=35. \end{cases}$$

2. Fabriquer un système (3, 3) de façon que, pour tout réel t, les triplets (x, y, z) avec $x=t+1$, $y=2t-1$ et $z=3t$ soient solutions du système.

3. Calculer les rayons des trois cercle en fonction des côtés du triangle ABC (figure 12).

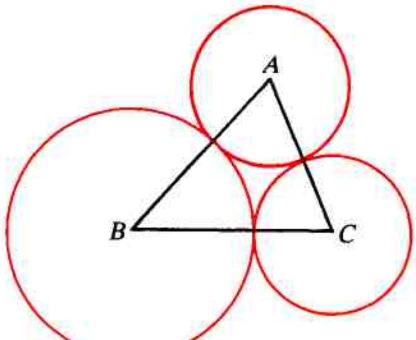


Figure 12

4. On donne a, b et c réels et le système de trois équations :

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = a \\ -2x + 3y - z = b \\ -x - 2y + 3z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système d'inconnues x, y et z.

c. *Exemple 3*

Activité 26

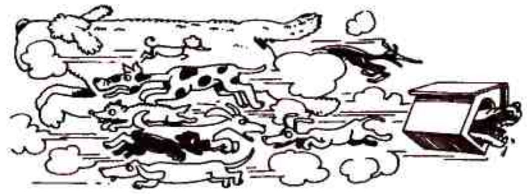
1. Un système (4, 4).

Est-il possible d'écrire sur les faces d'un tétraèdre des nombres deux à deux distincts ayant la propriété suivante : « la somme des nombres affectés aux faces ayant un sommet commun est constante » ?

(D'après *Jeux et Stratégies*, n° 9.)

2. Un système

Au chenil



Dans ce chenil, il y a deux fois plus de Bergers allemands que de Chows-Chows, il y a autant de Bergers allemands que de Caniches, le nombre des Lévriers et des Setters réunis est le même que celui des Chows-Chows, il y a quatre fois plus de Setters que de Lévriers. Le chenil se compose de cent cinquante chiens.
Combien y a-t-il de chiens par race dans ce chenil?

2. *Autres systèmes*

Les systèmes proposés dans ce paragraphe sont de natures différentes :

- Le nombre d'équations n'est pas nécessairement égal au nombre d'inconnues.
- Certains ne sont pas linéaires.

Les exemples qui suivent tendent à montrer quels **types de problèmes** peuvent conduire à résoudre de tels systèmes.

a. *Exemple 1: Encore le tétraèdre* (*)

Est-il possible d'écrire sur les arêtes d'un tétraèdre des nombres de façon que la somme des nombres attribués à trois arêtes concourantes soit constante?
Ces nombres peuvent-ils être deux à deux distincts?

Avec les notations de la figure 13, on a :

sommet A : $x_1 + x_3 + x_4$ (1)
sommet B : $x_1 + x_2 + x_5$ (2)
sommet C : $x_2 + x_3 + x_6$ (3)
sommet D : $x_4 + x_5 + x_6$ (4).

On est donc conduit à résoudre le système :

$$x_1 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 + x_5 = x_2 + x_3 + x_6 = x_4 + x_5 + x_6,$$

système de 3 équations à 6 inconnues.
De (1) et (2) on obtient : $x_3 + x_4 = x_2 + x_5$.
De même avec (3) et (4) : $x_2 + x_3 = x_4 + x_5$.
En sommant ces 2 dernières égalités, il vient :

$$2x_3 + x_2 + x_4 = 2x_5 + x_2 + x_4 \quad \text{soit} \quad \mathbf{x_3 = x_5}.$$

Par un procédé analogue, on obtient :

$$\mathbf{x_2 = x_4} \quad \text{et} \quad \mathbf{x_1 = x_6}.$$

Conclusion : il faut affecter le même nombre à chaque couple d'arêtes opposées (illustration figure 14).

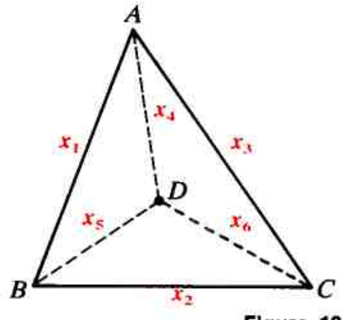


Figure 13

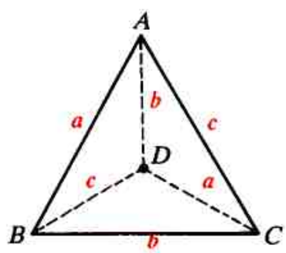


Figure 14

(*) Cf. exercice 1, activité 26.

Activité 27

1. Les quatres faces d'un tétraèdre ont le même périmètre. Montrer que les arêtes opposées sont de même longueur.

2. Dix partout (D'après *Jeux et Stratégies*, n° 21.)

On sait que : $2A+B=2C+A=2B+2C=3B+A=10$.

A partir de ces quatre égalités, trouvez la valeur de chaque lettre.

(*N. B. :* ce système a plus d'équations que d'inconnues.)

b. *Exemple 2*

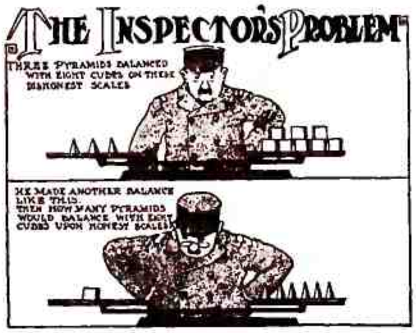
Activité 28

1. Le problème de l'inspecteur

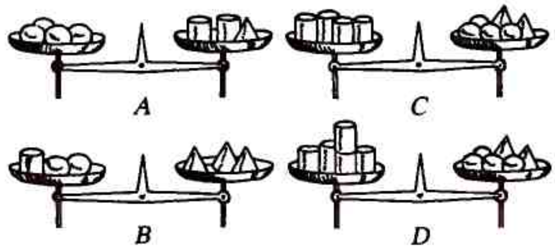
(D'après *Les casse-tête mathématiques* de Sam Loyd. Martin GARDNER. Dunod.)

Quel est le poids d'un cube?
L'inspecteur Jones, dont le travail est de contrôler l'exactitude des balances qui sont utilisées dans toute la ville, vient justement de découvrir une paire de faux plateaux. Un bras est plus long que l'autre, bien que les deux plateaux aient le même poids. (Vous ne devez pas prendre en considération l'illustration, car j'ai dessiné les plateaux et leurs objets pour qu'ils ne donnent pas d'indication aux lecteurs.)
Quand l'inspecteur met trois pyramides sur le bras le plus long, la balance est équilibrée par huit cubes sur l'autre bras. Mais quand il met un cube sur le bras le plus long, il faut six pyramides sur l'autre! Sachant que le poids d'une pyramide est de trente grammes, pouvez-vous trouver le poids d'un cube?

(**Note** : on ne dispose, dans cet exemple que de **deux** équations pour **trois** inconnues : le poids d'un cube et la longueur de chaque bras...)



2. (Cette fois, les balances sont exactes...)
Les balances A et B sont en équilibre. Chacune des balances C et D penchera-t-elle à droite, à gauche, ou est-elle en équilibre?



c. *Exemple 3*

• Le problème des chevaux[1]

Deux éleveurs ont conduit ensemble 110 chevaux au marché, et après la vente, en rapportent des sommes égales (chaque éleveur a vendu les chevaux qui lui appartenaient à un prix constant). Si chacun d'eux avait vendu ses chevaux au prix de l'autre éleveur, le premier aurait reçu 108 000 F *et le second* 75 000 F. *On demande combien chaque éleveur avait de chevaux et combien il a vendu chacun de ses chevaux.*

Désignons par n_1 le nombre des chevaux du 1^{er} éleveur et par x_1 le prix auquel il a vendu chaque cheval; soit de même n_2 le nombre de chevaux du 2^e éleveur et x_2 le prix de vente de chacun de ses chevaux. L'énoncé conduit au système de relations :

(1) $n_1+n_2=110$ (« deux éleveurs conduisent ensemble 110...)
(2) $n_1x_1=n_2x_2$ (« en rapportent des sommes égales »)
(3) $n_1x_2=108\,000$ (« si chacun d'eux avait vendu au prix de l'**autre**, etc. »)
(4) $n_2x_1=75\,000$

On en déduit $\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{x_2}{x_1}$ (équation 2) et $\dfrac{n_1}{n_2}\times\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{108\,000}{75\,000}=1{,}44$ (équations 3 et 4).

Il vient alors $\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^2=1{,}44$ d'où (vu que n_1 et n_2 sont positifs) $\dfrac{n_1}{n_2}=1{,}2$ ou encore $n_1=1{,}2n_2$.

Il n'y a alors aucune difficulté à résoudre le système $\begin{cases}n_1+n_2=110\\ n_1=1{,}2n_2\end{cases}$: on trouve $n_1=60$ et $n_2=50$.

[1] *(Treatise of Arithmetical composition and Resolution »*. Écrit en latin par Sir Isaac NEWTON. Traduction anglaise de Mr RALPHSON (des modifications ont été introduites dans la formulation du problème et les données numériques).

On en déduit le prix de vente de chaque cheval :

• pour le premier éleveur $x_1 = 1\,500$; • pour le second éleveur $x_2 = 1\,800$.

• Somme et somme des cubes

Trouver deux nombres connaissant leur somme 79 et la somme de leurs cubes 204 373.

On a à résoudre le système $\begin{cases} x + y = 79 \\ x^3 + y^3 = 204\,373. \end{cases}$

Nous utiliserons l'identité $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ que l'on peut encore écrire :

$$(x+y)^3 - (x^3 + y^3) = 3xy(x+y).$$

On obtient : $79^3 - 204\,373 = 3xy \times 79$. Muni de la machine, on trouve : $xy = 1\,218$.
On est donc ramené à déterminer deux nombres **connaissant** leur **somme** 79 et leur **produit** 1 218.

En utilisant la méthode de Diophante[1], on pose $x = \frac{79}{2} + h$ et $y = \frac{79}{2} - h$, d'où :

• $xy = \left(\frac{79}{2}\right)^2 - h^2 = 1\,218$. • $h^2 = \frac{6\,241}{4} - 1\,218 = \frac{1\,369}{4} = \left(\frac{37}{2}\right)^2$ (toujours la machine...).

Nous savons que le choix entre $h = \frac{37}{2}$ et $h = -\frac{37}{2}$ revient à permuter x et y. Avec $h = \frac{37}{2}$, il vient facilement : $x = \frac{79}{2} + \frac{37}{2}$ soit $x = 58$ puis $y = 21$.

Contrôle : $x + y = 21 + 58 = 79$; $x^3 + y^3 = 195\,112 + 9\,261 = 204\,373$.

Activité 29

1. Trouver deux nombres connaissant leur somme 22 et la somme de leurs carrés 1 042.

2. Ambiguïtés[2]

Paul a posé à Jean et à Pierre le problème suivant : combien de solutions réelles a le système?

$$\begin{cases} |X|\,Y - 2\,|Z| = 0 \\ 2X + Y = 0 \\ X^2 = Z + 2. \end{cases}$$

Une solution, a répondu Jean au bout de cinq minutes.
Quatre solutions, a répondu Pierre au bout d'une minute.
Qui a raison?
Joseph prétend que Jean et Pierre ont tous les deux raison et que c'est Paul qui a tort. Que veut-il dire ?

(**Indication** : Il convient de s'attarder sur la 1re équation du système. Il est possible d'en faire deux lectures...)

3. Encore les chevaux...

L'école d'équitation espagnole (à Vienne)

La plus ancienne école d'équitation du monde doit son nom à ses chevaux d'origine espagnole, élevés à Lipizza, près de Trieste. Elle fut construite de 1729 à 1735 également par Fischer Von Erlasch, comme manège d'hiver et fut plus tard utilisée pour les bals et les concerts. C'est aujourd'hui le cadre de brillantes représentations de l'École d'équitation espagnole.

Lorsque j'assistai à l'une d'elles, on avait joint aux classiques chevaux blancs, des chevaux alezans et des chevaux bais. Pour savoir combien il y en avait en tout, prenez le nombre des blancs et celui d'alezans. Faites-en la somme, puis le produit. Ajoutez-les; vous obtiendrez 34. Faites-en autant pour les alezans et les bais : vous obtiendrez 14.
Combien de chevaux y avait-il en tout en représentation ce soir-là...?

(D'après « *Jeux et Stratégies* », n° 24.)

[1] Voir paragraphe II.

[2] Proposé dans le *Petit Archimède*, n° 9 d'après une idée du mathématicien italien Giuseppe PEANO (1858-1932).

3. La méthode du pivot de Gauss

a. Introduction

La résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss — qu'il est hors de propos de justifier ici — s'appuie sur deux points que nous allons illustrer.

• **1er point : les systèmes triangulaires.**
Ce sont des systèmes tels que :

$$S_1 \begin{cases} x - 4y + z = 2 \\ 3y - z = 1 \\ 8z = 5 \end{cases}$$

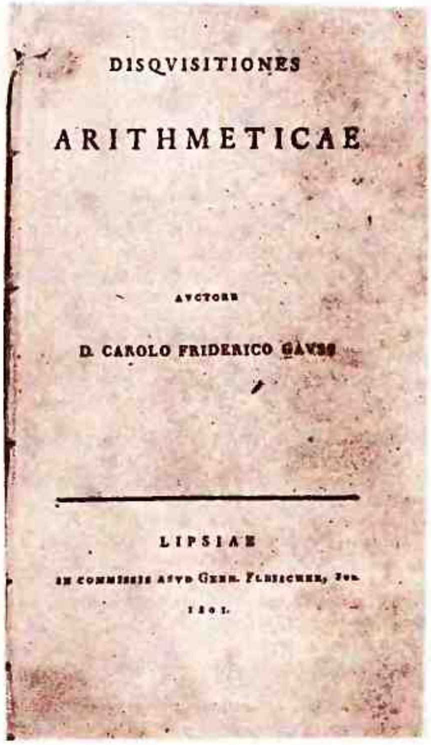
ou

$$S_2 \begin{cases} 3x + y + z - t = 2 \\ 2y - z + t = 1 \\ 2z - 5t = 2 \\ 2t = -1 \end{cases}$$

ou encore

$$S_3 \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ 0 \times z = 4 \end{cases} \qquad S_4 \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 0 \times y = 0. \end{cases}$$

On voit que ces systèmes sont facilement résolubles, en commençant par la dernière ligne puis en « remontant » (lorsque cela est possible) les calculs.



Fac-similé de la page de titre de la première édition des *Disquisitiones arithmeticae* (un des ouvrages fondamentaux de GAUSS).

Activité 30

1. Résoudre les deux premiers systèmes.
2. Montrer que le système (S_3) n'a pas de solution.
3. Montrer que le système (S_4) admet une « droite de solutions ». Préciser son équation.

• **2e point.** On admettra qu'**il est possible de transformer un système donné en un système triangulaire équivalent.**

Les exemples[1] qui suivent vont permettre de préciser l'**aspect technique** basé sur les combinaisons linéaires.

b. Exemple 1

Soit le système $\begin{cases} 3y - z = 2 & (1) \\ 2y + 5z = 4. & (2) \end{cases}$

1re étape : on transforme le système en $\begin{cases} y - \dfrac{z}{3} = \dfrac{2}{3} \\ y + \dfrac{5z}{2} = 2 \end{cases}$ (les coefficients de y sont égaux à 1).

[1] Les premiers exemples sont volontairement très simples.

2ᵉ étape : on remplace la deuxième équation par la différence entre la 1ʳᵉ et la 2ᵉ :

$$\begin{cases} y-\dfrac{z}{3}=\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{z}{3}-\dfrac{5z}{2}=\dfrac{2}{3}-2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y-\dfrac{z}{3}=\dfrac{2}{3} \\ 17z=8 \end{cases}$$

(on obtient un système triangulaire).

3ᵉ étape : on résout le système triangulaire (laissé à titre d'exercice).

c. *Exemple 2*

Résolvons par cette méthode le système $\begin{cases} 3x-2y-z=11 \\ 2x-5y-2z=3 \\ -5x-y+2z=-33. \end{cases}$

1ʳᵉ étape : on transforme le système en :

$$\begin{cases} x-\dfrac{2}{3}y-\dfrac{z}{3}=\dfrac{11}{3} & (1) \\ x-\dfrac{5}{2}y-z=\dfrac{3}{2} & (2) \\ x+\dfrac{y}{5}-\dfrac{2}{5}z=\dfrac{33}{5} & (3) \end{cases}$$

(les coefficients de x sont égaux à 1).

2ᵉ étape : par différences $(1)-(2)$ et $(1)-(3)$, les deux dernières équations sont remplacées par deux équations où x n'intervient pas.

$$\begin{cases} x-\dfrac{2}{3}y-\dfrac{z}{3}=\dfrac{11}{3} \\ \boxed{\begin{array}{l} 11y+4z=13 \\ -13y+\ z=-44 \end{array}} \begin{array}{l} (1)-(2) \\ (1)-(3) \end{array} \text{(tous calculs faits).} \end{cases}$$

3ᵉ étape : on traite le système (2, 2) en y et z (cf. encadré) comme dans l'exemple 1 :

$$\begin{cases} y+\dfrac{4}{11}z=\dfrac{13}{11} \\ y-\dfrac{z}{13}=\dfrac{44}{13} \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} y+\dfrac{4}{11}z=\dfrac{13}{11} \\ 63z=-315. \end{cases}$$

4ᵉ étape : on résout le **système triangulaire** finalement obtenu :

$$\begin{cases} x-\dfrac{2}{3}y-\dfrac{z}{3}=\dfrac{11}{3} \\ \quad y+\dfrac{4}{11}z=\dfrac{13}{11} \\ \quad\quad 63z=-315 \end{cases}$$

on calcule successivement : $z=-5$ puis $y=3$ et enfin $x=4$.

Activité 31

Résoudre par la méthode précédente chacun des systèmes :

$$\begin{cases} 3x+5y=1 \\ x-2y=4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x-y-2z=1 \\ 2x+2y+z=-1 \\ 3x-y+z=1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x+y=3 \\ y+z=5 \\ z+t=7 \\ x-t=-3. \end{cases}$$

d. *Exemple 3*

$$S_1 \begin{cases} x-\ y+2z=3 \\ 2x-\ y+\ z=1 \\ \quad 2y+\ z=4. \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} x+2y-\ 6z=4 \\ 2x-2y+\ 3z=4 \\ x+8y-21z=6. \end{cases} \qquad S_3 \begin{cases} x+\frac{3}{2}y-\ z=1 \\ 4x-\ 3y+\ z=4 \\ 2x+12y-7z=2. \end{cases}$$

• **Résolution de S_1** (mise sous forme triangulaire)
S_1 est équivalent à :

$$\begin{cases} x-\ y+2z=3 \\ x-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=\dfrac{1}{2} \\ \quad 2y+\ z=4 \end{cases} ;$$

cette fois il suffit d'effectuer la différence $(1)-(2)$:

$$\begin{cases} x-\ y+\ 2z=3 \\ -\dfrac{1}{2}y+\dfrac{3}{2}z=\dfrac{5}{2} \\ \quad 2y+\ z=4 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x-y+2z=3 \\ y-3z=-5 \\ y+\dfrac{z}{2}=2 \end{cases}$$

on obtient le système triangulaire :

$$\begin{cases} x-y+2z=3 \\ y-3z=-5 \\ \dfrac{7}{2}z=7. \end{cases}$$

On terminera la résolution à titre d'exercice.

• **Résolution de S_2**
Après élimination de x dans les deuxième et troisième équations (à l'aide de la première), on obtient le système :

$$\begin{cases} x+2y-\ 6z=4 \\ 6y-15z=4 \\ -6y+15z=-2. \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant **incompatibles**, **le système S_2 n'admet pas de solution.**

• **Résolution de S_3**
Éliminons x dans la deuxième et troisième équation (à l'aide de la 1[re]) :

$$\begin{cases} x+\dfrac{3}{2}y-\ z=1 \\ 9y-5z=0 \\ 9y-5z=0. \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant identiques, le système S_3 est équivalent au système de **deux** équations :

$$\begin{cases} x+\dfrac{3}{2}y-\ z=1 \\ 9y-5z=0. \end{cases}$$

On attribue alors à l'une des trois inconnues, une valeur arbitraire (par exemple $z = \lambda$).

On en déduit que S_3 admet une **infinité de solutions** : les triplets $\left(1 + \frac{\lambda}{6}, \frac{5}{9}\lambda, \lambda\right)$, où λ est un réel quelconque.

Activité 32

Retrouver les résultats obtenus pour les systèmes S_2 et S_3 par la méthode des combinaisons linéaires.

e. *Remarque*

Pour se faire une **idée** de l'intérêt de **la méthode de Gauss,** il est important de savoir que :

1° Cette méthode s'investit dans d'**autres problèmes** que celui de la résolution de systèmes linéaires.

2° Il est fréquent d'avoir à résoudre en analyse des systèmes de taille importante (10 équations à 10 inconnues et même davantage). La méthode de Gauss est alors **très économique** en ce qui concerne le nombre d'opérations à effectuer (voir activité 33).

Activité 33

On considère un système de 20 équations à 20 inconnues.

• La méthode de Gauss nécessite environ $\frac{20^3}{3} + \frac{20^2}{2}$ opérations pour résoudre un tel système.

• Une autre méthode de résolution (qui généralise la notion de déterminant vue pour les systèmes (2, 2)) nécessite environ :

$$N = \underbrace{20 \times 19 \times 18 \times \ldots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{\text{produit de tous les entiers de 1 à 20}} \quad \text{opérations}$$

• Montrer que N peut être estimé à 10^{19}. Combien faudrait-il de temps à un ordinateur pour effectuer toutes ces opérations, si l'on suppose que le temps moyen d'une opération est 3×10^{-6} seconde?

Comparer avec la méthode de Gauss.

EXERCICES

Calculs

1. Écrire sous la forme $\alpha+\beta\sqrt{2}$, où α et β désignent des rationnels, les nombres suivants :

$$A=1-\cfrac{3}{4-\cfrac{2}{1-\cfrac{1}{\sqrt{2}}}}\ ;\quad B=1+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}\ .$$

2. Mettre sous forme de fractions irréductibles :

$$A=\frac{1-\frac{1}{2}+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}+\cfrac{1}{1-\frac{1}{3}}}\ ;\quad B=\frac{1-\frac{1}{3}+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}+\cfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}\ ;$$

$$C=\frac{\frac{3}{4}-\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{4}{5}}\times\frac{\frac{1}{3}-\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}+\frac{5}{3}}:\frac{\frac{4}{5}-1}{1-\frac{2}{3}}\ .$$

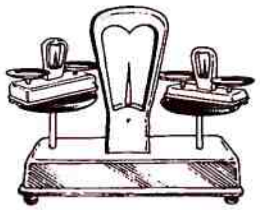
3. *1°* Écrire $\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{n}+\frac{1}{2(n+1)}$ sous forme d'un quotient.

2° En remarquant que $6=1\times2\times3$, $24=2\times3\times4$, $60=3\times4\times5$, etc., calculer en effectuant le minimum d'opérations possible la somme :

$$S=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\frac{1}{120}+\frac{1}{210}+\frac{1}{336}+\frac{1}{504}+\frac{1}{720}+\frac{1}{990}+\frac{1}{1\,320}.$$

4. La pesée impossible
(D'après *«Jeux et Stratégies»*, n° 5.)

On dispose d'une balance juste, de quatre masses (3 g, 5 g, 7 g et 8 g) et de 18 pièces de 1 à 18 g (une de 1 g, une de 2 g, ..., une de 18 g).



Une seule de ces pièces ne peut être équilibrée avec les masses dont on dispose. Laquelle?

5. Simplifier les écritures :

$$A=\frac{(3^5\times2^{-2})^2}{(9^{-1}\times2^3)^3}\ ;\quad B=\left(\frac{2^3\times5^{-3}}{4\times25}\right)^2:\frac{10^2\times2}{5^8}\ ;$$

$$C=\left(\frac{10^2\times3^2}{8\times5^2}\right)^2:\sqrt{\frac{2^5\times3^9}{6}}\ ;$$

$$D=\left(\sqrt{2^3\times9}\right)^{-1}\times\sqrt{\frac{81\times2^5}{100}}\ .$$

6. Calculer : $A=2^{23}\times0{,}5^{24}$;
$B=40^{71}\times(1{,}25)^{48}\times10^{-119}$;
$C=12^{100}\times(1{,}5)^{50}\times6^{-149}$.

7. Utiliser la calculatrice pour vérifier les égalités :

$$30^4+120^4+272^4+315^4=353^4\ ;$$
$$133^4+134^4=158^4+59^4\ .$$

(Certaines remarques permettent de résoudre les problèmes de dépassement de capacité.)

Les nombres de Fermat sont définis par (exercices **8** *et* **9**) :

$$F_n=2^{2^n}+1\qquad(n\in\mathbb{N}).$$

8. Donner une estimation du nombre de chiffres du 10ᵉ et du 20ᵉ nombre de Fermat.

9. *1°* Déterminer F_0, F_1, F_2, F_3, F_4.

2° Fermat croyait (à tort) que les F_n étaient tous premiers. Euler montra, en 1732, que $F_5=2^{2^5}+1$ était divisible par 641.

a) Justifier chacune des égalités suivantes et en déduire la conclusion d'Euler :

$$2^{32}=16\times2^{28}=(641-5^4)\times2^{28}=641m-(5\times2^7)^4$$
$$=641m-(641-1)^4=641n-1$$

où m et n sont des entiers naturels.

b) Écrire F_5.

Calculer et donner le résultat sous la forme la plus simple (exercices **10** *et* **11**).

10. $a=\frac{\sqrt{8}}{2}+\frac{\sqrt{50}}{4}-\sqrt{\frac{576}{18}}$; $b=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

11. $a=\sqrt{\frac{3}{5}}\times\sqrt{\frac{24}{5}}$; $b=\sqrt{\frac{288}{169}}:\sqrt{\frac{8}{225}}$;

$c=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; $d=\sqrt{50}+\sqrt{32}+\sqrt{2}$.

12. Vérifier chacune des égalités suivantes :

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{10}$;

b) $\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{14}$;

c) $\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}=\sqrt{14}$.

13. Calculer (lorsqu'il existe) le carré de :

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Préciser le lien avec l'exercice **12**.

Écrire les nombres (exercices **14** *à* **16***) sans radicaux aux dénominateurs.*

14. $x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}}$; $y=\dfrac{\sqrt{6}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$;

15. $z=\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$; $t=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

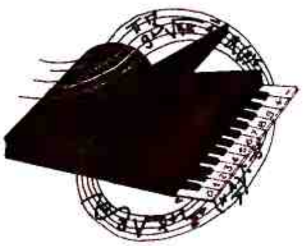
16. $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; $B=\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{7}}$.

17. Vérifier les égalités :

a) $12^3=(9+\sqrt{5})^3+(9-\sqrt{5})^3$;

b) $4^3=\left(1+\sqrt{\dfrac{31}{3}}\right)^3+\left(1-\sqrt{\dfrac{31}{3}}\right)^3$;

$140^3=(100+2\sqrt{310})^3+(100-2\sqrt{310})^3$.



Traduire par une expression algébrique la suite de commandes (exercices **18** *et* **19***).*

Exemple : « a $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ » *est traduit par* « $\sqrt{a}-1$ » .

18. *a*) x $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{.}$ 5 $\boxed{=}$

b) b $\boxed{\times}$ $\boxed{(}$ 2 $\boxed{-}$ $\boxed{.}$ 7 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ $\boxed{x^2}$

19. *a*) x $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 1 = $\boxed{1/x}$

b) x $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 7 $\boxed{=}$

Dans les exercices, **20** *à* **22,** *les lettres a, b, ... désignent des nombres. Préciser à quelles conditions les expressions ont un sens et simplifier leur écriture.*

20. $A=\dfrac{x}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z}{(z-x)(z-y)}$;

$B=\dfrac{x^3}{x-1}-\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$.

21. $C=\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$;

$D=\dfrac{\dfrac{1}{a+b}}{\dfrac{1}{a^2-b^2}}$; $E=\dfrac{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}}{\dfrac{y}{x-y}+\dfrac{x}{x+y}}$.

22. $F=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{3+\dfrac{x-2}{5-x}}}$; $G=2-\dfrac{4}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}}}$.

23. Simplifier l'expression :

$$\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}+\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}$$

(deux cas : $x\leqslant 1$, $x>1$).

24. On pose $x-\dfrac{1}{x}=y$.

Calculer, au moyen de y seulement, les expressions :

$$x^2+\frac{1}{x^2}\ ;\ x^3-\frac{1}{x^3}\ ;\ x^4+\frac{1}{x^4}\ .$$

25. On pose $x=a^2-bc$, $y=b^2-ac$, $z=c^2-ab$.

Démontrer que $(x+y+z)(a+b+c)=ax+by+cz$.

26. Démontrer que :

$$x^6-1=(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

27. Sachant que $(a-b)(a-c)(b-c)\neq 0$, vérifier que :

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0.$$

28. Démontrer que pour $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$, on a :

$$\frac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^3}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^3}{(z-x)(z-y)}=x+y+z\ .$$

29. Sachant que $a+b+c=2p$, vérifier que :
$$(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+p^2=a^2+b^2+c^2 .$$

Dans les exercices **30** *à* **32**, *vérifier les égalités :*

30. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$;
$(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2=(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$

31. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$.

32. $x^4+4y^4=\left[(x+y)^2+y^2\right]\left[(x-y)^2+y^2\right]$.

• Proportionnalité

Quelques problèmes anciens sur le thème de la proportionnalité (*exercices* **33** *à* **35**).
Origine *Arithmétique*. A. MILLET. Hachette (1924).

33. **8 faucheurs, travaillant 10 heures par jour, ont mis 3 jours pour faucher une prairie de 7 hectares. Combien de jours 12 faucheurs, travaillant 12 heures par jour mettront-ils pour faucher 8 hectares de prairie?**

34. **Le nombre des vibrations transversales qu'une corde tendue exécute dans l'unité de temps est proportionnel à la racine carrée du poids qui la tend et inversement proportionnel à sa longueur, à son diamètre, ainsi qu'à la racine carrée de sa densité. Cela posé, une corde de cuivre ayant 0,363 mètre de longueur, 0,0015 mètre de diamètre, et tendue par un poids de 13,35 kilogrammes exécute 8 000 vibrations en une seconde; on demande combien de vibrations exécutera en $\frac{1}{16}$ de minute, un fil d'acier de 0,953 mètre de longueur, et de 0,0005 mètre de diamètre, tendu par un poids de 3,54 kilogrammes (densité du cuivre 8,82 et densité de l'acier 7,8.**

35. **Problème de Newton : 75 bœufs se sont nourris pendant 12 jours dans un pré de 60 ares avec l'herbe qui y était et celle qui a poussé depuis; 81 bœufs se sont nourris pendant 15 jours dans un pré de 72 ares avec l'herbe qui y était et celle qui a poussé depuis. On demande combien de bœufs pourra nourrir pendant 18 jours dans les mêmes conditions un pré de 96 ares.**

(**Notes :** 1. L'herbe pousse régulièrement. 2. La réponse est 100 bœufs.)

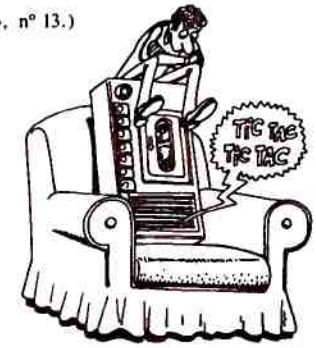
36. L'or est un métal très dense (19,5 g par cm^3) et très ductile : on peut réaliser avec 1 gramme d'or un fil de 3 000 mètres de long.
En supposant que la section de ce fil soit circulaire, quel est son diamètre?

37. Trois maçons montent un mur de 600 briques en 1 heure.

1° En combien de temps cinq maçons monteront-ils un mur de 1 200 briques?

2° De combien de briques est constitué un mur monté par quatre maçons en 1 h 30 min?

38. **Musique**
(D'après «*Jeux et Stratégies*», n° 13.)



Confortablement assis, vous écoutez sur votre magnétophone à cassettes votre musique préférée. La cassette dure 45 minutes. Un coup d'œil à l'appareil vous montre que la bobine de gauche (celle qui est en train de se dérouler) a un rayon égal au 2/3 du rayon de cette même bobine à l'instant initial. On considère comme nul le diamètre des axes en plastique, autour desquels s'enroule la bande. Combien de temps de musique vous reste-t-il encore à écouter?

39. **« Un classique... »**
Une poule et demie pond un œuf et demi en un jour et demi. Combien d'œufs pondront douze poules en douze jours?

40. Le prix d'un diamant est proportionnel au carré de son poids. Un diamant de 0,45 g vaut 50 000 F.

a) Combien coûte un diamant de 0,693 g?

b) Quel est le poids d'un diamant valant 30 000 F?

Transformations d'écritures - Équations

Résoudre les équations suivantes (*exercices* **41** *à* **42**) :

41. *a*) $\dfrac{x-3}{2}-\dfrac{6-x}{4}=\dfrac{2x}{3}-\dfrac{8x-13}{4}$;

b) $\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{7x-2}{15}$;

c) $\dfrac{(2x-5)(2x+1)}{8}-\dfrac{(x+3)^2}{6}=\dfrac{(x-3)x}{3}$.

42. *a*) $(3x-1)^2-(x+5)^2=0$;

b) $(4x+1)(x-3)=5(x-3)$;

c) $(2x+3)(4x+5)-(4x^2-9)+(7x-3)(2x+3)=0$;

d) $(x^2-5x+3)^2-(x^2+9x-1)^2=0$.

43. *a*) $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-5}{x-6}$;

b) $\sqrt{(x-2)(x-3)}=-3$.

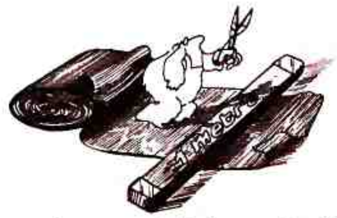
44. *a*) $\sqrt{x^2-4}=x-1$;

b) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{4x-5}{x(x^2-1)}$.

45. Déterminer le côté d'un carré sachant que si on l'augmente de 5 cm l'aire du carré augmente de 40 cm².

46. Deux signaux sonores sont émis à 1 seconde d'intervalle et à 1 kilomètre de distance. Où faut-il se placer pour les percevoir simultanément?

47. Un marchand de tissu calcule son prix de vente pour gagner 40 % sur le prix d'achat de sa marchandise. Mais le mètre qu'il utilise pour débiter son drap n'est pas à la bonne longueur, et il s'aperçoit qu'il ne gagne que 39 % au lieu de 40 %.
Quelle est la longueur réelle du « mètre »?



(D'après *« 100 jeux numériques »*, Pierre BERLOQUIN, Le Livre de Poche.)

48. Bayonne-Hendaye
(D'après *« Jeux et Stratégies »*, n° 19.)

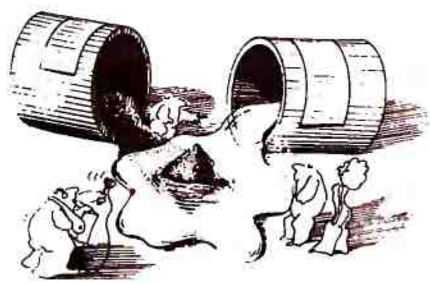
Monsieur et Madame Débasque vont de Bayonne à Hendaye à vélo. Tous deux roulent à 19 km/h. Soudain, Monsieur augmente sa vitesse, lâche son épouse, pédalant à 29 km/h; il parcourt ainsi 8 km; puis il fait demi-tour à la même allure, et retrouve sa femme qui a continué pendant ce temps son chemin sans changer de vitesse.
Au bout de combien de temps les époux se retrouvent-ils?

49. Les gagnants du Loto
(D'après *« Jeux et Stratégies »*, n° 18.)

Les Dupont sont tous de joie; ils viennent de gagner la super cagnotte du Loto.
En quelques mois, ils dépensent sans compter en voyages, toilettes, cabarets, etc., les $\frac{2}{3}$ de ce qu'ils ont gagné, moins 400 000 F, puis $\frac{1}{4}$ de ce qu'il leur reste plus 300 000 F, puis les $\frac{2}{3}$ du nouveau reste plus 120 000 F.
Quand ils font enfin leurs comptes, désireux de s'acheter une villa de 875 000 F, ils s'aperçoivent qu'il leur manque pour réaliser cette opération 245 000 F.
Quel était le montant de la super cagnotte du Loto?

50. Un certain produit se vend liquide ou en poudre. Un sondage fait ressortir les faits suivants :

- le tiers des personnes interrogées n'utilisent pas la poudre;
- les deux septièmes des personnes interrogées n'utilisent pas le liquide;
- 427 personnes utilisent à la fois le liquide et la poudre;



- le cinquième des personnes interrogées n'utilisent pas du tout le produit.

Combien de personnes ont été interrogées au cours de ce sondage?

(D'après *« 100 jeux numériques »*. Pierre BERLOQUIN. Le Livre de Poche.)

51. Un garçon, pour se distraire, élève des poissons rouges. Il décide de vendre tous ses poissons; il le fait en quatre étapes :

1. Il vend la moitié de ses poissons plus un demi-poisson.
2. Il vend un tiers du reste plus un tiers de poisson.
3. Il vend un quart du reste plus un quart de poisson.
4. Il vend un cinquième du reste plus un cinquième de poisson.

Il se retrouve alors avec 11 poissons rouges. Bien sûr, aucun poisson n'a été coupé. Combien avait-il de poissons au départ?
« Haha » ou l'éclair de compréhension mathématique. Martin GARDNER. Bibliothèque « Pour la Science ». Belin.

52. Problème de Nicolas Chuquet
Un père partage son bien entre ses enfants de la manière suivante : le premier prendra 1 000 F plus 1/5 du reste; le second prendra 2 000 F plus 1/5 du reste; le troisième prendra 3 000 F plus 1/5 du reste; et ainsi de suite... Finalement l'héritage est entièrement partagé et les parts sont égales. Dire :

1° le montant de l'héritage;

2° la part de chaque enfant;

3° le nombre des enfants.

Généraliser.

Dans les exercices **53** *et* **54**, *déterminer deux nombres sachant que leur somme est S et leur produit P.* (*utiliser la méthode de Diophante*, voir II. 2. Activité 13.)

53. *a*) $S=-3{,}8$, $P=-6$; *b*) $S=2$, $P=7$.

54. *a*) $S=1$, $P=-1$; *b*) $S=1$, $P=1$.

55. Déterminer les dimensions d'un losange sachant que son aire est 12 cm² et la somme de ses diagonales 10 cm.

56. Expliquer le paradoxe suivant :

L'exemple suivant montre comment on peut violer les axiomes et arriver cependant au bon résultat.

Donnons à x la valeur 3, de sorte que :

$$x-1=2 \qquad (1)$$

Ajoutons 10 au premier membre *seulement* :

$$x+9=2 \qquad (2)$$

Multiplions les deux membres par $x-3$:

$$x^2+6x-27=2x-6 \qquad (3)$$

Retranchons $2x-6$ des deux membres :

$$x^2+4x-21=0 \qquad (4)$$

Décomposons en facteurs :

$$(x+7)(x-3)=0 \qquad (5)$$

Divisons les deux nombres par $x+7$:

$$x-3=0 \quad \text{ou} \quad x=3 \qquad (6)$$

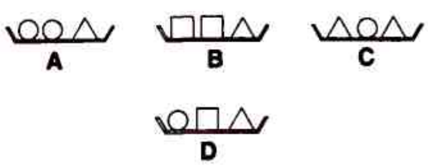
ce qui est bien la valeur attribuée à x au début.

(D'après « *Fantaisies et paradoxes mathématiques* » E. P. NORTHROP. Dunod.)

Ordre dans ℝ

57. Les trois plateaux *A*, *B* et *C* sont disposés selon leur poids, en ordre décroissant (*A* le plus lourd, *C*, le plus léger); les boites de même forme pèsent le même poids. Où faut-il logiquement placer le plateau *D*?

(D'après « *Jeux et Stratégies* », n° 36.)



58. Établir les inégalités :

a) $xy+yz+zx \leqslant x^2+y^2+z^2$;

b) $xyz(x+y+z) \leqslant x^4+y^4+z^4$.

59. Les réels a et b étant strictement positifs, démontrer que :

$$\frac{8}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{ab}} \leqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b} .$$

60. Montrer que pour tout x :

$$3(1+x^2+x^4) \geqslant (1+x+x^2)^2 .$$

61. Établir que pour tout x et y réls :

a) $\dfrac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$; *b*) $\dfrac{x+y+z}{3} \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}$.

62. Étant donné n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ quelconques, on pose :

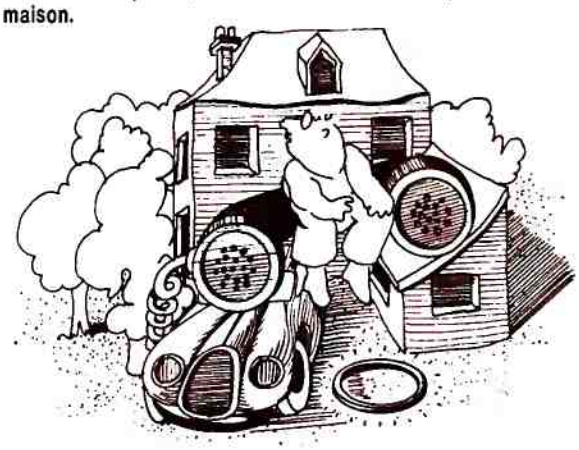
$$\bar{x}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \quad \text{et} \quad q^2=\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}$$
$(q \geqslant 0)$.

1° Calculer $S_1=(a_1-\bar{x})+(a_2-\bar{x})+\ldots+(a_n-\bar{x})$

puis $S_2=(a_1-\bar{x})^2+(a_2-\bar{x})^2+\ldots+(a_n-\bar{x})^2$.

2° Montrer que $\bar{x} \leqslant q$.

63. Dans une certaine ville, sur 100 hommes , 85 sont mariés, 70 ont le téléphone, 75 ont une voiture et 80 possèdent une maison.



Quel est, sur 100 hommes, le nombre minimum de ceux qui, à la fois, sont mariés et ont le téléphone, une voiture et une maison?

(D'après « *100 jeux numériques* ». Pierre BERLOQUIN. Le Livre de Poche.)

64. Démontrer que la somme d'un nombre strictement positif et de son inverse est supérieure ou égale à 2.

Résoudre les inéquations des exercices **65** *à* **68**.

65. *a*) $\dfrac{2x-5}{3} > \dfrac{2-x}{6}$; *b*) $\dfrac{x+1}{4} < \dfrac{1-3x}{5}+\dfrac{1-x}{10}$;

c) $2{,}1x+1{,}4 \leqslant 10{,}5-2{,}8x$;

d) $(x+1)^2 > x(x+2)$.

66. *a*) $\dfrac{x}{x-2} > 3$; *b*) $\dfrac{x}{x-2} < 3$;

c) $\dfrac{3x}{x-1}<-1$; d) $\dfrac{3x-2}{5-3x}>1$.

67. a) $\sqrt{x-1}<\sqrt{2x-3}$; b) $\sqrt{1-x}>\sqrt{2x-3}$;
c) $1+\sqrt{x-2}>4$; d) $1-\sqrt{x-2}>4$.

68. a) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}>x-\dfrac{1}{3}$; b) $\dfrac{x+1}{x}>\dfrac{x-1}{2x}$;
c) $\dfrac{x-1}{4}<\dfrac{x+3}{2}$; d) $-1<\dfrac{x-2}{x+3}<2$.

69. Résoudre les systèmes d'inéquations :

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{x-1}<4 \\ \dfrac{3x}{x+1}<2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)}{2x-3}>0 \\ \dfrac{(1-x)(x+2)}{x}<0 \end{cases}$

Résoudre les inéquations des exercices **70** *à* **72**.

70. a) $\dfrac{4x-x^2}{9-x^2}>0$; b) $\dfrac{x^3-2}{x^2-1}\geqslant 2$;

71. a) $\dfrac{x}{x-2}-2\geqslant\dfrac{-x+3}{x+1}$;
b) $\dfrac{2x-3}{x+1}+\dfrac{3}{x-1}<\dfrac{2x^2}{x^2-1}$.

72. a) $\dfrac{7x-x^2}{(x-1)(x^2+4x+4)}\leqslant 0$;
b) $\dfrac{x-2}{2x+1}-\dfrac{2x+1}{x-2}>0$.

73. A la fontaine de Trévi
(D'après *«Jeux et Stratégies»*, n° 23.)

Le séjour à Rome se termine. Claudette et ses parents rencontrent au hasard d'une promenade Mademoiselle Fabricius, professeur de latin de Claudette. Ensemble, ils vont classiquement dire au revoir à Rome en jetant quelques pièces de 100 lires dans la fontaine de Trévi.
Madame en jeta moins que Monsieur; mais à eux deux, ils en jetèrent juste autant que Claudette et son professeur. Madame Dupont et sa fille en jetèrent, à elles deux, davantage que Monsieur Dupont et Mademoiselle Fabricius réunis.
En définitive, ce fut seulement les deux qui jetèrent le plus de pièces qui revirent Rome. De qui s'agissait-il?

Après avoir exprimé $f(x)=|x-3|+2|x-5|+3$ *à l'aide d'un tableau, résoudre (exercices* **74** *et* **75**).

74. a) $f(x)=16$; b) $f(x)\leqslant 17$; c) $f(x)>18$.

75. a) $f(x)=-3$; b) $f(x)=2$; c) $f(x)\leqslant 2{,}5$.

76. Écrire chacun des encadrements suivants sous les formes $d(x, a)<\varepsilon$ et $|x-a|<\varepsilon$:

a) $-0{,}01<x+1<0{,}02$; b) $-8<0{,}2x-1<-7$;
c) $-0{,}02<-x-3<0{,}01$; d) $3<-0{,}1x<6$.

77. Traduire chacune des relations suivantes sous les formes $d(x, a)\leqslant\varepsilon$ et $|x-a|\leqslant\varepsilon$

a) $x\in[7{,}1\ ;8{,}3]$; b) $x\in[-4{,}07\ ;-4{,}06]$;
c) $x\in[4{,}0072\ ;\ 4{,}072]$; d) $x\in[-0{,}01\ ;0{,}02]$.

78. Traduire sous la forme $d(a, x)<l$ et $x\in]\alpha, \beta[$ chacune des relations suivantes que l'on illustrera par un schéma :

a) $|5x+7|<0{,}4$; b) $|0{,}1x-5|<0{,}02$;

c) $\left|\dfrac{x}{3}-1\right|<0{,}01$; d) $\left|\dfrac{x}{4}+3\right|<5\times 10^{-4}$.

79. Un récipient à la forme d'un cylindre. Le rayon de la base est 1 m à 1 mm près.

Déterminer sa hauteur à 4 mm près afin que son volume soit 1 m³ à 10 litres près.
(Prendre $\pi\in[3{,}1415\ ;3{,}1416]$.)

80. La diagonale d'un carré mesure 2 m à 3 mm près.

1° Quelle est la longueur de son côté à 10^{-2} m près?

2° Quelle est son aire à 1 cm² près?

81. L'hypoténuse d'un triangle rectangle mesure 3 m à 1 mm près et un côté de l'angle droit 2 m à 1 mm près.

1° Quelle est la longueur de l'autre côté de l'angle droit à 3 mm près?

2° Quelle est son aire à 1 cm² près?

82. *1°* Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant (ce sont des approximations du nombre π) :

$$3+\frac{7}{60}+\frac{1}{120}\ ;\ \frac{2^8}{3^4}\ ;\ 2\sqrt{\sqrt{20}-2}\ ;\ \sqrt{10}\ ;$$

$$\frac{355}{113}\ ;\ \frac{3}{4}(\sqrt{3}+\sqrt{6})\ ;\ \sqrt{13+\frac{1}{3}-2\sqrt{3}}\ ;$$

$$(\sqrt{0{,}3}+\sqrt{1{,}5})^2\ ;\ 0{,}26\sqrt{146}\ ;$$

$$\pi=3{,}141\,592\,653\,589\,79\ldots$$

2° Lequel est la meilleure approximation de π?

83. *1°* Montrer que $2+\sqrt{5}=4+\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$ **(0)**

2° En utilisant la relation **(0)** montrer successivement que :

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}}\quad \textbf{(1)}\ ;$$

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2\sqrt{5}}}} \quad (2)\ ;$$

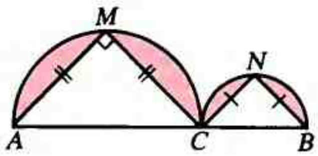
$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\sqrt{5}}}}} \quad (3)\ .$$

3° Quels encadrements de $\sqrt{5}$ peut-on obtenir à partir des relations (1), (2) et (3) en n'utilisant que :

$$2<\sqrt{5}<3?$$

4° Quelle précision obtient-on en appliquant deux fois la relation (3)?

84. Sur un segment $[A, B]$ de longueur 4, on construit les demi-cercles de diamètres $[A, C]$ et $[C, B]$. Les triangles AMC et CNB sont rectangles isocèles.



Comment choisir C sur le segment $[A, B]$ pour que l'aire de la partie rosée soit minimum?

Systèmes

Résoudre les systèmes des exercices **85** *à* **92.**

85. *a)* $\begin{cases}2x+5y=-9\\x+7y=-15\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}4x+3y=2\\-3x+5y=-3\end{cases}$

86. *a)* $\begin{cases}(\sqrt{3}-1)x+2y=-2\\x+(\sqrt{3}+1)y=-1-\sqrt{3}\end{cases}$

b) $\begin{cases}(\sqrt{6}-2)x+(\sqrt{7}-\sqrt{5})y=1\\(\sqrt{7}+\sqrt{5})x+(\sqrt{6}+2)y=0\end{cases}$

87. $\begin{cases}2x^2-\dfrac{9}{y+1}=15\\3x^2-\dfrac{24}{y+1}=19\end{cases}$ **88.** $\begin{cases}2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=5\\3\sqrt{x}+5\sqrt{y}=7\end{cases}$

89. $\begin{cases}x+3y=33\\x^2-9y^2=495\end{cases}$

90. *a)* $\begin{cases}\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{y}=7\\\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=49\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\dfrac{3}{y-1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{3}{4}\\\dfrac{5}{y-1}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{29}{12}\end{cases}$

91. *a)* $\begin{cases}\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{y-1}=0\\3x-2y=7\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}\dfrac{3x-y}{x+y}=\dfrac{5}{3}\\\dfrac{2x-y}{y-x}+3=0\end{cases}$

92. *a)* $\begin{cases}x^2+5y^2=1\\2x^2+11y^2=3\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}4|x|-2|y|=8\\6|x|-5|y|=5\end{cases}$

Résoudre les systèmes suivants dans lesquels x, y, z et t sont les inconnues (exercices **93** *à* **101***) :*

93. *a)* $\begin{cases}2x+3y-5z=23\\4x+13y-8z=2\\x+2y+7z=-16\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}4x-3y+2z=8\\5x+y-z=16\\6x-2y-3z=11\end{cases}$

94. *a)* $\begin{cases}x-y+3z=1\\8x+5y-2z=0\\-7x-6y+5z=8\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}7x+2y=-4\\3x+2z=10\\9y-10z=10\end{cases}$

95. *a)* $\begin{cases}x+y-z=a\\x-y+z=b\\-x+y+z=c\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}x+y=a\\y+z=b\\z+x=c\end{cases}$

96. $\begin{cases}\dfrac{xy}{z}=2\\\dfrac{yz}{x}=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{zx}{y}=8\end{cases}$ **97.** $\begin{cases}\dfrac{xy}{ay+bx}=c\\\dfrac{yz}{bz+cy}=a\\\dfrac{zx}{cx+az}=b\end{cases}$

98. $\begin{cases}x+y+z=1\\2x+2y+az=2\\3x-3y-z=3\end{cases}$ **99.** $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=a\\\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=b\\\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=c\end{cases}$

100. $\begin{cases}x+y=\dfrac{7}{2}\\y-z=\dfrac{3}{2}\\z-t=\dfrac{7}{4}\\x+t=\dfrac{13}{4}\end{cases}$ **101.** $\begin{cases}x+y+z=a\\y+z+t=b\\z+t+x=c\\t+x+y=d\end{cases}$

102. Il y a dans une certaine écurie des hommes et des chevaux. On y dénombre, au total, 22 têtes et 72 pieds.
Combien y a-t-il d'hommes et combien y a-t-il de chevaux?
(D'après *« 100 jeux numériques »*. Pierre BERLOQUIN. Le livre de Poche.)

103. Selon qu'il est plongé dans l'air ou dans l'eau, un objet constitué d'un alliage de plomb et d'étain pèse 1 000 g ou 800 g.
Déterminer les masses de plomb (masse volumique 11,4) et d'étain (masse volumique 7,3) composant cet alliage.

104. L'âge de ces dames
(D'après *« Jeux et Stratégies »*, n° 8.)
Au cours d'une soirée mondaine, questionnées par deux amies de rencontre sur leur âge réel, deux dames d'un « certain âge », Claire et Lucie, passionnées de mathématiques, font les réponses suivantes :

- Claire : « il y a trente-six ans mon âge était le double du vôtre et dans dix-huit ans il n'en représentera plus que les cinq quatrièmes ».

- Lucie : « j'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez et quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons, si nous sommes encore de ce monde, cent vingt-six ans à nous deux ».

Quels sont les âges respectifs de Claire et Lucie et celui de chacune de leurs interlocutrices?

105. Déterminer quatre nombres sachant que leurs sommes trois à trois sont 10, 11, 12 et 13.

106. Les additions mystérieuses
(D'après *« Jeux et Stratégies »*, n° 21.)
Voici quatre additions bien énigmatiques. Sachant que chaque lettre correspond toujours au même chiffre, quelle est la valeur de chacune des lettres en question?

$$A+2B+C=9$$
$$A+B+C+D=2A+2D$$
$$2A+B+D=9$$
$$A+2C+D=2A+3B+C$$

Problèmes posés vers 1930 au Brevet Élémentaire et aux concours d'entrée aux Écoles Normales (*exercices* 107 à 112).

107. Le trinôme du second degré : ax^2+bx+c prend les valeurs 1, 19, 47 quand on y remplace x par 1, 2, 3.
Déterminer a, b, c.

108. 1° Résoudre le système : $\begin{cases} x+y=22 \\ x^2+y^2=260 \end{cases}$

2° Vérifier l'identité $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ et l'appliquer à la résolution du système : $\begin{cases} x+y=26 \\ x^3+y^3=5\,096 \end{cases}$

109. Deux ouvriers font successivement la moitié d'un travail et mettent en tout 25 heures pour le terminer. En travaillant ensemble, ils feraient tout l'ouvrage en 12 heures.

1° Combien chaque ouvrier mettrait-il de temps pour faire seul tout l'ouvrage?

2° Si l'ouvrage est estimé 75 francs, quelle somme revient à chaque ouvrier lorsqu'ils le font ensemble?

110. Un dirigeable va de A en B et revient de suite de B en A, le vent ayant soufflé constamment de A vers B.
Évaluer la vitesse propre du ballon et celle du vent, sachant que $AB=50$ km, que la durée de l'aller est 1 heure, celle du retour 2 h 15 min.
Établir la formule donnant en fonction de AB et des vitesses, la durée totale du trajet aller et retour et montrer qu'en définitive l'action du vent est défavorable.

111. On a trois lingots formés chacun d'un alliage d'argent et de cuivre. Calculer les titres de ces trois lingots, sachant qu'ils pèsent respectivement 5, 3 et 2 kilogrammes et que, fondus ensemble 2 à 2, ils donneraient : le premier et le second, un alliage au titre 0,750; le premier et le troisième, un alliage au titre 0,780; le deuxième et le troisième un alliage au titre 0,852.

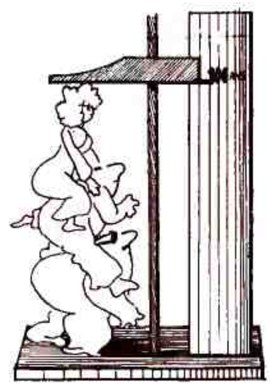
112. Deux courriers M et N partent à midi, l'un de A pour aller à B, l'autre de B pour aller à A. Leurs vitesses sont uniformes et telles que le premier arrive en B 9 heures après la rencontre et que le second arrive en A 4 heures après la rencontre. Quel est le temps employé par chaque courrier pour parcourir la distance AB?
Une automobile part de A à 5 heures du soir pour se rendre en B, sa vitesse moyenne est de 54 km à l'heure. La distance AB est de 360 km. Cette automobile rencontre les deux courriers M et N sur son parcours. On demande :

1° les heures de ces rencontres;

2° la position des points de rencontre;

3° à quelle heure l'automobile se trouve-t-elle à égale distance des deux courriers?

113. Quand Timothée aura l'âge qu'a maintenant son père, sa sœur sera deux fois plus vieille qu'elle ne l'est actuellement, et l'âge de son père sera le double de celui qu'aura Timothée lorsque sa sœur aura l'âge actuel de son père.
La somme des âges des trois personnages fait un siècle.
Quel âge a chacun?
(D'après *« 100 jeux numériques »*. Pierre BERLOQUIN. Le livre de Poche.)



114. Deux fontaines ont des débits respectifs de 3 et 4 litres à la seconde. Pour remplir un bac on fait d'abord couler la première fontaine jusqu'au moment ou le bac est à moitié plein; ensuite on fait couler les deux à la fois. Dans ces conditions, il faut 8 min 20 s pour remplir le bac. Trouver la contenance de ce bac.

115. Pour remplir un bassin d'irrigation, on dispose de trois robinets A, B, C.
Avec les robinets A et B, le bassin se remplit en 10 minutes; avec les robinets B et C, il faut 20 minutes; avec les robinets C et A, il faut 12 minutes.
Combien faut-il de temps pour remplir le bassin avec chacun des robinets fonctionnant seul?
Combien faut-il de temps pour remplir le bassin avec les trois robinets ouverts ensemble?

Résoudre, en utilisant la méthode du «pivot Gauss» chacun des systèmes proposés[1] (*exercices* **116** *à* **118**).

116. $\begin{cases} 3x - 2y + 7z = -36 \\ -10x - 7y + z = -29 \\ 6x + 4y - 3z = 29 \end{cases}$ *Solution :* $(1,\ 2,\ -5)$.

117. $\begin{cases} 3x + 4y + 9z = 53 \\ 7x - 10y + 3z = -23 \\ 2x + 9y - 5z = -18 \end{cases}$ *Solution :* $(-3,\ 2,\ 6)$.

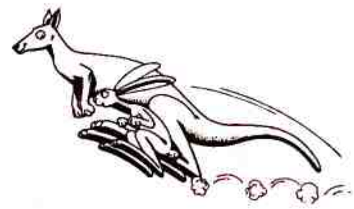
118. $\begin{cases} 9x + 3y + z + 9t = 34 \\ 3x + 2y - 9z + 7t = 6 \\ -x + y - 6z + 5t = -3 \\ 7x - 4y + 4z - 6t = 29 \end{cases}$ *Solution :* $(3,\ -4,\ 1,\ 2)$.

119. Les melons
(D'après *«Jeux et Stratégies»*, n° 17.)
A l'extrémité du marché, un homme à casquette vendait le produit de sa cueillette : 70 melons répartis en deux groupes de catégories différentes.
Il reçut la même somme pour chacun des deux groupes; mais s'il avait vendu les melons de chaque catégorie au prix de l'autre, il aurait reçu 160 francs pour un groupe, et 90 francs pour l'autre.
Combien y avait-il de melons de chaque catégorie?

120. Les poissons
(D'après *«Jeux et Stratégies»*, n° 17.)
Chez le poissonnier, j'ai observé trois clientes qui achetaient les mêmes espèces de poissons : la première a acheté 2 limandes, 5 maquereaux et 4 carrelets et a payé 62 F. La seconde, 3 limandes, 5 maquereaux et 1 carrelet et a payé 53 F. La troisième, 2 limandes, 7 maquereaux et 8 carrelets.
Combien cette dernière a-t-elle dépensé?

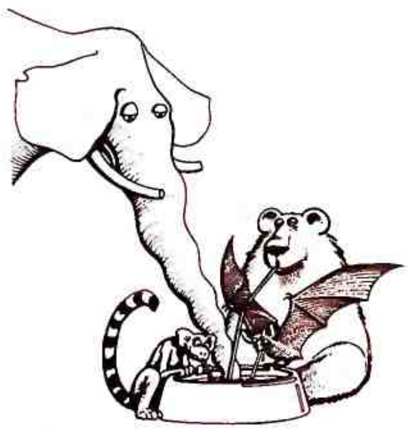
[1] Les solutions indiquées permettront de contrôler les calculs effectués.

121. Le lapin et le kangourou
(D'après *«Jeux et Stratégies»*, n° 28.)



Le lapin avait fait soixante-dix-sept sauts quand le kangourou partit à sa poursuite. Sachant que pendant que le lapin fait treize sauts, le kangourou en fait neuf, et que trois sauts de kangourou font autant que huit sauts de lapin, combien de fois le kangourou devra-t-il sauter avant de rattraper le lapin?

122. Chauve-souris, ours, ouistitis et éléphants
(D'après *«Jeux et Stratégies»*, n° 28.)



Une observation attentive a permis de constater que dix-sept ours mangent autant que cent soixante-dix ouistitis, cent mille chauve-souris autant que cinquante ouistitis, et dix ours autant que quatre éléphants.
Combien faut-il de chauve-souris pour absorber autant de nourriture qu'une douzaine d'éléphants?

123. Problème dû à Newton
Un triangle rectangle a comme périmètre 30 m et comme aire 30 m². Quelles sont ses dimensions?

124. Les faces d'un parallélépipède rectangle ont pour aires, en cm², 6, 8 et 27. Déterminer les longueurs des arêtes.
(D'après *«Critérium Mathématique d'Aquitaine»*, 1986.)

125. Un vieux problème posé par M. Euler
Trois hommes jouent. A chaque partie, il y a un perdant et deux gagnants. Le perdant doit doubler l'avoir des deux autres. Au bout de trois parties, chacun a perdu une fois. Ils se retirent alors avec la même somme, 40 F chacun. Combien chacun avait-il au début? Si vous ne trouvez pas, que pouvez-vous dire de M. Euler?
(D'après *«Petit Archimède»*, n° 6.)

2

Polynômes et

« **J'ai rencontré une jeune fille qui portait x^2+2ax sur son cœur. Cela lui allait à ravir.** »

André BRETON - Philippe SOUPAULT
(Barrières)

Intentions

De nombreuses **situations** issues de l'analyse, de la géométrie, de l'algèbre, de l'arithmétique, mais aussi de la mécanique, de la cinématique, de la physique, de la vie courante... conduisent à **introduire des fonctions polynômes** (cet aspect a déjà été entrevu en classe de Seconde[1] à propos de problèmes — communément appelés *problèmes du premier degré*).
La **simplicité des opérations** que ces fonctions mettent en jeu : addition, soustraction, multiplication, et la **clarté des règles de calcul** qui s'y rapportent, expliquent :

- d'une part, leur présence particulièrement importante dans la description et l'étude de certains phénomènes;

- d'autre part, la volonté du mathématicien de les utiliser comme **fonctions de référence;** il faut souligner, à ce sujet, une démarche fondamentale en analyse : « essayer d'obtenir, pour une fonction donnée, des **approximations** satisfaisantes au moyen des fonctions polynômes ».

Dans ce chapitre c'est essentiellement **le point de vue algébrique** qui est développé : dans un cadre général pour les fonctions polynômes (paragraphes II et III) et de façon **systématique** pour les **polynômes du second degré** ($x \longmapsto ax^2+bx+c$) (paragraphe IV).
Il est indispensable de bien appréhender quelle **démarche** gouverne une telle étude : c'est **la nature du problème abordé** (résolution d'équations, d'inéquations — et leur interprétation graphique —, calculs de valeurs, etc.) qui **prédomine dans le choix des transformations d'écritures** qu'il est possible d'envisager (factorisation, mise sous forme canonique pour le second degré, schéma de Hörner, éventuellement changement de variables, etc.).

Les nombreux **problèmes** que comporte ce chapitre visent à souligner une telle démarche, mais également, à illustrer la **diversité des situations** qui font intervenir les fonctions polynômes.

---

[1] Mais aussi dans le Premier cycle.

second degré

Plan du Chapitre

I. Introduction

Concernant les problèmes liés à l'écriture d'une expression algébrique, la première partie « Décomposition » vise à préparer certains résultats fondamentaux du chapitre (paragraphe II), en particulier ceux relatifs **à des écritures en fonction d'expressions « simples » préalablement choisies.**
Quant à la deuxième partie de ce paragraphe **« La conversation »...**

1. Décomposition

a. Activité 1

On considère les fonctions φ_0, φ_1, φ_2 et φ_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_0(x)=1 \; ; \; \varphi_1(x)=x \; ;$$
$$\varphi_2(x)=x(x-1) \; ; \; \varphi_3(x)=x(x-1)(x-2).$$

On désigne par $\mathbb{E}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour lesquelles il existe des nombres réels a, b, c et d tels que : pour tout réel x,

$$f(x)=a\varphi_0(x)+b\varphi_1(x)+c\varphi_2(x)+d\varphi_3(x).$$

1° Montrer que les fonctions **constantes,** les fonctions **affines,** la fonction $x \longmapsto x^2$ et la fonction $x \longmapsto x^3$ appartiennent à l'ensemble $\mathbb{E}$.

2° Soit f une fonction appartenant à $\mathbb{E}$:

$$f : x \longmapsto a+bx+cx(x-1)+dx(x-1)(x-2).$$

On suppose que, pour tout réel x, $f(x)=0$. Montrer que $\boldsymbol{a=b=c=d=0}$.

3° Soient des réels a, b, c, d et a', b', c', d' tels que, pour tout réel x, on ait l'égalité :

$$a\varphi_0(x)+b\varphi_1(x)+c\varphi_2(x)+d\varphi_3(x) = a'\varphi_0(x)+b'\varphi_1(x)+c'\varphi_2(x)+d'\varphi_3(x).$$

Montrer que :

$$a=a' \; , \quad b=b' \; , \quad c=c' \quad \text{et} \quad d=d'.$$

b. Activité 2

Soit ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 les fonctions définies par :

$$\psi_0(x)=1 \; ; \; \psi_1(x)=\cos x \; ; \; \psi_2(x)=\sin x \; ;$$
$$\psi_3(x)=\cos^2 x \; ; \; \psi_4(x)=\sin^2 x.$$

On suppose qu'il existe des réels a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 et b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, tels que, pour tout réel x :

$$a_0\psi_0(x)+a_1\psi_1(x)+a_2\psi_2(x)+a_3\psi_3(x)+a_4\psi_4(x) = b_0\psi_0(x)+b_1\psi_1(x)+b_2\psi_2(x)+b_3\psi_3(x)+b_4\psi_4(x).$$

A-t-on nécessairement les égalités :

$a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_3=b_3$, $a_4=b_4$?

c. Activité 3

Les fonctions p_0, p_1, p_2, p_3 et p_4 sont définies par :

$$p_0(x)=1 \; ;$$
$$p_1(x)=x \; ;$$
$$p_2(x)=x^2 \; ;$$
$$p_3(x)=x^3 \; ;$$
$$p_4(x)=x^4.$$

1° Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=a_0p_0(x)+a_1p_1(x)+a_2p_2(x)+a_3p_3(x)+a_4p_4(x)$$

où a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des réels donnés. On suppose que pour tout réel x : $f(x)=0$.

a) Montrer que $\boldsymbol{a_0=0}$.

b) Après avoir calculé $f(-x)$, montrer que :

$$\text{pour tout réel } x, \quad \begin{cases} a_1x+a_3x^3=0 \\ a_2x^2+a_4x^4=0. \end{cases}$$

c) En déduire que $\boldsymbol{a_1=a_2=a_3=a_4=0}$. (On pourra former deux systèmes linéaires d'inconnues a_1, a_3 pour le premier, a_2, a_4 pour le second.)

2° Soit a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 et b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 des nombres réels. Déduire des résultats précédents que si, pour tout réel x :

$$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 = b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0,$$

alors $a_4=b_4$, $a_3=b_3$, $a_2=b_2$, $a_1=b_1$ et $a_0=b_0$.

2. La conversation "$x^2 + x + 1 = 0$"

a. Activité 4

1° Résoudre graphiquement l'équation $x^3 = 1$.

2° Contrôler le résultat ainsi obtenu par la méthode algébrique suivante :

a) vérifier que : $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$;

b) écrire l'expression $x^2 + x + 1$ sous la forme $(x+a)^2 + b$ (a et b réels);

c) conclure.

b. Activité 5

Où est l'erreur?

Voir la bande dessinée page suivante.

II. Généralités sur les fonctions polynômes

1. Définitions

a. Fonction polynôme

Une fonction polynôme f est une fonction *définie sur* $\mathbb{R}$ qui admet une *écriture polynomiale*, à savoir une écriture de la forme :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \textbf{pour tout réel } x$$

où :

n est un entier naturel,
a_0, a_1... a_n sont des nombres réels.

Exemples

1. Certaines fonctions sont définies par des formules explicites qui correspondent directement à cette définition :

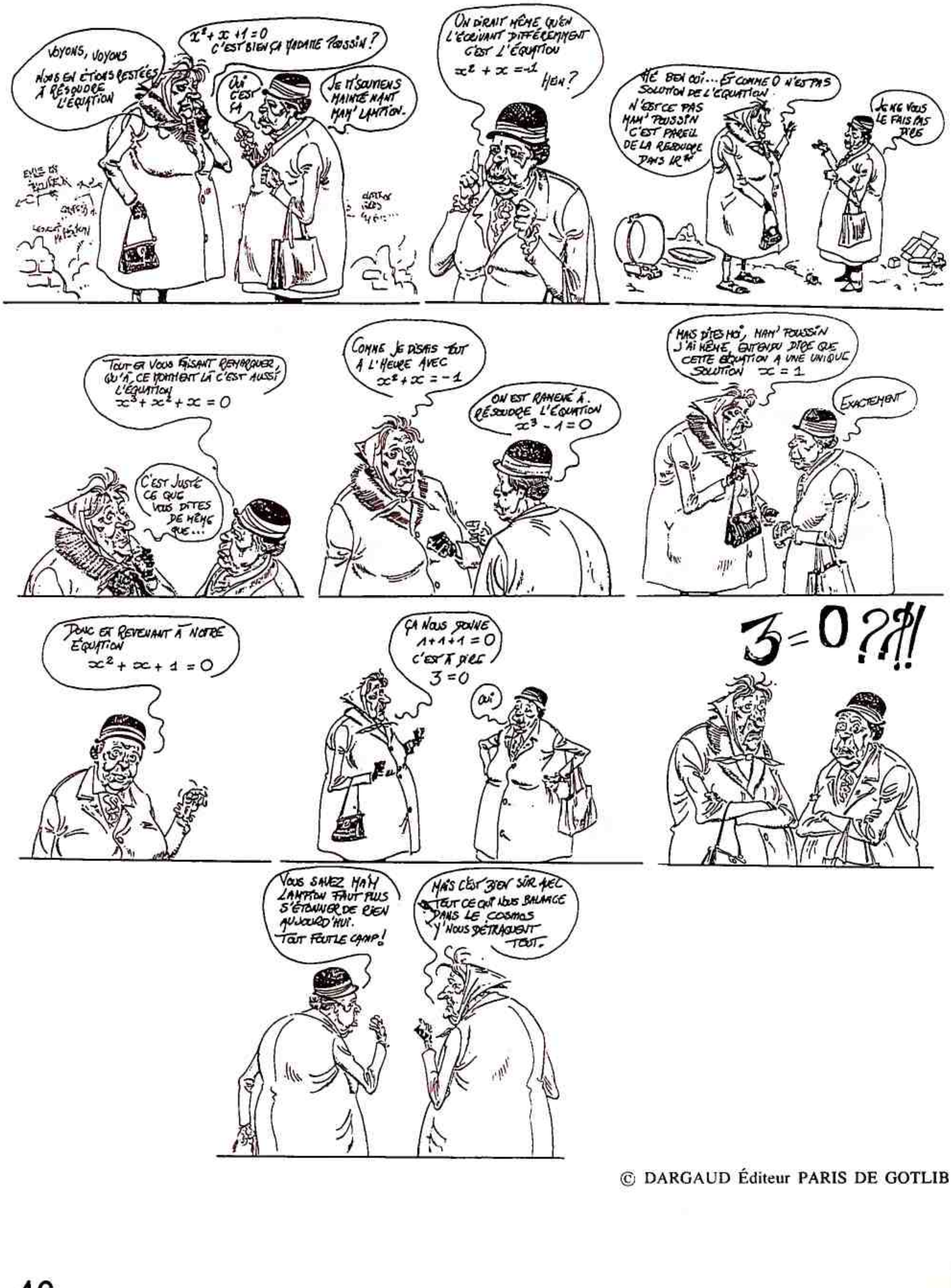
- les fonctions constantes : $x \longmapsto k$ (k réel fixé);
- les fonctions affines : $x \longmapsto ax + b$ (a, b réels fixés);
- les fonctions puissances : $x \longmapsto x^p$ (p entier naturel donné);
- les fonctions, appelées monômes et qui sont de la forme $x \longmapsto a \times x^p$ (a réel; p entier naturel).

2. Pour d'autres fonctions, par contre, se pose le problème de la transformation d'écriture.

- La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ est une fonction polynôme. En effet, elle est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1} = x^2 - 1$$

(écriture polynomiale de la fonction f).



© DARGAUD Éditeur PARIS DE GOTLIB

• Considérons la fonction g définie par $g(x)=(x-1)(x^2+4)$. D'après les règles du calcul algébrique, on a :

$$g(x)=x^3-x^2+4x-4.$$

La fonction g est donc une fonction polynôme.

• De même, la fonction h définie par $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{pour } x\neq 2\\ 4 & \text{pour } x=2\end{cases}$ est une fonction polynôme;

elle est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $h(x)=x+2$ (y compris pour $x=2$).

3. En dehors des transformations d'écritures, nous verrons certaines propriétés relatives aux fonctions polynômes (somme, produit, ...) qui permettent de déterminer si une fonction est ou n'est pas une fonction polynôme (sans oublier qu'une fonction non définie pour toute valeur réelle ne peut être une fonction polynôme).

Exercice

1. Préciser parmi les fonctions suivantes celles qui sont des fonctions polynômes :

a) $x \longmapsto \dfrac{x^2-9}{x-3}$;

b) $x \longmapsto \dfrac{x^8-16}{x^4+4}$;

c) $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$;

d) $x \longmapsto (|x+1|)^2$;

e) $x \longmapsto \sqrt{x}$;

f) $x \longmapsto (x+\sqrt{1+x^2})^2+(x-\sqrt{1+x^2})^2$.

Remarques

1. Sur la notation : s'il n'y a aucune difficulté à désigner des fonctions polynômes telles que $x \longmapsto ax+b$, $x \longmapsto ax^2+bx+c$, $x \longmapsto ax^3+bx^2+cx+d$, on risque de manquer d'imagination (sans compter les effets de lassitude...) pour désigner une fonction comme :

$$x \longmapsto ax^{1988}+bx^{1987}+cx^{1986}+\dots$$

Le « cas général » (n entier non précisé) rend même impossible une telle désignation.

On préfère donc utiliser une **notation indiciée,** qui repose sur les deux principes suivants :

1° Une lettre étant choisie — a par exemple — on désignera des nombres réels en affectant des indices à la lettre a : a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...

2° On convient que dans l'écriture $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, le pointillé indique qu'il faut également effectuer l'addition sur les termes non écrits.

2. Par la suite nous utiliserons aussi l'expression **« polynôme »** pour désigner une « fonction polynôme ».

3. Avant de dégager la terminologie et certaines propriétés relatives aux polynômes, il est indispensable de s'assurer sous certaines conditions de **l'unicité de l'écriture sous la forme réduite et ordonnée :**

$$x \longmapsto a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0.$$

b. *Unicité de la forme réduite et ordonnée*

Nous admettons les résultats suivants qui généralisent ceux obtenus dans l'activité 3 (page 44) :

1. *(Nullité d'un polynôme.)* **Si la fonction polynôme :**

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

est la fonction nulle, alors $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0.$

2. *(Unicité.)* **Soit f un polynôme *non nul*, alors f admet une écriture *unique* de la forme :**

$$x \longmapsto a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{avec} \quad a_n \neq 0.$$

Ce résultat nécessite quelques **commentaires :**

1° Soit f le polynôme défini par $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.
La première propriété signifie :

« **si pour tout réel x, $f(x) = 0$, alors $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$** », ou encore, de manière équivalente : « **si l'un des réels (au moins) a_0, a_1, ..., a_n n'est pas nul, la fonction f n'est pas la fonction nulle** ».

2° En ce qui concerne la propriété 2, nous en soulignerons deux aspects sur un exemple :

$$f : x \longmapsto 3x^3 - \sqrt{2}x + 4.$$

• Une égalité telle que, pour tout réel x :

$$a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 3x^3 - \sqrt{2}x + 4$$

conduit à : $a_5 = 0$; $a_4 = 0$; $a_3 = 3$; $a_2 = 0$; $a_1 = -\sqrt{2}$ et $a_0 = 4$.

• Parmi les écritures suivantes du polynôme f :

$0x^4 + 3x^3 - \sqrt{2}x + 4$, $0x^8 + 0x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 3x^2 - \sqrt{2}x + 4$ et $3x^3 - \sqrt{2}x + 4$,

les deux premières ne seront pas considérées comme l'**écriture polynomiale réduite et ordonnée de $f : x \longmapsto 3x^3 - \sqrt{2}x + 4$.**

c. Degré et coefficients

Soit f un polynôme **non nul** avec : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \qquad a_n \neq 0.$

• **Degré**

L'entier naturel n est appelé **degré de f**. On dit aussi que **f est de degré n** et l'on écrit $\deg f = n$.
Ainsi, par exemple :

1. Toute fonction constante **non nulle** est un polynôme de degré 0.
2. Un polynôme de degré 1 est une fonction affine : $x \longmapsto ax + b$ (avec $a \neq 0$).
3. La fonction $f : x \longmapsto x^3 + 2x^2 - 1 - (2 + x^3)$ est un polynôme de degré 2. Cela résulte de l'égalité $f(x) = 2x^2 - 3$ pour tout réel x.

Exercices

2. Vérifier que chacune des fonctions ci-dessous est un polynôme et préciser son degré :

• $x \longmapsto (x^2 + 1)(3 - x)$;
• $x \longmapsto (a - 1)x^2 + 2x$ où a est un réel fixé;
• $x \longmapsto (x + 1)(x^2 - 1) + x(1 - x^2) + 2x^2$.

3. Montrer que la fonction

$$x \longmapsto (1 + \sqrt{1 + x^2})^3 + (1 - \sqrt{1 + x^2})^3$$

est un polynôme de degré 2.

• **Coefficients, « termes »**
Les réels a_0, a_1, ..., a_n sont appelés **coefficients** du polynôme f.
L'habitude a consacré certaines expressions qui se révèlent très pratiques lorsque l'on est amené à manipuler des polynômes. Ainsi, par exemple :

— a_3x^3 est le **terme de degré 3,** ou encore le terme « **en** x^3 »;

— a_0 est le **terme constant** du polynôme f;

— a_nx^n est appelé **terme** de degré n (ou « en x^n ») mais aussi, terme de plus haut degré.

Il en découle, pour les résultats précédents, des formulations telles que :

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
Deux polynômes (non nuls) sont égaux si et seulement si :

1° ils ont même degré,

2° les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Remarque
On notera l'aspect « pathologique » du polynôme nul, qui par définition, ne possède pas de degré.
Cependant, on convient pour des raisons de commodité, que le polynôme nul fait partie des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

2. Opérations sur les polynômes

a. L'addition des polynômes

Considérons les polynômes P et Q définis par :

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - x + 1 \quad \text{et} \quad Q(x) = -x^3 + 4x - 4.$$

Pour tout réel x, on a :

$$P(x) + Q(x) = (x^4 + 2x^3 - x + 1) + (-x^3 + 4x - 4)$$

soit :

$$P(x) + Q(x) = x^4 + x^3 + 3x - 3.$$

La fonction S, définie sur $\mathbb{R}$, par $S(x) = P(x) + Q(x)$ est donc encore un polynôme.

De façon plus générale :

Étant donné deux polynômes P et Q, la fonction S définie par :

$$S(x) = P(x) + Q(x) \quad \text{pour tout réel } x$$

est un polynôme appelé *somme des polynômes P et Q.*

Remarques

1. Bien sûr, S est noté par $S = P + Q$.

2. Dans certains cas, pour expliciter le polynôme somme, il peut être pratique d'utiliser une disposition en tableau :
Calculons la somme des polynômes P et Q définis par :

$$P(x) = -x^6 + 3x^5 - 4x^4 + x^2 + x + 1$$
$$Q(x) = x^6 - 5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 8x - 3.$$

On dispose alors les calculs ainsi :

$P(x)$	$-x^6$	$3x^5$	$-4x^4$	/	x^2	x	1
$Q(x)$	x^6	/	$-5x^4$	$2x^3$	$-3x^2$	$8x$	-3
$S(x)$	/	$3x^5$	$-9x^4$	$2x^3$	$-2x^2$	$9x$	-2

$$S(x)=3x^5-9x^4+2x^3-2x^2+9x-2.$$

3. Il n'y a aucune difficulté à étendre la définition ci-dessus à des opérations telles que :

- **différence de deux polynômes :** c'est le polynôme D tel que :

$$D(x)=P(x)-Q(x) \quad \text{pour tout réel } x;$$

- **multiplication d'un polynôme par un réel :** ainsi, par exemple, le polynôme $-\sqrt{2}P$ désignera le polynôme qui à tout réel x associe $-\sqrt{2}\times P(x)$.

On notera que les opérations ainsi définies sur les polynômes jouissent des mêmes propriétés que celles définies dans $\mathbb{R}$ (commutativité, associativité pour l'addition, etc.).

4. Sur le **degré d'une somme.**
Il est clair que le degré de la somme des polynômes P et Q ne peut excéder ni le degré de P, ni le degré de Q.
De façon plus précise, si P et Q sont de **degrés distincts,** le degré de la **somme** est égal **au plus grand** des deux nombres $\deg P$ et $\deg Q$.
Par contre, lorsque P et Q sont **de même degré n,** il peut arriver que la somme soit de degré strictement inférieur à n (voir exemple utilisé dans la remarque 2 ci-dessus). On est donc seulement assuré de l'inégalité $\deg S \leqslant n$.

Exercices

4. Calculer la somme et la différence des polynômes P et Q, définis par :

a) $P(x)=x^6-5x^5+4x^3+3x^2-1$
$Q(x)=-x^6+8x^5-3x^2+7x-8;$

b) $P(x)=(x^2-1)(x+1)$
$Q(x)=x(1-2x)(x+2).$

5. Dans chacun des cas ci-dessous, proposer deux polynômes P et Q satisfaisant les conditions énoncées :

a) P et Q sont de degré 4, leur somme et leur différence aussi;

b) P et Q sont de degré 3, leur somme est un polynôme constant.

b. La multiplication des polynômes

Dans certains des exemples précédents, nous avons été amenés à effectuer le produit de deux polynômes et avons pu constater que l'on obtenait ainsi un polynôme. L'examen (sommaire) du cas général permet d'apporter des précisions sur le degré.

Soit $P(x)=a_px^p+a_{p-1}x^{p-1}+\ldots+a_0$ avec $a_p\neq 0$

et $Q(x)=b_qx^q+b_{q-1}x^{q-1}+\ldots+b_0$ avec $b_q\neq 0$.

On a alors : $P(x)\times Q(x)=a_pb_qx^{p+q}+\ldots+a_0b_0$.
Il est facile de voir dans cette écriture, que tous les termes « non écrits » sont de degré strictement plus petit que $p+q$. Comme $a_p\times b_q\neq 0$ (produit de deux réels non nuls), $x\longmapsto P(x)\times Q(x)$ est donc un polynôme de degré $p+q$.
En résumé :

Le *produit* de deux polynômes non nuls est un polynôme ayant pour degré, la *somme des degrés.*

Deux aspects sont à souligner :

- l'un **technique,** mettant l'accent sur les méthodes de calcul;
- l'autre, plus spécifique de l'utilisation du résultat sur le degré.

TECHNIQUES DE CALCUL

- La première utilise une disposition des calculs — qui n'est pas sans rappeler celle utilisée lors de la multiplication des entiers — et qui est illustrée dans l'exemple ci-contre, avec :

$$P(x) = x^2 - x + 1$$
$$Q(x) = -x^3 + x - 2$$

$$\begin{array}{lrrrrrr}
 & & & & x^2 & -\,x & +1 \\
 & & & -\,x^3 & & +\,x & -2 \\
\hline
(1) & & & & -2x^2 & +2x & -2 \\
(2) & & & x^3 & -\,x^2 & +\,x & \\
(3) & -x^5 & +x^4 & -x^3 & & & \\
\hline
(4) & -x^5 & +x^4 & & -3x^2 & +3x & -2
\end{array}$$

Les lignes (1), (2) et (3) correspondant aux produits de $P(x)$ par chacun des termes de $Q(x)$, chaque «colonne» étant réservée aux termes d'un même degré. La ligne (4) fournit, après sommation de chacune de ces colonnes, le polynôme produit de P et Q, sous la forme réduite et ordonnée.

Exercice

6. Calculer avec la méthode précédente :

a) le produit des polynômes P et Q lorsque :

$$P(x) = 6x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 3$$

et $$Q(x) = x^3 + x - 2 \ ;$$

b) le carré du polynôme P lorsque :

$$P(x) = \sqrt{2}x^3 + x^2 - 2x + \sqrt{2}.$$

- La seconde, pertinente lorsque les polynômes sont de degrés «modestes», est basée sur la recherche des termes constants, des termes «en x», des termes «en x^2», «en x^3», etc., et s'appuie sur le principe suivant :

Les termes «en x^4» (par exemple) ne peuvent être obtenus que comme produits :

- de termes constants et de termes «en x^4»,
- de termes «en x» et de termes «en x^3»,
- de termes «en x^2» et de termes «en x^2».

Exemple

$$P(x) = x^2 - 3x + 5 \ ; \quad Q(x) = 2x^2 - x + 1.$$

Pour le produit $P(x) \times Q(x)$[1] :

- terme constant : $\mathbf{5} \times 1$ 5
- terme «en x» : $\mathbf{5} \times (-x) + (\mathbf{-3x}) \times 1$ .... $-8x$
- terme «en x^2» : $\mathbf{x^2} \times 1 + (\mathbf{-3x}) \times (-x) + \mathbf{5} \times (2x^2)$ .... $14x^2$
- terme «en x^3» : $\mathbf{x^2} \times (-x) + (\mathbf{-3x}) \times 2x^2$ .... $-7x^3$
- terme «en x^4» : $\mathbf{x^2} \times (2x^2)$ .... $2x^4$.

Ainsi $P(x) \times Q(x) = 2x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 5.$

[1] Les «termes» du polynôme P sont en gras.

Exercice

7. Réduire et ordonner avec cette méthode les produits des polynômes P et Q dans chacun des cas suivants :

a) $P(x) = x - 1$
$Q(x) = -x^2 + 2x - 1.$

b) $P(x) = x^3 - 1$
$Q(x) = 3x^2 - 5x + 2.$

c) $P(x) = x^3 - x$
$Q(x) = x^2 + x + 1.$

UTILISATION DU RÉSULTAT SUR LE DEGRÉ

Exercice résolu

Montrer que la fonction f définie par $f(x) = |x|$ n'est pas une fonction polynôme.

Solution

Supposons que la fonction f soit un polynôme de degré n. La fonction f^2 (ou $f \times f$) serait alors un polynôme de degré $n + n = 2n$. Comme $[f(x)]^2 = |x|^2 = x^2$ (polynôme de degré 2), on aurait donc $2n = 2$, soit $n = 1$: f serait donc une fonction **affine,** autrement dit de la forme $x \longmapsto ax + b$ avec $a \neq 0$.
Or l'égalité $|x| = ax + b$, vraie pour tout réel x conduirait à :

- $b = 0$ (obtenu en « faisant » $x = 0$),
- $a = 1$ et $a = -1$ (en « faisant » $x = 1$ puis $x = -1$), ce qui, manifestement est contradictoire.

Conclusion : La fonction $x \longmapsto |x|$ n'est pas une fonction polynôme.

Commentaires

Le résultat sur le degré d'un produit de polynômes joue un rôle fondamental dans la factorisation des polynômes (cf paragraphe III notamment *c*. Application 1 : degré et racines, page 57).

Exercices

8. Soit P un polynôme non nul. On pose $\deg P = n$. Exprimer en fonction de n les degrés des polynômes :

$$P \times P \ ; \ (x^2 + 1)P(x) \ ;$$
$$P^3 \text{ (où } P^3 = P \times P \times P) \ ;$$
$$k \times P \text{ où } k \text{ est un réel non nul.}$$

9. On donne $\deg P = 1$, $\deg Q = 2$ et $\deg R = 5$. Quel est le degré du polynôme produit $P \times Q \times R$?

10. Quel est le degré du polynôme :

$$x \longmapsto x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$$

(où n est un entier naturel)?

11. La fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est-elle un polynôme?

3. Valeur d'un polynôme sur un réel donné

a. Le problème abordé

Très souvent, en analyse, on est amené à calculer la valeur d'une fonction f sur un réel x_0[1] ou à estimer le réel $f(x_0)$ (signe de ce réel, valeur approchée, ...).
Lorsque la fonction f est un polynôme, de tels calculs sont relativement accessibles : ils ne nécessitent en effet que des additions (ou soustractions) et multiplications. Cependant le nombre de ces opérations à effectuer peut augmenter assez rapidement : se trouve donc posé le problème de **l'économie de calculs** (extrêmement importante, par exemple, au niveau calcul sur micro-ordinateur, machines, etc.).

[1] A ce propos, on utilise aussi l'expression « valeur de f **au point** x_0 » ou « valeur de f en x_0 ».

L'idée essentielle que l'on peut dégager (en une première approche) sur cette question est la suivante : **le procédé de calcul de $f(x_0)$ dépend à la fois de l'écriture de f dont on dispose et de la valeur x_0 envisagée.**
(L'exercice 12 ci-dessous illustre ce point de vue.)

Exercice

12. *a*) Vérifier que les trois écritures suivantes sont celles d'un même polynôme f :

(1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$;

(2) $(x-1)(x-2)(x-3)$;

(3) $[(x-6) \times x + 11]x - 6$.

b) Quelle écriture est la plus pertinente pour le calcul de $f(0)$? $f(1)$? $f(2)$? $f(3)$? $f(6)$?

c) Combien d'opérations (multiplications, additions) nécessite chacune de ces écritures pour le calcul de $f(0,1)$? $f(2,1)$?

Commentaires

Dans cet exemple, les écritures (2) et (3) sont les plus économiques. Cependant, l'écriture (2) suppose que le polynôme f a été factorisé (voir paragraphe III); or ceci n'est pas toujours possible et de plus, reste souvent très délicat. Au contraire, la transformation qui conduit de l'écriture (1) à l'écriture (3) est adaptable à n'importe quel polynôme ; il s'agit du **schéma de Hörner** dont nous allons approfondir l'étude.

b. *Le schéma de Hörner*

(**Note** : ce qui suit concerne les polynômes de degrés inférieurs ou égaux à 4 mais se généralise sans difficulté à un polynôme de degré quelconque.)

Soit P le polynôme :

$$P(x) = \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Le polynôme P peut s'écrire :

$$P(x) = \{[(\alpha_4 x + \alpha_3)x + \alpha_2]x + \alpha_1\}x + \alpha_0.$$

Cette transformation d'écriture porte le nom de **schéma de Hörner**[1].

En pratique, lorsque l'on est amené à calculer la valeur d'un polynôme en un point a par le schéma de Hörner, on dispose les calculs ainsi :

« position » initiale :

a	α_4	α_3 +	α_2 +	α_1 +	α_0 +

calcul effectif de $P(a)$:

a	α_4	α_3 + $a \times \alpha_4$	α_2 + $a \times h_3$	α_1 + $a \times h_2$	α_0 + $a \times h_1$
	α_4	h_3	h_2	h_1	h_0

Si l'on convient de désigner α_4 par h_4, on a :

$$\begin{aligned} h_4 &= \alpha_4 \\ h_3 &= \alpha_3 + a \times h_4 \\ h_2 &= \alpha_2 + a \times h_3 \\ h_1 &= \alpha_1 + a \times h_2 \\ h_0 &= \alpha_0 + a \times h_1 \end{aligned}$$

D'après la définition même du schéma de Hörner on a **$h_0 = P(a)$.**

Les réels h_4, h_3, h_2, h_1 et h_0 sont appelés **coefficients de Hörner** associés au calcul de $P(a)$.

[1] Hörner (1786-1837), mathématicien et physicien anglais. A étudié dans les années 1820 les liens entre son « schéma » et la division des polynômes (cf. § III, page 60).
Signe particulier : n'est pas à l'origine du « schéma de Hörner » (utilisé 150 ans auparavant par Newton...).

Exemple

Calculons $P(0{,}5)$ *avec* $P(x) = -2x^3 + x^2 - x + 3.$

$a = 0{,}5$	-2	1 $+$ -1	-1 $+$ 0	3 $+$ $-0{,}5$	$P(0{,}5) = 2{,}5$
	-2	0	-1	**2,5**	

Exercices

13. Soit P la fonction polynôme définie par :

$$P(x) = x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 2x^2 + 4x - 1.$$

En utilisant le schéma de Hörner, donner l'écriture décimale du réel $P(0{,}1)$.

14. Comparer le nombre d'opérations à effectuer suivant le schéma de Hörner (exercice 13) et la méthode habituelle (basée sur l'écriture usuelle du polynôme P).

III. Racine d'un polynôme. Factorisation

1. Racine d'un polynôme

On appelle *racine* (ou encore *zéro*) d'un polynôme P tout réel x_0 tel que $P(x_0) = 0$.

Tout polynôme du 1er degré $x \longmapsto ax + b$ $(a \neq 0)$ possède une racine et une seule $x_0 = -\dfrac{b}{a}$.

Les réels -4, -1, 2 sont racines du polynôme :

$$x \longmapsto -x^3 - 3x^2 + 6x + 8 \quad \text{(à vérifier)}.$$

Par contre, le polynôme P tel que $P(x) = x^6 + 4x^2 + 1$ n'a pas de racine : en effet, comme pour tout réel x, $P(x) \geq 1$, aucun réel x_0 ne peut prétendre vérifier $P(x_0) = 0$.

Exercices

15. Écrire un polynôme admettant π et 1987 comme racines.

16. Montrer que les racines éventuelles de :

$x \longmapsto x^7 + 8x^5 + 6x^2 + 10$ sont négatives.

17. La figure 1 propose la courbe représentative d'un polynôme P. Pour tout réel a, préciser le nombre de racines du polynôme f défini par :

$$f(x) = P(x) - a.$$

18. Montrer que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, sont des racines du polynôme :

$$x \longmapsto x^4 - 10x^2 + 1.$$

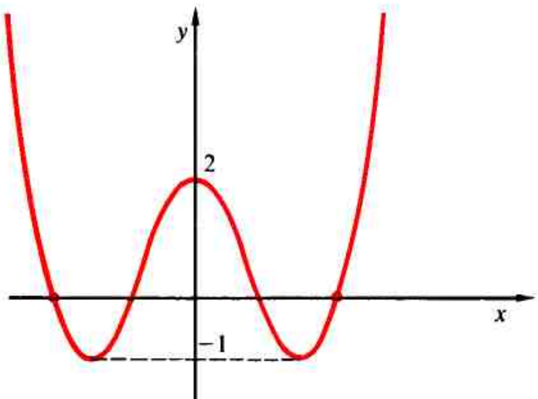


Figure 1

Commentaires

La recherche des racines d'un polynôme est un des problèmes «moteurs» des mathématiques. (Beaucoup de questions conduisent en effet à des équations ou inéquations polynomiales $P(x) = 0$ ou $P(x) > 0$, P étant un polynôme.)

Ainsi, nous verrons dans le paragraphe suivant une méthode adaptée à la résolution de l'équation $P(x)=0$, où P est un polynôme du second degré, et en exercices, quelques exemples d'équations $P(x)=0$, où P est de degré 3.

Cependant, il n'existe pas de méthode ou résultat ou technique, qui permettrait de résoudre n'importe quelle équation $P(x)=0$, où P est un polynôme[1].

On peut alors envisager deux **démarches :**

- L'une visant à **obtenir des valeurs approchées** des racines de P (de nombreux exemples seront proposés dans les chapitres sur les suites et les fonctions, illustrant quelles méthodes de l'analyse sont mises en jeu).
- L'autre consistant à **obtenir des renseignements sur les racines de P à partir d'informations partielles.**

(Il peut s'agir, par exemple, d'apporter des réponses à des questions telles que :

— connaissant certaines racines de P, peut-on en trouver d'autres? par quels moyens?
— combien de racines un polynôme de degré n peut-il avoir?)

Cette dernière démarche que nous allons esquisser repose sur la factorisation des polynômes et en particulier sur la factorisation **par** les polynômes $x \longmapsto x-a$ (a réel).

2. Factorisation d'un polynôme par x-a (a réel)

a. Définition et exemples

On dit qu'un polynôme P est *factorisable (ou divisible) par* $x-a$ **s'il existe un polynôme Q tel que :**

$$P(x)=(x-a)\,Q(x) \quad \textbf{pour tout réel } x.$$

Le polynôme $P : x \longmapsto x^3-5x^2+8x$ est factorisable par x puisque :

$$P(x)=x(x^2-5x+8).$$

Le polynôme $f : x \longmapsto x^2-1$ est factorisable par $x-1$ et $x+1$: cela résulte de l'égalité $f(x)=(x-1)(x+1)$.

Remarque

Si un polynôme P est factorisable par $(x-a)$, alors a est une racine de P (autrement dit $P(a)=0$).

Exercices

19. Montrer que le polynôme :

$$x \longmapsto -x(2x-1)+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

est factorisable par $x-\frac{1}{2}$ et par $x+\frac{1}{2}$.

20. Peut-on trouver un réel a tel que $x-a$ divise le polynôme

$$x \longmapsto x^4+2x^2+1 \ ?$$

Exemple : Les polynômes $x \longmapsto x^n-a^n$

Les factorisations suivantes sont aisées à établir :

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)\ ;$$
$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)\ ;$$
$$x^4-a^4=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3).$$

[1] Ce résultat est dû au mathématicien français Évariste Galois (1811-1832).

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Le polynôme $x \longmapsto x^n - a^n$ est *factorisable par* $x - a$:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

On contrôle un tel résultat en développant le produit.
Pour $a = 1$, on obtient la factorisation :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1).$$

b. Théorème

Le polynôme P est *factorisable par* $(x-a)$ si et seulement si *a est une racine de P*.

Démonstration

Soit $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$; on a :

$$P(a) = \alpha_n a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + \ldots + \alpha_1 a + \alpha_0$$

et donc :

$$P(x) - P(a) = \alpha_n(x^n - a^n) + \alpha_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + \alpha_1(x-a).$$

D'après ce qui précède, nous pouvons factoriser par $(x-a)$ chacun des polynômes $x^n - a^n$, $x^{n-1} - a^{n-1}$, ..., $x - a$. On pourra donc écrire :

$$P(x) - P(a) = (x-a)\,Q(x), \text{ où } Q \text{ est un polynôme.}$$

Il est alors clair que, si $P(a) = 0$, P est factorisable par $(x-a)$.

Commentaires

1. Il faut souligner la relation $\boldsymbol{P(x) = (x-a)\,Q(x) + P(a)}$ en remarquant que si $\deg P = n$ alors $\deg Q = n-1$ (voir pages 60 et 61).

2. Ce théorème permet également de tester si un polynôme P est factorisable par un polynôme du premier degré

$$x \longmapsto \alpha x + \beta \quad (\alpha \neq 0).$$

Comme il est équivalent d'écrire :

$$P(x) = (\alpha x + \beta)\,Q(x) \quad \text{ou} \quad P(x) = \left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right)(\alpha Q(x))$$

le polynôme P **est factorisable par** $\boldsymbol{\alpha x + \beta}$ **si et seulement si** $\boldsymbol{P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0}$.

Exercices

21. Préciser dans chacun des cas ci-dessous pour quelle(s) valeur(s) de α le polynôme P est divisible par $x - 1$.

a) $P(x) = 3x^2 - 2x - \alpha$.

b) $P(x) = \alpha^2 x^4 - 2x^2$.

c) $P(x) = x^2 + \alpha^2$.

22. Vérifier que :

a) $x^4 + 4$ n'est pas factorisable par $x - a$, quel que soit le réel a ;

b) $x^4 + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

Que peut-on dire des équations :

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + 2x + 2 = 0\ ?$$

23. Les polynômes suivants sont-ils factorisables par $3x + 1$?

- $3x^2 - x + 1$;
- $6x^2 + 5x + 1$;
- $2x^2 - 15x - 5 + \frac{2x}{3}$.

c. *Application 1 : degré et racines*

Supposons que le polynôme non nul P possède k racines **distinctes** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$:

- α_1 étant racine de P, il existe un polynôme Q_1 tel que $\boldsymbol{P(x)=(x-\alpha_1)\,Q_1(x)}$.
- α_2 étant également racine de P, on a $P(\alpha_2)=0$ c'est-à-dire : $(\alpha_2-\alpha_1)\,Q_1(\alpha_2)=0$.

Comme $\alpha_2 \neq \alpha_1$, il vient $Q_1(\alpha_2)=0$: α_2 est donc une racine de Q_1.
Par suite, il existe un polynôme Q_2 tel que : $Q_1(x)=(x-\alpha_2)\,Q_2(x)$.

Ainsi : $\boldsymbol{P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\,Q_2(x)}$.

- Il n'y aucune difficulté à poursuivre le raisonnement pour α_3, puis α_4, etc., jusqu'à α_k.

En conclusion :

Lorsqu'un polynôme non nul P admet k racines *distinctes* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, il existe un polynôme Q tel que :
$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)\,Q(x).$$

On dit aussi que P **est factorisable par le produit** $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)$.

De l'égalité ci-dessus, nous pouvons déduire l'inégalité **deg $P \geqslant k$** (k est le degré de $x \longmapsto (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)$).

Autrement dit : **le nombre de racines d'un polynôme non nul est inférieur ou égal à son degré.**

Ce résultat s'énonce également par :

Un polynôme de *degré n* admet *au plus n racines distinctes*.

Un polynôme de degré n qui admet n racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ s'écrira donc sous la forme : $\boldsymbol{P(x)=\lambda(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}$, où λ est un réel non nul.

Il est clair que si $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, en identifiant les termes de plus haut degré dans la relation précédente on obtient: $\lambda=a_n$.

Autrement dit : $\boldsymbol{P(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}$.

Une autre utilisation du résultat précédent passe par la formulation suivante :

Si le polynôme P défini par $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$ s'annule pour au moins $n+1$ valeurs distinctes, alors P est le polynôme nul ($a_n=a_{n-1}=\ldots=a_0=0$).

Exemple

Soit a, b, c trois réels distincts. Considérons le polynôme P défini par :
$$P(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}.$$

On voit assez facilement que P est de degré inférieur ou égal à 2 et que $P(a)=P(b)=P(c)=1$.
Il s'ensuit que le polynôme f défini par $f(x)=P(x)-1$ admet **3** racines distinctes. Comme f est de degré inférieur ou égal à **2**, f est le polynôme nul et donc, pour tout réel x : $\boldsymbol{P(x)=1}$.

Remarque

La méthode mise en œuvre dans cet exemple se généralise à des polynômes de degré quelconque sous la forme suivante :
« Si deux polynômes de **même degré n** prennent des valeurs égales en **$n+1$ points,** alors ils sont égaux. »

d. Application 2 : coefficients et racines

Lorsqu'un polynôme est « complètement factorisé », nous disposons alors de deux écritures de ce polynôme :
— l'une faisant intervenir les coefficients,
— l'autre faisant intervenir les racines.
Il est donc possible d'après le résultat de la page 48, d'obtenir **des relations entre coefficients et racines.**

Exemple

Soit $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$ *. On suppose que le polynôme P admet trois racines distinctes* x_1, x_2 *et* x_3. *Montrer qu'il est possible de calculer :* $x_1+x_2+x_3$, $x_1x_2x_3$ *et* $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$.

En déduire la valeur de $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}$.

Solution

On peut écrire $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ (puisque le coefficient du terme de plus haut degré de P est égal à 1).
En développant :

$$x^3+2x^2-5x-6=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3.$$

Les coefficients de même degré étant égaux, on obtient :

$$x_1+x_2+x_3=-2 \ ; \quad x_1x_2x_3=6 \ ; \quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-5.$$

Il est clair qu'aucune des racines de P n'est nulle[1].

Il est donc possible de considérer la somme $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}$.

On a : $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=\dfrac{-5}{6}$.

Ainsi :
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{-5}{6}.$$

Exercice

24. Soit p et q deux réels, on suppose que le polynôme $x \longmapsto x^2+px+q$ admet deux racines α_1 et α_2. Exprimer leur somme et leur produit à l'aide de p et q.

3. L'aspect technique

a. Le problème

Lorsque l'on connaît une racine a du polynôme P, on sait qu'il existe un polynôme Q tel que $P(x)=(x-a)Q(x)$. La recherche d'autres racines éventuelles de P ou — ce qui revient au même — la poursuite de sa factorisation passe par l'étude du polynôme Q.
En premier lieu, il devient donc nécessaire **d'expliciter ce polynôme.** Nous proposons (sur des exemples) trois méthodes adaptées à la résolution de ce problème :

- la méthode des coefficients indéterminés,
- la méthode de la division,
- la méthode de Hörner.

[1] On peut s'en assurer soit en calculant $P(0)$, soit en remarquant que le produit de ces racines est différent de 0.

b. La méthode des coefficients indéterminés

Soit $P(x)=x^4-4x^2-x+2$. On peut vérifier que $P(2)=0$ et donc qu'il existe un polynôme Q tel que $P(x)=(x-2)Q(x)$. Déterminons le polynôme Q.

• **1re étape : le degré de Q**

Comme P est de degré 4, le polynôme Q est de degré 3. On écrira donc :

$$Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

(les coefficients a, b, c, d sont à déterminer, d'où le nom de la méthode).

• **2e étape : identification des coefficients**

En développant dans l'égalité $P(x)=(x-2)Q(x)$, on obtient :

$$x^4-4x^2-x+2-=(x-2)(ax^3+bx^2+cx+d).$$
$$x^4-4x^2-x+2=ax^4+(b-2a)x^3+(c-2b)x^2+(d-2c)x-2d.$$

On en déduit alors le système :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=0 \\ c-2b=-4 \\ d-2c=-1 \\ -2d=2. \end{cases}$$

• **3e étape : résolution du système**

Ce système admet pour solution unique :

$$a=1 \ , \quad b=2 \ , \quad c=0 \quad \text{et} \quad d=-1.$$

Ainsi $Q(x)=x^3+2x^2-1.$

Remarque

Dans cette situation il est toujours facile de prévoir le coefficient du terme de plus haut degré et le coefficient constant[1].

Exercice

25 Vérifier que, pour le polynôme P ci-dessus, $P(-1)=0$. Expliciter alors le polynôme R tel que $P(x)=(x+1)R(x)$.

c. La méthode de la division

On cherche Q de degré 3 de façon que : $x^4-4x^2-x+2=(x-2)Q(x)$.

Le principe est le suivant : on ne s'occupe que du terme de plus haut dgré.
Ainsi, on est sûr que $Q(x)=x^3+R(x)$ (deg $R\leqslant 2$).
On obtient alors :

$$x^4-4x^2-x+2=(x-2)(x^3+R(x)).$$

En développant, il vient :

$$x^4-4x^2-x+2-(x-2)x^3=(x-2)R(x) \quad (\deg R\leqslant 2)$$

soit $2x^3-4x^2-x+2=(x-2)R(x)$ (deg $R\leqslant 2$).
De nouveau, en examinant les termes de plus haut degré (3), on a $R(x)=2x^2+S(x)$, avec deg $S\leqslant 1$.
On poursuit alors les calculs suivant le même procédé.

[1] Avec quelque habitude et des degrés peu élevés, on peut souvent effectuer les calculs de tête...

On adopte en fait une disposition pratique analogue à celle utilisée dans la division des nombres :

$$\begin{array}{rcr|l}
P(x) & \longrightarrow & x^4 \qquad -4x^2-x+2 & x-2 \\ \cline{4-4}
x^3\times(x-2) & \longrightarrow & x^4-2x^3 \qquad\qquad & x^3+2x^2-1 \\ \cline{3-3}
P(x)-x^3\times(x-2) & \longrightarrow & 2x^3-4x^2-x+2 & \\
2x^2\times(x-2) & \longrightarrow & 2x^3-4x^2 \qquad & \\ \cline{3-3}
\text{etc.} & & -x+2 & \\
 & & -x+2 & \\ \cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi $x^4-4x^2-x+2=(x-2)(x^3+2x^2-1)$.

Exercices

26. Effectuer la division de $P(x)$ par $(x+1)$.

27. Déterminer le polynôme Q tel que :
$$P(x)=(x-2)(x+1)Q(x).$$

d. La méthode de Hörner(*)

C'est la méthode la plus rapide et la plus efficace. Aussi la développerons-nous dans un cadre un peu plus général, à savoir :

- pour un polynôme P quelconque de degré $\leqslant 3$,
- dans le but d'obtenir l'écriture de P sous la forme :

$$P(x)=(x-a)Q(x)+P(a).$$

Soit donc $P(x)=\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$.

Étude théorique

On a $P(a)=\alpha_3a^3+\alpha_2a^2+\alpha_1a+\alpha_0$ d'où :

$$P(x)-P(a)=\alpha_3(x^3-a^3)+\alpha_2(x^2-a^2)+\alpha_1(x-a)$$
$$P(x)-P(a)=(x-a)\big[\alpha_3(x^2+ax+a^2)+\alpha_2(x+a)+\alpha_1\big]$$
$$\mathbf{P(x)-P(a)=(x-a)\big[\alpha_3x^2+(\alpha_2+a\alpha_3)\,x+\alpha_1+a(\alpha_2+a\alpha_3)\big]}$$

ainsi, si nous posons (cf. page 53) :

$$h_3=\alpha_3\ ,\quad h_2=\alpha_2+a\alpha_3\ ,\quad h_1=\alpha_1+a(\alpha_2+a\alpha_3)$$

et $h_0=P(a)$, on a :

$$\begin{cases} h_3=\alpha_3 \\ h_2=\alpha_2+\ a\times h_3 \\ h_1=\alpha_1+\ a\times h_2 \\ h_0=\alpha_0+\ a\times h_1=P(a). \end{cases}$$

On reconnaît donc **les coefficients du schéma de Hörner** qui s'introduisent dans le calcul de $P(a)$.
Ainsi :

$$\mathbf{P(x)=(x-a)(h_3x^2+h_2x+h_1)+h_0}$$

avec $Q(x)=h_3x^2+h_2x+h_1$ et $P(a)=h_0$.

Nous admettrons que ce résultat se généralise à un polynôme de degré quelconque.

(*) Cette fois, la méthode de Hörner est vraiment de Hörner.

Méthode pratique

La disposition adoptée pour les calculs est analogue à celle introduite page 53.

Exemple

Écrire le polynôme P défini par :

$$x \longmapsto x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 4x + 6$$

sous la forme $P(x) = (x-2)\,Q(x) + P(2)$.

On dresse le tableau suivant :

	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0	
	1	0	-7	3	-4	6	coefficients du polynôme.
$a = 2$		+ 2	+ 4	+ -6	+ -6	+ -20	flèche : multiplication par a.
	1	2	-3	-3	-10	-14	coefficients du schéma de Hörner.
	$h_5 = \alpha_5$	h_4	h_3	h_2	h_1	h_0	

Conclusion : $\mathbf{P(x) = (x-2)(x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 3x - 10) - 14.}$

Exercices

28. Apprécier l'efficacité de la méthode de Hörner en traitant l'exemple précédent par la méthode des coefficients indéterminés, puis par la méthode de la division.

29. Appliquer la méthode de Hörner à la division de :

$$P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

par le polynôme $x + 1$.

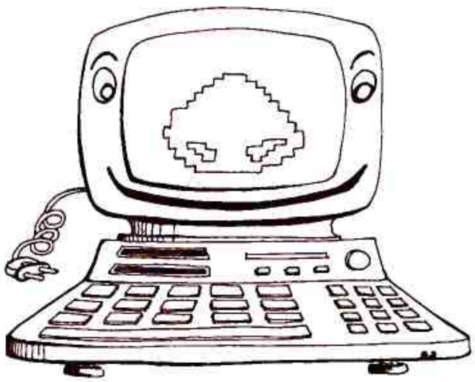
e. *Commentaire général*

1. On trouvera dans le paragraphe V des exemples de résolution d'équations polynomiales s'appuyant sur les méthodes qui viennent d'être présentées.
Il ne faudrait pas cependant oublier les **techniques de factorisation directe** basées pour l'essentiel sur :

- la reconnaissance de facteurs communs,
- l'utilisation d'identités remarquables,
- la mise en œuvre de ces deux points.

2. En ce qui concerne la méthode de Hörner, le **programme** ci-dessous (BASIC) permet de calculer les coefficients h_0, h_1, …, h_{n-1}, h_n dans le cas général.

```
10 CLS
20 INPUT "DEGRE DU POLYNOME"; N
30 DIM A(N)
40 FOR I= 0 TO N
50 PRINT "COEFF DU TERME DE DEGRE"; I;
60 INPUT A(I)
70 NEXT I
80 PRINT
90 INPUT "VALEUR DE A"; A
100 H=A(N)
110 FOR I= N-1 TO 0 STEP -1
120 PRINT "COEFF DE HÖRNER DE DEGRE"; I+1; ":" ; H
130 H=A*H + A(I)
140 NEXT I
150 PRINT "VALEUR EN "; A;" DU POLYNOME "; H
160 PRINT
170 GOTO 90
```



IV. Le second degré

Ce paragraphe procède à une étude complète des polynômes du second degré :

$$x \longmapsto ax^2 + bx + c \quad (\text{avec} \quad a \neq 0\ )$$

encore appelés **trinômes du second degré** [1]

1. Activités préliminaires

Les exemples qui suivent visent à se familiariser avec la **technique générale** d'étude du trinôme qui sera développée par la suite.

a. Activité 6 : "la croix"

Le problème

Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que les deux surfaces (grisée et rosée) aient la même aire?

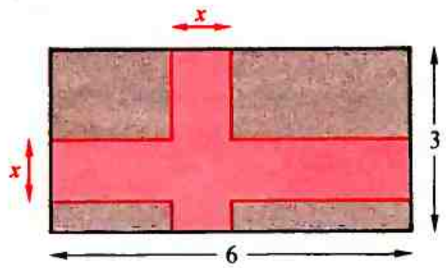


Figure 2

Indications

1° Exprimer l'aire de la croix en fonction de x et montrer que x vérifie $x^2 - 9x + 9 = 0$.

2° Montrer que l'on peut écrire :

$$x^2 - 9x + 9 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + k\ ,$$

où k est un réel que l'on calculera.

3° En déduire les solutions de l'équation

$$x^2 - 9x + 9 = 0.$$

Examiner parmi ces solutions celle(s) qui obéit (obéissent) aux contraintes initiales du problème (à savoir $0 < x < 3$).

b. Activité 7 : "le batelier"

(Problème donné au brevet élémentaire et à l'admission aux Écoles Normales. Besançon 1927.)

Le problème [2]

« Un batelier descend une rivière de 120 km; il la remonte ensuite et met un jour en plus, car, chaque jour, il fait 6 km de moins qu'en descendant. Combien a-t-il mis de jours pour descendre? »

Indications

Soit v la vitesse en km par jour en descente.

1° Montrer que : $\dfrac{120}{v-6} - \dfrac{120}{v} = 1.$

En déduire que v est solution de l'équation :

$$x^2 - 6x - 720 = 0.$$

2° Déterminer le réel k tel que :

$$x^2 - 6x - 720 = (x-3)^2 + k.$$

3° Conclure.

c. Activité 8 : "les pierres okaré"

D'après le *Petit Archimède* n° 23.

Le problème

Les pierres « okaré » sont des pierres précieuses dont la valeur (en francs) est égale au carré de leur masse (en grammes). On a malencontreusement laissé choir une pierre « okaré » de m grammes : elle est alors brisée en deux morceaux.

---

[1] Trinôme : somme de « trois » monômes, même si $b = 0$ ou $c = 0$.

[2] L'énoncé a été conservé tel quel malgré son manque de clarté.

1° Comparer la valeur de la pierre ainsi brisée à sa valeur initiale.

2° Combien pourra-t-on retirer au minimum de la vente des deux morceaux?

Indications

Soit x la masse en grammes de l'un des morceaux, $(m-x)$ est alors la masse du second.

a) Former et résoudre l'inéquation à laquelle conduit la question *1°*.

b) Transformer l'expression $2x^2-2mx+m^2$ en considérant que **x^2-mx est le début du développement du carré d'une fonction affine.**
En déduire que la vente des deux morceaux rapportera au minimum la moitié de la valeur initiale de la pierre intacte.

Remarque

Tous ces résultats peuvent être obtenus au moyen de la représentation graphique de la fonction :

$$\begin{aligned}[0, m] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto x^2+(m-x)^2.\end{aligned}$$

2. La forme canonique

La technique générale est identique à celle utilisée dans les activités 6, 7 et 8, à savoir :

- on met a en facteur :

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) ;$$

- puis on considère $x^2+\frac{b}{a}x$ comme le début du développement de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$;

comme $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$, on a :

$$x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2},$$

d'où
$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right];$$

- en « arrangeant » un peu, il vient :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Soit f un trinôme du second degré : $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$.

Alors : $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$

On dit que f a été écrit sous *forme canonique*.

Bien entendu, il est tout à fait exclu de retenir « par cœur » une telle « formule ». Seule la méthode est essentielle à maîtriser.

Exercice

30. Mettre sous la forme canonique chacun des trinômes du second degré :

- $x \longmapsto x^2+4x-1$;
- $x \longmapsto x^2+5x+1$;
- $x \longmapsto 3x^2-7x+9$;
- $x \longmapsto -x^2+2x+2.$

3. Racines du trinôme. Equation du second degré

Il s'agit de **résoudre l'équation** $ax^2+bx+c=0$ (avec toujours $a \neq 0$).

a. Quelques exemples simples

Le trinôme $x \longmapsto ax^2+bx+c$ peut présenter une forme simple qui permet d'obtenir rapidement les racines éventuelles.
Il en est ainsi, par exemple des trinômes $x \longmapsto 3x^2+5$, $x \longmapsto 2x^2-5x$, $x \longmapsto -6x^2+18$ et, de façon plus générale, de $x \longmapsto ax^2+bx$ et $x \longmapsto ax^2+c$.

Exercices

31. Déterminer les racines des polynômes :

$$x \longmapsto 3x^2+5 \ ; \ x \longmapsto 2x^2-5x \ ;$$
$$x \longmapsto -6x^2+18.$$

32. Résoudre les équations :

$$4x^2-9=0 \quad \text{et} \quad (x-1)^2=(3x+1)^2.$$

33. Préciser, suivant les valeurs des coefficients a, b et c, le nombre de racines de P et Q pour :

$$P(x)=ax^2+bx$$
$$Q(x)=ax^2+c.$$

b. Etude du cas général

La recherche des racines du trinôme, dans le cas général, utilise la forme canonique. L'équation $f(x)=0$ est, en effet, équivalente à l'équation :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad (1) \quad (\text{puisque } a \neq 0).$$

Il est clair alors que la résolution de l'équation se poursuit en liaison avec l'étude du signe de b^2-4ac, que l'on note (immuablement) Δ et que l'on appelle **discriminant du trinôme : $\Delta=b^2-4ac$.**

- Si $\Delta<0$: l'équation (1) n'a pas de solution.
- Si $\Delta>0$: on obtient :

$$\text{soit } x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ soit } x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Le trinôme a alors deux racines : $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta=0$: l'équation (1) admet une seule racine $\dfrac{-b}{2a}$.

En résumé :

Soit $x \longmapsto ax^2+bx+c$ un trinôme du second degré ($a \neq 0$).
On désigne par $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

- **Si $\Delta<0$, le trinôme n'a pas de racine.**
- **Si $\Delta>0$, le trinôme possède *deux racines distinctes* :**

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- **Si $\Delta=0$, le trinôme admet une *racine unique* (dite *racine double*) :**

$$x=\frac{-b}{2a}.$$

Il est nécessaire :

- d'une part de **retenir ces résultats généraux** afin de les investir sans hésitation dans la résolution des équations du second degré (savoir par cœur...);
- d'autre part, de **maîtriser leur utilisation.**

Il serait en effet extravagant — c'est le moins que l'on puisse dire — de faire appel à de tels résultats pour résoudre des équations du second degré telles que :

$$x^2-3=0\ ,\quad \sqrt{2}x^2+x=0 \quad \text{ou} \quad (x+1)^2=\sqrt{2}.$$

Exemple

Soit à résoudre l'équation du second degré $5x^2+\sqrt{3}x-2=0$.

Calculons le discriminant $\Delta=b^2-4ac$, où nous avons $a=5$, $b=\sqrt{3}$, $c=-2$. Il vient :

$$\Delta=(\sqrt{3})^2-4\times5\times(-2)=43.$$

Comme $\Delta>0$, l'équation admet 2 solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{43}}{10}$ et $x_2=\dfrac{-\sqrt{3}-\sqrt{43}}{10}$

soit : $$x_1=\frac{\sqrt{43}-\sqrt{3}}{10}\ ;\quad x_2=-\left(\frac{\sqrt{43}+\sqrt{3}}{10}\right).$$

Remarque

On notera que lorsque **a et c sont de signes contraires,** le discriminant Δ est strictement positif **(puisque $ac<0$ implique $b^2-4ac>0$) : le trinôme admet alors deux racines distinctes.**

Exercices

34. Déterminer les racines des polynômes P, Q, R, S, avec :

$$P(x)=289x^2-17x-6\ ;$$
$$Q(x)=x^2-2{,}4x-0{,}81\ ;$$
$$R(x)=2x^2-(2\sqrt{5}+\sqrt{6})x+\sqrt{30}\ ;$$
$$S(x)=2x^2-2\sqrt{2}x+1\ .$$

35. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $-x^2+6x=0$;

b) $-5x^2+4=0$;

c) $(x-1)^2-(x-1)(x-2)=0$;

d) $2\sqrt{2}x^2-4x+\sqrt{2}=0$.

c. *Factorisation du trinôme*

Il découle des résultats précédents que :

- **si $\Delta>0$,** $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ (en désignant par x_1 et x_2 les racines du trinôme);
- **si $\Delta=0$,** $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ (en utilisant la forme canonique)[1];
- **si $\Delta<0$,** ax^2+bx+c n'admet pas de racine, et donc ne peut être écrit sous forme de produit de polynômes du premier degré. Cependant, il admet une écriture de la forme :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right]$$

que l'on obtient facilement à l'aide de la forme canonique.

Exercice

36. Factoriser — si possible — chacun des polynômes suivants :

$$x\longmapsto x^2-x-1\ ;\ x\longmapsto -x^2-4x-4\ ;\ x\longmapsto \frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\ ;\ x\longmapsto 7x-x^2-6.$$

[1] D'où le terme de «racine double».

d. Somme et produit des racines

Lorsque $\Delta > 0$, l'égalité $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ conduit à :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right).$$

Si nous désignons par S la somme des racines $x_1 + x_2$ et par P leur produit $x_1 \times x_2$, on obtient :

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - aSx + aP \ ;$$

d'où $S = \frac{-b}{a}$ **et** $P = \frac{c}{a}$.

Remarques

1. Lorsque $\Delta = 0$, les deux racines sont confondues $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$; il est facile de vérifier que même dans ce cas $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

2. Par contre, lorsque $\Delta < 0$, les rapports $\frac{-b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, bien que définis, perdent toute signification par rapport aux racines, puisqu'il n'y a pas de racine.

En résumé (avec la convention précédente) :

Lorsque le trinôme $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes ou confondues, leur *somme S* et leur *produit P* sont donnés par :

$$S = \frac{-b}{a} \ ; \quad P = \frac{c}{a}.$$

Il découle de ce résultat que la connaissance d'une des racines d'un trinôme autorise la détermination de l'autre, sans passer par les formules de la résolution générale (page 64) : il suffit d'utiliser l'expression de S ou celle de P.

Exemple

Soit le trinôme $x \longmapsto 2x^2 - 5x + 3$.
La relation $2 - 5 + 3 = 0$ montre que $x_1 = 1$ est racine de ce trinôme

L'autre racine x_2 vérifie donc $1 \times x_2 = \frac{3}{2}$, d'où $x_2 = \frac{3}{2}$.

Exercices

37. Après avoir repéré une solution évidente[1], résoudre les équations :

- $3x^2 - 5x + 2 = 0$;
- $\frac{x^2}{4} - x + 1 = 0$;
- $-7x^2 - 6x + 1 = 0$.

38. Montrer que les racines du polynôme :

$$x \longmapsto 3x^2 - 1\,000x + 3$$

sont positives et inverses l'une de l'autre.

39. Existe-t-il une valeur du réel a pour laquelle le polynôme $x \longmapsto x^2 + ax + 3$ admet 2 comme racine?
Si oui, préciser l'autre racine.

[1] Cf. page 75.

4. Quelques applications

a. Recherche de deux réels connaissant leur somme et leur produit

Nous avons déjà proposé dans le chapitre précédent une méthode permettant de résoudre le problème suivant :

« **Déterminer deux nombres connaissant leur somme et leur produit.** »

L'étude précédente sur la somme et le produit des racines conduit à une **autre méthode** grâce au résultat suivant :

Deux nombres réels ont pour *somme* S et pour *produit* P si et seulement si ils sont solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$.

En effet, quels que soient les réels u, v, on a :

$$(x-u)(x-v) = x^2 - (u+v)x + uv$$

et donc : (u, v) solution du système $\begin{cases} u+v=S \\ uv=P \end{cases}$ équivaut à u et v sont racines de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

Le calcul du **discriminant Δ** du trinôme $x \longmapsto x^2 - Sx + P$, $\Delta = S^2 - 4P$, permet de retrouver les résultats obtenus à ce sujet dans le chapitre I.

Il existe deux réels u et v de somme S et de produit P donnés, si et seulement si $S^2 - 4P \geqslant 0$ (le cas d'égalité $S^2 - 4P = 0$ correspondant à l'égalité $u = v$).

b. Exemples

1. *Déterminer deux réels de somme -3 et de produit $\frac{1}{2}$.*

On considère l'équation $x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 0$.

On a $\Delta = 3^2 - 4 \times \frac{1}{2} = 7$. Comme $\Delta > 0$, cette équation admet deux solutions $\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$.

Les deux nombres cherchés sont donc $\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$.

2. *Retrouver que le carré est parmi les rectangles d'aire donnée $\mathcal{a}$, celui de périmètre minimum.*

Désignons par L et l les dimensions d'un tel rectangle et par p le périmètre. Il est clair que $L \times l = \mathcal{a}$ et que $2(L + l) = p$. Ainsi, L et l sont les solutions de l'équation $X^2 - \frac{p}{2}X + \mathcal{a} = 0$.

Cette équation admet des solutions si et seulement si $\Delta = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 4\mathcal{a} \geqslant 0$ ou encore si et seulement si $p^2 \geqslant 16\mathcal{a}$.

On voit donc que le minimum du périmètre est obtenu lorsque $p^2 = 16\mathcal{a}$, autrement dit lorsque le discriminant Δ est égal à 0, ce qui correspond à l'égalité des solutions de l'équation : $L = l$.

Conclusion

Parmi les rectangles d'aire donnée, le carré est celui de périmètre minimum.

Exercices

40. Déterminer, s'ils existent, deux réels u et v connaissant leur somme S et leur produit P dans les cas suivants :

a) $S=1$; $P=1$.

b) $S=-6$; $P=9$.

c) $S=10$; $P=20{,}5$.

d) $S=0$; $P=1$.

41. En s'inspirant de la méthode ci-dessus, retrouver que le carré est, parmi les rectangles de périmètre donné p, celui d'aire maximum.

5. La fonction $x \longmapsto ax^2+bx+c$

De nombreux problèmes — souvent appelés « Problèmes du second degré » — nécessitent l'intervention d'un trinôme $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ (cf. les exemples précédents). Ces problèmes, cependant, ne se réduisent pas tous à la résolution de l'équation $f(x)=0$. Certains font appel aux **variations** de f, au tracé de sa **courbe représentative**, au **signe** de $f(x)$, etc.

Il s'agit donc, dans ce paragraphe, de **rendre disponible les résultats essentiels concernant la fonction f et qui sont nécessaires au traitement de tels problèmes.**

La démarche que nous avons adoptée écarte la longue liste des résultats « technico-numériques » — difficiles à mémoriser — et vise plutôt à dégager les informations vraiment utiles, à savoir :

- allure de la courbe représentative,
- repérage de l'extrémum,
- détermination immédiate du signe de $f(x)$.

Deux outils sont privilégiés dans cette démarche :

1. la mise sous forme canonique,

2. le changement d'origine du repère[1].

a. Les résultats préliminaires

Nous désignerons par f la fonction $x \longmapsto ax^2+bx+c$.

- **Exploitation de la forme canonique**

L'égalité :

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

peut également s'écrire :

$$ax^2+bx+c-\frac{4ac-b^2}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Ainsi la relation $y=f(x)$ peut toujours être écrite sous la forme :

$$y-\beta = a(x-\alpha)^2$$

(nous ne nous préoccupons pas, pour l'instant, des valeurs de $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$).

[1] Ce procédé sera développé dans son cadre le plus général au chapitre 3.

- **Le changement d'origine du repère**

Soit Ω le point de coordonnées (α, β) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En désignant par (x, y) les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et par (X, Y) les coordonnées de M dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, on a les relations :

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$$

(cela résulte de la traduction en termes de coordonnées de l'égalité $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\Omega}$).

Ainsi la relation $y - \beta = a(x - \alpha)^2$ peut être traduite par $Y = aX^2$.

Autrement dit, **la courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction f est la courbe représentative dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction $X \longmapsto aX^2$.**

Rappelons alors l'essentiel des résultats sur la fonction $x \longmapsto ax^2$.

- **Les fonctions $x \longmapsto ax^2$**

Ces fonctions, déjà étudiées en classe de seconde, admettent pour courbes représentatives, des **paraboles.**
Deux cas sont à distinguer : $a > 0$ et $a < 0$:

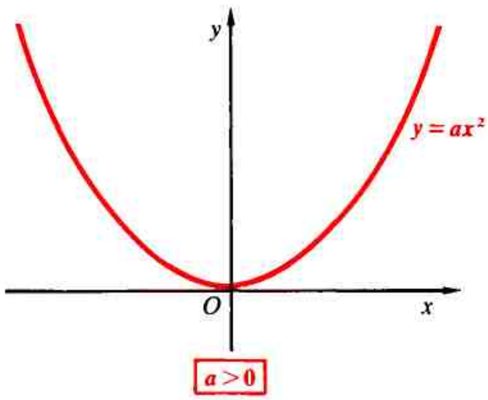


Figure 3

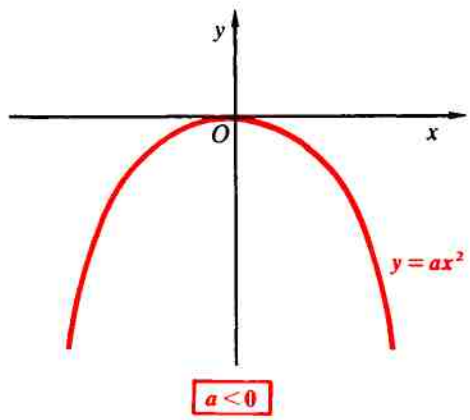


Figure 4

Les **variations** de ces fonctions sont directement **lisibles sur les figures** ci-dessus. Les expressions suivantes :
— **parabole « tournée vers le haut »** (figure 3) lorsque $a > 0$,
— **parabole « tournée vers le bas »** (figure 4) lorsque $a < 0$,
permettent à la fois d'indiquer « l'allure » des courbes représentatives de ces fonctions et de préciser très rapidement leurs variations.

b. *Les informations essentielles*

Elles découlent des résultats précédents :

1. La courbe représentative de la fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ est une parabole : elle est en effet représentative de la fonction $x \longmapsto ax^2$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Cette parabole est « tournée vers le haut » si $a > 0$ et « tournée vers le bas » si $a < 0$.

3. Le point $\Omega(\alpha, \beta)$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$ est le **sommet** de cette parabole : ce point correspond à un extrémum de la fonction f. On pourra, le plus souvent, se contenter du résultat suivant : « la fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ admet un extrémum en $\frac{-b}{2a}$ », puis calculer la valeur de $f(x)$ correspondante.

4. Étude du signe de $f(x)$:
a) Lorsque $\Delta \leqslant 0$, $f(x)$ admet une écriture de la forme $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k^2\right)$ (cf. page 65), d'où il ressort que $f(x)$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ qui est celui du réel a.
b) Lorsque $\Delta > 0$, on a $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (en notant par x_1 et x_2 les racines de f). Il est alors aisé de s'apercevoir que :
- si x est entre les racines, $f(x)$ et a sont de signes contraires;
- sinon, $f(x)$ et a sont de même signe.

Conventionnellement, on résume les deux situations *a*) et *b*), en une seule formulation : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a, sauf entre les racines ».

Le théorème suivant, donne la synthèse de cette étude :

c. Théorème

1. La courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ est une parabole :
- **tournée vers le haut si $a > 0$,**
- **tournée vers le bas si $a < 0$.**

2. Le point *Ω de la parabole, ayant pour abscisse* $\frac{-b}{2a}$, joue un rôle privilégié :
- **c'est le *sommet* de la parabole,**
- **il correspond à un *extrémum de la fonction f*,**
- **dans le *repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, la parabole est la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto ax^2$.**

3. Pour tout réel *x*, le réel $ax^2 + bx + c$ *est du signe de a, sauf entre les racines*[1].

Avant d'illustrer comment s'exploitent ces résultats dans divers types de problèmes, il n'est pas inutile de signaler que :
- si besoin est, l'ordonnée de Ω est obtenue par le calcul de $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$;
- les points 1 et 2 couvrent l'étude des variations de la fonction f;
- si le point 3 donne une information immédiate sur le signe de $f(x)$, il serait ridicule d'y revenir systématiquement pour traiter ce problème avec des formes :

— factorisée, comme $(x-1)(x-3)$,

— canonique, comme $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

[1] Sous-entendu : si elles existent.

d. Exemples

Exemple 1

Représenter graphiquement dans le même repère orthonormé les fonctions :

$$f : x \longmapsto x^2 - 3x + 2 \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto -x^2 + 5x - 4.$$

Préciser les points d'intersection des courbes représentatives.

Solution

- **Étude de la fonction f**

Nous avons $a = 1$, $b = -3$ et $c = 2$. Donc $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{2}$.

La fonction f admet comme courbe représentative une parabole « tournée vers le haut » ($a = 1$) de sommet $\Omega_1\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ puisque $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$: elle est la courbe représentative dans le repère $(\Omega_1, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction $x \longmapsto x^2$.

- **Étude de la fontion g**

La fonction g est représentée graphiquement par une parabole tournée vers le bas ($a = -1$). Le sommet Ω_2 de cette parabole a pour abscisse $\dfrac{5}{2}$ et pour ordonnée $g\left(\dfrac{5}{2}\right) = \left(\dfrac{9}{4}\right)$: $\Omega_2\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$.

- **Intersection des courbes représentatives de f et de g**

Un point $M(x, y)$ appartient aux deux courbes si et seulement si on a à la fois $y = f(x)$ et $y = g(x)$.

L'abscisse x d'un tel point M vérifie donc l'égalité $f(x) = g(x)$ soit :

$$x^2 - 3x + 2 = -x^2 + 5x - 4$$

ou encore $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Cette équation admet deux solutions $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ (à vérifier) qui conduisent à deux points d'intersection : $A(1, 0)$ et $B(3, 2)$.

Commentaires

1. La figure 5 ci-contre montre que si l'on veut effectuer une représentation graphique **soignée** d'un trinôme, il est nécessaire de préciser les points d'intersection avec les axes de coordonnées (par exemple), ce qui peut conduire à la résolution d'équations du second degré.

2. Nous avons également représenté les « **axes** » des paraboles, droites parallèles à (Oy) passant par le sommet (cette terminologie trouvera sa justification dans le chapitre 3).

3. Il est clair que l'on peut procéder à l'étude des fonctions f et g et donc au tracé de leurs courbes représentatives par **la mise sous forme canonique.** Ainsi par exemple :

$$y = f(x) \iff y = x^2 - 3x + 2$$

$$\iff y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2$$

$$\iff y - \left(-\frac{1}{4}\right) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2.$$

On retrouve la parabole d'équation $Y = X^2$ dans le repère $(\Omega_1, \vec{i}, \vec{j})$ $\left(\text{avec } \Omega_1\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{-1}{4}\right)\right)$.

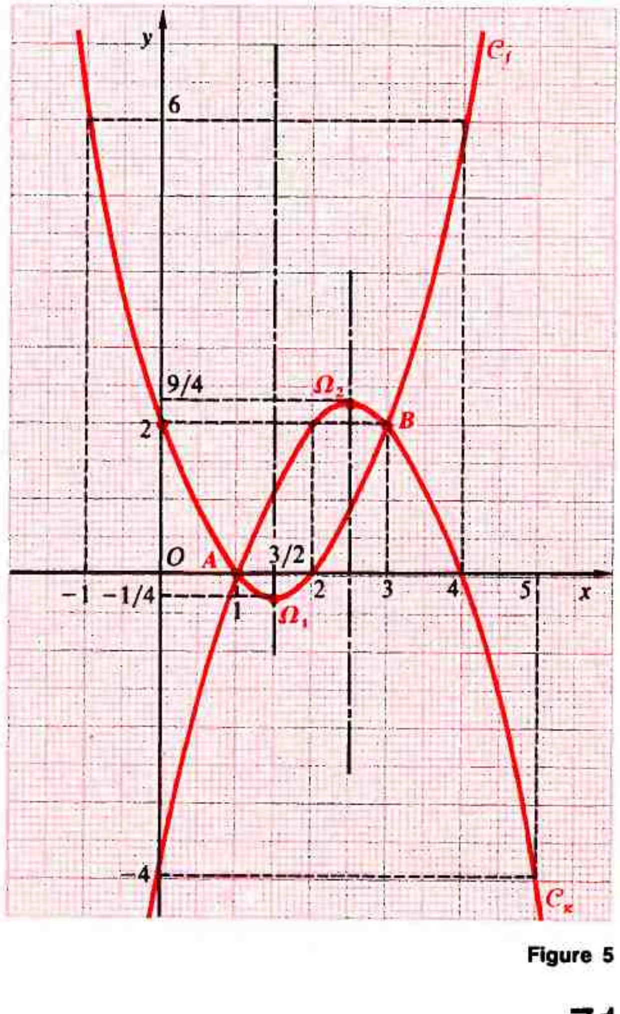


Figure 5

Exemple 2

Le mouvement d'un objet lancé « dans l'air » (dans des conditions raisonnables[1]) fait intervenir une **fonction trinôme.** De façon plus précise, quel que soit la direction dans laquelle est lancé cet objet et avec ou sans vitesse initiale, son altitude h varie en fontion du temps t suivant une loi de la forme $h = at^2 + bt + c$ (les coefficients a, b et c dépendant bien sûr des conditions dans lesquelles est effectué le lancement).

Ainsi, par exemple, l'altitude h d'un objet (pesant) laché en chute libre (sans vitesse initiale) varie en fonction du temps t suivant la loi $h = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$, où g est l'accélération de la pesanteur, h_0 l'altitude initiale de l'objet.

Autre exemple (d'après *Jeux et stratégies,* n° 2) :

Un peu de physique : Paul plonge du plongeoir de 3 m.
Grâce au tremplin il s'élève d'un mètre.
Il repasse devant le plongeoir 1 seconde plus tard.
Au bout de combien de temps
Arrivera-t-il à l'eau?

Nous désignerons par t le temps écoulé depuis le départ du tremplin et par $h(t)$ l'altitude du plongeur à l'instant t, altitude repérée par rapport au niveau de l'eau.

Les données du problème conduisent à exprimer **t en secondes** et **$h(t)$ en mètres.**

D'après ce qui précède, nous savons que $h(t)$ peut s'écrire : $h(t) = at^2 + bt + c$.

(Le graphique de la figure 6, bien que non indispensable au traitement du problème, facilite cependant l'interprétation des données.)

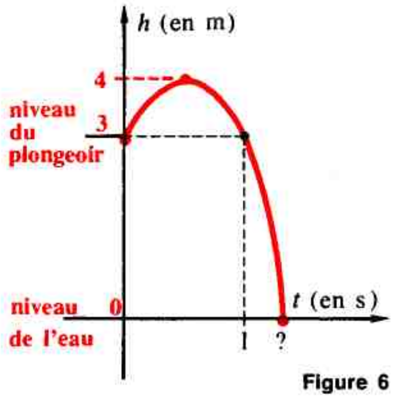


Figure 6

- D'une part, nous avons :

$h(0) = 3$ c'est-à-dire $\boldsymbol{c = 3}$
$h(1) = 3$ ou encore $a + b + c = 3$,
d'où comme $c = 3$, $\boldsymbol{b = -a}$.

- D'autre part, nous connaissons l'ordonnée de l'extrémum de la fonction h : $3 + 1 = 4$. Nous savons qu'un tel point a pour abscisse : $\frac{-b}{2a}$, soit ici : $\frac{1}{2}$. On doit donc avoir $h\left(\frac{1}{2}\right) = 4$, c'est-à-dire :

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^2 - a\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 4 \text{ , d'où } \boldsymbol{a = -4}.$$

Ainsi : $\boldsymbol{h(t) = -4t^2 + 4t + 3}$.

Il reste donc à résoudre l'équation $h(t) = 0$. On trouve facilement deux solutions : $t_1 = -\frac{1}{2}$ et $t_2 = \frac{3}{2}$ (à vérifier).

Comme il ne serait vraiment pas sérieux de retenir la solution $t_1 = -\frac{1}{2}$, la réponse au problème est donc :

Le plongeur arrive dans l'eau 1,5 seconde après son départ du plongeoir, soit 0,5 seconde après être repassé devant le plongeoir.

Remarque

Les lois de la mécanique permettent d'affirmer que le coefficient de t^2 dans l'expression de $h(t)$ est en réalité, $-\frac{1}{2}g$ (où g est l'accélération de la pesanteur; $g \approx 9{,}81$) et non -4 comme trouvé ci-dessus. Que faut-il penser alors des données de ce problème?

[1] Mouvement à accélération constante.

V. Compléments

1. Problèmes se ramenant au second degré

Nous avons vu quelques exemples de problèmes conduisant **directement** à des équations, inéquations, etc., du second degré. Il s'agit dans ce paragraphe, d'examiner quelques situations qui mettent en jeu les résultats relatifs au trinôme du second degré, par l'intermédiaire de **changement de variables,** de **systèmes,** etc.

a. Equation bicarrée

Ce sont des équations de la forme $ax^4+bx^2+c=0$.

Exemple 1

Résoudre l'équation $x^4-4x^2+2=0$.

On effectue le changement de variable $X=x^2$.

L'équation $x^4-4x^2+2=0$ est alors équivalente au **système** $\begin{cases} x^2=X \\ X^2-4X+2=0. \end{cases}$

1° Résolution de l'équation $X^2-4X+2=0$.
Cette équation admet deux solutions : $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$.

2° Résolution des équations $x^2=2+\sqrt{2}$ et $x^2=2-\sqrt{2}$.
Les réels $2+\sqrt{2}$ et $2-\sqrt{2}$ étant tous deux positifs, chacune de ces équations admet deux racines

3° Conclusion : L'équation $x^4-4x^2+2=0$ admet quatre racines :

$$x_1=\sqrt{2+\sqrt{2}}\,,\quad x_2=-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,,\quad x_3=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,,\quad x_4=-\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Remarque

Si l'on pose $f(x)=x^4-4x^2+2$, il est clair que $f(-x)=f(x)$ pour tout x et donc que si x est racine de f, $-x$ également

Exemple 2

Soit $f(x)=x^4-2x^2-2$. *Résoudre l'équation* $f(x)=0$ *et l'inéquation* $f(x)<0$.

• On procède de façon analogue : $x^4-2x^2-2=0 \iff \begin{cases} x^2=X \\ X^2-2X-2=0. \end{cases}$

L'équation $X^2-2X-2=0$ admet deux racines $1+\sqrt{3}$ et $1-\sqrt{3}$. Comme $1-\sqrt{3}<0$, il n'y a pas de solution à $x^2=1-\sqrt{3}$, d'où :

Conclusion : $x^4-2x^2-2=0$ admet deux solutions : $x_1=\sqrt{1+\sqrt{3}}$ et $x_2=-\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

• D'après ce qui précède, on a : $X^2-2X-2=(X-(1+\sqrt{3}))(X-(1-\sqrt{3}))$ et donc, en remplaçant X par x^2 : $f(x)=x^4-2x^2-2=(x^2-(1+\sqrt{3}))(x^2+\sqrt{3}-1)$.
Comme $x^2+\sqrt{3}-1>0$, $f(x)$ est du signe de $x^2-(1+\sqrt{3})$.

Conclusion : L'inéquation $f(x)<0$ admet pour ensemble de solutions l'**intervalle** $]-\sqrt{1+\sqrt{3}};\ \sqrt{1+\sqrt{3}}[$.

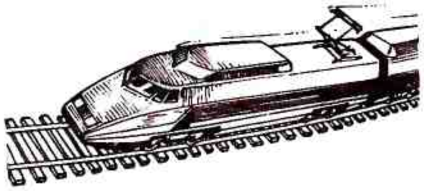
Remarque générale

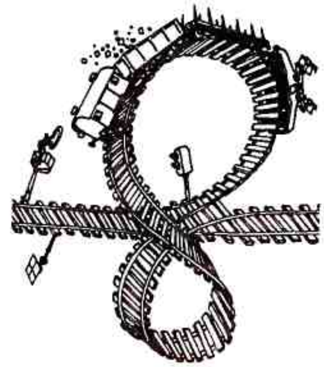
Le changement de variable $X=x^2$ permet de traiter la plupart des problèmes relatifs à une fonction bicarrée $x \longmapsto ax^4+bx^2+d$. Cependant, il ne faut pas abuser d'un tel procédé... Dans certains cas, un examen sommaire de la fonction est beaucoup plus pertinent (ainsi, par exemple, l'équation $x^4+\sqrt{3}x^2+1=0$ est manifestement sans solution puisque pour tout réel x, $x^4+\sqrt{3}x^2+1 \geqslant 1$).

b. Le Goëland

Un train de marchandises, le Goéland (un rapide) et un omnibus partent respectivement de Vitré, Brest et Dol-de-Bretagne, en direction de Rennes, où ils arrivent tous les trois à 8 h 34. Le train de Dol est parti une demi-heure après les deux autres. Si le T.G.V., dont la vitesse moyenne est égale à la somme des vitesses des trois trains précédents, était mis en circulation sur cette ligne, il mettrait une heure et demie de Vitré à Brest (si l'on ne tient pas compte de l'arrêt à Rennes).

A quelle heure chacun de nos trois trains précédents a-t-il quitté sa gare d'origine, sachant qu'il y a approximativement 50 km entre Vitré et Rennes, 75 entre Dol et Rennes, et 250 entre Brest et Rennes?





(D'après *« Jeux et Stratégies »*.)

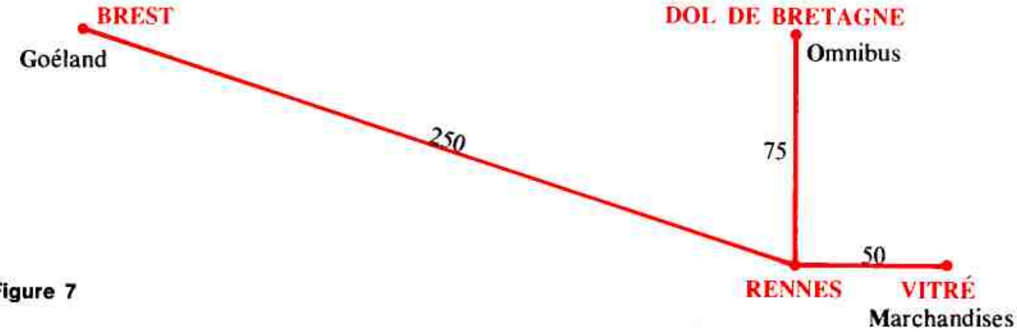


Figure 7

La figure 7 donne une idée de la topographie des lieux.

- **Choix des inconnues**

Pour chacun des trains, nous pouvons faire intervenir l'heure de départ, la durée du trajet, la vitesse moyenne... Pour l'instant, nous ne savons pas quel **choix** sera le mieux adapté à la résolution du problème. C'est la mise en équation qui permettra de déterminer un tel choix.

Nous désignerons par t_O, t_G et t_M la durée du trajet de l'Omnibus, du Goéland et du train de Marchandises, et par v_O, v_G et v_M leurs vitesses respectives.

Ces inconnues sont liées de façon évidente par les relations :

$$250 = t_G \times v_G \;;\quad 75 = t_O \times v_O \;;\quad 50 = t_M \times v_M.$$

- **Mise en équation**

1° Il est facile de calculer la vitesse du T.G.V. : $\dfrac{50+250}{1{,}5}$, soit 200 km/h.

On obtient donc une première relation $v_O + v_G + v_M = 200.$

2° Le train de marchandises et le Goéland étant partis au même moment et arrivant tous deux à 8 h 34, on a $t_M = t_G$ ce qui conduit à $\dfrac{250}{v_G} = \dfrac{50}{v_M}$ d'où $v_G = 5 \times v_M.$

On en déduit : $\boxed{6v_M + v_O = 200}$ (1).

3° D'après l'énoncé : $t_O = t_M - \dfrac{1}{2}$, ce qui fournit une autre relation entre les vitesses :

$$\frac{75}{v_O} = \frac{50}{v_M} - \frac{1}{2},$$

soit : $\boxed{v_O = \dfrac{150 v_M}{100 - v_M}}$ (2).

Les relations (1) et (2) conduisent à l'équation : $\dfrac{150v_M}{100 - v_M} + 6v_M = 200.$

• **Résolution de l'équation $\dfrac{150v_M}{100 - v_M} + 6v_M = 200$**

Pour alléger les notations, nous noterons $v = v_M$. L'équation devient tous calculs faits :

$$3v^2 - 475v + 10\,000 = 0.$$

Cette équation admet deux solutions : $v_1 = 25$ et $v_2 = \dfrac{400}{3}$.

• **Réponse au problème**

La solution $v_M = \dfrac{400}{3}$ ne peut être retenue : elle conduirait, par exemple à v_O négatif... (d'après la relation 2).

Ainsi $v_M = 25$ km/h , $t_M = 2$ h , d'où l'on déduit $v_O = 50$ km/h , $t_O = 1$ h 30 min, puis :

$v_G = 125$ km/h , $t_G = 2$ h.

En conclusion, les horaires de départ sont :

Goéland : 6 h 34 min. Omnibus : 7 h 04 min. Train de marchandises : 6 h 34 min.

Commentaire

En plus des questions relatives au choix des inconnues (déjà signalées page 74), cet exercice est significatif de la **discussion** que l'on peut être amené à effectuer dans certains cas. Lorsque la résolution de l'équation (ou du système) conduit à plusieurs solutions, il faut **confronter** chacune d'elles aux données du problème[1].

2. Résolution d'équations

Dès que le degré du polynôme P dépasse 2, la résolution de l'équation $P(x) = 0$ devient délicate voire impossible[2]. Cependant dans certains cas, il est possible de trouver « à vue d'œil » une (ou plusieurs) racines de P, ce qui permet d'amorcer la factorisation du polynôme. Ces racines qu'il semble donc possible de trouver à vue d'œil sont appelées... **racines évidentes.**

a. Exemple 1

Résoudre l'équation $x^3 - 4x^2 - 7x = 0.$

Aucune difficulté : 0 est vraiment une racine évidente. On est donc amené à résoudre $x^2 - 4x - 7 = 0$, qui admet pour solutions $x_1 = 2 + \sqrt{11}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{11}$.

L'ensemble S des solutions est donc : $S = \{0\ ;\ 2 + \sqrt{11}\ ;\ 2 - \sqrt{11}\}$.

b. Exemple 2

Résoudre $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0.$

Quelques tentatives avec des nombres « raisonnables » 1, −1, 2, −2... permettent de voir que 1 et −1 sont racines de cette équation.

Nous factoriserons donc le polynôme $x \longmapsto x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ par $(x - 1)$ à l'aide de la **méthode de Hörner.**

[1] En général la nature du problème dicte les contraintes sur les inconnues : nombre positif, nombre entier, etc., mais il ne faut pas hésiter à rejeter une valeur non plausible...

[2] Cf. page 55.

$a = 1$

1	2	−2	−2	1
	1	3	1	−1
1	3	1	−1	0

Ainsi :

$P(x) = (x-1)(x^3+3x^2+x-1)$.

Factorisons le polynôme x^3+3x^2+x-1 par $(x+1)$:

$a = -1$

1	3	1	−1
	−1	−2	1
1	2	−1	0

D'où :

$x^3+3x^2+x-1 = (x+1)(x^2+2x-1)$.

$P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+2x-1)$.

Comme l'équation $x^2+2x-1=0$ admet pour solutions $x_1 = -1+\sqrt{2}$ et $x_2 = -1-\sqrt{2}$, l'ensemble des solutions est donc $\{1, -1, -1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}\}$.

Remarques

1. La méthode de Hörner, en plus de sa rapidité, fournit un contrôle des calculs au sens suivant : si le dernier coefficient trouvé dans le schéma n'est pas nul, il y a quelque part une erreur de calcul.

2. Un peu d'habitude permet de tester rapidement si des nombres comme 1, −1, etc. sont racines de l'équation ou non. Par exemple, il est facile de voir que 1 est racine de P si et seulement si la somme des coefficients du polynôme est égale à 0.

3. Il ne faut pas se leurrer... A part quelques problèmes dont les données fournissent une racine (soit de façon explicite : « vérifier que α est racine »..., soit comme dans les exemples 1 et 2), très peu d'équations possèdent une racine évidente...

3. Le problème des échelles

Extrait d'un article de Martin Gardner. « Des triangles élégants », in MATH' circus. Bibliothèque pour la Science. Diffusion Belin.

Les jeux mathématiques avec des triangles sont nombreux, mais l'un d'entre eux, d'origine inconnue, a retenu l'attention de générations entières de mathématiciens. Son charme tient au fait que la solution, à première vue très simple, prend rapidement une forme extrêmement complexe, pour émerger enfin d'un brouillard algébrique épais. Dans ce problème, on considère deux échelles croisées de longueurs différentes (si elles sont égales le problème est évident) appuyées contre deux murs (figure 8). Connaissant la longueur de chaque échelle et la hauteur de leur point de croisement, peut-on calculer la distance entre les murs? Le mathématicien William Ransom pose ce problème en supposant que les échelles mesurent respectivement 100 et 80 unités, leur point de croisement étant situé à 10 unités au-dessus du sol. En considérant des triangles semblables, W. Ransom arrive à la formule[1] :

$$k^4 - 2ck^3 + k^2(a^2-b^2) - 2ck(a^2-b^2) + c^2(a^2-b^2) = 0$$

qui s'écrit numériquement $k^4 - 20k^3 + 3\,600k^2 - 72\,000k + 360\,000 = 0$.

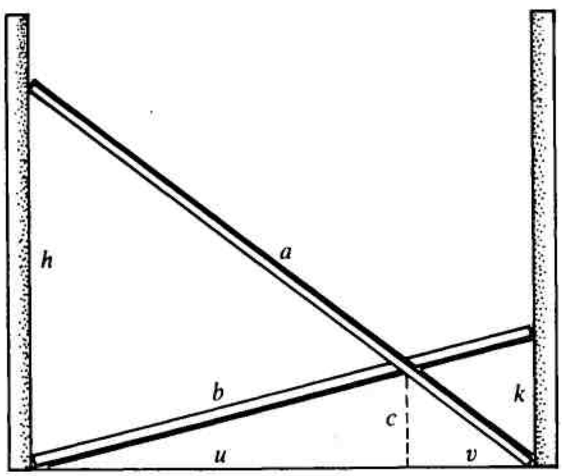


Figure 8

Activité 9

Cette activité ne concerne que la mise en équation du problème qui, pour une fois, n'est pas évidente.

En pensant aux théorèmes classiques de géométrie, établir la formule de Ransom (on pourra exprimer $\frac{c}{k}+\frac{c}{h}$ et h^2-k^2).

[1] L'écartement entre les deux murs s'obtient de façon immédiate dès que k ou h est connu.

EXERCICES

Vrai-Faux

1. La fonction $x \longmapsto (\sqrt{x})^4$ est un polynôme.

2. Si un polynôme est de degré 3, son carré est de degré 9.

3. La somme de deux polynômes de degré 2 est de degré 2.

4. Si la somme des coefficients d'un polynôme est nulle, il est factorisable par $x-1$.

5. Si a est racine de $P(x)$ et de $Q(x)$, a est racine de $P(x)-Q(x)$.

6. Si a est racine de $P(x)\times Q(x)$, alors a est racine de $P(x)$ ou de $Q(x)$.

7. Le reste de la division de $P(x)$ par $2x+1$ est $P\left(\frac{1}{2}\right)$.

8. Un polynôme, qui s'annule pour 0, 1, 2, 3, et 4, n'est pas de degré 4.

9. $P(x)=x^5+x^4+4x^3+x^2+7x+1$ n'a pas de racine positive.

*Dans les «vrai-faux» n^os^ **10** à **17**, $f(x)$ désigne le trinôme : ax^2+bx+c (avec $a\neq 0$) et Δ son discriminant.*

10. Si $\Delta>0$, alors pour tout x : $f(x)>0$.

11. Si, pour tout x, $f(x)<0$, alors Δ est négatif.

12. Si $f(x)$ admet deux racines opposées alors b est nul.

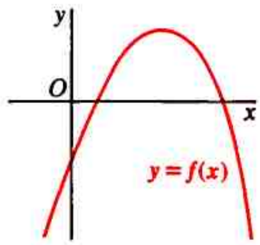
13. Le trinôme $3(2x+1)^2$ a un discriminant nul.

14. L'équation $x^4+3x^2+1=0$ n'a pas de solution réelle.

15. $(x+2)^2+2(x+2)+100$ ne s'annule pas.

16. Si deux trinômes ont mêmes racines, ils ont mêmes coefficients.

17. Sur la représentation ci-contre, on peut affirmer que : $a<0$ et $\Delta>0$.



Applications

1. Étant donné les polynômes :

$$P(x)=8x^3-4x^2-2x-1$$
$$Q(x)=x^4-4x^2+x$$
$$R(x)=-6x^3+x-5$$

déterminer :

$$P(x)+Q(x)+R(x)\ ,\quad P(x)+Q(x)-R(x)\ ,$$
$$P(x)-Q(x)+R(x)\ ,\quad P(x)-Q(x)-R(x).$$

2. Effectuer les produits suivants :

a) $(1+3x-2x^2-5x^3)(1-3x+2x^2-5x^3)$;

b) $(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)$;

c) $\left[x^3+(a+b)x^2+(a+b)^2x+(a+b)^3\right]\left[x-(a+b)\right]$;

d) $(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$.

3. Étant donné les polynômes :

$$P(x)=3x^2+2x-3$$
$$Q(x)=-2x^3-5x^2+x-7$$

déterminer $P\times Q$, P^2 et Q^2.

4. Utiliser la méthode de Hörner pour déterminer le polynôme $Q(x)$ et le réel α tels que :

$$f(x)=g(x)Q(x)+\alpha$$

avec :

a) $f(x)=x^5+4x^4+x^3-2x^2-x-1$
$g(x)=x-2$;

b) $f(x)=x^6-x^4+x^2+x-3$
$g(x)=x+3$.

5. Pour quelle(s) valeur(s) de a appartenant à l'ensemble $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3,\}$, chacun des polynômes suivants peut-il s'écrire sous la forme $(x-a)Q(x)$, où Q est un polynôme que l'on calculera?

- $P(x)=5x^3-11x^2-3x-27$;
- $P(x)=3x^3-5x^2+3x-1$;
- $P(x)=-x^3+x^2+16x+20$.

6. Proposer plusieurs polynômes du 3ᵉ degré admettant 1 et $1-\sqrt{2}$ pour racines et dont le terme de degré 3 est égal à $2x^3$.

7. Étudier le signe de $f(x)=x^3-6x^2+3x+10$ après avoir vérifié que $f(-1)=f(2)=0$.

8. Étudier le signe des polynômes suivants :

a) $f(x)=x^3+x^2-x-1$;
b) $g(x)=x^3+2x^2+x+2$;
c) $h(x)=x^8-1$;
d) $k(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$.

Dans chacun des exercices suivants, rechercher la méthode la plus simple pour résoudre les équations proposées :

9. *a*) $x^2+(4+x)^2=0$; *b*) $x^2+4x-1=0$.

10. *a*) $(1-3x)(3x-7)=0$;
b) $(4x-1)^2-4(x-1)^2=0$.

11. *a*) $(3x+1)^2+2(3x+1)+1=0$;
b) $x^2-16+2(x-4)=0$.

Pour chaque trinôme proposé dans les exercices suivants on utilisera une forme canonique pour déterminer ses racines et les valeurs α et $f(\alpha)$ correspondant à l'extremum. On précisera la nature de celui-ci.

12. *a*) x^2+2x+2 ; *b*) $-x^2+2x+1$.

13. *a*) $\frac{1}{2}x^2-x+4$; *b*) $\frac{1}{2}x^2+x-4$.

14. *a*) $-x^2+2\sqrt{2}x-1$; *b*) $-x^2-8\sqrt{2}x-4$.

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

15. *a*) $7x^2+6x+5=0$; *b*) $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-1=0$;

16. *a*) $x^2-\frac{x}{10}+\frac{1}{1\,000}=0$; *b*) $-x^2+\sqrt{2}x+1=0$.

17. *a*) $-x^2+1+4x=0$; *b*) $9x^2\geqslant 30x-25$.

18. *a*) $x^2+6x<-16$; *c*) $70x<25x^2+49$;
b) $14x^2+3<23x$; *d*) $(2x-5)^2>5-2x$.

19. *a*) $(2x-5)(3-x)\geqslant 0$; *c*) $x^2-x+1>0$;
b) $x^2+x+\frac{1}{4}\leqslant 0$; *d*) $\frac{1}{x}+x\geqslant 2$.

Indiquer sur un schéma le signe du trinôme concerné lorsque x décrit $\mathbb{R}$, après avoir, si nécessaire, déterminé ses racines.

20. *a*) $2x^2-5x+3$; *c*) $(2x+3)^2-4$;
b) $x^2+6x-16$; *d*) $4x^2-4x+1$.

21. *a*) $-2x^2+7x-5$; *c*) $(7+2x)(7-3x)$;
b) $2x^2-3$; *d*) $x(3+x)-16$.

22. Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=-10 \end{cases}$; *c*) $\begin{cases} xy=3 \\ x+y=6 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=10 \end{cases}$; *d*) $\begin{cases} xy=1 \\ x+y=2 \end{cases}$.

23. Écrire une équation de la forme $x^2+px+q=0$ dont les solutions soient :

a) 2 et 3 ; *d*) $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$;

b) $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$; *e*) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$;

c) 5 et -6 ; *f*) 4 et $\frac{1}{4}$.

24. Déterminer dans chaque cas les racines du trinôme après avoir recherché une racine évidente :

a) $4x^2+x-5$; *b*) x^2-x-6 ; *c*) $4x^2+2x-20$;
d) $x^2-(2a+3b)x+6ab$ (a, b réels fixés).

Dans les exercices **25** *à* **27** *le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.*

25. Pour chaque parabole $\mathcal{T}$, dont l'équation est donnée, déterminer les coordonnées du sommet S et l'équation de $\mathcal{T}$ dans le repère $(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

a) $y=-x^2+5x$; *b*) $y=4x^2+5x-\frac{3}{2}$.

26. Pour chaque courbe $\mathcal{T}$ d'équation donnée, préciser le tracé en déterminant son sommet S et les points communs avec les axes de coordonnées :

a) $y=x^2-2x-8$; *c*) $y=(x-2)(x-4)$;
b) $y=-3x^2+6x$; *d*) $y=\frac{1}{2}x^2-5x+12$.

27. Donner une représentation graphique des courbes dont les équations sont les suivantes :

a) $y=(x-3)^2-4$; *c*) $y=3x^2+6x$;

b) $y=-4x^2+8$; *d*) $y=\dfrac{-x^2}{16}+x+1$.

28. Les joueurs

(D'après « *Jeux et Stratégies* », n° 28.)

Autour d'une table de jeu, *n* joueurs se retrouvent et décident d'« intéresser » la partie. Le gagnant reçoit *n* francs de la part de chacun des joueurs. Il gagne ainsi 42 F.
Combien y a-t-il de joueurs autour de la table?

Exercices

• Généralités sur les polynômes

Dans les exercices **29** *à* **31**, *développer, réduire et ordonner les polynômes.*

29. $P(x)=(x^n+2)(x^n-2)^2+2(x^{2n}-4)$
$-(x^n-2)(x^n+2)^2$.

30. $P(x)=(x+1)(x^{2n-1}+x^{2n-2}+x^{2n-3})$
$+(x^n+x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3})$
$(-x^n+x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3})$.

31. $P(x)=(x^{n-1}+x^n+x^{n+1})^2-(x^{n-1}+x^n)^2$
$-(x^n+x^{n+1})^2-(x^{n-1}+x^{n+1})^2$.

32. Montrer que $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ est le carré d'un trinôme.

33. *1°* Calculer $(x^2+px+q)^2$ et vérifier que :

$$x^4+6x^3+7x^2-6x+1$$

est le carré d'un polynôme du second degré.

2° Déterminer a pour que $x^4+2ax^3-4ax+4$ soit le carré d'un polynôme du second degré.

34. Soit P le polynôme :

$$P(x)=x^{11}-17x^{10}+17x^9-17x^8+\ldots-17x^2+17x-1.$$

Calculer le plus simplement possible $P(16)$ et $P(18)$.

35. On se propose de montrer que pour tout entier relatif x, les nombres :

$$a=3+5x-5x^2$$
$$b=4-4x+6x^2$$
$$c=5-5x-3x^2$$
$$d=6-4x+4x^2$$

sont des entiers solutions de l'équation :

$$a^3+b^3+c^3=d^3.$$

1° Vérifier qu'effectivement, a, b, c, d sont des entiers.

2° Montrer (avec la calculatrice) que la propriété annoncée est vérifiée pour

$$x\in\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}.$$

3° En **déduire** — sans autres calculs — que la propriété est vraie pour tout entier relatif x.

36. Montrer que les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 5 qui sont des fonctions paires (respectivement impaires) sont de la forme :

$$x \longmapsto a_0+a_2x^2+a_4x^4$$

(respectivement $x \longmapsto a_1x+a_3x^3+a_5x^5$).
Généraliser ces résultats.

• Racines d'un polynôme; factorisation par $(x-a)$

37. Déterminer un polynôme à coefficients entiers dont l'une des racines soit : $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.
Calculer si possible ses autres racines.

38. *1°* En utilisant — plusieurs fois — le procédé de Hörner montrer que le polynôme :

$$P(x)=x^3+16x^2+86x+156$$

peut être écrit sous la forme :

$$(x+5)^3+b(x+5)^2+c(x+5)+d$$

(on déterminera b, c et d).

2° A l'aide de la relation :

$$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

donner une factorisation de $P(x)$.

3° Étudier le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

39. Déterminer les coefficients inconnus de façon que le polynôme $P(x)$ soit divisible par $Q(x)$:

a) $P(x)=2x^2+3x+c$, $Q(x)=x-2$;

b) $P(x)=-2x^2+bx+4$, $Q(x)=1-x$;

c) $P(x)=ax^2+2x-1$, $Q(x)=2x+1$.

40. En recherchant des racines évidentes, factoriser le polynôme :

$$P(x)=x^4-4x^3-6x^2+4x+5 .$$

41. Factoriser au mieux :

a) $f(x)=x^5+x^4-4x^3-4x^2+4x+4$;

b) $g(x)=x^5-5x^3+4x$.

42. Démontrer que si $P(x)$ est un polynôme vérifiant, pour tout x, $P(x)=P(x+\alpha)$, avec $\alpha \neq 0$ fixé, alors $P(x)$ est une constante.
(Autrement dit, tout polynôme périodique est constant.)

43. Le polynôme $P(x)$ est à coefficients entiers et admet la racine entière k; $Q(x)$ est le polynôme vérifiant $P(x)=(x-k)Q(x)$.
Montrer, en utilisant le procédé de Hörner, que tous les coefficients de $Q(x)$ sont entiers.

44. Résoudre l'équation :

$$x^6+4x^5+3x^4=3x^2+12x+9 \ .$$

45. Montrer que $(1+\sqrt{2})$ et $(-1-\sqrt{2})$ sont racines du polynôme :

$$P(x)=x^4-3x^3+3x^2-3x-2.$$

Factoriser le polynôme P.

46. Le livre des voyageurs
(D'après «*Jeux et Stratégies*», n° 18.)

La scène se passe dans une auberge proche de la Mer de glace; on voit les montagnes couvertes de neige. C'est là que se retrouvent Monsieur et Madame Perrichon, Henriette et ses deux prétendants. Daniel consulte le livre des voyageurs, et lit : «je ne me suis jamais mouché aussi haut», signé un voyageur enrhumé.

«Je me suis toujours demandé, s'exclame Daniel, pourquoi les Français, si spirituels chez eux, sont si bêtes en voyage.»
Et voici ce qu'il écrit :
«J'ai trouvé la somme des inverses des racines de l'équation :

$$2x^5-34x^4+567x^3-8\,901x^2+23\,456x=11\,728 \text{»}.$$

Et vous, l'avez-vous trouvée... sans ordinateur?

(On pourra s'inspirer de la méthode développée dans l'exercice résolu, page 58.)

• Fonctions rationnelles

(On rappelle qu'une fonction rationnelle est une fonction numérique qui peut s'écrire $x \longmapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *où P et Q sont des fonctions polynômes.)*

Dans les exercices **47** *à* **49**, *déterminer l'ensemble de définition des fonctions rationnelles et éventuellement donner une écriture simplifiée.*

47. *a*) $f(x)=\dfrac{4x}{4x^2-9}+\dfrac{1}{2x-3}$; *b*) $f(x)=\dfrac{x-x^2}{1-x^2}$.

48. *a*) $f(x)=\dfrac{3x^3-12x^2-6x+24}{x^2-16}$;

b) $g(x)=\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{(x-2)(x+3)(x+2)}$.

49. *a*) $f(x)=\dfrac{(x^2-5)^2-16}{4-(1+x)^2}$;

b) $g(x)=\dfrac{(7-x)(2+x)}{x^3-4x^2-3x+18}$.

50. Montrer que l'on peut écrire le polynôme $(x+1)^3$ sous la forme : $(x-1)^2(ax+b)+c(x-1)+d$, où a, b, c, d sont des réels à déterminer.
En déduire une écriture de la fonction rationnelle :

$$\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

51. On pose $f(x)=\dfrac{x^8-1}{x^2-1}$, $g(x)=\dfrac{x^8-1}{x^2+1}$.

1° f est-elle une fonction polynôme?
Existe-t-il un polynôme P tel que :

$$f(x)=(x^2-1)P(x) \ ?$$

2° Reprendre les mêmes questions pour g.

52. Soit $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}+\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$.

1° Déterminer l'ensemble de définition de f.

2° Montrer que f coïncide avec une fonction rationnelle sur $]0, +\infty[$ mais n'est pas une fonction rationnelle (utiliser la propriété : une fonction rationnelle est définie sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points).

• Second degré : équation; étude du trinôme

Pour chacun des trinômes $f(x)$ *suivants (exercices* **53** *à* **58**) :

a) *résoudre l'équation* $f(x)=0$;

b) *préciser le signe de* $f(x)$;

c) *étudier les variations de f et déterminer l'extrémum de la fonction.*

53. *a*) x^2-6x-5 ; *c*) x^2+6x+5 ;
b) $-x^2+4x+7$; *d*) $-x^2-4x-7$.

54. a) $2x^2-8x-12$; c) $\frac{1}{2}x^2-x+4$;

b) $2x^2+8x+4$; d) $\frac{1}{2}x^2+x+4$.

55. a) $16x^2+8x+2$; c) $25x^2-20x-6$;
b) $16x^2+8x-20$; d) $25x^2+10x+1$.

56. a) $\sqrt{2}x^2+4x+\frac{1}{\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{2}x^2-8x+4$;
b) $-\sqrt{2}x^2-6x-2$; d) $\frac{x^2}{\sqrt{2}}+4x-2$.

57. (a, b, k réels donnés).

a) $x^2+2ax+k$; b) $\frac{1}{2}x^2+bx+k$.

58. a) $-x^2+x+3$; c) $-4x^2-11x+6$;
b) $x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$; d) $2x(x+3)+1$.

59. Résoudre les inéquations :
a) $(x^2-4x+3)(x^2-5x+4)<0$;
b) $(x^2-9x+14)(x^2-7x+6)\leqslant 0$.

60. Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :
a) $\begin{cases} x^2-x-1>0 \\ 2x-1<x^2+4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -5x^2+3x+1>0 \\ -5x^2+3x+2\geqslant 0 \end{cases}$

61. Les nombres réels a, b, c étant distincts, préciser, sur $\mathbb{R}$, le signe des expressions :
a) $(x-a)(x-b)$; c) $\frac{(x-a)(x-b)}{x-c}$;

b) $\frac{x-a}{x-b}$; d) $(a-x)(b-x)(c-x)$.

62. Simplifier les fractions rationnelles suivantes, et indiquer leur signe quand x décrit $\mathbb{R}$:
a) $f(x)=\frac{2x+3}{2x^2+13x-15}$; b) $g(x)=\frac{10x^2-17x+3}{5x^2+14x-3}$.

*Dans chacun des exercices suivants (exercices **63** à **67**), déterminer pour x réel le signe des fractions rationnelles :*

63. a) $f(x)=\frac{2x^2+5x-3}{x^2+x-2}$; b) $g(x)=\frac{-9x^2+5x+4}{7x^2-4x-3}$.

64. a) $h(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-4}$;

b) $t(x)=\frac{2x-1}{x+3}-\frac{x-1}{x+2}$.

65. a) $h(x)=\cfrac{1}{1-\cfrac{x-2}{2x-3}}$; b) $t(x)=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-x}}}$.

66. a) $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}$;

b) $g(x)=\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{x+3}-\frac{3}{x+3}$.

67. $f(x)=\frac{1}{6x^2-11x+3}+\frac{1}{15x^2-2x-1}$.

*Résoudre (dans $\mathbb{R}$) les inéquations (exercices **68** et **69**).*

68. a) $\frac{x^2-3x}{5-3x}+1>0$; b) $\frac{x+2}{x^2-1}>\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$.

69. a) $\frac{2x+5}{3x}\leqslant 2x+5$; b) $2x+1<\frac{1}{x}$.

70. Résoudre les systèmes :
a) $\begin{cases} x^2-x-6\geqslant 0 \\ 2x^2+x-10<0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x+3}{9+2x}\leqslant 2 \\ x^2<2 \end{cases}$

71. Résoudre :
a) $\begin{cases} x^2-5x-60>0 \\ x^2+3x-10>0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x^2-5x+60\geqslant 0 \\ x^2+3x-10\leqslant 0 \end{cases}$

• Second degré : Somme et produit des racines

Dans chacun des exercices suivants, il s'agit de déterminer les racines du trinôme, ou de l'équation, sachant que l'une d'elle est «évidente».

72. a) $-4x^2+7x+11$; c) $(x+2)(x+3)=8\times 9$;

b) $x^2-x\sqrt{2}-4$; d) $4x^2+7x+2=\frac{4}{3}+\frac{7}{\sqrt{3}}+2$.

73. (a et α sont des réels fixés).
a) $37x^2-3x-40$;
b) $x^2+2x=\alpha^2+2\alpha$;
c) $x^2+(a+1)x+a$;
d) $x^2+(2+3\sqrt{5})x+6\sqrt{5}$.

74. Écrire dans chaque cas un trinôme de la forme x^2+px+q dont les racines sont données :
a) $\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}-1$;
b) $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$;
c) $\sqrt{3}-1$ et $\sqrt{3}+1$;

d) $\sqrt{5}-1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$;

e) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

f) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}$.

75. Trouver deux nombres x et y dont on connaît la somme S et le produit P :

a) $S=-7$ et $P=10$; *c*) $S=3$ et $P=6$;
b) $S=-7$ et $P=-10$; *d*) $S=4$ et $P=4$;
e) $S=\pi+1$ et $P=\pi$;
f) $S=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ et $P=\sqrt{6}$.

Résoudre les systèmes suivants (*exercices* **76** *à* **79**).

76. *a*) $\begin{cases} y=2-x \\ xy-2x-2y+3=0; \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x-y=9 \\ xy=90. \end{cases}$

77. *a*) $\begin{cases} x+y+4xy=-1 \\ 3(x+y)-xy=10; \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ xy=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

78. *a*) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2; \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ 2xy=1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2-y^2=\sqrt{2} \\ xy=1; \end{cases}$ *d*) $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x+y=2. \end{cases}$

79. *a*) $\begin{cases} x+3y=-2 \\ 3x^2+7y^2=-12; \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x^2=y-2 \\ x^2=-\dfrac{3}{2}y+8. \end{cases}$

• Second degré : paraboles

80. Construire la courbe ($\mathcal{C}$) d'équation $y=x^2+4x$. Déterminer graphiquement le nombre m tel que cette courbe ait un seul point commun avec la droite D d'équation $y=m$.

81. Construire la courbe d'équation :

$$y=-4x^2+6x+2.$$

Déterminer graphiquement les valeurs de m telles que l'équation $-4x^2+6x+2=m$ admette deux solutions.

82. L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet, lorsque a et c sont de signes contraires, deux racines distinctes. En l'écrivant $x^2=$ ... , déterminer à quelle propriété géométrique correspond cette propriété algébrique.

83. Dans certaines conditions la **distance de freinage** d est donnée en mètres par la relation :

$$4d=0{,}03v^2+v$$

où v désign la vitesse en km.h^{-1}.

1° Représenter d en fonction de v ($v\in[0, 200]$). Préciser d pour $v\in\{20, 40, 60, 100\}$.

2° Exprimer v en fonction de d après avoir mis le trinôme sous forme canonique.
Calculer alors v pour $d\in\{50, 100, 150, 200\}$.

• Extrémums

84. *1°* Déterminer m pour que l'équation $x^2+x=m$ admette des solutions. Quelle est la plus petite valeur de m telle qu'il en soit ainsi? En déduire le sommet S de la parabole d'équation $y=x^2+x$ et la construire.

2° Appliquer ce procédé à $g(x)=4x^2+6x+1$.

3° Peut-on traiter de même les cas suivants :

a) $h(x)=-x^2+8x$?

b) $t(x)=-2x^2-x+4$?

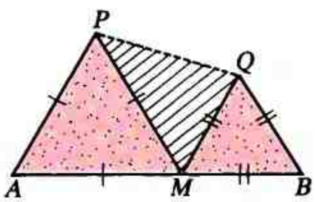
85. Déterminer, s'ils existent, le ou les antécédents du réel m par la fonction : $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x+\frac{1}{x}.$$

En déduire le minimum relatif et le maximum relatif de cette fonction.
Même question pour la fonction : $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2+\frac{1}{x^2}.$$

86. A tout point M du segment $[A, B]$ on associe les triangles équilatéraux AMP et MBQ.



a) Déterminer M pour que l'aire du triangle MPQ soit maximum.

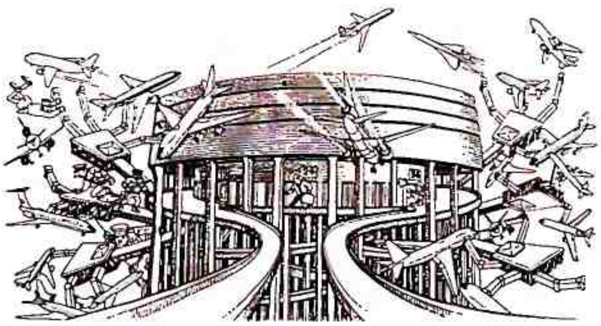
b) Déterminer M pour que l'aire du quadrilatère $ABQP$ soit minimum.
(On pourra introduire $x=$ distance AM.)

87. Les pommes
Un producteur de pommes veut faire procéder à la cueillette de sa récolte par une équipe qui ne peut travailler qu'une seule journée.
Au début du mois d'octobre le prix est de 2 000 F la tonne, mais ce prix diminue de 20 F par jour.
A quel moment doit-il vendre, sachant qu'il sait que sa production augmente de 1 tonne par jour et selon qu'il estime la production initiale à :

a) 60 t? *b*) 80 t? *c*) 100 t? *d*) 120 t?

• Problèmes du second degré[1]

88. On sait que la vitesse vraie d'un avion s'obtient en ajoutant à sa vitesse propre la vitesse du vent, si le vent est favorable, en retranchant de cette vitesse propre la vitesse du vent, si le vent est contraire.
Un avion va en ligne droite de A vers B, et revient, sans arrêt, de B vers A; mais il est obligé de s'arrêter en C, entre A et B, 3 h 30 min après son départ. On sait que le vent, qui garde une vitesse constante, souffle dans la direction AB (ou dans la direction BA). Calculer, en mètres par seconde, la vitesse du vent, sachant que $AB = 360$ km , $AC = 150$ km , et que la vitesse propre de l'avion est 160 km.



(D'après *«Jeux et Stratégies»*, n° 4.)

89. On veut planter 324 arbustes sur un terrain rectangulaire $ABCD$, de longueur 140 m et de largeur 32 m. Ces arbustes doivent former des rangées équidistantes parallèles à AB, la première sur AB et la dernière sur CD. Ils doivent aussi former des rangées équidistantes parallèles à BC, la première sur BC et la dernière sur AD.
Trouver quelle doit être la distance de deux rangées consécutives, sachant que cette distance est la même pour les rangées parallèles à AB que pour les rangées parallèles à BC.

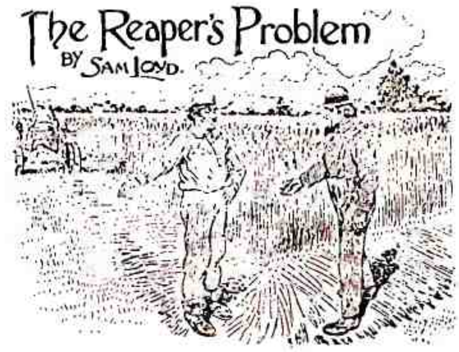
90. Le problème des moissonneurs.

(D'après *«Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd»*. M. GARDNER. Dunod.)

Quelle devra être la largeur de la bande?

Les ouvriers et les paysans, qui ne sont pas très doués en mathématiques, résolvent souvent de façon pratique de bien difficiles problèmes. J'en appelle à l'attention de nos lecteurs pour apprendre de quelle façon intelligente deux fermiers résolurent leur problème.

Un propriétaire d'un ranch au Texas, qui possédait plus de terre qu'il ne pouvait convenablement gérer, loua la moitié d'un de ses champs à un voisin. Ce champ avait une longueur de 2000 mètres sur une largeur de 1000 mètres, mais du fait de la présence de quelques mauvais sillons qui traversaient le

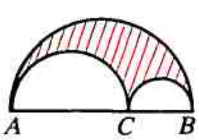


champ, il fut décidé qu'une division plus équitable serait faite si l'on traçait une bande sur le pourtour du champ, plutôt que de le diviser en deux.

Je suppose que nos lecteurs n'auront pas de difficultés à déterminer la largeur de cette bande qui doit être tracée sur le périmètre du champ. Il y a une règle bien simple qui peut s'appliquer à n'importe quel champ rectangulaire.

91. Soit un demi-cercle de diamètre $AB = d$, et un point C de $[A, B]$. On décrit à l'intérieur de ce demi-cercle les demi-circonférences de diamètres $[A, C]$ et $[C, B]$. On pose $AC = x$.

1° Évaluer, en fonction de d et de x, l'aire de la portion de surface comprise entre la demi-circonférence de diamètre $[A, B]$ et les demi-circonférences de diamètre $[A, C]$ et $[B, C]$ (aire hachurée).



2° On donne $d = 5$ centimètres. Pour quelles valeurs de x l'aire hachurée sera-t-elle les $\frac{8}{25}$ de l'aire du demi-cercle de diamètre $[A, B]$?

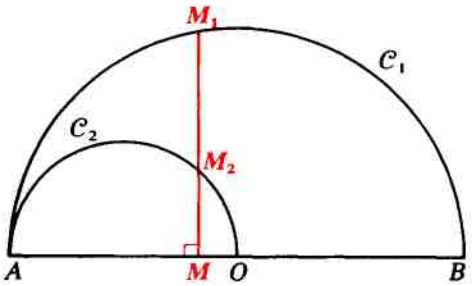
3° L'aire hachurée peut-elle être égale à la moitié de l'aire du demi-cercle de diamètre $[A, B]$? Pour quelle position de C?

92. Deux trains partent en même temps de deux villes A et B, distantes de 360 km et vont à la rencontre l'un de l'autre. La rencontre a lieu au bout de 4 heures. Pour qu'elle se fît au milieu de AB, il aurait fallu que le train A partît 54 minutes avant l'autre. Calculer les vitesses moyennes des deux trains.

93. Deux ouvriers doivent faire un certain travail. Si chacun en exécutait la moitié, ils mettraient en tout 12 h 1/2; mais en travaillant ensemble, ils feraient le travail en 6 h. Combien chacun mettrait-il seul pour faire l'ouvrage?

94. Dans la figure ci-après, O est le milieu de $[A, B]$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont des demi-cercles de diamètres $[A, B]$ et $[A, O]$.

[1] Certains de ces problèmes sont relativement anciens (années 1930). Ils sont proposés dans leur formulation originale, même si celle-ci est parfois désuète...



Placer M sur $[A, O]$ de façon que le segment $[M_1, M_2]$ ait pour longueur le rayon du demi-cercle $\mathcal{C}_2$.

95. Bordeaux - Saint-Jean-de-Luz

(D'après *« Les jeux mathématiques d'Eurêka »*. Dunod.)

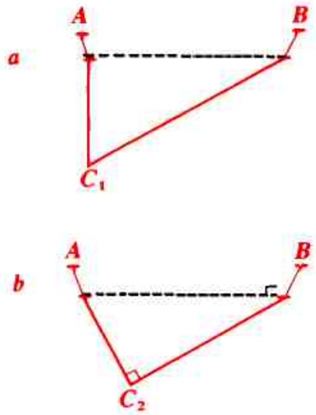
Pour se rendre de Bordeaux à Saint-Jean-de-Luz (distance approximative 195 kilomètres), deux cyclistes partent en même temps. L'un d'eux, dont la vitesse moyenne sur ce parcours est supérieure de 4 km/h à celle de l'autre, arrive 1 heure plus tôt. Quelle est sa vitesse?

96. Une automobile part de A, se dirigeant vers B; au moment où elle passe en C, distant de 15 kilomètres de A, un cycliste part de B, se dirigeant vers A. L'automobile arrive en B, puis repart immédiatement pour A, où elle parvient 44 minutes avant le cycliste. On demande quelle est la vitesse de chaque mobile, sachant que l'automobile parcourt à l'heure 37 kilomètres de plus que le cycliste et que $AB = 24$ kilomètres.

97. Une ficelle longue de 49 centimètres est fixée à ses extrémités à deux clous A et B distants de 35 centimètres. Calculer dans chacun des cas les dimensions du triangle obtenu :

a) la ficelle est tendue de façon à former un triangle AC_1B rectangle en A (figure **a**);

b) la ficelle est tendue de façon à former un triangle AC_2B rectangle en C_2 (figure **b**).



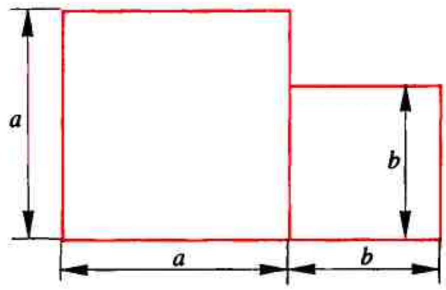
98. Un avion dont la vitesse dans l'air calme est 150 km/h, va d'une ville A à une ville B et revient aussitôt de la ville B à la ville A. La distance d'une ville à l'autre est de 308 km. Pendant toute la durée du vol, le vent a soufflé d'une manière uniforme dans la direction AB et dans le sens de A vers B. On admet que la vitesse vraie de l'avion est égale à sa vitesse en air calme augmentée ou diminuée de la vitesse du vent, suivant que le vent souffle dans le sens de la marche ou en sens contraire.
Calculer la vitesse du vent, sachant que l'avion a mis pour revenir une 1/2 heure de plus que pour aller. Vérifier le résultat.

99. Clochard-story

(D'après *« Les jeux mathématiques d'Eurêka »*. Dunod.)

A l'instant même ou Pierrot quittait le bar du Commerce pour se rendre au bar du Théâtre, Jeannot quittait le bar du Théâtre pour se rendre au bar du Commerce. Ils marchaient à vitesse constantes. Quand ils se rencontrèrent, Pierrot remarqua tout haut qu'il avait parcouru 200 m de plus que Jeannot. Ce dernier, l'esprit fortement embué par l'alcool, prit cette remarque comme une injure personnelle et se mit en conséquence à battre Pierrot qui lui rendit immédiatement ses coups. Quand la bagarre fut terminée, ils s'embrassèrent en pleurant puis chacun reprit son chemin initial, mais avec une vitesse diminuée de moitié car tous deux étaient légèrement blessés. Pierrot arriva ainsi au bar du Théâtre au bout de 8 minutes et Jeannot au bar du Commerce au bout de 18 minutes. Quelle distance y-a-t-il entre les deux bars?

100. On juxtapose deux carrés de côtés a et b (figure ci-dessous).



Calculer a et b de façon que le domaine ainsi formé ait pour aire 218 et pour périmètre 66.

101. Trouver le centre d'un cercle tangent à la droite d'équation $y = -1$ passant par le point A de coordonnées de $(0, 1)$ et qui de plus est situé sur la droite d'équation $y = 2x + 5$.

• Équations, inéquations se ramenant au second degré

102. Résoudre en se ramenant au 2ᵉ degré :

a) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; *b*) $x^4 - 7x^2 - 8 = 0$.

103. Résoudre les équations :

a) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$; *c*) $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$;

b) $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0$; *d*) $2x^2 - 3|x| + 1 = 0$.

104. Résoudre :

a) $\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{3}{x+1} - 4 = 0$;

b) $\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right) - \dfrac{3}{4} = 0$.

105. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - 1 = 0$.

106. (Exercice préalable aux exercices **107** à **111**.)

1° Montrer que $A = \sqrt{B} \iff (A^2 = B \text{ et } A \geq 0)$.

2° Montrer que $A < \sqrt{B} \iff \begin{cases} A < 0 \text{ et } B \geq 0 \\ \text{ou} \\ A^2 < B \end{cases}$

Résoudre les équations ou inéquations suivantes (exercices **107** *à* **111**) :

107. *a*) $x + 1 = \sqrt{2x - 1}$; *c*) $x + 1 = \sqrt{-x - 1}$;
b) $x + 1 = \sqrt{1 - 2x}$; *d*) $x - 1 = \sqrt{x + 1}$.

108. *a*) $\sqrt{2x + 5} > -2$; *c*) $\sqrt{x^2 - 2x} < x - 2$;
b) $x + \sqrt{x + 1} > 0$; *d*) $\sqrt{x^2 + 21} \geq x - 7$.

109. *a*) $\sqrt{3x^2 + x - 1} = \sqrt{2x^2 + x + 1}$;
b) $\sqrt{5x - 4} > \sqrt{x} + 2$.

110. *a*) $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 1} > \sqrt{5 + 4x}$;
b) $\sqrt{6x + 2} - \sqrt{3x} \leq \sqrt{9x - 2}$.

111. Résoudre et interpréter graphiquement les résultats :

a) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x} < \frac{1}{100}$; *b*) $\sqrt{x} > \sqrt{2x - 1}$.

Problèmes

112. Calcul des coefficients de $P(x + a)$ à l'aide de la méthode de Hörner.

A — Divisions successives par $x - a$

Soit $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$.

1° ($a = 1$). En appliquant plusieurs fois la méthode de Hörner, déterminer les polynômes Q, Q_1 et Q_2 tels que : $P(x) = (x - 1)\,Q(x) + P(1)$

$Q(x) = (x - 1)\,Q_1(x) + Q(1)$

$Q_1(x) = (x - 1)\,Q_2(x) + Q_1(1)$.

2° ($a = 3$). Répondre aux mêmes questions qu'au *1°*. Expliquer comment a été élaboré le tableau (T) ci-contre et justifier l'égalité :

$P(x) = (x - 3)\{(x - 3)$
$[3(x - 3) + 23] + 59\} + 50$.

coefficients de P

	3	−4	2	−1
	3	5	17	50
$a = 3$	3	14	59	
	3	23		
	3			

(*T*)

B — Calcul de $P(x + a)$

1° ($a = 3$). Montrer que :

$$P(x + 3) = 3x^3 + 23x^2 + 59x + 50.$$

Identifier les coefficients de ce polynôme dans le tableau (T).

2° ($a = 1$). Utiliser les résultats du **A** pour déterminer les coefficients de $P(x + 1)$.

C — Application

Soit P un polynôme tel que :

$$P(x + 1) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4.$$

1° Reconstruire à l'envers un tableau analogue au tableau (T).

2° Retrouver ainsi les coefficients du polynôme P.

3° En déduire une méthode permettant de déterminer les coefficients de $P(x)$ connaissant ceux de $P(x + a)$.

				4
$a = 1$			3	
		2		
	1			

113. Équations « réciproques »

A — *1°* Soit f un polynôme de degré n tel que :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} f(x) \quad \text{pour tout réel} \quad x \neq 0 ;$$

un tel polynôme est appelé polynôme réciproque.

Montrer que :

a) si n est impair, -1 est racine de f;

b) si α est une racine non nulle de f, $\frac{1}{\alpha}$ est également une racine.

2° Soit $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Calculer $f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.

Montrer que f est un polynôme réciproque si et seulement si $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}$, etc.

Vérifier que les polynômes réciproques de degré n, n appartenant à $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, sont de la forme :

$n = 1 \quad x \longmapsto ax + a$

$n = 2 \quad x \longmapsto ax^2 + bx + a$

$n = 3 \quad x \longmapsto ax^3 + bx^2 + bx + a$

$n = 4 \quad x \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$

$n = 5 \quad x \longmapsto ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$

(dans chaque cas a, b, c, d... sont des nombres réels avec toujours $a \neq 0$).

3° Applications

a) Résoudre les équations :

$$x^2 + 8x + 1 = 0 ;$$

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0 ;$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0 ;$$

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0 ;$$

$$x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 = 0 .$$

b) Soit $P(x) = 4x^4 - 17x^2 + 4$.
Montrer que pour tout réel x non nul :

$$P(-x) = P(x) = x^4 P\left(\frac{1}{x}\right).$$

Après avoir obtenu une « solution évidente » de l'équation $P(x) = 0$, déterminer toutes les racines de P.

B — *1°* Montrer qu'en posant $X = x + \frac{1}{x}$, toute équation de la forme $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ se ramène à une équation du second degré.

2° Applications

Résoudre $x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 1 = 0$
$x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0$.

3° Généralisation

a) Montrer que l'équation :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + kax + k^2 = 0 \quad (\text{avec } k \neq 0)$$

peut être ramenée à une équation du second degré par le changement de variable $X = x + \frac{k}{x}$.

b) Résoudre les équations :

$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0$,

$4x^4 - 4x^3 - 11x^2 - 12x + 9 = 0$.

114. A — Résoudre les deux problèmes suivants :

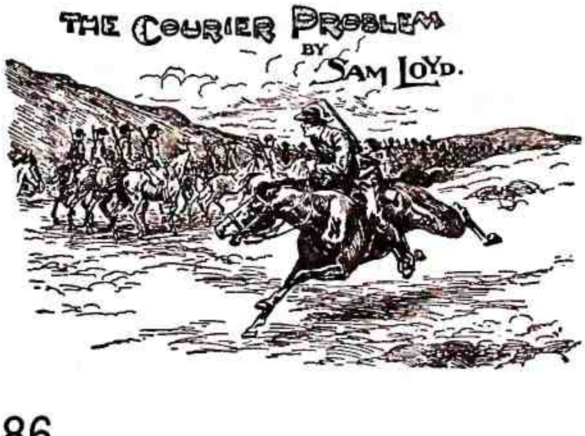
1. Le motard qui monte au nez... du peloton

(D'après « *Jeux et Stratégies* », n° 43 épreuve (corrigée) du championnat de France de mathématiques.)

Le peloton du Tour de France, long de 100 mètres, roule à vitesse constante. La moto de la télévision roule également à vitesse constante le long du peloton. Elle part du dernier coureur, rejoint le premier, fait instantanément demi-tour, puis retrouve le dernier coureur au moment où celui-ci a parcouru justement 100 mètres.
Quelle est la distance parcourue par la moto? (En cas de valeur non entière, arrondir à l'entier le plus proche.)

2. Le problème du messager

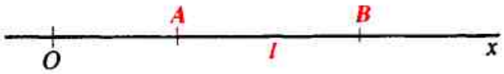
(D'après « *Casse-tête mathématiques* » de *Sam Loyd*. Martin GARDNER. Dunod.)



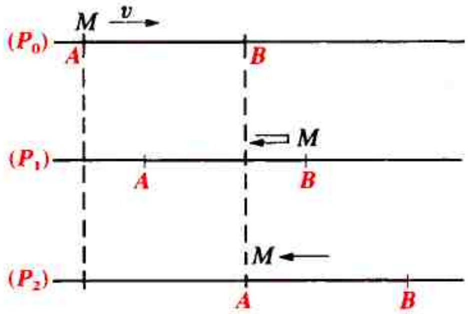
Quelle est la distance parcourue par le messager?

Un problème ancien, que l'on trouve dans de nombreux vieux livres de problèmes, concerne une armée de cinquante kilomètres de long. Alors que l'armée avance à une vitesse constante, un messager part de l'arrière-garde de l'armée, galope pour aller délivrer un message à l'avant, puis revient à l'arrière-garde. Il arrive à l'arrière-garde exactement au moment où l'armée a parcouru cinquante kilomètres. Quelle est la distance totale parcourue par le messager.

B — On envisage dans cette partie l'étude du cas général couvrant les deux problèmes ci-dessus.
Données générales : un segment $[A, B]$ de longueur l se meut à vitesse constante égale à v sur une demi-droite :



Un mobile M se déplaçant à la vitesse $V > v$ se déplace le long de $[A, B]$ dans les conditions suivantes : il part, à un moment donné de la position (P_0) occupée par le point A, puis ayant atteint le point B (position P_1) il retourne instantanément vers A qu'il atteint lorsque ce point occupe la position de B lors de la position (P_0) (figure ci-dessous).

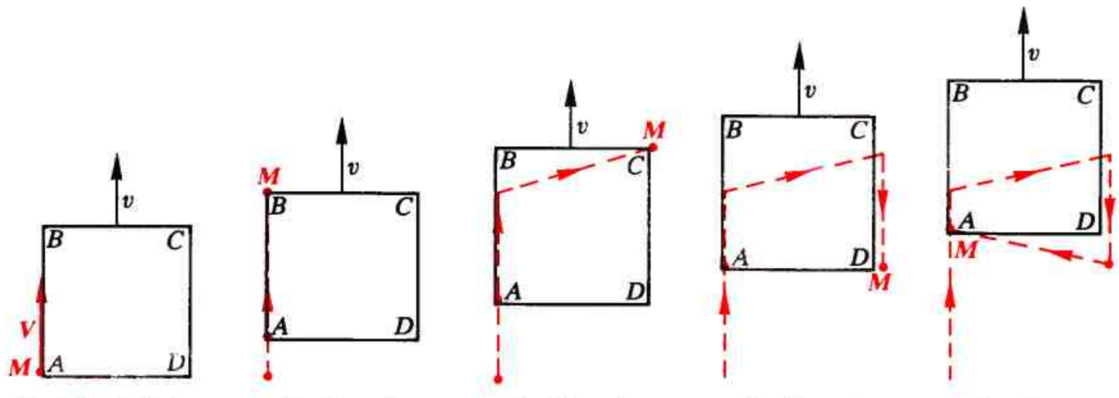


1° On désigne par t_1 (respectivement t_2) le temps mis par le mobile M pour « passer » de la position (P_0) à la position (P_1) (respectivement de la position (P_1) à la position (P_2)).
Montrer que : $\begin{cases} Vt_1 = vt_1 + l \\ Vt_2 = l - vt_2 \\ t_1 + t_2 = \dfrac{l}{v}. \end{cases}$

2° En déduire que le rapport des vitesses $x = \frac{V}{v}$ satisfait à : $\begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Résoudre ce système.

3° En déduire la valeur de $\frac{V}{v}$. Exprimer la longueur du trajet parcouru par le point M en fonction de la longueur l de $[A, B]$.
Retrouver les résultats obtenus en **A**.



Position initiale P_0 — Position P_1 (temps t_1) — Position P_2 (temps t_2) — Position P_3 (temps t_3) — Position P_4 (temps t_4)

C — (Suite du texte de Sam Loyd.)

Un problème plus difficile est donné par l'hypothèse supplémentaire suivante : une armée en carré de cinquante kilomètres de long sur cinquante kilomètres de large parcourt cinquante kilomètres à une vitesse constante, pendant qu'un messager part du coin de l'arrière-garde et fait un circuit complet autour de l'armée, pour revenir à son point de départ. La vitesse du messager est constante, et il termine son circuit au moment où l'armée a progressé de cinquante kilomètres. Combien de kilomètres a parcouru le messager?

Les paramètres introduits pour résoudre ce problème sont indiqués dans les figures ci-dessus :

- V est la vitesse du messager (M);
- v est la vitesse de l'armée (carré mobile $ABCD$ de côté l). On a $V > v$.

1° Établir le système de relations :

$$\begin{cases} Vt_1 = vt_1 + l \\ (Vt_2)^2 = (vt_2)^2 + l^2 \\ Vt_3 = l - vt_3 \\ (Vt_4)^2 = (vt_4)^2 + l^2 \\ t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \dfrac{l}{v}. \end{cases}$$

2° On pose $x = \dfrac{V}{v}$. Vérifier que x satisfait les conditions :

$$(S) \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}} = 1. \end{cases}$$

3° Montrer que (S) est équivalent à :

$$\begin{cases} x > 1 \\ x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 5 = 0. \end{cases}$$

4° En admettant que $4{,}18122$ est une valeur approchée par défaut à 10^{-5} près de la seule racine compatible avec les conditions du problème, résoudre le problème de Sam Loyd.

115. Ce problème a pour objet d'obtenir une formule permettant le calcul des sommes :

$$1 + 2 + \dots + n \ ; \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \ ;$$
$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \ ; \quad 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 \ ;$$

où n est un entier naturel supérieur à 1.

A — Soit P un polynôme tel que $P(0) = 0$. On lui associe la fonction f définie par :

$$f(x) = P(x) - P(x-1) \quad \text{pour tout réel } x.$$

1° Justifier que f est un polynôme tel que :

$$d^\circ f = d^\circ P - 1.$$

2° Montrer que $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = P(n)$.

B — On désigne par f_k le polynôme associé à $x^{k+1} (k \geqslant 0)$.

1° Calculer f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4.

2° Exprimer à l'aide des polynômes précédents chacun des polynômes x, x^2, x^3, x^4 et x^5.

Exemples : $x = \dfrac{1}{2}\left(f_0(x) + f_1(x)\right)$;

$$x^2 = \frac{1}{6}\left(f_0(x) + 3f_1(x) + 2f_2(x)\right) .$$

3° Montrer que si :

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_n x^n$$

le polynôme f associé à P s'écrit :

$$f(x) = \alpha_1 f_0(x) + \alpha_2 f_1(x) + \dots + \alpha_{n-1} f_{n-2}(x) + \alpha_n f_{n-1}(x).$$

C — *1°* Utiliser les résultats du **B** pour déterminer un polynôme P tel que :

$$P(x+1) - P(x) = x^k ,$$

pour chaque entier k appartenant à $\{1, 2, 3, 4\}$.

2° En déduire les sommes :

$$1^k + 2^k + \dots + n^k$$

pour $k = 1$, 2, 3 et 4.

3

Fonctions Généralités :

... Chaque vague ne doit
la beauté de sa courbe
qu'au retrait de celle qui
la précède.
Gide

Intentions

L'un des premiers objectifs de ce chapitre est de **servir de référence** aux connaissances de base indispensables au développement de l'analyse, envisagé en classe de Première Scientifique, concernant **les fonctions numériques de la variable réelle, leurs ensembles de définition et leurs courbes représentatives**, mais aussi des notions telles que **application, composée d'applications et bijection.**
Les **représentations graphiques** tiennent une place importante dans ce chapitre. Plusieurs aspects sont à souligner :

1. Le tracé de la courbe représentative d'une fonction n'est ni une fin en soi, ni une obligation. Il dépend essentiellement du problème envisagé (équations, inéquations, encadrement, approximation, recherche d'extremums, ...). Il s'ensuit une diversité de points de vue relatifs à un tel tracé, qui seront développés dans les différents chapitres consacrés aux fonctions (préciser la courbe point par point, obtenir l'allure générale de la courbe, faire un effet « zoom » au voisinage d'un point particulier, etc.).

2. L'étude d'une fonction numérique ou de sa courbe représentative est inséparable du contexte géométrique. L'un des **autres objectifs de ce chapitre** est donc de préciser les résultats et méthodes qui permettent :

• d'une part, de lier les **propriétés algébriques d'une fonction** (parité, périodicité, relations fonctionnelles telles que $f(a-x)=f(x)$, ...) aux **propriétés géométriques de la courbe représentative** (éléments de symétrie, invariance par translation, etc.);

• d'autre part, d'étudier **les fonctions associées** à une fonction f donnée au moyen des opérations usuelles : $x \longmapsto f(x)+\lambda$; $x \longmapsto f(x+\lambda)$; $x \longmapsto f(\lambda x)$; $x \longmapsto \lambda f(x)$; **etc.** Du point de vue graphique, ce sont alors les **transformations géométriques** et les **changements de repère** qui jouent un rôle essentiel.
Si courbes et fonctions tiennent une place prépondérante dans ce chapitre, elles ne constituent pas cependant les seuls moyens de décrire les relations de dépendance entre deux variables : le dernier paragraphe illustre ce point de vue par l'étude approfondie d'un **tableau de données.**

numériques
Courbes représentatives

Plan du Chapitre

I. Introduction

Les activités proposées dans ce paragraphe ne font appel qu'aux connaissances de la classe de Seconde, concernant la notion de **fonction** et de **courbe représentative.** Elles ont pour objet de **rappeler quelques problèmes essentiels** à ce sujet (problèmes qui seront largement étudiés dans les paragraphes III et IV notamment, dont le rôle est d'approfondir les méthodes qu'ils mettent en jeu).

1. Quelques exemples

Activité 1 : Formules explicites

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition et donner une représentation graphique :

a) $x \longmapsto -5x$; $x \longmapsto 2x+1$;

$x \longmapsto 3x^2$; $x \longmapsto \dfrac{2}{x}$.

b) $x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{pour } x \geqslant 0 \\ -x^2 & \text{pour } x<0 \end{cases}$

$x \longmapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{pour } x>0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{pour } x<0. \end{cases}$

Activité 2 : Issue de la géométrie

Exemple 1

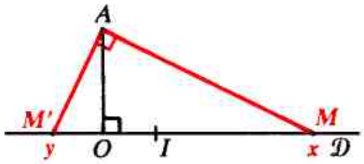


Figure 1

Le point A est situé à une distance a de la droite $\mathscr{D}$, que l'on suppose munie du repère (O, I). A tout point M de $\mathscr{D}$, d'abscisse x on associe (lorsque cela est possible) le point M' d'abscisse y tel que $(AM') \perp (AM)$. En prenant $a=2$ exprimer y en fonction de x. Étudier la fonction f ainsi obtenue et en donner une représentation graphique.

Exemple 2
Sur les côtés d'un carré $ABCD$, on place les points I, J, K et L tels que :

(figure 2). $AI = BJ = CK = DL$

1° Montrer que $IJKL$ est un carré.

2° On suppose que $AB=4$ et on pose :

$AI = x \; (0 \leqslant x \leqslant 4)$.

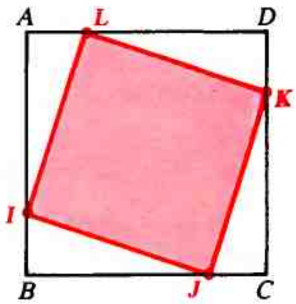


Figure 2

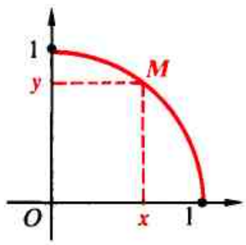
Exprimer en fonction de x, l'aire $S(x)$ du carré $IJKL$.

3° Étudier et représenter graphiquement la fonction S sur l'intervalle $[0, 4]$.

4° Montrer que la courbe représentative de S admet un axe de symétrie. Pouvait-on prévoir ce résultat par des considérations purement géométriques?

Activité 3 : Avec une courbe

Soit Γ le quart de cercle de centre O et de rayon 1 (figure 3). A tout réel x, on fait correspondre — s'il existe — le réel y tel que le point M de coordonnées (x, y) soit un point de Γ.

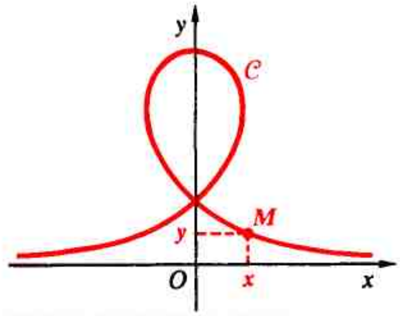


◄ Figure 3

1° Définit-on ainsi une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $y=f(x)$? Quel est l'ensemble de définition de f? Est-ce que f est égale à la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$?

2° On utilise le même procédé que ci-dessus avec la courbe $\mathcal{C}$ représentée sur la figure 4. Définit-on ainsi une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Figure 4



Activité 4 : Avec une surface

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormé de la fonction :

$$f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Soit x un réel supérieur ou égal à 1.
On note $S(x)$ l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $X = 1$ et $X = x$. On définit ainsi une fonction S de $[1, +\infty]$ dans $\mathbb{R}$.

1° Que vaut $S(1)$?

2° Utiliser une interprétation graphique pour comparer les nombres 1, $\frac{1}{2}$ et $S(2)$, puis pour établir que pour tout réel $x \geqslant 1$, $S(x) \leqslant x - 1$.

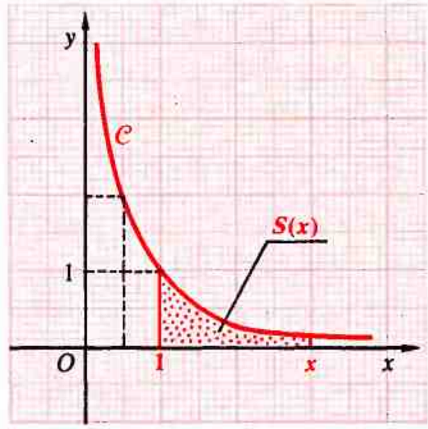


Figure 5

Activité 5 : Avec la calculatrice

x désigne le nombre considéré.
1. Quelle fonction est définie par la séquence machine S :

x $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$

Trouver une autre séquence définissant la même fonction.

2. Comparer les fonctions f_1 et f_2 définies par les séquences :

S_1 : x $\boxed{x^2}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

S_2 : x $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

2. Sur les courbes représentatives

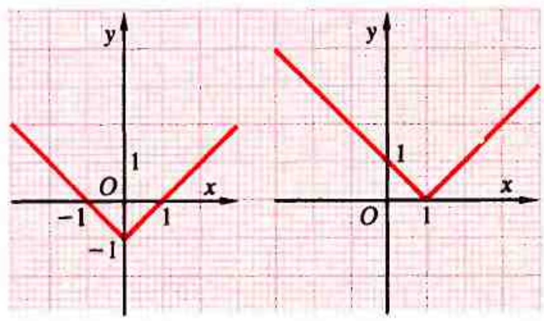
Activité 6 : Lignes brisées

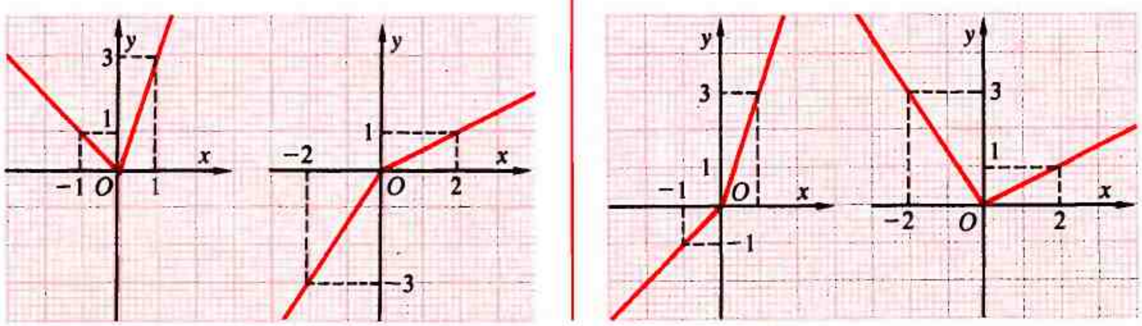
Les six fonctions numériques :

$$x \longmapsto |x-1| \;;\quad x \longmapsto |x|-1 \;;$$
$$x \longmapsto 2x+|x| \;;\quad x \longmapsto x+|2x| \;;$$
$$x \longmapsto x-\frac{|x|}{2} \;;\quad x \longmapsto |x|-\frac{x}{2}$$

sont représentées ci-dessous (dans le désordre). Retrouver la courbe représentative de chacune.

Figure 6





Activité 7 : Parité

1. La fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x+1} & \text{pour } x\geqslant 0\\[2mm] \dfrac{x^2-x-2}{-x+1} & \text{pour } x<0\end{cases}$$

est-elle une fonction paire?

2. Soit f une fonction impaire, définie par :

$$x \longmapsto \sqrt{x} \text{ pour } x\geqslant 0.$$

Calculer $f(-3)$, $f(-4)$, $f(-a^2)$ $(a\in\mathbb{R})$ et $f(x)$ pour $x<0$.

3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique a été faite pour $x\geqslant 0$ (figure 7). On suppose f impaire.
Préciser parmi les points suivants ceux qui appartiennent à $\mathcal{C}_f$:

$A(-1, -2)$,
$B(-3, -3)$,
$C(16, 12)$,
$D(-16, -12)$.

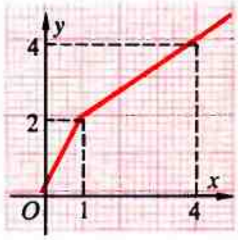


Figure 7

Activité 8 : Périodicité

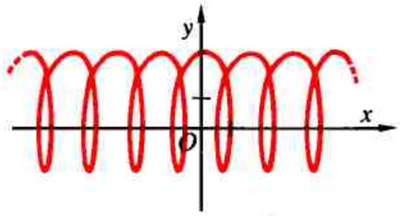
1. La courbe de la figure 8 est-elle la courbe représentative d'une fonction périodique?

2. Tracer sur l'intervalle $[-3, 4]$ la courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sachant que :

- f est périodique de période 2,
- la courbe représentative de f sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ est donnée dans la figure 9.

3. Que penser du même problème, avec les mêmes hypothèses lorsque la partie de la courbe qui est donnée est représentée figure 10?

Figure 8



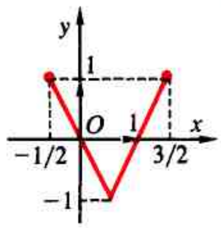


Figure 9

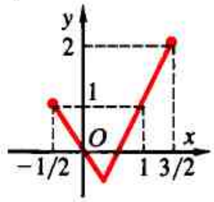


Figure 10

Activité 9 : Résolution graphique (équation)

Lors d'un rallye de vieilles voitures, trois automobilistes partent d'un même lieu sur la même départementale; le premier à 9 h à la vitesse de 40 km/h, le second à 10 h à la vitesse de 30 km/h et le troisième à 11 h à la vitesse de 60 km/h.

1° Vérifier que la figure 11 traduit de façon correcte les données de l'énoncé.

2° Situer à l'aide du graphique vers quelle heure le troisième automobiliste se trouvera à égale distance des deux premiers.

3° Préciser l'heure exacte à l'aide d'un calcul numérique.

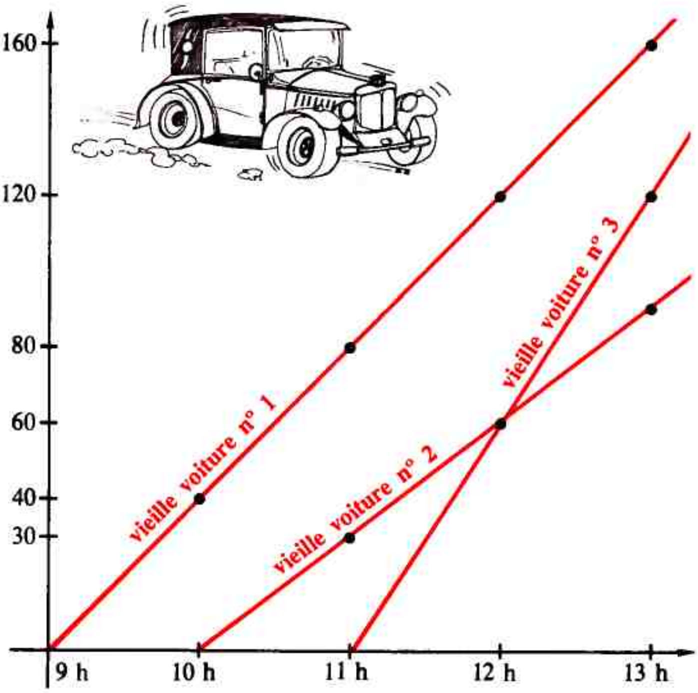


Figure 11

II. Généralités (rappels)

1. Fonction numérique

Il s'agit de rappeler brièvement les notions de **fonction,** d'**ensemble de définition** d'une fonction et de **courbe représentative** d'une fonction dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Fonction. Ensemble de définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, une *fonction de A dans $\mathbb{R}$* est un procédé qui à chaque réel x de A fait correspondre un nombre réel, au plus[1].
L'ensemble des éléments de A auxquels on peut associer *un* nombre réel par ce procédé est appelé *ensemble de définition* de la fonction[2].

• ***Notations***

Pour une fonction f de A dans $\mathbb{R}$, la notation correcte est $\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$.

Cependant pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on s'autorise des notations allégées telles que «$f : x \longmapsto f(x)$» et même «$x \longmapsto f(x)$».

L'**ensemble de définition** d'une fonction f est noté $\mathcal{D}_f$: il est souvent décrit comme l'ensemble des éléments x de A «ayant une image par f» ou encore «pour lesquels $f(x)$ existe».

• ***Exemples***

1. Lorsque f est définie par une formule explicite, on détermine (en général) son ensemble de définition en éliminant au fur et à mesure les valeurs de x pour lesquelles les opérations à effectuer n'ont pas de sens : division par zéro, racine carrée d'un réel négatif, etc.

2. Soit $A = [0, +\infty[$. La relation $x = y^2$ entre les éléments x de A et y de $\mathbb{R}$ ne permet pas de définir une fonction de A dans $\mathbb{R}$ (en effet, par exemple, à l'élément 9 de A, on peut associer **deux** réels 3 et -3).

3. Les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies respectivement par $f(x) = x + 1$ et $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ne sont pas égales (bien que pour $x \neq 1$, $f(x) = g(x)$) : en effet f est définie sur $\mathbb{R}$ en entier mais l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g est $\mathbb{R} - \{1\}$.

Rappelons, à ce propos, les conditions qui permettent de s'assurer de l'**égalité de deux fonctions :**

Deux fonctions f et g de A dans $\mathbb{R}$ sont égales si et seulement si :

1° elles ont *même ensemble de définition $\mathcal{D}$,*

2° pour tout x de $\mathcal{D}$, on a $f(x) = g(x)$.

(1) Au plus signifie ici : 0 ou 1.

(2) f est une fonction numérique dont A est l'ensemble de départ et $\mathbb{R}$ l'ensemble d'arrivée. La donnée de A et $\mathbb{R}$ est indissociable de la donnée de f.

Exercices

1. Déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{2x-3}\ ; \quad x \longmapsto \frac{1}{x-|x|}\ ;$$

$$x \longmapsto \sqrt{x^2+x}\ ; \quad x \longmapsto \frac{1}{x+\sqrt{x^2}}\ ;$$

$$x \longmapsto \sqrt{1-\frac{1}{x}}; \quad x \longmapsto \frac{1}{2-\dfrac{1}{3-x}}\ .$$

2. Même exercice avec les fonctions :

$$x \longmapsto \frac{1}{\sin x}\ ; \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2-x-1}\ ;$$

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-x-1}}\ .$$

3. Soit f et g les fonctions définies par

$$f(x)=\sqrt{x(x-1)} \quad \text{et} \quad g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}\ .$$

Déterminer $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. A-t-on l'égalité $f=g$? Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$.

4. Soit a un nombre réel et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x+2} & \text{pour } x \neq -2 \\ a & \text{pour } x=-2. \end{cases}$$

La fonction f est-elle une **fonction affine?**

5. Préciser s'il existe une fonction f telle que $y=f(x)$, sachant que :

$$\begin{cases} \text{si } x^2 \leqslant 3 & , \ y=x+3 \\ \text{si } x>\sqrt{3} & , \ y=x-\sqrt{3}. \end{cases}$$

b. *Courbe représentative*

Soit f une fonction numérique, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. On appelle *courbe représentative de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$* **l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :**

$$x \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad y=f(x).$$

Exemples et remarques

1. Les **fonctions affines**, c'est-à-dire les fonctions de la forme $x \longmapsto ax+b$ (a, b réels fixés) sont représentées graphiquement par des **droites.**

2. Le changement de repère peut modifier la forme de la courbe représentative d'une fonction. Ainsi, par exemple, les courbes suivantes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont des courbes représentatives de la même fonction $f : x \longmapsto x^2$, dans des repères différents.

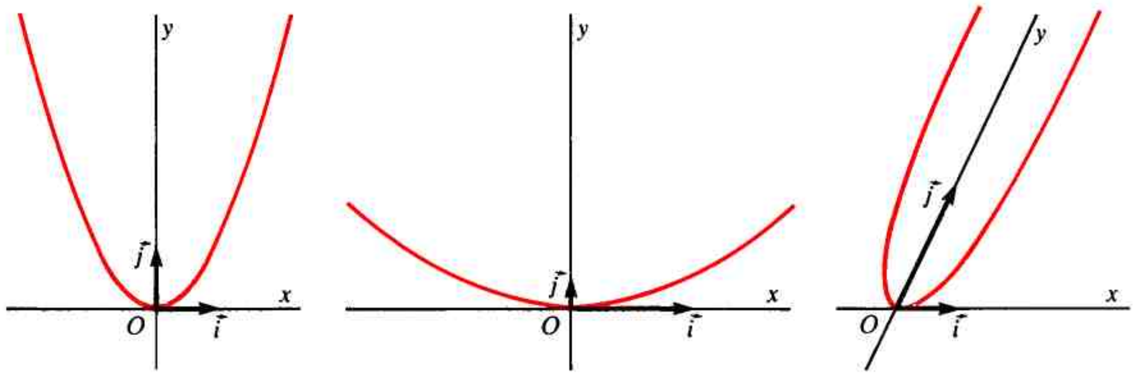


Figure 12

3. Il n'est pas toujours possible de réaliser le dessin de la courbe représentative d'une fonction (voir exercice 8 ci-après) et il est clair que les contraintes matérielles (limitation de la surface censée représenter le plan) conduisent à ne représenter qu'une partie de la courbe : ainsi, par exemple, une droite n'est en fait représentée que par un segment de droite.

4. De la définition d'une fonction f résulte la **propriété géométrique** suivante, concernant une quelconque des courbes représentatives de f.

• **Si** $x \in \mathcal{D}_f$, **la parallèle** à l'axe (Oy) passant par le point de coordonnées $(x, 0)$ rencontre la courbe en un point unique de coordonnées $(x, f(x))$.

• **Si** $x \notin \mathcal{D}_f$, cette parallèle ne rencontre pas la courbe.

Ceci constitue un **critère efficace** pour reconnaître si une courbe est ou n'est pas la courbe représentative d'une fonction numérique.

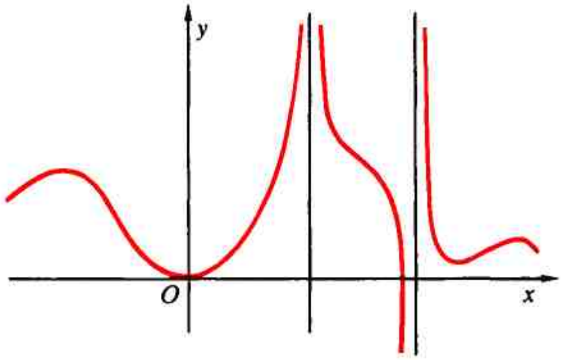


Figure 13

Exercices

6. Parmi les courbes suivantes, lesquelles sont représentatives d'une fonction numérique?

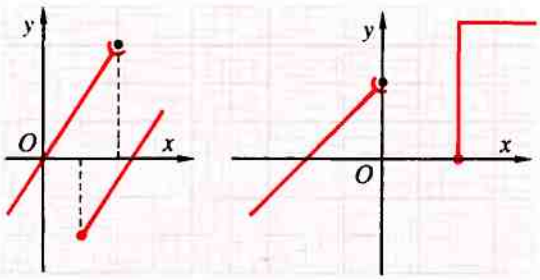


Figure 14 A

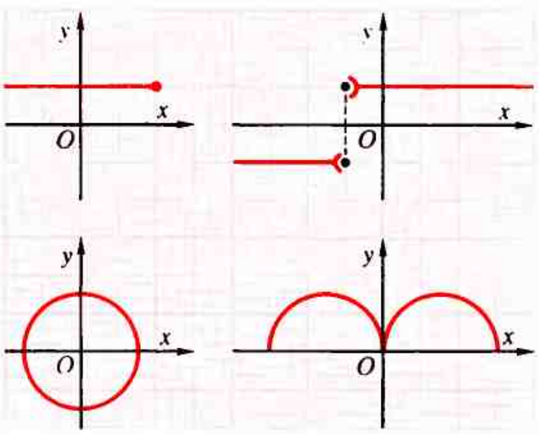


Figure 14 B

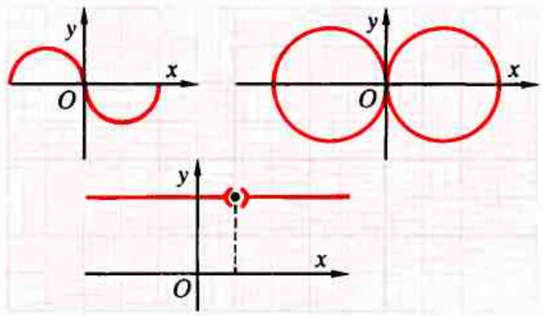


Figure 14 C

7. Pour chacune des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, peut-on trouver un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que la courbe soit la courbe représentative d'une fonction?

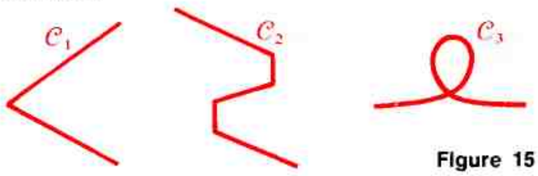


Figure 15

8. Soit f la fonction définie par :

• si x est rationnel $\quad f(x)=1$,

• sinon... $\quad f(x)=0$.

Est-il possible d'effectuer une représentation graphique de f?

c. *Le choix du repère*

Le **choix du repère** pour effectuer une représentation graphique d'une fonction **dépend** à la fois **des données** et **du problème traité.**

1. Il est clair que l'on ne choisira pas le même repère pour représenter les fonctions :

$$x \longmapsto -50x^2 \quad \text{et} \quad x \longmapsto 0{,}07x^2 \ .$$

2. De même on sera amené à choisir des unités différentes selon que l'on représentera la fonction $x \longmapsto \dfrac{100x}{x-1}$ ou la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{100x-1}$.

3. En dehors des contraintes numériques (liées comme ci-dessus à la « taille » des nombres intervenants) deux situations très importantes seront envisagées dans cet ouvrage :

- **Un changement de repère** peut permettre de « ramener » le tracé d'une courbe à celui de la courbe représentative d'une fonction connue (fonction de référence par exemple) : ce point de vue sera développé dans les deux paragraphes suivants.
- On souhaite faire un **effet « zoom »** sur un point particulier de la courbe représentative d'une fonction. Cet aspect sera particulièrement développé lors de **l'étude locale** d'une fonction (voir chapitre 7).

2. Intersection de courbes ; "équation aux abscisses"

a. L'équation aux abscisses

Soit f et g deux fonctions définies sur une même partie I de $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un même repère.

Intéressons-nous à l'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Un point $M(x, y)$ appartient à la fois à $\mathcal{C}_f$ et à $\mathcal{C}_g$ si et seulement si $y = f(x)$ et $y = g(x)$. Il s'ensuit que :

Les points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g ont pour *abscisses* les réels x solutions de l'*équation* $f(x) = g(x)$.

Pour cette raison, cette dernière équation est habituellement appelée « équation aux abscisses ».

b. Deux points de vue

1. La connaissance des solutions de l'équation aux abscisses $f(x) = g(x)$ permet de préciser les représentations graphiques — sur un même dessin — des fonctions f et g.

Exemple

Considérons le problème suivant :

Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 3 - x$$

et

$$g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2}{x}.$$

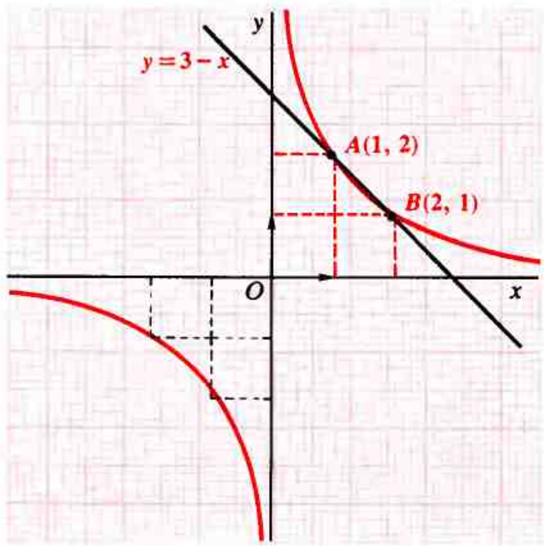


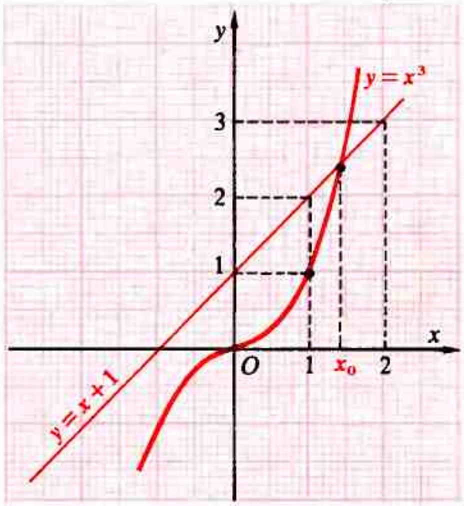
Figure 16

Les courbes représentatives de chacune de ces fonctions ne présentent aucune difficulté. Précisons les coordonnées des points d'intersection; leurs abscisses sont solutions de l'équation $3 - x = \frac{2}{x}$, c'est-à-dire de : $x^2 - 3x + 2 = 0$ et $x \neq 0$.

Cette équation admet deux solutions $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
On en déduit alors les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$:
— le point A d'abscisse 1 et d'ordonnée 2,
— le point B d'abscisse 2 et d'ordonnée 1.
(L'ordonnée d'un point d'intersection peut être calculée indifféremment avec la fonction f ou la fonction g : on choisit en général la fonction conduisant au minimum de calculs...)

2. Réciproquement, toute équation de la forme $f(x) = g(x)$ (où f et g sont deux fonctions numériques) peut s'interpréter comme une équation aux abscisses. Une bonne connaissance des courbes représentatives de f et de g **permet d'obtenir alors des renseignements sur les racines éventuelles de l'équation $f(x) = g(x)$.**

Figure 17



Exemple : *Déterminer le nombre de solutions de l'équation* $x^3 = x + 1$ *et les localiser*[1] *dans des intervalles de longueur* 0,5.
Représentons graphiquement les fonctions f et g définies par $f(x) = x^3$ et $g(x) = x + 1$.
Une première lecture de la figure 17 montre que l'équation proposée admet une seule solution x_0 que l'on peut localiser dans l'intervalle [1, 2]. Le calcul des valeurs de f et g au point 1,5 $\left(f(1,5) = 3,375\ ;\ g(1,5) = 2,5\right)$ permet de préciser que $1 < x_0 < 1,5$.

Remarques

1. Il est clair qu'il va falloir préciser l'argumentation basée sur des phrases telles que « le tracé montre » ou « on voit sur le graphique »[2]...

2. Les deux points de vue ci-dessus peuvent intervenir dans un même problème.

Exemple : Si l'on souhaite représenter graphiquement dans un même repère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2 - x + 1$, et comparer f et g, on est amené à résoudre l'équation aux abscisses : $x^3 = x^2 - x + 1$.
La représentation graphique permet de conjecturer que « 1 est solution de cette équation » (et donc de pallier cette absence momentanée qui nous aurait empêchés de voir que « 1 est une solution évidente » de la dite équation...).

Exercices

9. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x^3 = x^2 - x + 1$ (cf. exemple ci-dessus) et vérifier par le calcul le résultat obtenu.

10. Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions :

$$x \longmapsto 2x^2 - 3x + 1\ ;\ x \longmapsto 2x + 4.$$

Préciser les points communs aux deux courbes.

[1] Localiser un réel x dans un intervalle de longueur l c'est préciser un intervalle I de longueur l pour lequel on est assuré que $x \in I$.

[2] Cf. chapitre 8.

c. *Autre problème*

COURSE D'ESCARGOTS

**Deux escargots font la course pour escalader un poteau de 15 mètres.
A chaque fois que le premier monte de 2 mètres il redescend d'un mètre, tout au long de sa progression; le deuxième par contre, monte de 4 mètres et redescend de 2 mètres.
Ils se déplacent tous les deux à la même vitesse. Cette vitesse est constante, qu'ils montent ou qu'ils descendent. Cependant, le second se sentant plus fort que le premier, lui accorde un avantage, en le laissant partir avant lui. Ainsi, il attend que son adversaire soit monté et redescendu une fois, pour se lancer dans la course. Sauriez-vous dire lequel arrivera le premier à mi-parcours et qui parviendra au sommet en tête?...**

(D'après *«Jeux et stratégies»*, n° 6)

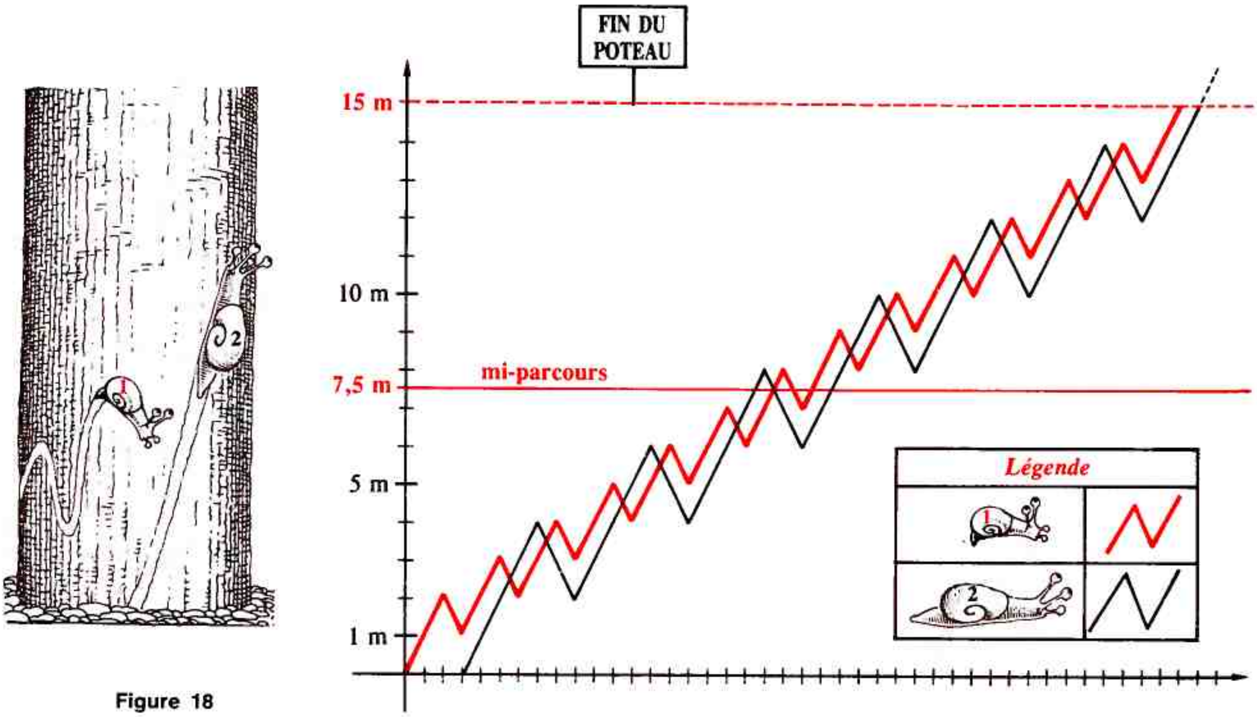


Figure 18

Solution

L'escargot n° 2 arrive le premier à mi-parcours, mais c'est l'escargot n° 1 qui est vainqueur de la course...

Commentaires

1. La figure 18 fournit la solution... le seul problème réside dans la représentation graphique à effectuer (voir exercice n° 11 ci-dessous).

2. Ce problème ne fait pas intervenir — à proprement parler — une «équation aux abscisses». Il s'agit davantage d'une **résolution graphique d'inéquation.**

3. «Ah! Pourquoi suis-je parti?, gémit l'autre escargot.»
(Frederico GARCIA LORCA. *«Les rencontres d'un escargot aventureux».*)

Exercice

11. Justifier la représentation graphique de la figure 18 (préciser notamment le choix des unités).

3. Applications et bijections

a. Notion d'application

Lorsqu'une fonction de A dans $\mathbb{R}$ est **définie sur A en entier** on dit que c'est une **application** de A dans $\mathbb{R}$. Ainsi, par exemple :

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ est une fonction mais n'est pas une application.
- $g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ est une application.

De façon plus générale, étant donné une fonction f de A dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition, la **restriction**[1] de f à $\mathcal{D}_f$ est une application.

Exercices

12. Préciser, parmi les fonctions numériques ci-dessous, celles qui sont des applications :

$f_1 : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad f_2 :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$f_3 : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x+|x|}$;

$f_4 :]-\pi, +\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x}$ $\qquad f_5 : \mathbb{R}-\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin \pi x}$.

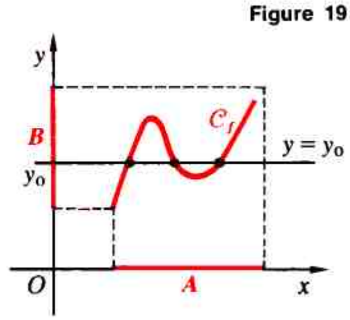
13. Soit f une fonction de A dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que f est une application si et seulement si, pour tout x de A la parallèle à (Oy) passant par le point de coordonnées $(x, 0)$ rencontre $\mathcal{C}_f$ en un seul point.

b. Bijection ; bijection réciproque

- Soit f **une application d'une partie A de $\mathbb{R}$, à valeurs dans une partie B de $\mathbb{R}$.** Tout élément x de A a une image et une seule dans B. Par contre, un élément y de B peut très bien être l'image par f d'**aucun** élément de A ou être l'image par f de **plusieurs** éléments de A.

Ainsi, par exemple :

Figure 19



(1). $A = \mathbb{R}_+$, $B = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$

l'équation $-3 = f(x)$ n'a aucune solution.

(2). $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

l'équation $4 = g(x)$ admet deux solutions.

(3). L'**équation** $y_0 = f(x)$, $x \in A$, a trois solutions (figure 19).

(4). L'**équation** $y_0 = f(x)$, $x \in A$, n'a pas de solution (figure 20).

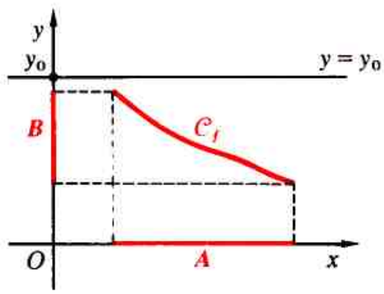


Figure 20

[1] Soit f une fonction de A dans $\mathbb{R}$ et I une partie de A.

La **restriction** de f à I est la fonction : $I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$

• Par contre, dans chacun des cas ci-dessous, la fonction f est une application de A dans B qui vérifie la propriété suivante :

« Pour tout y de B, l'**équation $y=f(x)$ d'inconnue x appartenant à A** admet une solution unique. »

1. $A=\mathbb{R}$, $B=\mathbb{R}$ et $f(x)=2x+1$.

Pour tout y de $\mathbb{R}$, l'équation $y=2x+1$ admet une solution unique $x=\dfrac{y-1}{2}$.

2. $A=]0, +\infty[$, $B=]0, +\infty[$ et $f(x)=\dfrac{3}{x}$.

Pour tout y de $]0, +\infty[$, il existe un seul x appartenant à $]0, +\infty[$ tel que $\dfrac{3}{x}=y$ soit $x=\dfrac{3}{y}$.

3. Interprétation graphique : pour tout y_0 de B, la droite d'équation $y=y_0$ rencontre la courbe $\mathcal{C}_f$ en un point et un seul (figure 21).

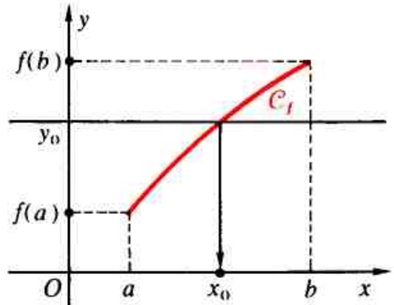


Figure 21 $A=[a, b]$, $B=[f(a), f(b)]$

• Ceci conduit à la notion de **bijection** entre deux parties de $\mathbb{R}$.

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et f une *application* de A dans B. On dit que f est une bijection de A sur B lorsque, pour tout y de B, l'*équation* $y=f(x)$ d'inconnue x appartenant à A, admet une solution unique.

Dans ces conditions, l'unique élément x de A tel que $y=f(x)$ est noté $f^{-1}(y)$.
L'application f^{-1} ainsi définie de B dans A est une bijection de B sur A appelée **bijection réciproque de f.**

Exemple
L'application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe x^2 est une bijection. La solution (unique) de l'équation $y=x^2$ (avec $y\geqslant 0$ et $x\geqslant 0$) est le réel $x=\sqrt{y}$.
On a ainsi : $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$. La bijection réciproque de f est donc l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à tout réel positif associe sa racine carrée.

Autrement dit :

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \quad \textbf{est bijective;}$$

la bijection réciproque est l'application :

$$\begin{array}{rl} f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{x}. \end{array}$$

Exercices

14. Déterminer parmi les courbes suivantes celles qui sont représentatives d'une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Figure 22 A

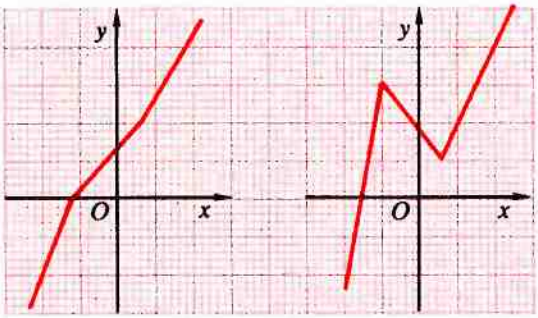
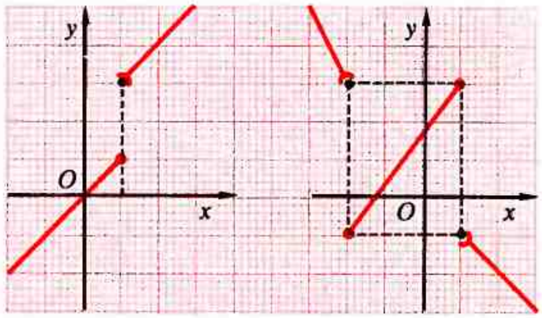


Figure 22 B



15. Les applications suivantes sont-elles bijectives?

a) $f : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$
$\quad x \longmapsto 1 + x^2.$

b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$
$\quad x \longmapsto |x|.$

c) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto 2x - 5.$

16. Lorsque les applications précédentes (exercice 15) sont des bijections, déterminer la bijection réciproque.

c. Composition de fonctions

La notion de composition de fonctions numériques est — sur le principe[1] — analogue à ce qui a été déjà vu avec les transformations géométriques.

Soit f et g deux fonctions numériques. La *composée de f et g (f suivie de g)* est la fonction notée $g \circ f$ et définie par $g \circ f : x \longmapsto g(f(x))$.

• Rappelons que «$g \circ f$» se lit «g rond f». On peut illustrer cette définition par la figure 23.

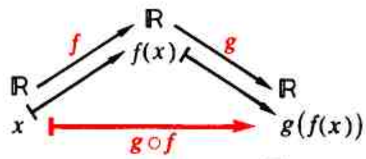


Figure 23

• En pratique, lorsque f et g sont définies par des formules explicites, pour déterminer $(g \circ f)(x)$ on a intérêt :

1° à substituer $f(x)$ à x dans l'expression définissant g,

2° à remplacer alors $f(x)$ par son expression en fonction de x.

• ***Exemples***

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto x^2 \qquad x \longmapsto x + 1.$

On a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = x^2 + 1$ et donc : $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto x^2 + 1.$

[1] Les questions qui les différencient concernent essentiellement **les ensembles de définition.**

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ $\qquad x \longmapsto \sqrt{x}$.

Alors : $(g \circ f)(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$. Notons que l'**ensemble de définition** de $g \circ f$ est l'intervalle $]1, +\infty[$.

De façon générale, pour que $(g \circ f)(x)$ existe, il faut et il suffit que :

1° $x \in \mathcal{D}_f$ ($f(x)$ existe).

2° $f(x) \in \mathcal{D}_g$.

Exercices

17. Déterminer les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ dans chacun des cas suivants (on précisera pour chacune leur ensemble de définition) :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$, $\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -2x+1$.

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x-1}$.

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, $\qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{2-x}$.

18. Soit f et g les applications :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$.

Montrer que $g \circ f$ est l'application

$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto |x|$.

19. Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$

$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Déterminer $f \circ f$.

20. Quel est l'ensemble de définition de $g \circ f$ lorsque :

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2+3x-4$,

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$?

b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -x^2+1$,

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x-1}$?

III. Courbes représentatives et propriétés géométriques

1. Position du problème

L'idée que des **considérations géométriques** puissent intervenir dans le tracé de la courbe représentative d'une fonction est naturelle. Elle peut en outre être exploitée dans de nombreux problèmes de l'analyse : résolution d'équations et d'inéquations, recherche de tangentes, calcul d'aires, etc.[1]

[1] Comme nous le verrons dans les chapitres ultérieurs.

Il s'agit, dans ce paragraphe, de **dégager quelles propriétés** (éventuelles) d'une fonction peuvent permettre :

1. de **simplifier son étude et le tracé de sa courbe représentative** (par des arguments géométriques) : cet aspect a déjà été abordé en classe de Seconde pour des propriétés telles que **parité, périodicité;**

2. de **contrôler un résultat géométrique suggéré par le dessin**; par exemple, la droite d'équation $x=\frac{a}{2}$ semble être un axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction f; ce paragraphe développe deux **méthodes** permettant de savoir ce qu'il en est exactement :

- **changement de repère,**
- **comparaison des valeurs de f en x et $a-x$.**

2. Quelques rappels

a. Parité

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. On dit que la fonction f est :

- ***paire*, lorsque pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $-x$ appartient à $\mathcal{D}_f$ et $f(-x)=f(x)$;**
- ***impaire*, lorsque pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $-x$ appartient à $\mathcal{D}_f$ et $f(-x)=-f(x)$.**

Notons qu'une partie A de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x de A, $-x$ appartienne à A est dite **symétrique par rapport à 0.**

Exemples

1. Les fonctions constantes et les fonctions $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^4$, $x \longmapsto x^2-\frac{1}{x^2}$, $x \longmapsto |x|-1$, $x \longmapsto \cos x$ sont des fonctions paires.

2. Les fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^3$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \tan x$ sont des fonctions impaires.

Exercices

21. Justifier les résultats précédents.

22. Étudier la parité[1] des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto 1+\cos x$; $x \longmapsto 1+\sin x$.

b) $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$; $x \longmapsto \frac{\cos x}{x}$.

c) $x \longmapsto x^n$ (n entier fixé).

d) Une fonction f avec pour seul renseignement : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}-\{1\}$.

23. Soit f une fonction numérique, $\mathcal{D}$ son ensemble de définition. Montrer que les ensembles de définition des fonctions : $x \longmapsto f(x^2)$ et $x \longmapsto f(|x|)$ sont symétriques par rapport à 0 et étudier la parité de ces fonctions.

24. Existe-t-il des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à la fois paires et impaires?

[1] Étudier la parité : préciser si la fonction est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre.

Un des intérêts de la notion de parité réside dans la caractérisation géométrique suivante :

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère *orthogonal* $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Alors :

1° f est *paire* si et seulement si l'*axe (Oy) est axe de symétrie* de la courbe $\mathcal{C}_f$.

2° f est *impaire* si et seulement si l'*origine O du repère est centre de symétrie* de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exemples :

1. Les paraboles $x \longmapsto ax^2$.

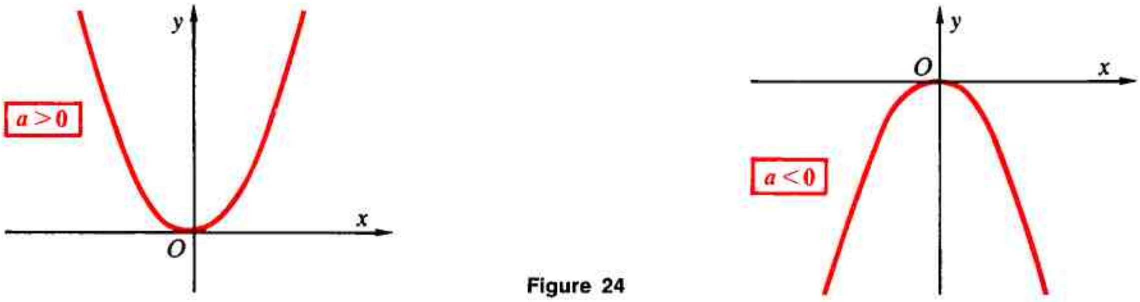


Figure 24

L'axe de symétrie (Oy) est appelé **axe de la parabole.**

2. Les hyperboles $x \longmapsto \dfrac{a}{x}$.

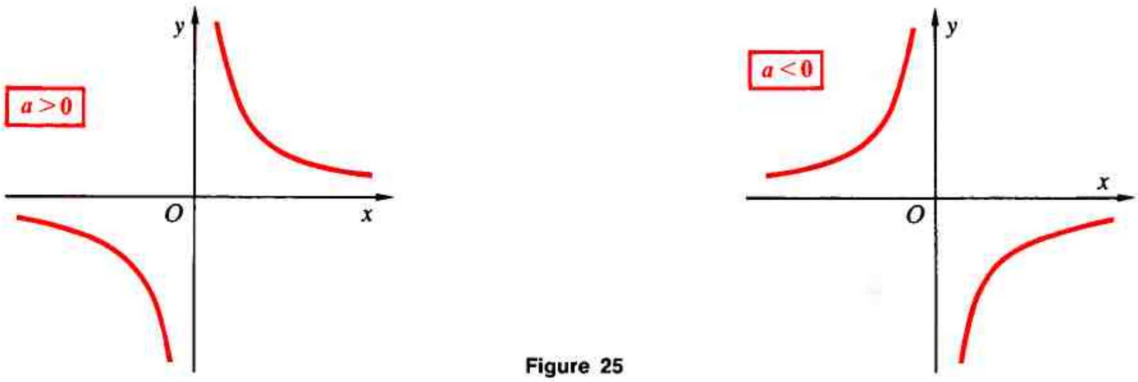


Figure 25

L'origine du repère est centre de symétrie de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{a}{x}$. On dit également que c'est le **centre de l'hyperbole.**

Exercices

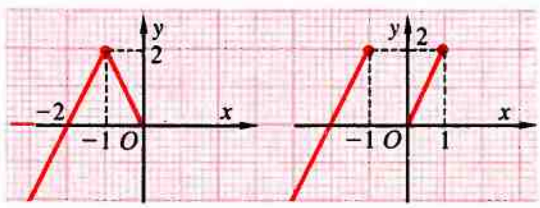
Dans les exercices **25** *à* **27**; *on a représenté une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.*
Compléter le tracé de $\mathcal{C}_f$ sous chacune des suppositions suivantes :

a) f est paire; *b) f est impaire.*

(**Attention** : Il est possible qu'une de ces suppositions (ou les deux) soit à rejeter.)

25.

Figure 26



26.

Figure 27

27.

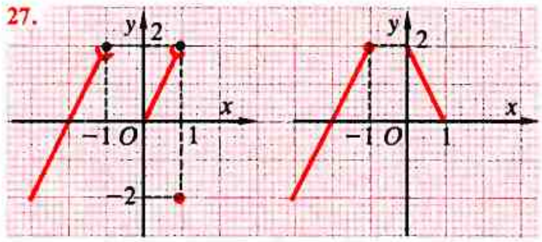


Figure 28

b. Périodicité

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition. On dit que la fonction f est *périodique de période T* (T réel non nul) lorsque :

1° pour tout x de $\mathcal{D}_f$, les réels $x+kT$ appartiennent à $\mathcal{D}_f$ (k décrivant $\mathbb{Z}$),

2° pour tout x de $\mathcal{D}_f$: $f(x+T)=f(x)$.

Exemples

1. Les fonctions trigonométriques $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π (mais aussi 4π, 6π, ..., -2π, -4π).

2. La fonction tangente est périodique de période π.

Remarques

1. Une fonction périodique de période T est aussi périodique de période $2T$, $3T$, ..., $-T$, $-2T$, $-3T$, etc. de façon plus générale de **période kT ($k \in \mathbb{Z}$).**

2. Lorsqu'on est amené à étudier la périodicité d'une fonction f, il faut essayer de déterminer (si elle existe) la « plus petite » période[1] de f. Ainsi, la fonction $f : x \longmapsto \cos x \sin x$ est, de façon évidente, périodique de période 2π. Mais elle l'est également de période π. Cela résulte des égalités :

$$\sin(x+\pi) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos(x+\pi) = -\cos x,$$

d'où $f(x+\pi) = f(x)$ pour tout réel x.
L'**aspect géométrique** de la notion de périodicité est donné par le résultat suivant :

La courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction périodique de *période T* est globalement invariante par les *translations de vecteur $kT\vec{i}$* (k décrivant $\mathbb{Z}$).

En conséquence : la courbe représentative d'une fonction f de période T est entièrement connue dès qu'on la connaît sur un intervalle de longueur T (figure 29).

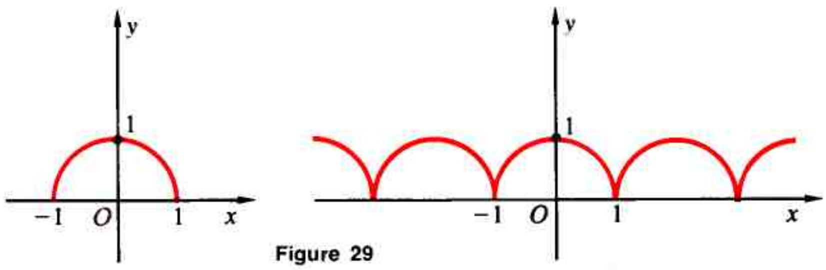


Figure 29

Les données :

- $\mathcal{C}_f$ est « connue » sur $[-1, 1]$.
- f est périodique de période 2.

Résultat : la courbe représentative de f.

[1] Sous-entendu : positive.

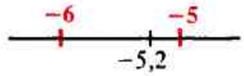
Exercice résolu : « La fonction partie entière »

Soit x un nombre réel. Le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x est appelé ***partie entière de x****, et noté* $\boldsymbol{E(x)}$.
On définit alors la fonction D par $\boldsymbol{D(x)=x-E(x)}$.
Représenter graphiquement chacune des fonctions D et E.

1° On peut se faire une idée de la fonction E en calculant quelques valeurs, puis en formalisant la définition ci-dessus.
Tout d'abord, il est clair que, pour tout entier relatif k, on a $E(k)=k$ et que, par exemple :

$$E(3{,}14)=3\ ,\quad E(3{,}81)=3\ ,\quad E(1{,}5)=1\ ,\ \ldots,\quad E\left(\frac{1}{3}\right)=E\left(\frac{1}{2}\right)=0\ .$$

Par contre, il faut prendre garde que $E(-5{,}2)$ n'est pas -5 , mais -6 (plus grand entier inférieur à $-5{,}2$).



Ensuite, il résulte de la définition que, pour x appartenant à un intervalle de la forme : $[n, n+1[$
où n est **entier**, on a $E(x)=n$. Ainsi :
sur $[0, 1[$: $E(x)=0$,
sur $[1, 2[$: $E(x)=1$, etc.
et
sur $[-1, 0[$: $E(x)=-1$,
sur $[-2, -1[$: $E(x)=-2$, etc.
On en déduit la courbe représentative de E (figure 30).

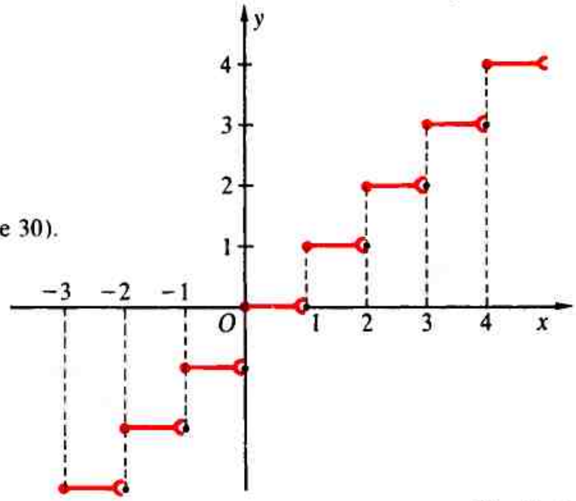


Figure 30

2° On peut remarquer, soit à l'aide du graphique, soit par le calcul que, pour tout réel x, on a :

$$\boldsymbol{E(x+1)=E(x)+1.}$$

Il en découle que :

$$D(x+1)=(x+1)-E(x+1)=x-E(x)\ ,$$

soit : $D(x+1)=D(x)$.
La fonction D est périodique de période 1.
Comme sur $[0, 1[$, $E(x)=0$, on a $D(x)=x$.
La courbe représentative de D s'obtient alors à l'aide de l'argument précédent (page 105).

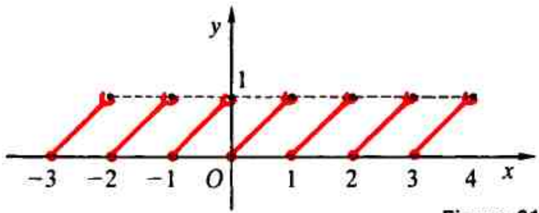


Figure 31

Remarques

1. La fonction « partie entière » intervient souvent en mathématiques, notamment en arithmétique, mais également au titre d'exemples et de contre-exemples en ce qui concerne les fonctions...

2. On peut remarquer que l'étude de ces fonctions devient banale dès que l'on pense à examiner leur comportement sur les intervalles de la forme $[n, n+1[$ $(n\in\mathbb{Z})$.

Exercices

28. Établir le résultat géométrique visible sur la figure 30, à savoir que la courbe représentative de la fonction partie entière est globalement invariante par les translations de vecteur $k(\vec{i}+\vec{j})$ $(k\in\mathbb{Z})$.

29. La touche $\boxed{\text{INT}}$ de certaines calculatrices définit une fonction. Comparer cette fonction et la fonction partie entière.

30. Déterminer (si possible) les périodes de chacune des fonctions suivantes :

- $x \longmapsto \sin(3x)$;
- $x \longmapsto \cos x+\sin x$;

31. Une fonction f périodique de période 2 est définie sur $[-1, 1[$ par $f(x)=x^2$.
Calculer $f(n)$, $n\in\mathbb{Z}$, puis :

$$f\left(\frac{3}{2}\right),\quad f(-\sqrt{2}),\quad f\left(1\,000+\frac{1}{10}\right).$$

Cette fonction est-elle une fonction paire?

c. Commentaire général

Les exemples précédents montrent l'intérêt qu'il peut y avoir à **reconnaître** et à **exploiter** le fait qu'une courbe soit globalement invariante par une transformation géométrique « simple ». Ce point de vue est approfondi, ici, dans deux directions :

- **Centre de symétrie d'une courbe :** un centre n'étant plus nécessairement l'origine du repère.
- **Axe de symétrie d'une courbe :** en ne se limitant plus uniquement à l'axe (Oy).

Exercice

32. Dans ce qui précède, nous nous sommes intéressés à des courbes globalement invariantes par certaines symétries et translations :
— symétrie orthogonale d'axe (Oy),
— symétrie de centre O,
— translation de vecteur $T\vec{i}$.
Pourquoi ne s'intéresse-t-on pas à la symétrie d'axe (Ox) ou à la translation de vecteur $k\vec{j}$?

3. Courbes représentatives et éléments de symétrie

a. Exemples

Exemple 1

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = |x+1| + |x-2|.$$

Cette fonction, affine par morceaux, est représentée figure 32. Essayons de contrôler, par le calcul, ce qui apparaît sur le graphique, à savoir que **la droite Δ d'équation $x = \frac{1}{2}$ est axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.**

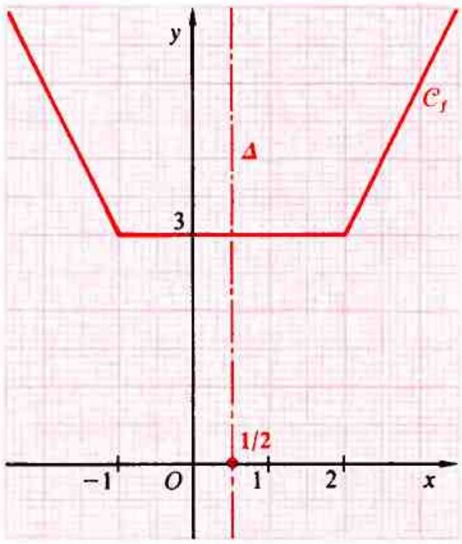


Figure 32

La symétrie d'axe Δ associe au point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ tel que $y' = y$ et $\frac{x+x'}{2} = \frac{1}{2}$,
soit : $x' = 1 - x$ et $y' = y$.
Soit $M(x, y)$ un point de $\mathcal{C}_f$, autrement dit tel que $y = f(x)$.
On est assuré que $M'(x', y')$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si $x' \in \mathcal{D}_f$ et si $y' = f(x')$ ou encore : $f(1-x) = f(x)$.

Or :

$$f(1-x) = |(1-x)+1| + |(1-x)-2| = |2-x| + |-x-1|$$

$$f(1-x) = |x-2| + |x+1| = f(x).$$

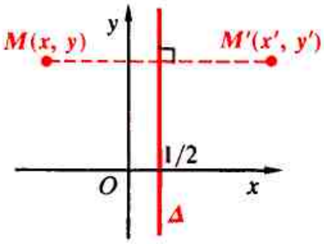


Figure 33

Conclusion : Quel que soit le point M de $\mathcal{C}_f$, le point M' appartient à $\mathcal{C}_f$. **La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc la droite Δ comme axe de symétrie.**

Autre point de vue :

Considérons le point $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et **le repère** $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

En désignant par (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et par (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, l'égalité **vectorielle** $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ conduit à :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + X \\ y = Y \end{cases}$$ (« formules » de changement de repère).

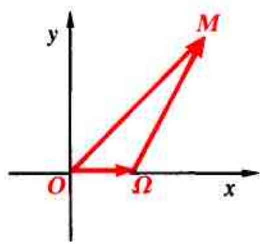


Figure 34

Écrivons l'équation de $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$:

$$y = f(x) \iff Y = f\left(X + \frac{1}{2}\right) \iff Y = \left|X + \frac{3}{2}\right| + \left|X - \frac{3}{2}\right|.$$

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative **dans le repère** $(\boldsymbol{\Omega}, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction

$$F : X \longmapsto \left|X + \frac{3}{2}\right| + \left|X - \frac{3}{2}\right|.$$

Pour établir que Δ est axe de symétrie de la courbe, il suffit de contrôler que la fonction F est une fonction paire :

$$F(-X) = \left|-X + \frac{3}{2}\right| + \left|-X - \frac{3}{2}\right| = \left|X - \frac{3}{2}\right| + \left|X + \frac{3}{2}\right| = F(X).$$

Conclusion : Dans le **repère** $(\boldsymbol{\Omega}, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est la **courbe représentative** d'une fonction **paire**. **L'axe des ordonnées de ce repère,** autrement dit la **droite Δ, est axe de symétrie de la courbe.**

Exemple 2

Soit f la fonction $x \longmapsto 2 + \dfrac{3}{x-1}$.

Désignons par $\mathcal{H}$ sa courbe représentative[1]. Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{H}$ si et seulement si :

$$y = 2 + \frac{3}{x-1} \quad \text{ou encore} \quad y - 2 = \frac{3}{x-1}.$$

En posant $Y = y - 2$ et $X = x - 1$, on obtient : $\boldsymbol{Y = \dfrac{3}{X}}$.

Interprétons le changement :

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2. \end{cases}$$

En introduisant le point Ω de coordonnées $(1, 2)$, on voit que (X, Y) désignent les coordonnées du point M dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\left(\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} \iff \begin{cases} x = 1 + X \\ y = 2 + Y \end{cases}\right).$$

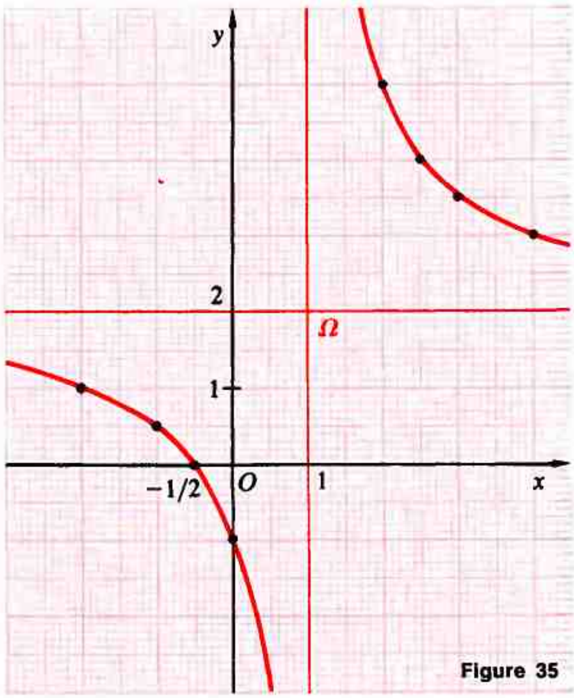


Figure 35

Ainsi, **$\mathcal{H}$ est l'hyperbole d'équation $Y = \dfrac{3}{X}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$; le point Ω est centre de symétrie de $\mathcal{H}$.**

Montrons comment ce dernier résultat peut être établi « directement », c'est-à-dire à partir de la fonction

$$x \longmapsto 2 + \frac{3}{x-1}.$$

La symétrie de centre $\Omega(1, 2)$ associe au point $M(x, y)$ le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M},$$

soit « en passant » aux coordonnées :

$$\begin{cases} x' - 1 = -(x - 1) \\ y' - 2 = -(y - 2) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \boldsymbol{x' = -x + 2} \\ \boldsymbol{y' = -y + 4.} \end{cases}$$

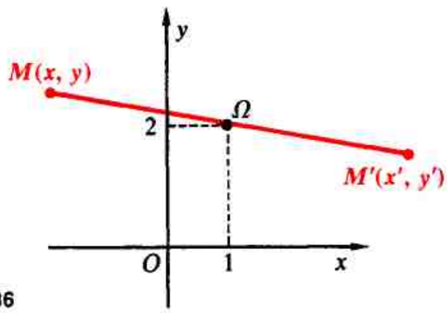


Figure 36

[1] Cette désignation $\mathcal{H}$ n'est pas « naïve » : elle anticipe, bien sûr, sur la nature de la courbe : une hyperbole...

Le point Ω est centre de symétrie de la courbe si et seulement si tout point M de $\mathcal{H}$ a son image M' sur $\mathcal{H}$. Il s'agit donc de vérifier que : $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$ implique $x' \in \mathcal{D}_f$ et $y' = f(x')$, c'est-à-dire que :

$$x \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad y = f(x) \quad \text{implique} \quad 2 - x \in \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad 4 - y = f(2 - x).$$

Or comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$, il est clair que d'une part, si $x \neq 1$, $2 - x \neq 1$ et que, d'autre part :

$$\left.\begin{aligned} 4 - y &= 4 - \left(2 + \frac{3}{x-1}\right) = 2 - \frac{3}{x-1} \\ f(2-x) &= 2 + \frac{3}{(2-x)-1} = 2 + \frac{3}{-x+1} = 2 - \frac{3}{x-1} \end{aligned}\right\} \; f(2-x) = 4 - y$$

ce qui établit le résultat envisagé.

Commentaires

Ces deux exemples illustrent les deux points de vue annoncés (cf. page 103) :

- Le point de vue « **changement de repère** ». Notons à ce propos, qu'il peut intervenir soit parce que l'on a une idée précise du point Ω (exemple 1), soit parce que l'équation de la courbe — telle qu'elle est écrite — conduit de façon immédiate à effectuer un changement de coordonnées (exemple 2).
- Le point de vue « **relation fonctionnelle** ». Il s'agit de relations entre diverses valeurs de la fonction qui expriment que telle droite ou tel point est élément de symétrie de la courbe représentative. (L'objet du théorème qui suit est de préciser, dans le cadre général, de telles relations.)

Exercices

Dans les deux exercices suivants :

1° effectuer la représentation graphique de la fonction f;

2° préciser les éléments de symétrie, en utilisant :

- *un changement de repère*

ou

- *l'expression analytique des symétries concernées.*

33. $f(x) = 6x - 3 + |2x - 5| - |2x + 3|$.

34. $f(x) = |3x - 4| + |3x + 10|$.

b. *Eléments de symétrie et relations fonctionnelles*

Soit f une fonction numérique, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° La *droite d'équation* $x = \frac{a}{2}$ est *axe de symétrie* de la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } \frac{a}{2} \\ f(a - x) = f(x) \text{ pour tout } x \text{ de } \mathcal{D}_f. \end{cases}$$

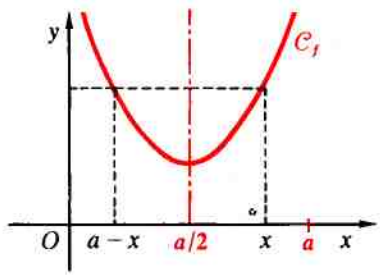


Figure 37

2° Le *point* $\Omega\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ est *centre de symétrie* de la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } \frac{a}{2} \\ f(x) + f(a - x) = b \text{ pour tout } x \text{ de } \mathcal{D}_f. \end{cases}$$

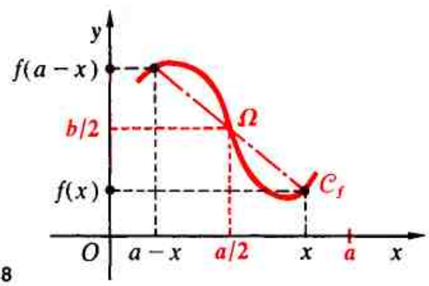
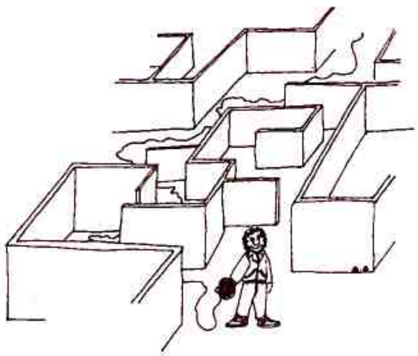


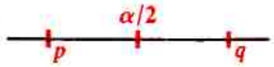
Figure 38



Note : Il ne faut pas se leurrer : sans le **support géométrique** ce théorème est parfois difficile à mettre en œuvre. Expliquons ce qu'il faut entendre par **support géométrique**[1].

Soit p et q deux réels (avec $p<q$ pour fixer les idées). alors :

$p+q=\alpha \iff \dfrac{\alpha}{2}$ **est milieu de $[p, q]$.**



Ce résultat, numériquement, n'est qu'une banalité, puisque $\dfrac{p+q}{2}$ est le milieu de $[p, q]$...

Dans ce théorème, ce support géométrique intervient sous deux aspects :

1° **x et $a-x$ sont symétriques par rapport à $\dfrac{a}{2}$**, puisque leur somme est évidemment égale à a.

2° **La relation $f(x)+f(a-x)=b$ signifie que $\dfrac{b}{2}$ est le milieu du segment $[f(x), f(a-x)]$.**

Démonstration

• Il est clair que la condition « **$\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à $\dfrac{a}{2}$** » se traduit par « **pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $a-x$ appartient à $\mathcal{D}_f$** ».

• **Propriété 2 :** La symétrie centrale de centre $\Omega\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ est définie analytiquement par les relations[2] :

$$\begin{cases} x+x'=a \\ y+y'=b. \end{cases}$$

On peut donc traduire $f(x)+f(a-x)=b$, de manière équivalente par $f(x)+f(x')=y+y'$.

Ce qui montre que $y=f(x)$ si et seulement si $y'=f(x')$, autrement dit que $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si son symétrique $M'(x', y')$ appartient à $\mathcal{C}_f$. Ceci établit donc la seconde propriété.

Exercice

35. Établir la propriété 1 en utilisant la définition analytique de la symétrie d'axe $\Delta\left(x=\dfrac{a}{2}\right)$:

$$\begin{cases} x+x'=a \\ y=y'. \end{cases}$$

Exemples et remarques

1. Il est inutile, pour une fonction dont l'ensemble de définition est, par exemple $\mathbb{R}-\{0; 2; 3\}$ de chercher un quelconque élément de symétrie (au sens du théorème).
En effet la partie de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}-\{0; 2; 3\}$, n'est symétrique par rapport à aucun point.
Dans le même ordre d'idée, par contre, si l'ensemble de définition d'une fonction est $\mathbb{R}-\{x_0\}$, alors, un point (par exemple) qui serait candidat a être un centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction est nécessairement sur la droite d'équation $x=x_0$.

Tout cela peut faciliter la recherche d'éléments de symétrie éventuels.

(1) Dans ce qui suit, terminologie et vocabulaire assimilent les réels à des points, afin de mieux décrire l'aspect géométrique.

(2) Ces relations ne font que traduire que $\dfrac{a}{2}$ et $\dfrac{b}{2}$ sont les milieux respectifs de $[x, x']$ et $[y, y']$.

2. L'existence d'éléments de symétrie peut découler de propriétés «évidentes» de la fonction étudiée; c'est le cas par exemple de $f : x \longmapsto \sin x$.

La relation $\sin(\pi - x) = \sin x$ montre que la **droite** $x = \frac{\pi}{2}$ **est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction sinus.**

3. La courbe représentative de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

admet-elle des éléments de symétrie? Comme l'on ne sait pas[1] représenter graphiquement une telle fonction (voir figure 39 quand même), il est difficile d'émettre une conjecture d'origine... graphique. On peut envisager plusieurs démarches :

1° Si l'on remarque que :

$$f(1-x) = f(x)$$

$\left(\text{puisque } 1-(1-x) = x\right)$, on peut affirmer d'après le théorème précédent, que **la droite d'équation** $x = \frac{1}{2}$ **est axe de symétrie** de la courbe (ici $a = 1$).

2° Sinon... l'examen de l'ensemble de définition de la fonction f, $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, montre que seul $\frac{1}{2}$ est un centre de symétrie de $\mathcal{D}_f$.

Que ce soit pour chercher un axe ou un centre de symétrie on est amené à calculer $f(a-x)$ $\left(\text{ici } \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \text{ et donc } a = 1\right)$.

On est alors ramené au point *1°*.

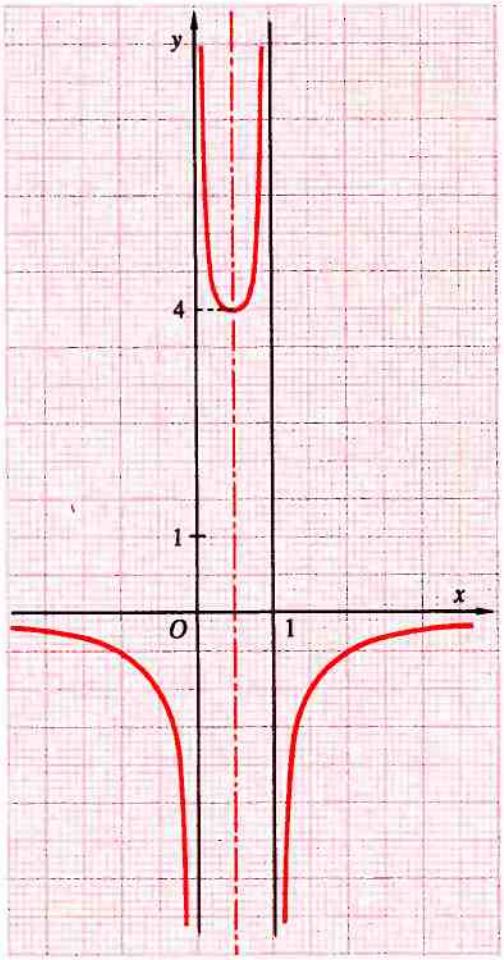


Figure 39

Un point de méthode

Lorsque l'on dispose de précisions sur l'élément de symétrie (axe ou centre), soit par conjecture, soit parce que franchement explicité, il est préférable (en général) d'utiliser **un changement de repère :**

— les calculs sont relativement économiques,

— l'équation de la courbe dans ce nouveau repère s'en trouve simplifiée.

Par contre, lorsqu'aucune information n'est disponible, il vaut mieux, après avoir examiné l'ensemble de définition de la fonction f (suivant la remarque 1) utiliser les relations fonctionnelles.

(1) Pour l'instant...

Exercices

36. Montrer que le point Ω de coordonnées $(0, 1)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$.

37. Montrer que la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \sqrt{2x}+\sqrt{1-2x}$ admet un axe de symétrie.

38. Soit a un réel fixé et Δ la droite d'équation $x = a$.

Donner par leurs équations trois exemples de paraboles admettant Δ comme axe de symétrie.

IV. Fonctions associées et courbes représentatives

1. Le problème abordé

Dans ce paragraphe, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et f **est une fonction numérique** dont nous notons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Au moyen des opérations élémentaires sur les nombres réels (addition, multiplication) nous pouvons **associer à la fonction f des fonctions telles que** (λ étant un réel fixé) :

$$x \longmapsto f(x+\lambda) \ ; \quad x \longmapsto \lambda + f(x) \ ; \quad x \longmapsto f(\lambda x) \ ; \quad x \longmapsto \lambda f(x) \ , \quad \text{etc.}$$

Le problème est de savoir s'il est **possible d'obtenir les courbes représentatives de ces fonctions à partir de la courbe représentative de la fonction f.**

C'est essentiellement deux **méthodes** qui seront envisagées dans la résolution d'un tel problème :

- l'une s'appuyant sur le **changement de repère** (changement d'origine, mais aussi changement d'« unités »),
- l'autre utilisant les **transformations géométriques du plan.**

L'étude qui suit concerne a priori une fonction quelconque; cependant elle n'offre d'intérêt, dans la pratique, que pour des fonctions dont le tracé de la courbe représentative est parfaitement maîtrisé

($x \longmapsto ax^2$, $x \longmapsto \dfrac{a}{x}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$, $x \longmapsto x^3$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \cos x$ par exemple).

2. Rappels géométriques

a. Sur le changement de repère

- **Changement d'origine**

FORMULES DE CHANGEMENT DE REPÈRE

$\Omega(a, b)$ **dans le repère** $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$M(x, y)$ **dans le repère** $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$ **ou** $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$

$M(X, Y)$ **dans le repère** $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

Il suffit de traduire l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ par des relations sur les coordonnées :

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}.$$

Remarque

On retiendra surtout la méthode **vectorielle** qui conduit à de tels résultats, mais aussi l'interprétation qu'il est possible de faire, en termes de changement de repère, de relations telles que $X = x - a$ et $Y = y - b$.

- **Changement d'unités**

Étant donné un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et k un réel **non nul**, on considère les deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ avec $\mathcal{R} = (O, k\vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{R}' = (O, \vec{i}, k\vec{j})$ (figure 40).

Des écritures (évidentes)

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \frac{x}{k}(k\vec{i}) + y\vec{j}$$

et $$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + \frac{y}{k}(k\vec{j}),$$

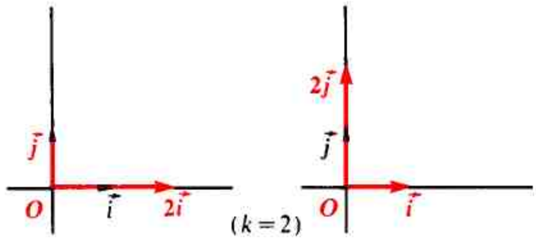


Figure 40

on déduit :

Si M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Alors :

1° M a pour coordonnées $\left(\frac{x}{k}, y\right)$ dans le repère $(O, k\vec{i}, \vec{j})$.

2° M a pour coordonnées $\left(x, \frac{y}{k}\right)$ dans le repère $(O, \vec{i}, k\vec{j})$.

Exercice

39. Soit (x, y) les coordonnées de M dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et Ω le point de coordonnées $(-1, 2)$ dans ce repère.
Préciser les coordonnées de M dans chacun des repères suivants :

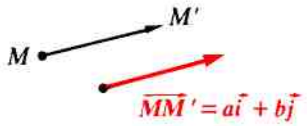
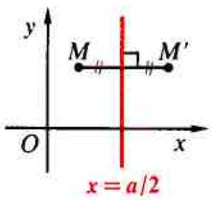
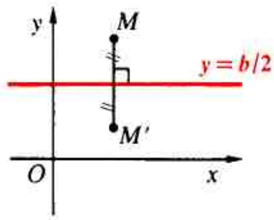
a) $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$;
b) $(\Omega, -\vec{i}, \vec{j})$;
c) $\left(\Omega, \vec{i}, \frac{1}{2}\vec{j}\right)$.

b. *Sur la définition analytique des transformations géométriques*

Étant donné une transformation $\mathcal{C}$ du plan et un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, à tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, correspond un point $M' = \mathcal{C}(M)$ dont nous notons (x', y') les coordonnées.
Le tableau de la page 114 résume, pour les transformations géométriques qui seront utilisées dans le problème exposé dans le paragraphe 1, les relations essentielles qui lient x et y à x' et y'.

Remarque

Les éléments numériques qui permettent de définir les transformations considérées interviennent sous la forme $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$ plutôt que a et b (sauf pour la translation).
L'explication en est simple : les problèmes que nous allons traiter font souvent intervenir en **premier lieu** des relations entre les coordonnées de $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ (et parfois sous des formes différentes, ce qui justifie la présence de la toute dernière colonne).
Autrement dit, il est important d'assimiler la lecture de ce tableau, **de droite à gauche.**

TRANSFORMATION	ILLUSTRATION	DÉFINITION ANALYTIQUE
Translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$		$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ ou $\begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$
Symétrie centrale de centre $\Omega\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$		$\begin{cases} x' = a - x \\ y' = b - y \end{cases}$ ou $\begin{cases} x' + x = a \\ y' + y = b \end{cases}$
Symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$		$\begin{cases} x' = a - x \\ y' = y \end{cases}$ ou $\begin{cases} x' + x = a \\ y' = y \end{cases}$
Symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = \frac{b}{2}$		$\begin{cases} x' = x \\ y' = b - y \end{cases}$ ou $\begin{cases} x' = x \\ y' + y = b \end{cases}$

3. Les fonctions $x \longmapsto f(x-a)+b$

a. Etude générale

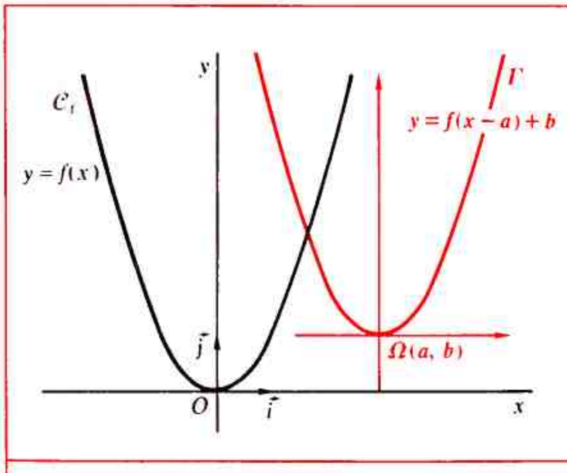
Désignons par Γ la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto f(x-a)+b$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Autrement dit l'équation de Γ est : $y = f(x-a)+b$ ou encore $y - b = f(x-a)$. En posant $X = x - a$ et $Y = y - b$, on a l'équivalence :

$$y = f(x-a)+b \iff Y = f(X).$$

Deux interprétations sont alors possibles :

1° Par un changement de repère. En introduisant le point Ω de coordonnées (a, b) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on voit donc que Γ est la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ (figure 41).

2° Par les transformations. Le système de relations $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$ montre que le point $M(x, y)$ (dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se déduit du point $m(X, Y)$ (**toujours dans le repère** $(\boldsymbol{O}, \vec{i}, \vec{j})$) par la translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$ et donc, que lorsque m décrit la courbe $\mathcal{C}_f$, le point M décrit la courbe Γ.
Autrement dit : Γ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$ (figure 42).



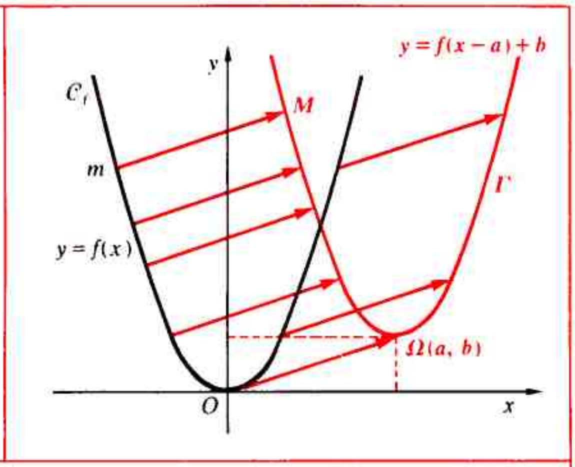


Figure 41 **Figure 42**

$\mathcal{C}_f : y = f(x)$; repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$\Gamma : y = f(x-a)+b$; repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Γ : $Y = f(X)$; repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$	**Γ est la translatée de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega} = a\vec{i} + b\vec{j}$**

En résumé :

La courbe Γ représentative dans le *repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction $x \longmapsto f(x-a)+b$ est :

- **d'une part, la *courbe représentative de la fonction* f dans le *repère* $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$,**
- **d'autre part, la *translatée de la courbe* $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$,**

où Ω est le point de coordonnées (a, b) dans le *repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b. *Exemple 1*

- **La fonction $x \longmapsto 1+\sqrt{x+3}$.**

Soit f la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$. En désignant par g la fonction $x \longmapsto 1+\sqrt{x+3}$, on a :

$$g(x) = f\big(x-(-3)\big)+1.$$

Ainsi on obtiendra la courbe représentative de g :

. soit par translation de vecteur $-3\vec{i}+\vec{j}$ de la courbe représentative de f (équation $y=\sqrt{x}$) (figure 43, page 116),

. soit en considérant que son équation est $Y=\sqrt{X}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ où Ω a pour coordonnées $(-3, 1)$.

Remarque

On notera comment l'on repère certains points « privilégiés » de la courbe Γ (à coordonnées entières par exemple).

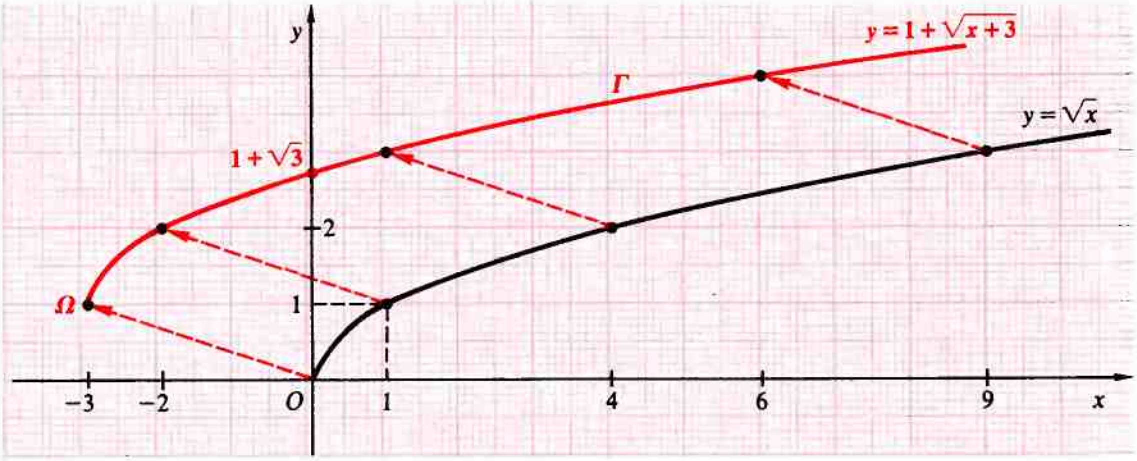


Figure 43

Exercices

40. Donner une représentation graphique des fonctions :

- $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x} + 1$;
- $x \longmapsto -1 + \sqrt{x-1}$;
- $x \longmapsto 1 + \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

41. Montrer que la courbe représentative de $x \longmapsto \cos x$ est l'image par la translation de vecteur $-\dfrac{\pi}{2}\vec{i}$ de celle de $x \longmapsto \sin x$.

42. Soit $\mathcal{T}$ la parabole d'équation :

$$y = -3x^2 + 2x + 1.$$

Montrer que dans tout repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ $\mathcal{T}$ a une équation de la forme : $Y = -3X^2 + \alpha X + \beta$ (α, β étant deux réels).

c. *Exemple 2 : les fonctions homographiques* $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Dans les exemples précédents, il était relativement aisé de reconnaître dans les fonctions étudiées une écriture de la forme $x \longmapsto f(x-a)+b$ et d'identifier la fonction f.

L'étude qui suit — centrée sur les fonctions homographiques $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ — est légèrement différente : elle met l'accent sur les **transformations d'écritures** qui sont indispensables à une telle identification. Notons que ce point de vue n'est pas nouveau : c'est celui qui a permis (chapitre 2) **l'étude et la représentation graphique des fonctions trinômes** $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ (par la mise sous forme canonique : $ax^2 + bx + c = a\left((x-\alpha)^2 + \beta\right)$.

- **La fonction** $x \longmapsto \dfrac{3x+2}{2x-1}$

Précisons le **procédé de transformation d'écritures :**

pour $x \neq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3x+2}{2x-1} = \dfrac{\frac{3}{2}x+1}{x-\frac{1}{2}}$ **(mise du dénominateur sous la forme $x - \alpha$);**

$$\frac{\frac{3}{2}x+1}{x-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+1+\frac{3}{4}}{x-\frac{1}{2}}$$ **(on fait apparaître le dénominateur au numérateur).**

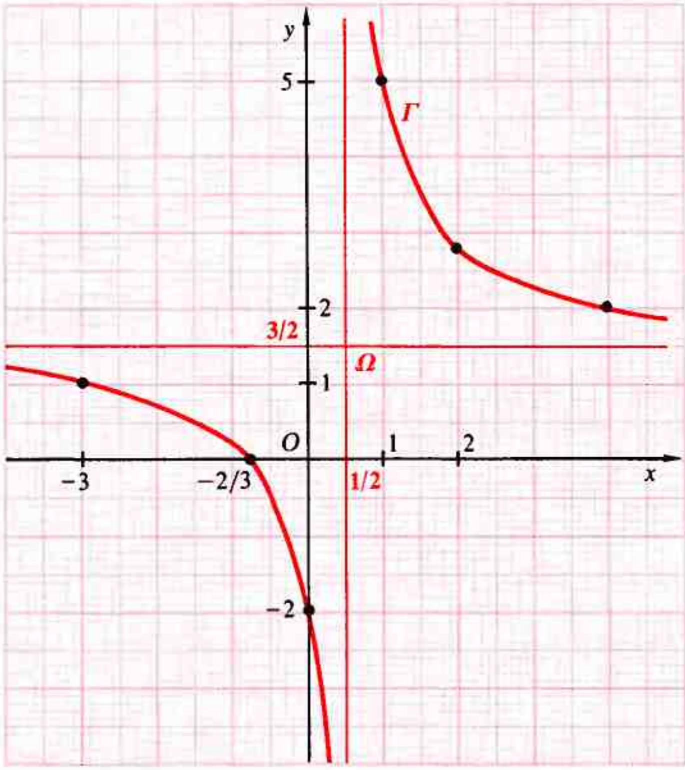
Après « division » : $\dfrac{3x+2}{2x-1}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\frac{7}{4}}{x-\frac{1}{2}}$ $\left(\text{on obtient une écriture de la forme } \beta+\dfrac{k}{x-\alpha}\right)$.

On obtient donc, en posant $f(x)=\dfrac{\frac{7}{4}}{x}$: $\dfrac{3x+2}{2x-1}=\dfrac{3}{2}+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.

La courbe Γ admet donc comme équation dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ (figure 44) :

$$Y=\frac{\frac{7}{4}}{X}.$$

Figure 44



Remarques

1. Nous n'avons pas représenté la fonction f : $x \longmapsto \dfrac{\frac{7}{4}}{x}$ dont Γ est l'image par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$.

2. L'équation de Γ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, permet de percevoir que Ω est un **centre de symétrie** de la courbe. $X \longmapsto \dfrac{\frac{7}{4}}{X}$ est une fonction impaire.

Exercices

43. Représenter graphiquement les fonctions

a) $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$; *b*) $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}+2$;

c) $x \longmapsto \dfrac{2x-5}{2(2x-1)}$; *d*) $x \longmapsto \dfrac{(\sqrt{3}+1)x+4}{\frac{1}{2}x+\sqrt{3}-1}$.

44. Soit Ω un point de coordonnées (a, b) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $Y=\dfrac{1}{X}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Quelle est l'équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$?

• **Cas général**

On conviendra sans peine que le procédé de transformations d'écritures développé ci-dessus s'adapte dans le cas d'une fonction homographique quelconque : $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Et donc, en général il existe un repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ où la courbe représentative de cette fonction admet une équation de la forme : $Y=\dfrac{k}{X}$. Ainsi :

La courbe représentative d'une fonction homographique $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est une hyperbole (en général).

4. Les fonctions $x \longmapsto f(a-x)$ et $x \longmapsto b-f(x)$

a. Exemple 1

• **La fonction**[1] $x \longmapsto f(-x)$
Les points M et M' de coordonnées $M(x, y)$ et $M'(-x, y)$ étant symétriques par rapport à l'axe (Oy) les **courbes représentatives** des fonctions :

$x \longmapsto f(-x)$ et $x \longmapsto f(x)$

sont **symétriques par rapport à l'axe (Oy)** (figure 45).

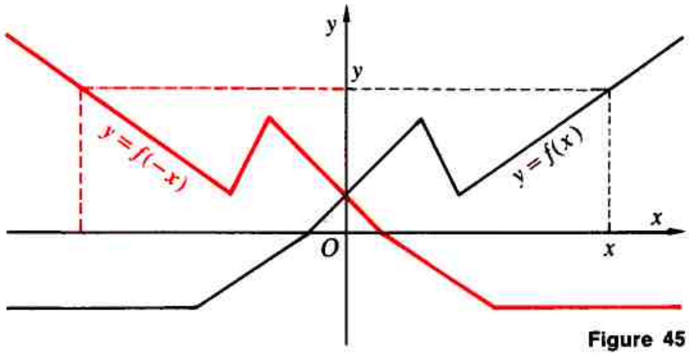


Figure 45

• **La fonction** $x \longmapsto \sqrt{3-x}$
Désignons par Γ la courbe représentative de cette fonction définie sur $]-\infty, 3]$.
Un point $M(x, y)$ appartient à Γ si et seulement si $x \leqslant 3$ et $y = \sqrt{3-x}$.
Posons $x' = 3 - x$ et $y' = y$. Les points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ sont alors symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $x = \frac{3}{2}$ $(x + x' = 3$ et $y = y')$.

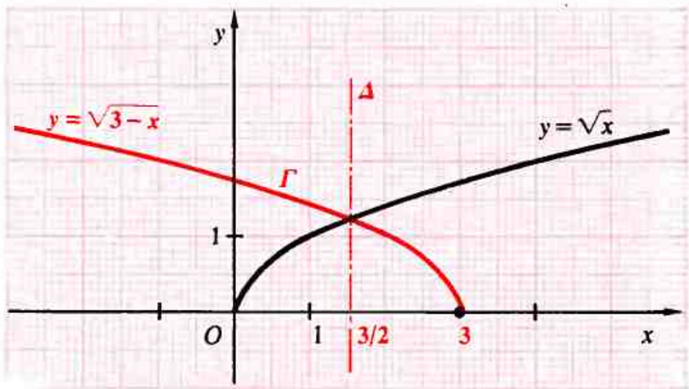


Figure 46

Et l'équivalence « $y = \sqrt{3-x} \iff y' = \sqrt{x'}$ » montre que **Γ et la courbe représentative $\mathcal{C}$ de $x \longmapsto \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à Δ.**

Remarques

1. Il est possible de préciser certains points de Γ et notamment le point d'intersection avec Δ qui a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

2. De façon générale, concernant les fonctions $x \longmapsto f(a-x)$, la **méthode** d'étude est tout à fait analogue :

. les points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ avec $\begin{cases} x' = a - x \\ y' = y \end{cases}$ $\left(\text{ou } \begin{cases} x + x' = a \\ y' = y \end{cases}\right)$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $x = \frac{a}{2}$;

. il en découle que les **courbes représentatives** des fonctions $x \longmapsto f(a-x)$ et $x \longmapsto f(x)$ sont **symétriques** par rapport à la **droite Δ d'équation** $x = \frac{a}{2}$.

[1] Correspond au cas : $a = 0$ pour $x \longmapsto f(a-x)$.

Exercices

45. Représenter, graphiquement les fonctions :

- $x \longmapsto \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$;
- $x \longmapsto (1-x)^3$.

46. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ et Δ la droite d'équation $x = -1$. Donner l'équation de la courbe $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par la symétrie d'axe Δ.

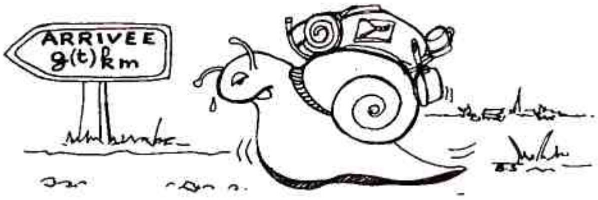
47. Tracer dans un même repère les courbes d'équations :

$$y = \sqrt{1+x} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{4-x}.$$

Montrer que ces deux courbes sont images l'une de l'autre par une symétrie orthogonale que l'on précisera.

b. *Exemple 2*

• Distance restant à parcourir



La figure 47 décrit le mouvement d'un mobile. De façon plus précise, la courbe $\mathcal{C}$ est représentative sur l'intervalle $[0, T]$ de la fonction f :

$t \in [0, T] \longmapsto f(t) =$ distance parcourue à l'instant t.

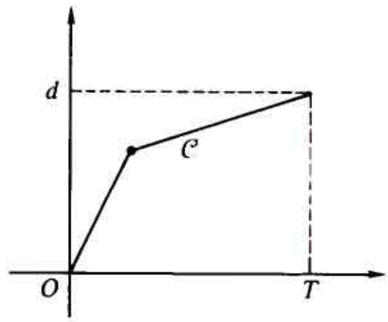


Figure 47

Problème

Représenter la fonction g définie par :

$g : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad t \longmapsto g(t) =$ *distance restant à parcourir à l'instant t.*

Les deux fonctions f et g sont liées par la relation $g(t) = d - f(t)$ (ou $f(t) + g(t) = d$) pour tout réel t de $[0, T]$.

Cette relation montre que les points $M(t, f(t))$ et $M'(t, g(t))$ sont à chaque instant symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{d}{2}$.

La **courbe cherchée est donc la symétrique de** $\mathcal{C}$ par rapport à la **droite d'équation** $y = \frac{d}{2}$ (figure 48).

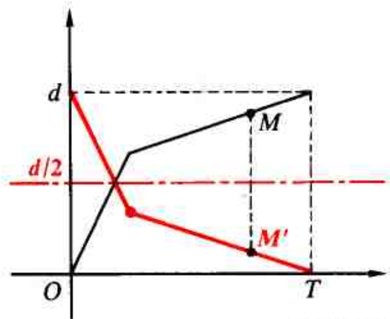


Figure 48

De façon plus générale, les courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto b - f(x)$ et $x \longmapsto f(x)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{b}{2}$: les points $M(x, f(x))$ et $M'(x, b - f(x))$ étant symétriques par rapport à cette droite, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

Exercices

48. Représenter sur un même schéma les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ d'équation :

$$\mathcal{C}_1 : y=\sqrt{x}; \quad \mathcal{C}_2 : y=\sqrt{1-x};$$
$$\mathcal{C}_3 : y=1-\sqrt{1-x}.$$

49. Montrer que les courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto -f(x)$ sont symétriques par rapport à l'axe (Ox).

c. Synthèse des résultats

Les courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto f(a-x)$ et $x \longmapsto f(x)$ sont *symétriques* par rapport à la *droite* d'équation $x=\frac{a}{2}$.

Les courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto b-f(x)$ et $x \longmapsto f(x)$ sont *symétriques* par rapport à la *droite* d'équation $y=\frac{b}{2}$.

5. Les fonctions $x \longmapsto f(|x|)$ et $x \longmapsto |f(x)|$

a. Exemple 1

Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{|x|+1}{|x|-1}$, autrement dit $g(x)=f(|x|)$ avec $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

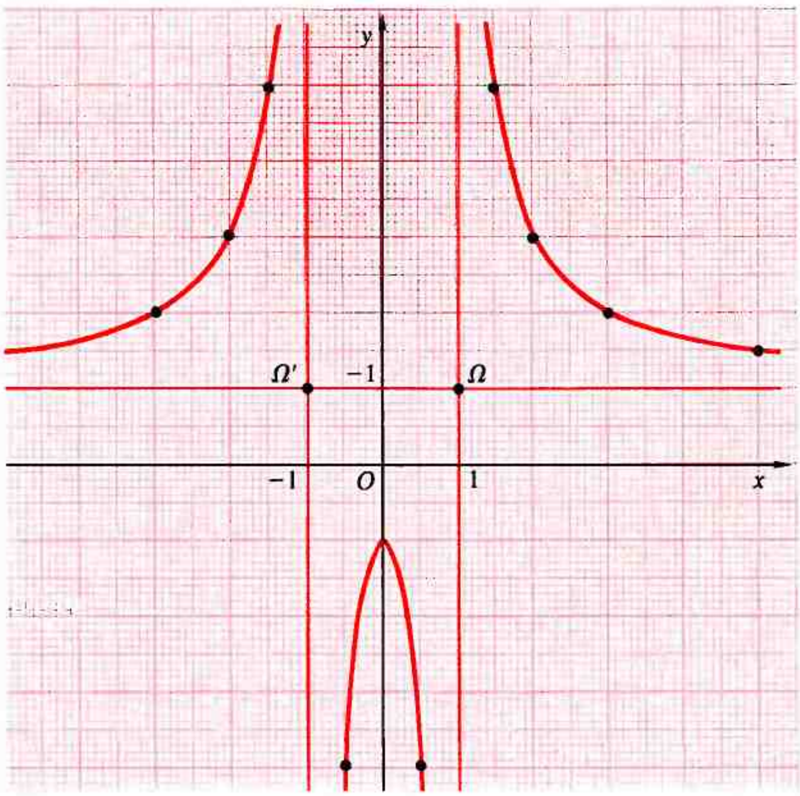


Figure 49

• Deux points sont à souligner pour la représentation graphique de g.

1° g est une fonction **paire.**

2° Pour $x \geqslant 0$ et $x \in \mathcal{D}_f$, $g(x)=f(x)$. On construira donc la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$, puis on complètera par une symétrie d'axe (Oy).

• **Étude de f sur $[0, +\infty[$**

Pour $x \neq 1$, on a :

$$f(x)=\frac{(x-1)+2}{x-1},$$

soit : $f(x)=1+\dfrac{2}{x-1}$.

(La courbe représentative de f sur $[0, +\infty[$ est donc une **partie** de l'hyperbole d'équation $Y=\dfrac{2}{X}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.)

b. Exemple 2

Représentons graphiquement la fonction $g : x \longmapsto |x^2-2x-2|$.

- Nous représenterons tout d'abord la fonction $f : x \longmapsto x^2-2x-2$.

La mise sous forme canonique $f(x)=(x-1)^2-3$ montre que la courbe représentative de f a pour équation $Y=X^2$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec Ω de coordonnées $(1, -3)$ (figure 50).

- D'après la définition de la valeur absolue, on a :

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

De plus, il est clair que les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(x, -f(x))$ sont symétriques par rapport à l'axe (Ox). On en déduit donc un **procédé de construction de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto |f(x)|$ que l'on peut décrire ainsi :**
On « conserve » la partie de la courbe représentative de f située au-dessus de l'axe (Ox) et l'on « complète » avec la courbe symétrique par rapport à (Ox) de la partie de la courbe située en dessous de l'axe (Ox) (figure 51)

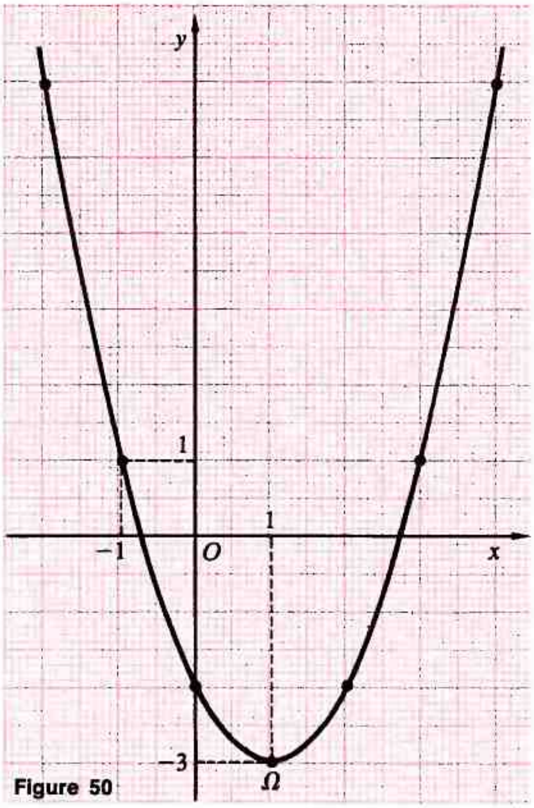


Figure 50

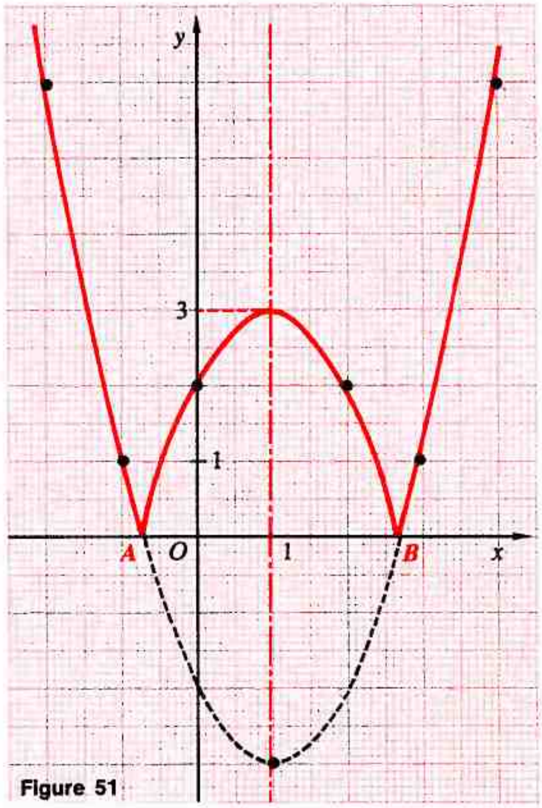


Figure 51

Note : Les **deux** schémas illustrent le procédé, mais, en général, on n'effectue qu'une seule représentation (celle de la figure 51).

Exercices

50. Préciser les coordonnées des points A et B (figure 51).

Expliquer pourquoi la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de g.

51. Représenter dans un même repère :

- d'une part les fonctions :

$x \longmapsto \sqrt{1-x}$ et $x \longmapsto \sqrt{1-|x|}$;

- d'autre part les fonctions :

$x \longmapsto 1-\sqrt{x}$ et $x \longmapsto |1-\sqrt{x}|$.

6. Les fonctions $x \longmapsto f(kx)$ et $x \longmapsto k\,f(x)$ (k réel(*))

a. Remarque préliminaire

Il serait naturel pour étudier — par exemple — la fonction $x \longmapsto kf(x)$ de considérer la **transformation** définie analytiquement par $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$ et donc d'étudier :

1. son action sur les configurations élémentaires (droites, segments, cercles, etc.);

2. son comportement par rapport aux notions de base (conserve-t-elle le parallélisme? l'orthogonalité? la distance? etc.).

L'image d'une droite (plus généralement d'une ligne brisée) par cette application peut être obtenue aisément (cf. exercices 52 et 53 ci-dessous).

Exercices

52. Soit $\mathscr{T}$ la transformation définie analytiquement par $\begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{1}{2}\, y. \end{cases}$

Montrer que l'image par $\mathscr{T}$ d'une droite est encore une droite.

53. Tracer l'image de $\mathscr{C}$ (figure 52) par la transformation précédente.

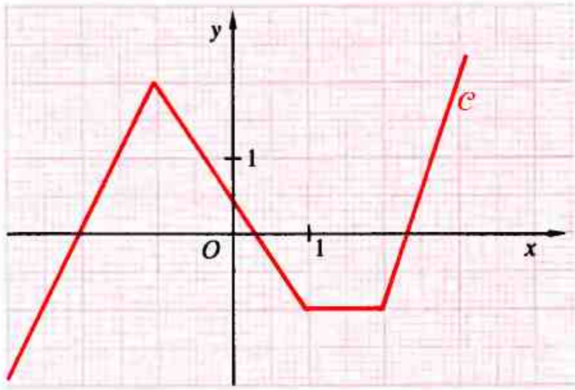


Figure 52

Par contre, l'image d'une des courbes les plus familières, le cercle, n'est pas un cercle (la courbe obtenue est une **ellipse**). Plus généralement, lorsque l'on fait agir une telle transformation le contrôle des « déformations » que subit une courbe donnée n'est pas d'accès familier.

Il en découle que, concernant l'étude des fonctions $x \longmapsto f(kx)$ et $x \longmapsto kf(x)$, c'est le point de vue du **changement de repère** (et notamment du changement d'unités) qui sera développé.

b. Exemples

• **La fonction $x \longmapsto 2\sqrt{x}$**

Cette fonction est définie sur $[0, +\infty[$ et, en désignant par Γ sa courbe représentative :

$$M(x, y) \in \Gamma \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + 2\sqrt{x}\,\vec{j} = x\vec{i} + \sqrt{x}\,(2\vec{j}\,).$$

(*) On supposera par la suite $k \neq 0$ et $k \neq 1$.

Ainsi Γ est la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ dans le repère $(O, \vec{i}, 2\vec{j})$ (figure 53).

Note : La courbe représentée en pointillés (noirs) est la courbe représentative, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $x \longmapsto \sqrt{x}$.

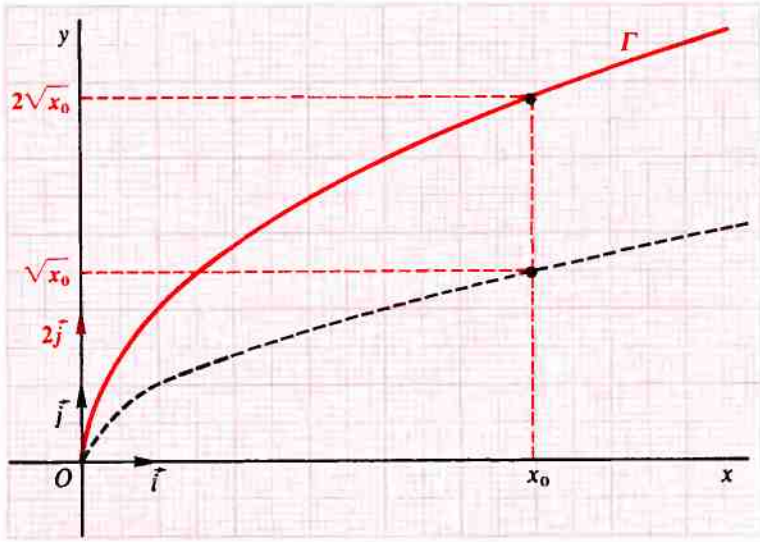


Figure 53

- **La fonction $x \longmapsto -\frac{1}{2}\sin x$**

Les propriétés de parité, de périodicité et la relation $\sin(\pi - x) = \sin x$ permettent de ramener l'intervalle d'étude de la fonction à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soit $M(x, y)$ un point de la courbe représentative Γ de $x \longmapsto -\frac{1}{2}\sin x$.

En procédant comme dans l'exemple précédent, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} - \frac{1}{2}\sin x\vec{j} = x\vec{i} + \sin x\left(-\frac{1}{2}\vec{j}\right).$$

La courbe Γ est donc la courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{i}, -\frac{1}{2}\vec{j}\right)$ de la fonction $x \longmapsto \sin x$.

Cependant, on préférera « travailler » dans le repère $\left(O, \vec{i}, \frac{1}{2}\vec{j}\right)$ (figure 54) que dans le repère $\left(O, \vec{i}, -\frac{1}{2}\vec{j}\right)$ (figure 55) et donc considérer que **Γ est la courbe représentative de $x \longmapsto -\sin x$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \frac{1}{2}\vec{j}\right)$** (ce qui ne présente pas de difficultés supplémentaires).

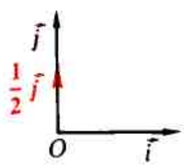


Figure 54

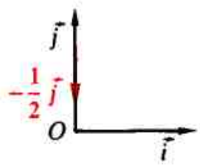


Figure 55

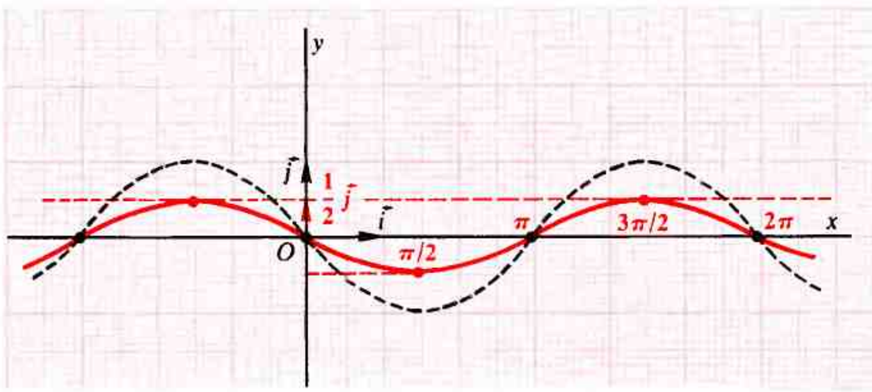


Figure 56

(En pointillé : la courbe d'équation $y = -\sin x$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.)

Exercices

54. Construire sur un même graphique les courbes d'équations $y=\sqrt{x-1}$ et $y=3\sqrt{x-1}$.

55. Dans quel repère la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto ax^2$ (respectivement $x \longmapsto \frac{a}{x}$) admet-elle l'équation $Y=X^2$ (respectivement $Y=\frac{1}{X}$)?

• **La fonction $x \longmapsto \cos 2x$**

Soit Γ sa courbe représentative. Alors $M(x, y)$ appartient à Γ si et seulement si :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + \cos(2x)\vec{j},$$

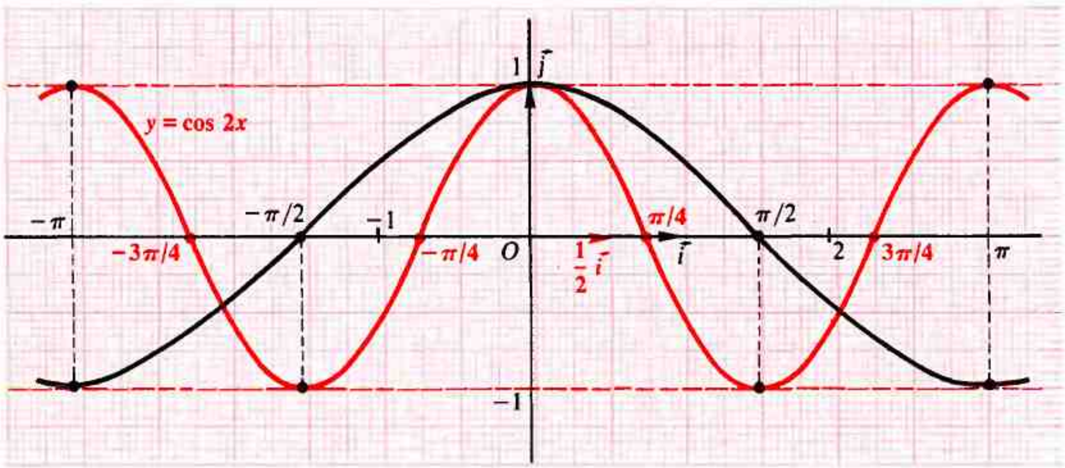
ce que l'on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = (2x)\left(\frac{1}{2}\vec{i}\right) + \cos(2x)\vec{j}.$$

En posant $X=2x$, $\overrightarrow{OM} = X\left(\frac{1}{2}\vec{i}\right) + (\cos X)\vec{j}.$

La courbe Γ est donc la courbe représentative dans le repère $\left(O, \frac{1}{2}\vec{i}, \vec{j}\right)$ de la fonction $X \longmapsto \cos X$.

Figure 57



Commentaires : Les courbes d'équations $y=\cos x$ et $y=\cos 2x$ (dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$) ont été représentées dans leur ensemble, mais il est clair que l'on pouvait procéder à une réduction de l'intervalle d'étude de $x \longmapsto \cos 2x$ (voir exercice 56 ci-dessous).

Exercices

56. Utiliser les propriétés de parité, de périodicité et la relation :

$$\cos 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\cos 2x$$

pour montrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de la fonction $x \longmapsto \cos 2x$ à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

57. Représenter dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les fonctions :

$$x \longmapsto \sin x$$

et :

$$x \longmapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

c. Remarque générale

• On notera qu'il est plus facile de percevoir **ensemble** les représentations graphiques dans un même repère des fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto kf(x)$ que celles des fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto f(kx)$. (Ainsi, par exemple le « doublement de l'ordonnée » apparaît clairement lorsque l'on effectue la représentation graphique de $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto 2 \cos x$, alors qu'une interprétation géométrique du même type est moins évidente pour les courbes d'équations $y = \cos x$ et $y = \cos 2x$.)

• En ce qui concerne le **changement de repère,** il est possible d'utiliser directement les résultats proposés dans le paragraphe 2, page 112. Cependant la **méthode** développée dans les trois exemples précédents semble préférable : elle fait apparaître clairement le changement d'unité auquel il faut procéder.

V. Compléments

Les lois de dépendance entre deux variables ne sont pas toujours décrites par une formule explicite (ou par une fonction).
Les **tableaux de données** (ou tables de valeurs) constituent également un moyen de rendre compte (avec certains inconvénients) de la relation entre deux grandeurs variables.
Le thème choisi « le problème du QUID » permet de cerner quelles questions et quels **problèmes** peut poser un tableau de données.

Le problème du QUID

Le QUID publie depuis plusieurs années, dans un paragraphe consacré à la géographie physique, un tableau de données, intitulé **« visibilité du globe »** qui exprime en fonction de la hauteur h (en mètres) à laquelle est située un observateur au dessus du niveau de la mer (par exemple), la distance d (en km) qui sépare l'horizon de l'observateur.

Visibilité du globe. Ligne d'horizon suivant la hauteur à laquelle on se trouve. Le 1er chiffre (H) indique la hauteur au-dessus de la mer en mètres, le 2e (D) la distance en km de l'horizon de la mer.
A 36 000 km d'altitude (satellites stationnaires), on peut voir quasiment la moitié de la Terre.

H m	D km	H m	D km	H m	D km
1	3,6	*50*	25,2	*900*	107
2	5	*100*	35,7	*1 000*	112,9
3	6,2	*200*	50,5	*2 000*	159,6
4	7,1	*300*	61,8	*3 000*	195,5
5	8,9	*400*	71,4	*4 000*	225,8
10	11,3	*500*	79,8	*5 000*	252,5
20	15,9	*600*	87,4	*10 000*	357
30	19,5	*700*	94,4	*20 000*	730
40	22,6	*800*	101	*100 000*	6500

a. Analyse des données

Notons f la fonction de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ telle que $d = f(h)$. Les **renseignements** dont nous disposons pour l'instant **sur la fonction f** sont de deux types :

• **ceux donnés par le tableau,** à savoir les valeurs de f en certains points (1, 2, 3, etc.);

• **ceux donnés par l'évidence physique,** à savoir que d augmente lorsque h augmente, autrement dit, que **f est une fonction croissante de h.**

b. Problème 1

« Calculer la distance — ou tout au moins une valeur approchée — qui sépare l'horizon d'un observateur situé à une hauteur h ne figurant pas dans le tableau. »

Exemple : $h = 15$. Nous utilisons les données $h = 10$, $d = 11,3$ et $h = 20$, $d = 15,9$.

Traçons la droite passant par les points A et B (voir figure 58) et désignons par l la fonction affine associée à cette droite dans le repère initial. Nous remplaçons la fonction f par la fonction l dans l'intervalle $[10, 20]$; cela signifie que pour tout $h \in [10, 20]$, nous considérons $l(h)$ comme une valeur approchée de $f(h)$, ce qu'on écrit $f(h) \approx l(h)$.

Ce procédé porte le nom d'**interpolation linéaire**[1]

ainsi $$l(15) = \frac{1}{2}(15{,}9 + 11{,}3) = 13{,}6.$$

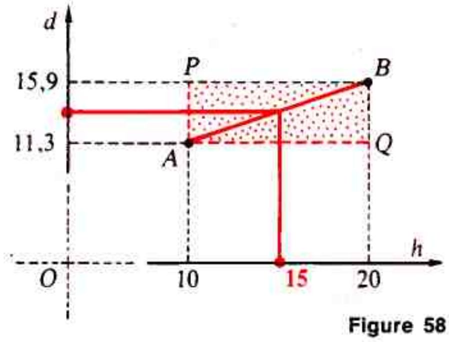


Figure 58

On a donc pour $h = 15$ m, $d \approx 13{,}6$ km.

De même, pour $h = 17$, nous avons :
$$\frac{l(17) - 11{,}3}{15{,}9 - 11{,}3} = \frac{17 - 10}{20 - 10},$$
soit :
$$l(17) = 0{,}7 \times 4{,}6 + 11{,}3$$
$$l(17) = 14{,}52.$$
Donc, pour $h = 17$, $d \approx 14{,}5$ km.

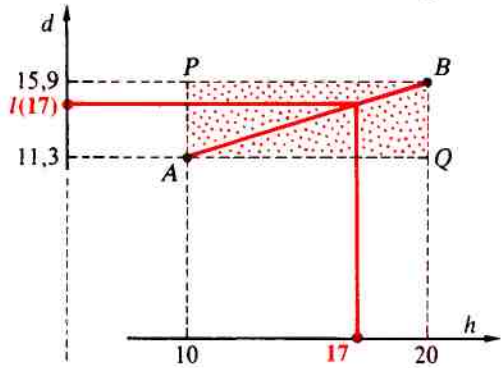


Figure 59

Exercices

58. Quel est le théorème (classique) de géométrie qui permet de justifier les égalités précédentes?

59. Calculer une valeur approchée de d pour $h = 12$.

60. Quelle propriété de la fonction f permet d'affirmer que sa courbe représentative sur l'intervalle $[10, 20]$ est intérieure au rectangle $APBQ$ (figures 58 et 59)?

c. *Problème 2*

« A partir d'une représentation graphique, faire une conjecture sur la fonction f. Effectuer un contrôle numérique de cette conjecture. »

- La nature des données nécessite deux représentations graphiques :
  . l'une globale négligeant les « petites valeurs » de h $(h \leqslant 50)$;
  . l'autre étudiant plus précisément l'intervalle $[0, 50]$.

- Sur chacun de ces graphiques nous avons procédé à une interpolation linéaire.
(Noter sur la figure 61, la position « légèrement excentrée » du point de coordonnées $(5\ ;\ 8{,}9)$.)

- Parmi les courbes et fonctions étudiées jusqu'à présent, c'est la courbe représentative d'une fonction de la forme $x \longmapsto k\sqrt{x}$ (avec k constante positive) qui semble se rapprocher le plus des courbes représentatives de la fonction f.

La conjecture sera donc : $f(h) = k\sqrt{h}$ avec k constante positive.

La relation $d = k\sqrt{h}$ étant alors équivalente à $d^2 = k^2 h$, la tabulation à partir du tableau initial de h, d^2 et $\dfrac{d^2}{h}$ peut permettre de contrôler la conjecture $d = k\sqrt{h}$ et d'obtenir une valeur approchée de k^2 et donc de k.

[1] Voir livre de Seconde pages 124 et 377.

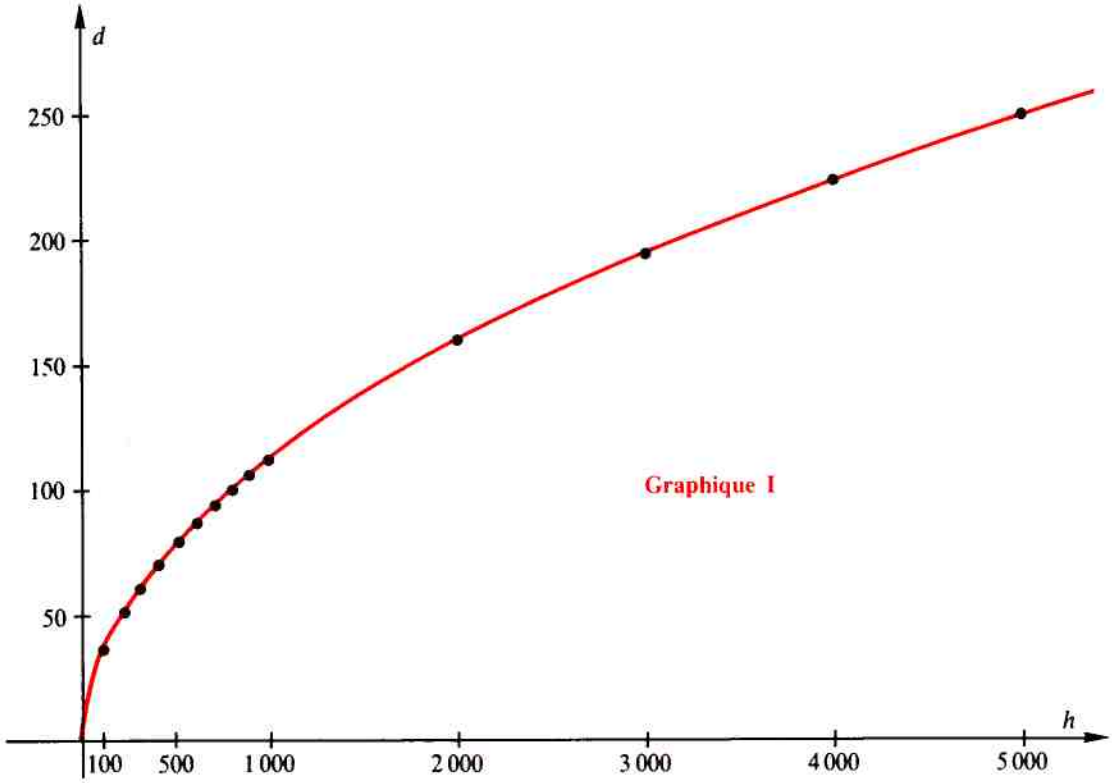


Figure 60

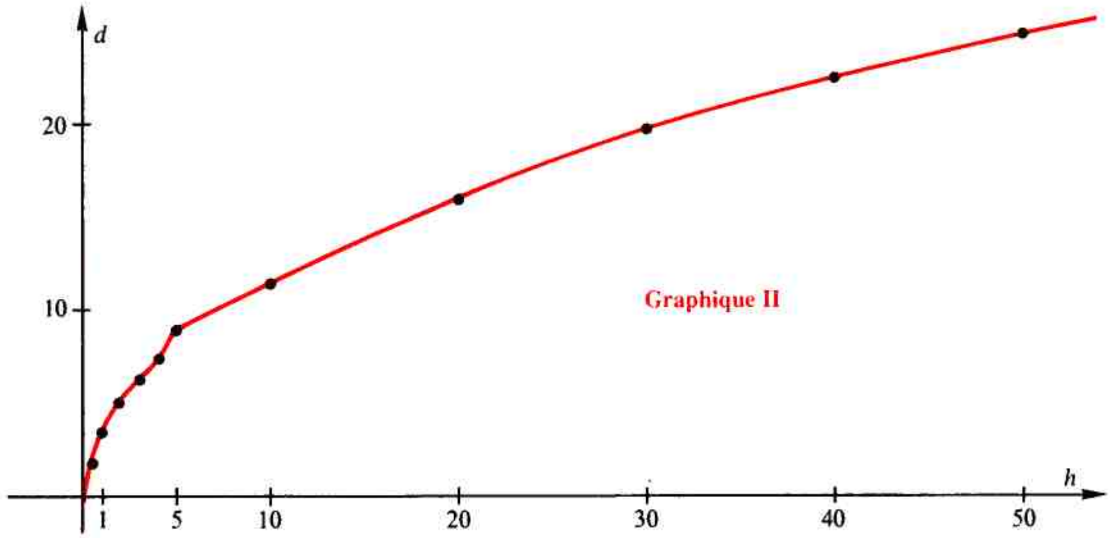


Figure 61

Exercices

61. Effectuer la tabulation suggérée ci-dessus.

62. En prenant comme valeur de k^2, le réel 12,7 calculer $f(15)$ et comparer le résultat obtenu par interpolation linéaire.

d. Problème 3

« L'unité de longueur est le km. On désigne alors par *R* le rayon de la Terre, *H* la hauteur à laquelle est situé l'observateur (au-dessus du niveau de la mer) et par *d* la distance qui le sépare de l'horizon.

1° **Exprimer d en fonction de R et H.**

2° **On prend comme valeur approchée de d le nombre $\sqrt{2RH}$. Justifier cette approximation et comparer avec la conjecture numérique obtenue précédemment.**

3° **Relever des erreurs dans le tableau proposé par le QUID et corriger ces erreurs. »**

1° La figure 62 illustre une méthode de calcul de d en fonction de H et du rayon R de la Terre.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$(R+H)^2 = R^2 + d^2,$$

d'où : $2HR + H^2 = d^2$,

soit finalement :

$$d = \sqrt{2RH + H^2}.$$

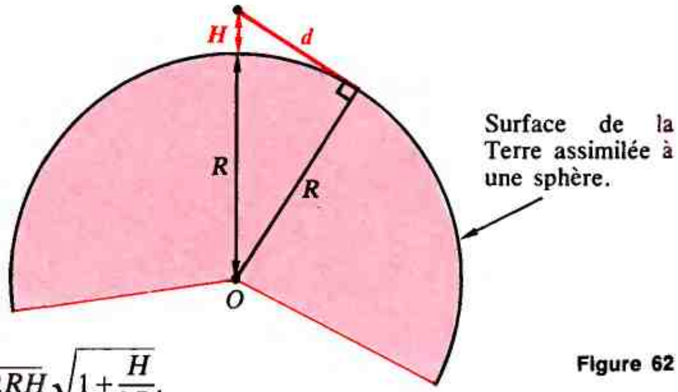


Figure 62

2° On a $d = \sqrt{2RH\left(1 + \dfrac{H^2}{2RH}\right)} = \sqrt{2RH}\sqrt{1 + \dfrac{H}{2R}}$.

Or une valeur approchée du rayon de la Terre est $R = 6\,366$ km; il en découle que lorsque $H \leqslant 1$ (autrement dit $h \leqslant 1\,000$ m) on a : $\dfrac{H}{2R} \leqslant 0{,}000\,078\,6$.

Il est alors légitime d'écrire : $d \approx \sqrt{2RH}$; autrement dit, lorsque la hauteur h est exprimée en mètres (car $H = 10^{-3}h$) : $d \approx \sqrt{2R \times 10^{-3}}\sqrt{h}$ ou encore $d \approx \sqrt{12{,}73}\sqrt{h}$.

Ainsi, par exemple pour $h = 17$, on trouve $d \approx 14{,}71$, au lieu de :

- 14,5 par interpolation linéaire (cf. page 126),
- 14,69 par l'estimation numérique[1] $d^2 = k^2h$, où $k = 12{,}7$.

3° Il est laissé à titre d'exercice le contrôle des valeurs de d proposées dans le tableau initial... Nous reviendrons cependant sur le point qui semble aberrant dans le graphique II (figure 61. page 127) et qui correspond dans le tableau à $h = 5$ m : $d = 8{,}9$ km.
En fait, pour $h = 5$, on a : $d \approx 7{,}98$ km.

e. *Commentaires*

1. Relevons certaines **questions** que soulèvent la donnée d'un tableau de valeurs :

- **Calcul approché de valeurs ne figurant pas dans le tableau :** étude des propriétés de la fonction; méthode d'approximation, interpolation linéaire notamment...
- **Recherche d'une loi décrivant les liaisons entre les variables :** conjecture d'origine graphique; contrôle numérique; tabulation...
- **Obtention d'une formule mathématique** précisant la relation de dépendance entre les variables. Il faut noter, cependant, que ceci n'est pas toujours possible.

2. L'estimation de l'**erreur commise** en remplaçant $d = \sqrt{2RH + H^2}$ par $\sqrt{2RH}$ sera abordée dans le chapitre 4, à propos de l'**approximation de fonction.**

3. Lorsque $h = 5$ m , une valeur approchée (correcte) de la distance de l'horizon est **8 km** et non 8,9 km comme l'indique le tableau du QUID.
L'erreur relative commise dans ce cas est supérieure à 10 % ce qui est rarement acceptable et explique pourquoi la courbe représentative de f présentait en ce point (graphique II) une inattendue protubérance...

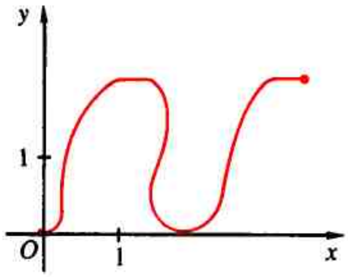
---

[1] Il est normal que le résultat obtenu par tabulation $a \approx \sqrt{12{,}7}\sqrt{h}$ fournisse une approximation convenable de $\sqrt{12{,}73}\sqrt{h}$.

EXERCICES

Vrai-Faux

1. La figure ci-contre ne représente pas une fonction.



2. La séquence x $\boxed{+}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ permet de calculer $f(x)=(x+x^2)^2$.

3. Les fonctions :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x-1} \quad \text{et} \quad x \longmapsto g(x)=\frac{1}{f(x)}$$

ont même ensemble de définition.

4. $x \longmapsto (x+\sqrt{x}+\sqrt{-x})$ n'est définie pour aucun réel.

5. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto -x+3$, f est une bijection et $f^{-1}=f$.

6. $x \longmapsto x^2-x-1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

7. Les fonctions :

$$f : x \longmapsto 2x+3 \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto 3x+6$$

vérifient $g \circ f = f \circ g$.

8. Les trois fonctions :

$$x \longmapsto -x\ , \quad x \longmapsto -\frac{1}{x}\ , \quad x \longmapsto 1-x$$

vérifient $(f \circ f)(x)=x$, pour tout réel x de l'ensemble de définition.

9. Une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas bijective.

10. Si $f(0)=1$, f n'est pas impaire.

11. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$ est paire.

12. Si f est paire, $x \longmapsto f(-x)$ est aussi paire.

13. Si f a pour période T, $x \longmapsto f(2x)$ a pour période $2T$.

14. Si, pour tout réel x, $f(x)+g(-x)=0$, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

15. Les courbes d'équations $y=f(x)$ et $y=f(3-x)$ sont translatées l'une de l'autre.

16. Les courbes d'équations $y=\dfrac{1}{x}$ et $y=-\dfrac{1}{x}$ sont symétriques par rapport à (Ox) et à (Oy).

Applications

1. Les relations de dépendance suivantes, entre les variables x et y, permettent-elles de définir une fonction numérique $x \longmapsto y=f(x)$?

a) $xy=4$; *c*) $xy^2-1=0$;
b) $x^2y+1=0$; *d*) $x+y+xy=0$.

2. Soit a un nombre réel. Pour quelles valeurs de a le procédé

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2-3 & \text{pour } x \geqslant 4 \\ 3x+a^2 & \text{pour } x \leqslant 4 \end{cases}$$

définit-il une fonction numérique?

3. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto \frac{1}{2-5x}\ ;\quad f_2 : x \longmapsto \frac{x}{1-x^2}\ ;$$

$$f_3 : x \longmapsto \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}};\quad f_4 : x \longmapsto \frac{1}{\sin x}\ .$$

4. Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont égales à la fonction φ définie par $\varphi(x)=|x-2|$:

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}\ ;\quad g(x)=\sqrt{\frac{(x-2)^2}{x-2}}\ ;$$

$$h(x)=\frac{|6x-12|}{6}\quad ;\quad j(x)=\left|\frac{x^2+x-6}{x+3}\right|\ .$$

5. Quelles sont les fonctions définies par les séquences-machine suivantes (on précisera leur ensemble de définition)?

a) x $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{1/x}$

b) x $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$

c) x $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ 1 $\boxed{-}$ 3 $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

6. Pour deux quelconques des fonctions suivantes, donner l'**équation aux abscisses** des points d'intersection des courbes associées et déterminer les coordonnées de ces points.

$$f_1 : x \longmapsto 2x+1 \ ; \ f_2 : x \longmapsto 3x^2 \ ;$$
$$f_3 : x \longmapsto \frac{3}{x} \ ; \ f_4 : x \longmapsto -x^3 \ .$$

7. Parmi les fonctions suivantes, préciser celles qui sont des **applications** :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto |x| \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto x-\sqrt{x}$$

$$h : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \sqrt{x-2} \qquad j : [0, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}, \ x \longmapsto \frac{1}{x-1}.$$

8. La fonction définie par la séquence-machine suivante est-elle une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

x $\boxed{+}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

9. Rechercher parmi les fonctions suivantes celles qui définissent une **bijection** :

a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1-x$; *b*) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2+1$;

c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3-1$; *d*) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

e) $f_5 : \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto \sqrt{-x}$; *f*) $f_6 : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, $x \longmapsto 1-x$;

10. Définir graphiquement une bijection de A sur B dans les cas suivants :

a) $A =]1; 3]$ et $B = [2; 4[$;

b) $A = [0; 1] \cup]2, 4]$ et $B = [0, 6]$.

11. On reprend les données de l'exercice **9.** Exprimer, lorsque cela est possible, les bijections réciproques des fonctions proposées.

12. Déterminer les ensembles de définition des composées des fonctions suivantes prises deux à deux :

$$f_1(x) = \sqrt{x} \ ; \ f_2(x) = \frac{1}{x-1} \ ; \ f_3(x) = \frac{1}{x} \ .$$

13. Déterminer $f \circ f \circ f$ et son ensemble de définition pour $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$.

Étudier la parité des fonctions suivantes (exercices **14** *à* **16**) :

14. *a*) $x \longmapsto x^2-4$; *b*) $x \longmapsto 3x+1$;

c) $x \longmapsto -7x^4-\dfrac{x^2}{2}+6$; *d*) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3-3x}$;

e) $x \longmapsto |x-1|+|x+1|$;

f) $x \longmapsto |x-1|-|x+1|$.

15. *a*) $x \longmapsto \dfrac{1}{x}+\sin x+x^3$; *b*) $x \longmapsto \dfrac{1}{2-x^2}$;

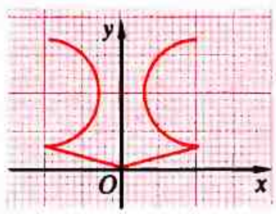
c) $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1}$; *d*) $x \longmapsto \dfrac{1}{2-x}$.

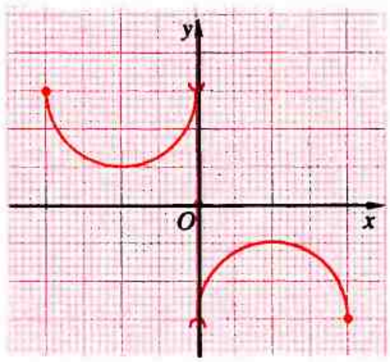
16. *a*) $x \longmapsto |\sin x|+\cos x$;

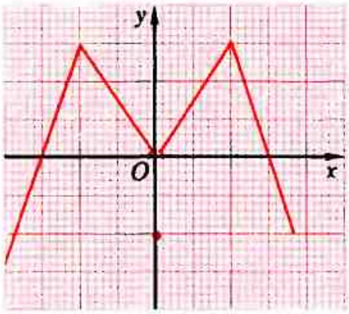
b) $x \longmapsto \sin x^2+\sin 2x$;

c) $x \longmapsto \dfrac{\sin x+x^3}{\cos x}$; *d*) $x \longmapsto \dfrac{\cos x+1}{1-\cos x}$.

17. Les schémas suivants, correspondent-ils à une fonction paire? impaire?







18. Indiquer, en justifiant, une **période** des fonctions suivantes (s'il en existe une) :
(E est la fonction partie entière).

a) $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$; *b*) $g(x)=-\sin(8x)$;

c) $h(x)=2x-E(x)$; *d*) $i(x)=\sin(x^2)$.

19. Même exercice pour :

a) $f(x)=\frac{1}{1+\sin x}$; *b*) $g(x)=\sin x+\sin(2x)$;

c) $h(x)=x^2-E(x^2)$; *d*) $i(x)=\sin x+\cos^2 x$.

20. En repère orthogonal la droite Δ d'équation $x=2$ est-elle **axe de symétrie** de la courbe représentative de f, dans les cas suivants?

a) $f(x)=(x-2)^2$; *b*) $f(x)=\frac{1}{x-2}$;

c) $f(x)=2+|x-2|$; *d*) $f(x)=\sqrt{x-2}$.

21. Le point $\Omega(3;2)$ est-il **centre de symétrie** des courbes dont les équations sont les suivantes?

a) $y=2+\frac{1}{x-3}$; *b*) $y=2(x-3)^2$;

c) $y=\frac{3-x}{2}$; *d*) $y=\frac{1}{(x-3)^3}+2$.

22. Donner l'équation de la courbe dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(3;2)$ sachant que l'équation dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est :

a) $y=2(x-3)^2+2$; *b*) $y=\frac{1}{x-3}+2$;

c) $y=\sqrt{3-x}$; *c*) $y=\frac{2x+1}{x-3}$.

23. Déterminer l'axe ou le centre de symétrie de la courbe d'équation donnée :

a) $y=x(x-4)$; *b*) $y=|x|+|x-6|$;

c) $y=\sqrt{x}+\sqrt{6-x}$; *d*) $y=|x|-|x-6|$;

e) $y=1+\frac{1}{1+x}$; *f*) $y=\sin^2(x)+2$.

24. Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=|x+1|+|x+5|$ et montrer qu'elle admet un axe de symétrie :

a) par un changement de repère,

b) en établissant une relation fonctionnelle (cf. théorème, page 121).

25. Quelle translation fait passer de la courbe $\mathcal{C}_f$ à la courbe $\mathcal{C}_g$?

a) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

b) $f(x)=\frac{1}{x}+1$, $g(x)=\frac{1}{x-2}-4$.

26. Dans chaque cas, représenter graphiquement la fonction :

a) $x \longmapsto (x-4)^2+3$; *b*) $x \longmapsto \sqrt{x-4}+3$;

c) $x \longmapsto \frac{1}{x-4}+3$.

27. Pour chaque cas, donner les équations des courbes symétriques par rapport : à (Oy), à (Ox), à O de chacune des courbes d'équations :

a) $y=2x^2+1$; *b*) $y=\sqrt{2-x}$;

c) $y=1-\frac{1}{x}$; *d*) $y=\sin x+x$.

28. Représenter graphiquement :

a) $x \longmapsto \frac{1}{|x|}$; *b*) $x \longmapsto |x^2-1|$;

c) $x \longmapsto \sqrt{|x|}$; *d*) $x \longmapsto |\sqrt{x}|$.

29. Construire dans le même repère les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par :

$$f_1(x)=\sqrt{1-x}\ ,\quad f_2(x)=\sqrt{1+x}\ ,$$
$$f_3(x)=-\sqrt{1-x}\ ,\quad f_4(x)=-\sqrt{1+x}\ .$$

Exercices

• Ensembles de définition; égalités de fonctions

Dans les exercices **30** *à* **35**, *déterminer l'ensemble de définition de chaque fonction.*

30. *a*) $f(x)=\frac{4}{6x^2+5x-4}$; *b*) $g(x)=\sqrt{6x^2+5x-4}$;

c) $h(x)=\sqrt{2x-1}\times\sqrt{3x+4}$.

31. *a*) $f(x)=\frac{5x-2}{3x^2+2x+5}$; *b*) $g(x)=\sqrt{3x^2+2x+5}$.

32. *a*) $f(x)=\dfrac{1}{-3x^2+x-1}$; *b*) $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{f(x)}}$.

33. *a*) $f(x)=\dfrac{1}{1+\sin x}$; *b*) $g(x)=\sqrt{\sin x}$;

c) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$.

34. *a*) $f(x)=\dfrac{1}{1-2\cos x}$; *b*) $g(x)=\sqrt{1-2\cos x}$.

35. *a*) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}$; *b*) $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}$.

36. Parmi les fonctions suivantes, préciser lesquelles sont égales à la fonction φ, avec $\varphi(x)=\dfrac{\sin^2 x+1}{x}$:

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin^2 x}{x}$; $g(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x}+\dfrac{x-1}{x^2-x}$;

$h(x)=\dfrac{2\sin^2 x+\cos^2 x}{x}$; $j(x)=\dfrac{2x-x\cos^2 x}{x^2}$.

37. Déterminer les fonctions définies par les **séquences-machine** ci-dessous, puis préciser leurs ensembles de définition :

a) x $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\times}$ 7 $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{+}$ 2 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

b) x $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{+}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{+}$ 4 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{-}$ 4 $\boxed{=}$

c) x $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ MR $\boxed{=}$

d) x $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 12 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{+}$ 5 $\boxed{=}$

38. Comparer les fonctions définies par les trois séquences suivantes :

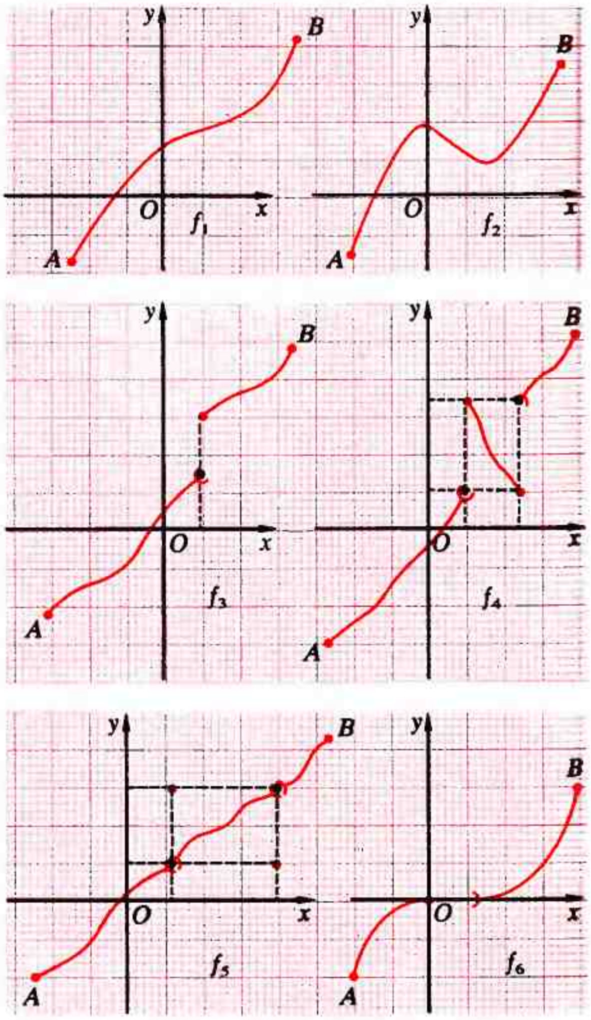
a) x $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$

b) x $\boxed{\text{Min}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{MR}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$

c) x $\boxed{+}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

• Bijections, fonctions composées

39. Expliquer pourquoi, chaque fonction représentée ci-dessous est ou n'est pas une **bijection** de $[x_A, x_B]$ sur $[y_A, y_B]$ $\big[(x_A, y_A)$ (respectivement (x_B, y_B)) sont les coordonnées de A (respectivement de B)$\big]$.



Dans les exercices **40** *et* **41**, *démontrer que les fonctions proposées sont des bijections et déterminer la bijection réciproque.*

40. $f : [4;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_-$

$x \longmapsto -\sqrt{x-4}$

$g : \mathbb{R}_- \longrightarrow]-\infty; 5]$

$x \longmapsto -x^2+5$

41. *a*) $f : [2, +\infty[\longrightarrow [3, +\infty[$

$x \longmapsto 3+\sqrt{x-2}$

b) $g : \mathbb{R}-\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{1\}$

$x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1}$

42. Soit f la fonction définie sur $[0, 3]$ par :
$$\begin{cases} f(x)=3-x & \text{pour} \quad 1<x<2 \\ f(x)=x & \text{pour} \quad x \notin]1, 2[. \end{cases}$$
Utiliser une représentation graphique pour montrer que f réalise une bijection de $[0, 3]$ sur lui-même.

43. Soit $[a, b]$ et $[c, d]$ deux intervalles ($a<b$ et $c<d$). Déterminer, par leur représentation graphique, trois bijections (au moins) de $[a, b]$ sur $[c, d]$.

44. Soit f la fonction $x \longmapsto \dfrac{4x-7}{3x+4}$.
En résolvant l'équation $f(x)=m$ (m réel), montrer qu'il existe x_0 et y_0 tels que f réalise une bijection entre $\mathbb{R}-\{x_0\}$ et $\mathbb{R}-\{y_0\}$.

45. Déterminer les ensembles de définition des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ dans les cas suivants :
a) $f(x)=\sqrt{x-1}$; $g(x)=x^2-x+2$;
b) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$; $g(x)=x^2+x$.

46. Quel est l'ensemble de définition de $f \circ f$ dans chacun des cas suivants :
a) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$; *b*) $f(x)=\sqrt{1-x}$;
c) $f(x)=1-\sqrt{x}$; *d*) $f(x)=1-\dfrac{1}{2-x}$?

47. Écrire f sous la forme d'une composée de deux (ou plusieurs) fonctions usuelles et en déduire une séquence-machine permettant le calcul de $f(x)$:
a) $f(x)=(5x+1)^2+2$; *b*) $f(x)=2+\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$;
c) $f(x)=\left(1-\dfrac{3}{x+1}\right)^2$; *d*) $f(x)=1-\dfrac{1}{(1+\sqrt{x-3})^2}$.

48. Soit f et g deux fonctions affines telles que :
$$f(x)=ax+b \; ; \; g(x)=cx+d .$$
1° Trouver une relation entre a, b, c et d caractérisant la propriété $f \circ g = g \circ f$.
2° Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites d'équations
$$y=ax+b \quad \text{et} \quad y=cx+d .$$
On désigne par Δ la droite d'équation $y=x$.
Montrer que $f \circ g = g \circ f$ équivaut à :
(1) $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}'$ est égale à Δ,
soit
(2) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles à Δ,
soit
(3) $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et Δ sont concourantes.

49. Dans la relation $y=\dfrac{3x-1}{7x+4}=f(x)$, on échange x et y. On écrit alors la relation obtenue sous la forme $y=g(x)$.
Quel est le lien entre f et g?
Exprimer $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.

• Parité. Périodicité

Étudier la parité des fonctions proposées dans les exercices **50** *à* **53.**

50. *a*) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x=0 \end{cases}$ (α réel donné).

51. *a*) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{pour } x \neq 0 \\ \alpha & \text{pour } x=0. \end{cases}$ (α réel donné).

b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ \alpha & \text{pour } x=0 \end{cases}$ (α réel donné).

52. *a*) $f(x)=\sqrt{x^3-x}$;
b) $g(x)=|ax+b| \times |ax-b|$ (a, b réels donnés).

53. *a*) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{5-x^2}}$;

b) $g(x)=\varphi\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$ avec $\varphi(x)=2x^2-10x+1$.

54. Composée et parité
1° Montrer que les fonctions f_1, f_2, f_3 sont des fonctions paires :
$$f_1(x)=\frac{3|x|-1}{2|x|-1} \; ; \; f_2(x)=\frac{3x^2-1}{2x^2-1} \; ;$$
$$f_3(x)=\frac{3\cos x-1}{2\cos x-1} .$$
2° Soit f une fonction quelconque. Montrer que les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par :
$$f_1(x)=f(|x|) , \quad f_2(x)=f(x^2) \quad \text{et} \quad f_3(x)=f(\cos x)$$
sont des fonctions paires.
3° Plus généralement montrer que, si u est une fonction paire, la fonction $x \longmapsto f(u(x))$ est également paire.
(Autrement dit : $f \circ u$ est paire dès que u est paire.)

4° Montrer que les fonctions suivantes sont paires :

$$f_1 : x \longmapsto \left|\sin^2 x - \frac{1}{2}\right| - \frac{\sin^2 x}{4} \ ;$$

$$f_2 : x \longmapsto \sqrt{\frac{x^2-4}{1+x^2+x^4}} \ ;$$

$$f_3 : x \longmapsto \frac{7(x^2-|x|)-2}{3-x^2+|x|}.$$

5° Soit φ une fonction quelconque et f la fonction définie par :
$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{si } x \geqslant 0\\ \varphi(-x) & \text{si } x<0\end{cases}$$

Étudier la parité de f.

Application : Représenter graphiquement la fonction
$$x \longmapsto \begin{cases}x(x-1) & \text{pour } x\geqslant 0\\ x(x+1) & \text{pour } x<0\end{cases}$$

Dans les exercices **55** *à* **58**, *déterminer une période T de la fonction f (on choisira — si possible — T positive et minimum).*

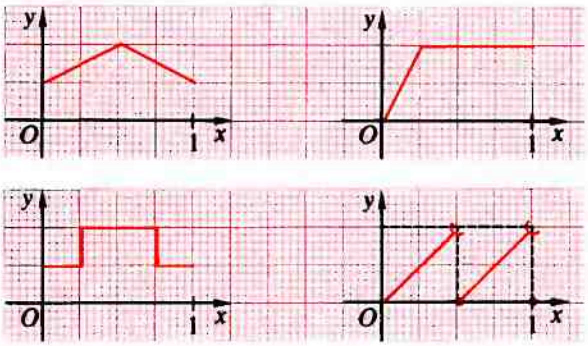
55. *a)* $f(x)=\sin\left(\frac{x}{3}\right)$; *b)* $f(x)=\dfrac{1}{\tan\frac{x}{5}}$.

56. *a)* $f(x)=\cos\left(\frac{5}{7}x\right)$; *b)* $f(x)=\sin 2x+\cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

57. *a)* $f(x)=2x-E(2x)$; *b)* $f(x)=\sin(\sqrt{2}x)$.

58. *a)* $f(x)=3E\left(\frac{x}{3}\right)-x$; *b)* $f(x)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

59. Existe-t-il une fonction périodique, de période 1, définie sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative sur [0, 1] soit :



60. Soit φ la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x-E(x)}$.
Déterminer $\mathcal{D}_\varphi$ et étudier sa périodicité.
Donner une représentation graphique de φ.

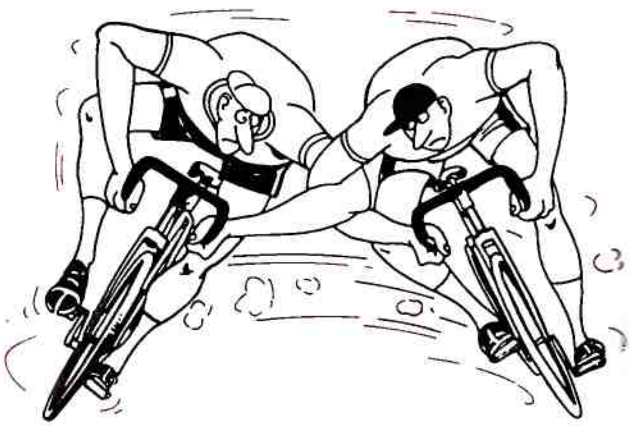
61. Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$.

1° Montrer que pour toute fonction g, $g \circ f$ est périodique.

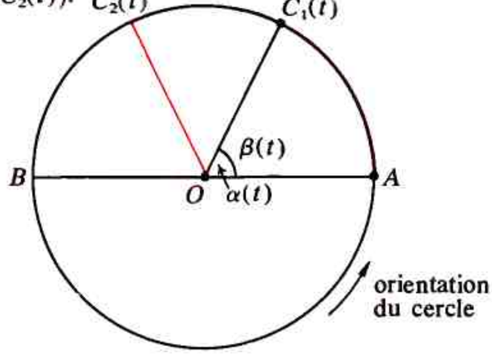
2° Montrer que, pour tous réels a et b la fonction $x \longmapsto f(ax+b)$ est périodique.

3° Donner un exemple de fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que $x \longmapsto (f \circ g)(x)$ ne soit pas périodique.

62. « Le tour de piste » : 1^re^ étape
(D'après une idée de *« Jeux et stratégies »*, n° 21.)



Une piste circulaire est parcourue par deux cyclistes C_1 et C_2 qui roulent en sens inverses, à vitesse constante v_1 et v_2. Ils partent au même moment de deux points A et B diamétralement opposés.
Est-il possible que les cyclistes se croisent en A? Au bout de combien de tours parcourus par l'un d'eux se croisent-ils?
Les positions des cyclistes à l'instant t sont repérées par les mesures en radians $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ des angles $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC_1(t)}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC_2(t)}})$.



On désigne par T_1 et T_2 le temps mis par les cyclistes C_1 et C_2 pour effectuer un tour complet.

1° Comparer les rapports $\dfrac{T_1}{T_2}$ et $\dfrac{v_1}{v_2}$.

2° Montrer que $\alpha(t+T_1)=\alpha(t)$ et que $\beta(t+T_2)=\beta(t)$ pour $t \geqslant 0$.

3° On suppose que $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{6}{5}$. Représenter les fonctions α et β. (On prendra 5 carreaux pour T_1.)
Interpréter le croisement des cyclistes en A sur le graphique, et répondre aux questions posées.

• Éléments de symétrie

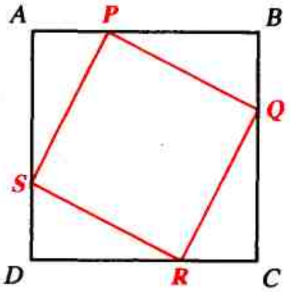
63. A tout point M du plan de coordonnées (a, b), on associe la courbe $\mathcal{T}$ d'équation $y=ax^2+bx+1$.

1° A quelle condition $\mathcal{T}$ est-elle une parabole?

2° Montrer que les paraboles $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, ainsi associés à deux points M et M' du plan, ont même axe de symétrie si et seulement si les points O, M et M' sont alignés.

64. On considère un carré $ABCD$ de côté a (figure ci-contre). A tout réel x de $[0, a]$ on fait correspondre un carré $PQRS$ tel que :

$AP = BQ = CR = DS = x$.



1° Exprimer l'aire $f(x)$ du carré $PQRS$.

2° Montrer que $f(x) = f(a - x)$.

Quel argument géométrique permet de retrouver cette égalité?

3° En déduire un élément de symétrie pour la courbe représentative de la fonction f.

65. Construire la courbe d'équation :

$$y = |(x-1)(x+3)| + 1$$

et montrer qu'elle admet un axe de symétrie.

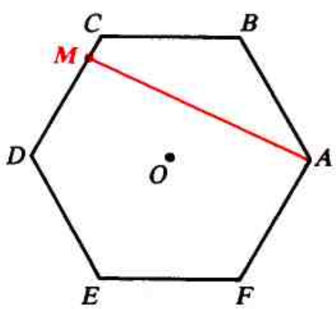
66. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x-2}{1-x}$ dont on note $\mathscr{H}$ la courbe représentative.
Soit $I(x_I, y_I)$ un **centre de symétrie éventuel** pour $\mathscr{H}$.

1° Conjecturer x_I d'après l'ensemble de définition de f.

2° Détermination de y_I.
a) **Méthode 1 :** En résolvant l'équation $f(x) = m$ (m réel donné), montrer que f prend toutes les valeurs sauf une et en déduire la valeur éventuelle de y_I.
Effectuer le changement d'origine correspondant aux valeurs trouvées et démontrer que I est bien centre de symétrie de $\mathscr{H}$.
b) **Méthode 2 :** Calculer $f(x_I + x)$ pour deux valeurs opposées de x et en déduire la valeur éventuelle de y_I. Vérifier que l'on retrouve la valeur précédente.
c) **Méthode 3 :** Utiliser une transformation d'écriture et un changement d'origine $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ conduisant pour $\mathscr{H}$ à une équation de la forme $Y = f_1(X)$, où f_1 est une fonction impaire.

3° Représenter f et f_1 dans le même repère.

67. Un point M parcourt dans le sens trigonométrique le bord d'un hexagone régulier de côté 2. On désigne par x la longueur du trajet de A à M $(0 \leqslant x \leqslant 12)$ et par $S(x)$ l'aire du domaine corresrespondant (en rosé sur la figure).



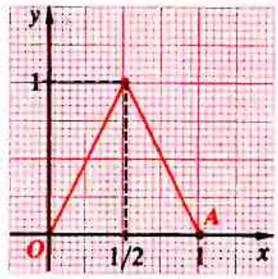
1° A l'aide d'un argument géométrique, montrer que la fonction :

$$[0, 12] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto S(x) + S(12 - x)$$

est constante. Préciser la valeur de cette constante. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction S?

2° Calculer $S(x)$ pour x appartenant à $[0, 6]$ et représenter graphiquement la fonction S.

68. Compléter le tracé de la courbe représentative Γ de la fonction f sachant que :

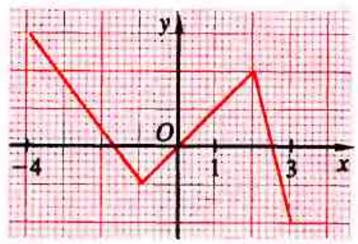


- sur $[0, 1]$, la courbe représentative est donnée par la figure ci-contre;
- les points O et $A(1, 0)$ sont centres de symétrie de Γ.

Étudier la périodicité de f.

• Fonctions associées; transformations et changement de repère

69. La fonction f définie sur $[-4, 3]$ est représentée graphiquement ci-dessous.



Pour chacune des fonctions suivantes :

- déterminer son ensemble de définition,
- la représenter graphiquement.

a) $f_1(x) = f(-x)$; *b*) $f_2(x) = -f(x)$;
c) $f_3(x) = -f(-x)$; *d*) $f_4(x) = |f(x)|$;
e) $f_5(x) = f(2x)$; *f*) $f_6(x) = 3f(x)$;
g) $f_7(x) = f(x + 2)$; *h*) $f_8(x) = f(2 - x)$.

Dans les exercices **70** *à* **72** *construire la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et déterminer le point Ω, de façon que dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ $\mathcal{C}$ soit la courbe représentative d'une fonction de référence*[1].

70. *a)* $f(x)=-1+\sqrt{4x-3}$; *b)* $f(x)=\frac{1}{2}-\sin x$.

71. *a)* $f(x)=(x-2)^2-2x+1$;

b) $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+2$.

72. *a)* $f(x)=2-3(1-x)^3$;

b) $f(x)=1-2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

73. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction donnée f.

1° Expliquer la construction, à partir de $\mathcal{C}$, des courbes d'équations :

a) $y=-f(x)$; *b)* $y=f(-x)$; *c)* $y=-f(-x)$;
d) $y=f(|x|)$; *e)* $y=|f(x)|$; *f)* $y=-|f(x)|$.

2° **Application :** Représenter les courbes ci-dessus lorsque :

a) $f(x)=\sqrt{x}$; *b)* $f(x)=\frac{x}{2}+3$;

c) $f(x)=x^2$; *d)* $f(x)=\frac{1}{x}$.

3° Quelles courbes sont confondues lorsque f est paire? lorsque f est impaire?

Dans les exercices **74** *à* **76**, *effectuer la représentation graphique de la fonction f.*

74. *a)* $f(x)=|x^2-x-1|$; *b)* $f(x)=\sin(|x|)$.

75. *a)* $f(x)=|1-\sqrt{3-x}|$; *b)* $f(x)=-|\sin x|$.

76. *a)* $f(x)=\left|\frac{2x+1}{x-3}\right|$; *b)* $f(x)=-|(x-1)(x-3)|$.

77. Déterminer dans chaque cas les équations des courbes symétriques de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport au point Ω ou à la droite Δ :

a) $\mathcal{C} : y=x^2+x+1$ et $\Omega(2,-1)$;
b) $\mathcal{C} : y=\sqrt{1+x}+\sqrt{4-x}$ et $\Delta : x=4$.

[1] Rappel : Les fonctions de référence sont les fonctions :

$x \longmapsto ax^2$; $x \longmapsto \frac{a}{x}$;
$x \longmapsto a\sqrt{x}$; $x \longmapsto ax^3$ $(a \in \mathbb{R}^*)$;
$x \longmapsto \cos x$; $x \longmapsto \sin x$.

78. Même exercice que précédemment avec :

a) $\mathcal{C} : y=-x^2+x$ et $\Delta : y=1$;

b) $\mathcal{C} : y=\frac{x+3}{2x-1}$ et $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

79. ($E(x)$ désigne la partie entière de x.)
Montrer que la courbe d'équation $y=x+E(x)$ est invariante par la translation de vecteur $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$.

80. Déterminer une translation qui laisse invariante la courbe d'équation $y=x-\cos x$.

81. Soit T la transformation définie analytiquement par $\begin{cases} x'=x \\ y'=2y \end{cases}$ (cf. page 122).

On désigne par $\mathcal{C}'$ l'image T du cercle de centre O et de rayon 1.

1° Montrer que l'équation de $\mathcal{C}'$ est $4x^2+y^2=4$.

2° Montrer que l'origine et les axes de coordonnées sont des éléments de symétrie de $\mathcal{C}'$.

3° Construire $\mathcal{C}'$ « point par point ».

Note : La courbe $\mathcal{C}'$ est une ellipse.

• Équations, inéquations : résolutions graphiques

Dans les exercices **82** *et* **83**, *représenter sur un même graphique les fonctions f et g en précisant les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives.*

82. *a)* $f(x)=2x^2+4x-3$; $g(x)=x^2+2x+5$.

b) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$; $g(x)=\frac{2x+1}{x+2}$.

83. *a)* $f(x)=\frac{x+3}{x+2}$; $g(x)=\frac{2x+1}{x-3}$.

b) $f(x)=2x^2+x+3$; $g(x)=x^2-2x-1$.

84. Deux villes A et B sont distantes de 15 km.
Un piéton part de A à 10 h et marche vers la ville B à la vitesse de 6 km/h. Il se repose pendant 10 min tous les 3 km. Un cycliste part de B à 10 h 10 et roule dans la direction de A à 15 km/h.
Victime d'une crevaison à 10 h 30 min, 15 min lui sont nécessaires pour réparer. Il termine alors le parcours à la vitesse de 20 km/h.

1° Établir les graphiques des mouvements du piéton et du cycliste.

2° Déterminer l'heure de la rencontre et la distance du point de rencontre à la ville A.

85. Représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x)=|x+1|-3\left|1-\frac{x}{2}\right|.$$

1° Utiliser le schéma obtenu pour donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ lorsque k décrit $\mathbb{R}$.

2° Indiquer selon la valeur du réel m le nombre de solutions des équations suivantes :

a) $f(x)=\frac{x}{3}+m$; b) $f(x)=-\frac{x}{2}+m$.

3° Même question avec les équations suivantes :

a) $f(x)=mx$; b) $f(x)=mx+3$.

86. Construire dans un même repère orthonormé les représentations graphiques des fonctions :

$x \longmapsto x^2-4x+3$ et $x \longmapsto |x^2-4x+3|$.

Montrer qu'elles admettent un axe de symétrie.
Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$2|x^2-4x+3|-1 \leqslant 0 .$$

87. Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$\left|1+\frac{2x+1}{x-1}\right| \leqslant 4 .$$

88. Le problème des bacs.

(D'après *«Les Casse-tête mathématiques de Sam Loyd»*. Martin GARDNER. Dunod.)

Quelle est la largeur du fleuve?

Deux bacs partent en même temps des deux rives opposées de l'Hudson, l'un allant de Jersey City à New York, l'autre de New York à Jersey City. L'un étant plus rapide, ils se croisent à 720 mètres de la rive la plus proche.
Une fois arrivés à leur destination, les deux bateaux restent dix minutes à quai pour débarquer et prendre des passagers, puis ils repartent pour leur point de départ et se croisent à nouveau à 400 mètres de la rive la plus proche.
Quelle est la largeur exacte du fleuve?

89. 1° Montrer que l'équation $\frac{1}{2}x^3+x-1=0$ et l'inéquation $\frac{1}{2}x^3+x \leqslant 1$ peuvent se résoudre graphiquement en utilisant l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$ et une parabole.

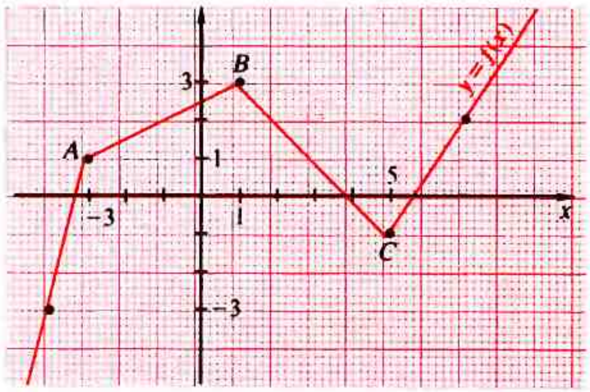
2° Utiliser une représentation graphique pour résoudre les équations et inéquations suivantes :

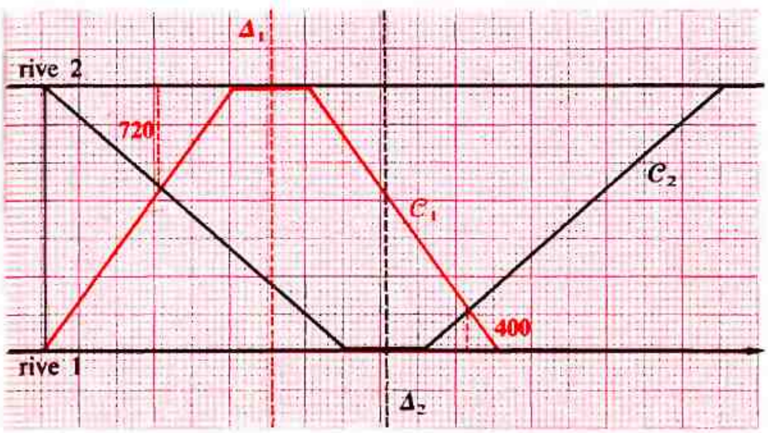
a) $-x^3+x+4=0$; b) $x^3>x+4$;
c) $x^3-3x^2-4x-1=0$; d) $x^3-3x^2-4x \geqslant 1$;
e) $x(x+1)(x+2)=2$; f) $x(x+1)(x+2)<2$.

Problèmes

90. Affines par intervalles

1° La figure ci-dessous représente une **fonction f**. Expliciter, $f(x)$ en distinguant quatre intervalles.





Indications : On représentera les trajectoires des bateaux par une schéma analogue à celui de la figure ci-dessous.

$\mathcal{C}_1$: trajectoire du bateau le plus rapide.
$\mathcal{C}_2$: trajectoire de l'autre bateau.

2° Représenter graphiquement sur le même schéma, la fonction f et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par.

$$g(x)=\begin{cases}-x-5 & \text{pour } x\leqslant -3\\ x+1 & \text{pour } -3<x\leqslant 3\\ 4 & \text{pour } 3<x\leqslant 6\\ -2x+6 & \text{pour } x>6.\end{cases}$$

3° Résoudre, en s'aidant de la représentation graphique, l'équation $f(x)=g(x)$.

4° Résoudre de même :

a) $f(x)=0$; *b*) $f(x)=2$; *c*) $g(x)=0$;
d) $g(x)=2$; *e*) $g(x)=-400$; *f*) $g(x)=4$.

Donner en fonction de k le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$.

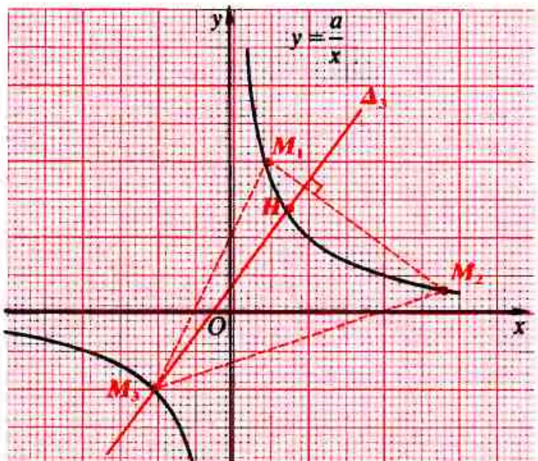
5° *a*) Résoudre, toujours avec l'appui du schéma, l'équation : $f(x)=-x+1$.

b) Indiquer en fonction du réel k le nombre de solutions de $f(x)=\dfrac{x}{2}+k$.

6° Résoudre les inéquations suivantes, avec l'aide du schéma :

a) $f(x)>1$; *b*) $g(x)\leqslant\dfrac{x}{2}-1$; *c*) $f(x)\geqslant g(x)$.

91. Orthocentre



(Le plan est muni d'un repère orthonormé.)
Il s'agit de montrer que, si trois points M_1, M_2, M_3 sont situés sur une hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y=\dfrac{a}{x}$

l'orthocentre H du triangle $M_1M_2M_3$ est un point de $\mathcal{H}$.

1° On désigne par x_1, x_2, x_3 les abscisses de M_1, M_2, M_3. Déterminer l'équation de la hauteur Δ_3 issue de M_3; en déduire les coordonnées du point H commun à Δ_3 et à $\mathcal{H}$.

2° Montrer, sans calculs, que l'expression de x_H et y_H permet d'affirmer que H est l'orthocentre du triangle $M_1M_2M_3$.

92. Droites tournant autour d'un point

I — Avec une parabole

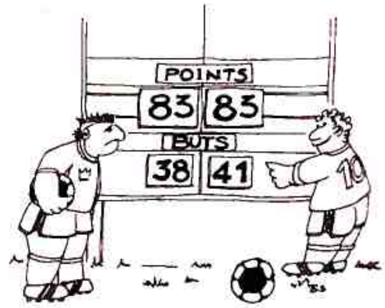
Quel est le lieu du milieu I du segment $[M, N]$ découpé sur une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=ax^2$ par une droite Δ tournant autour d'un point fixe A?
On pourra distinguer plusieurs cas selon la position de A par rapport à la parabole.

II — Avec une hyperbole

Une droite Δ variable pivote autour d'un point A fixe.

Δ coupe l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y=\dfrac{a}{x}$ en deux points P et Q.
Quel est l'ensemble des milieux de $[P, Q]$?

93. Goal-average



Dans les championnats nationaux de football, lorsque des équipes sont à égalité de points, elles sont alors départagées par le goal-average.
Soit pour chacune de ces équipes :

- x le nombre de buts encaissés,
- y le nombre de buts marqués.

La situation de chaque équipe est ainsi représentée par un point dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1° Le goal-average usuel est $a=y-x$.

a) Où sont représentées les équipes ayant même goal-average?

b) Comment peut-on comparer graphiquement deux équipes?

2° Une deuxième façon de calculer serait d'utiliser le quotient[1] $m=\dfrac{y}{x}$ $(x\geqslant 1)$.

a) Où sont situées les équipes ayant même goal-average selon ce procédé?

b) Comment s'effectue la comparaison graphique pour deux équipes?

3° Déterminer graphiquement l'ordre des équipes A, B, C, D selon le choix du procédé :

	A	B	C	D	E
x	4	5	8	10	8
y	9	2	15	5	9

4° Représenter les droites correspondant à $a=2$ et à $m=1{,}2$.
Déterminer graphiquement des couples (x, y), tels que les résultats soient inversés selon le choix du procédé.

[1] En vigueur dans les années 50.

94. Cordes parallèles

I — Sur une parabole
On considère, sur une parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=kx^2$, quatre points distincts A, B, C, D d'abscisses respectives a, b, c, d.

1° Calculer le coefficient directeur de (AB).

2° Démontrer que (AB) est parallèle à (CD) si et seulement si $a+b=c+d$.

3° Quel est le lieu de I milieu de $[A, B]$, lorsque (AB) varie en gardant une direction fixe?

II — Sur une hyperbole

On considère, sur une hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y=\dfrac{k}{x}$, quatre points distincts A, B, C, D d'abscisses respectives a, b, c, d.

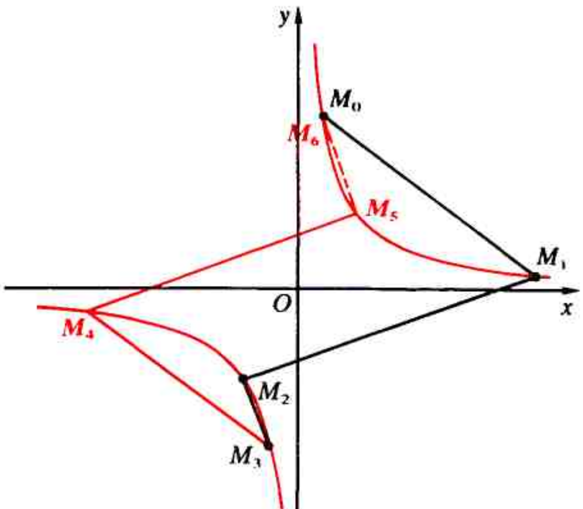
1° Quel est le coefficient directeur de (AB)?

2° Montrer que (AB) est parallèle à (CD) si et seulement si $ab=cd$.

3° Quel est le lieu du milieu I de $[A, B]$ lorsque la droite (AB) varie en gardant une direction fixe?

95. Deux tourniquettes

I — Sur l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y=\dfrac{a}{x}$, après avoir choisi quatre points M_0, M_1, M_2, M_3 on construit M_4, M_5, M_6 en imposant $(M_3M_4)/\!/(M_0M_1)$, puis $(M_4M_5)/\!/(M_1M_2)$ et $(M_5M_6)/\!/(M_2M_3)$.
Montrer que le trajet $M_0M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ est fermé.



II — Sur la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=ax^2$, on choisit quatre points A_0, A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives x_0, x_1, x_2, x_3 et l'on construit A_4 puis A_5 et A_6 de façon à avoir $(A_3A_4)/\!/(A_0A_1)$, puis $(A_4A_5)/\!/(A_1A_2)$ et $(A_5A_6)/\!/(A_2A_3)$.
Montrer que $A_6=A_0$.

96. La fonction 91 de Mac Carthy

(D'après *Le Petit Archimède*, n^{os} 41-42.)
Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x-10 & \text{pour } x>100 \\ f(x)=f\big(f(x+11)\big) & \text{pour } x\leqslant 100. \end{cases}$$

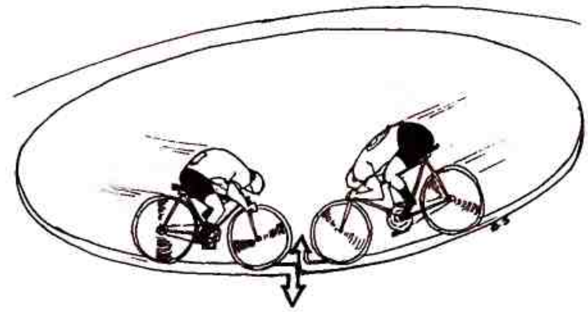
1° Calculer $f(100)$, $f(99)$, ... plus généralement $f(x)$ pour x entier naturel, inférieur ou égal à 100.

2° Tracer la courbe représentative de la fonction f.

97. « Le tour de piste »

I — Deuxième étape
On reprend les données de l'exercice **62.**

1° Montrer, à l'aide d'une représentation graphique des fonctions α et β, que si les cyclistes se croisent en A, on peut trouver deux entiers naturels. p et q tels que $\dfrac{T_2}{2}+pT_2=qT_1$.



En déduire que le rapport des vitesses $\dfrac{v_1}{v_2}$ est un rationnel qui peut être exprimé comme le quotient d'un nombre pair sur un nombre impair.

2° Étudier la propriété réciproque.

II — Troisième étape
On s'intéresse dans cette partie au problème suivant : « Est-il possible que les cyclistes se retrouvent simultanément à leurs points de départ respectifs A et B? »

1° Montrer que la réponse à ce problème est positive si et seulement si le rapport des vitesses est un nombre rationnel.

2° On suppose que $v_1=16$ m/s et $v_2=14$ m/s.
Combien de tours aura effectué le cycliste C_1 lorsque les cyclistes repassent simultanément pour la première fois à son point de départ.
(On pourra donner une solution graphique et une solution algébrique.)

3° Répondre au problème tel qu'il est posé dans *« Jeux et stratégies » :*
Le premier part de A à la vitesse de 16 m/s. Le second part en même temps de B à la vitesse de 14 m/s. Vingt secondes après le départ, ils se trouvent pour la première fois diamétralement opposés.
Au bout de combien de temps après le départ les deux cyclistes se retrouveront-ils simultanément à leurs points de départ respectifs A et B?

4 fonctions

• "TABLEAU DE VARIATIONS" •
• LUDWIG VAN BEETHOVEN •

Intentions

Les techniques de **majorations, encadrements, comparaisons** à des fonctions de référence sont mises en jeu dans la plupart des problèmes d'analyse. De plus, leur maîtrise est indispensable à la compréhension des notions de **limite** et de **nombre dérivé** (chapitre 7).

La mise en place ou le développement de certaines de ces techniques constitue donc le contenu essentiel de ce chapitre. Trois classes de **problèmes** sont envisagées:

- la **recherche des variations** d'une fonction et de ses **extrémas** éventuels par des méthodes élémentaires,
- la **comparaison** d'une fonction sur un intervalle à des nombres (majoration, minoration) ou à d'autres fonctions,
- l'**approximation** « locale » d'une fonction par une fonction plus simple avec mesure de l'erreur commise.

De nombreux exemples et exercices résolus sont proposés à l'intérieur de ce chapitre. Ils doivent permettre :

- d'une part, de **se faire une idée des questions sous-jacentes;** qu'elles concernent le **domaine numérique** (simplification de calculs; résolution approchée d'équations, d'inéquations, ...) ou le **domaine graphique** (ce qui conduira à la notion de tangente (chapitre 7)),
- d'autre part, de percevoir le rôle et l'importance que tiennent — au niveau des **méthodes** — la mise en œuvre des **propriétés de l'ordre et des opérations,** l'**interprétation graphique,** l'utilisation de la **monotonie** de certaines fonctions (racine, inverse, carré, etc.) et des résultats sur les **variations** de la fonction à l'étude.

numériques variations, comparaison et approximation

Plan du Chapitre

I. Introduction

Deux types d'activités sont proposés dans ce paragraphe :

• échantillon d'exercices permettant de **faire fonctionner** (dans quelques cas simples) les premières connaissances et techniques dont on dispose, en Seconde, pour étudier le comportement global d'une fonction;

• situations préparant l'introduction, à l'intérieur du chapitre, de certaines notions telles que : comparaison de fonctions, approximation d'une fonction (par une fonction plus simple).

1. Etude de quelques comportements

Activité 1

1. Soit a un réel non nul. Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes :

$$x \longmapsto ax^2 \;\; ; \;\; x \longmapsto \frac{a}{x} \;\; ;$$
$$x \longmapsto a\sqrt{x} \;\; ; \;\; x \longmapsto ax^3.$$

2. En utilisant des transformations d'écritures (cf. chapitres 2 et 3), étudier le sens de variation des fonctions :

$$x \longmapsto 3x^2 - x + 1 \quad \text{et} \quad x \longmapsto \frac{x+1}{x-1}.$$

Activité 2

1° Montrer que le système :

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \\ x = y \\ x \geqslant 0 \;,\; y \geqslant 0 \end{cases}$$

admet une seule solution (x_0, x_0).

2° Montrer que dans chacun des domaines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, l'expression $x^2 + xy + y^2 - 1$ garde un signe constant (figure 1).

3° Déduire de cette étude les variations de la fonction :

$$x \longmapsto x^3 - x\;.$$

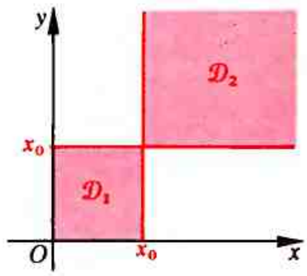


Figure 1

Activité 3

Soit A le point de coordonnées $(1, 2)$.
A chaque point P de l'axe (Ox), d'abscisse x $(x > 1)$, on associe le point Q de l'axe (Oy) de façon que A, P et Q soient alignés (figure 2).
On désigne par $S(x)$ l'aire du triangle OPQ.

1° Montrer que S est la fonction :

$$\begin{aligned}]1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{x-1}. \end{aligned}$$

2° Soit x et x' deux réels tels que $1 < x \leqslant x'$.

a) Montrer que :

$$S(x') - S(x) = \frac{(x'-x)}{(x'-1)(x-1)}(xx' - x - x').$$

b) On pose $\alpha = x - 1$ et $\alpha' = x' - 1$.
Exprimer $xx' - x - x'$ à l'aide de α et α'.

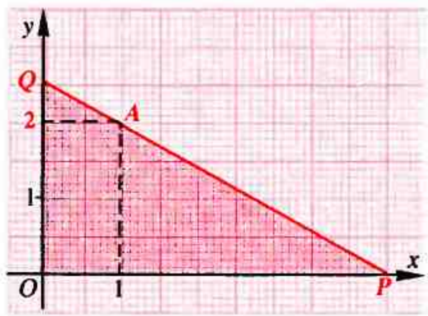


Figure 2

En déduire que S est croissante sur $[2, +\infty[$ et décroissante sur $]1, 2]$.

3° Où placer le point P pour que l'aire du triangle OPQ soit la plus petite possible?

Activité 4

(D'après « *Le Petit Archimède* », n[os] 53-54.)

« Le directeur d'une salle de théâtre d'Ottawa a remarqué qu'à 8 $ la place, il pouvait compter sur 500 spectateurs et que chaque baisse de 0,50 $ lui amenait 100 personnes de plus. Combien doit-il faire payer la place pour obtenir un revenu maximal? Quel est alors ce revenu? »

Indications : Soit n le nombre (entier) de baisses de 0,50 $ appliquées par le directeur et $R(n)$ le revenu correspondant.
Montrer qu'il existe une fonction polynôme du second degré f telle que $R(n)=f(n)$.
Représenter graphiquement la fonction f et conclure.

2. Des comparaisons ; des approximations

a. Un problème numérique[*]

« *Déterminer le plus grand des deux nombres :*

$$A=\frac{1{,}000\,000\,4}{(1{,}000\,000\,6)^2} \quad \textit{et} \quad B=\frac{(0{,}999\,999\,5)^2}{0{,}999\,999\,8} \text{ .»}$$

La calculatrice n'étant pas de grand secours dans cette situation... il semble raisonnable d'envisager une autre méthode.

Activité 5

On pose $\alpha=10^{-7}$.

1° Vérifier que $A=\dfrac{1+4\alpha}{(1+6\alpha)^2}$ et que $B=\dfrac{(1-5\alpha)^2}{1-2\alpha}$.

2° On introduit les fonctions A et B définies par :

$$A(x)=\frac{1+4x}{(1+6x)^2} \quad \text{et} \quad B(x)=\frac{(1-5x)^2}{1-2x}.$$

• Montrer que pour $0\leqslant x<\dfrac{1}{2}$, $A(x)$ et $B(x)$ sont rangés dans le même ordre que :

$$f(x)=1+2x-8x^2 \quad \text{et} \quad g(x)=(1+x-30x^2)^2.$$

• Vérifier que l'étude du signe de $f(x)-g(x)$ peut se ramener à celle d'un trinôme du second degré que l'on explicitera.

3° En déduire qu'il existe un intervalle de la forme $[0, a]$ (donner une valeur approchée de a par défaut) tel que $A(x)<B(x)$ pour $x\in[0, a]$.

4° Conclure sur le problème des Olympiades.

Remarque

On notera comment le problème du rangement de deux nombres parfaitement déterminés peut cependant conduire à l'introduction et à la comparaison de deux fonctions numériques.

b. Avec des courbes

On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine limité sur $]0, +\infty[$ par la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y=\dfrac{1}{2}x^2$ et l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y=\dfrac{2}{x}$ (figure 3).

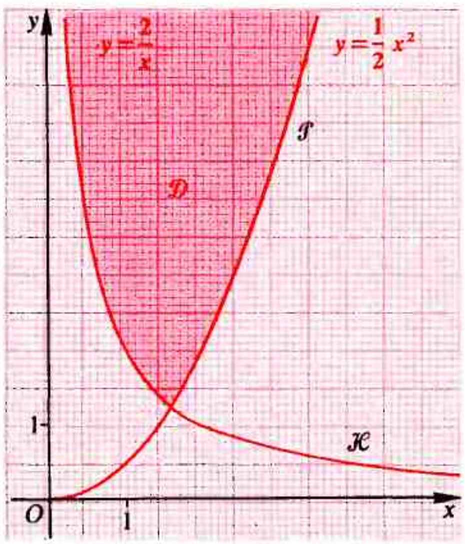


Figure 3

(*) Extrait des « *Olympiades de Mathématiques* ».

Activité 6

1° Définir le domaine $\mathcal{D}$ comme l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant un système d'inéquations.

2° On désigne par Γ_1 et Γ_2, les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, définies par :

$$f_1 :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{3}{x} & \text{si } x<1 \\ 3x^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$f_2 :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{4}{x}\right).$$

Montrer que Γ_1 et Γ_2 sont contenues dans le domaine $\mathcal{D}$.

3° Soit f la fonction :

$$]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}+1000$$

et Γ sa courbe représentative.

a) Montrer que Γ est « au-dessus » de $\mathcal{T}$.

b) Montrer que l'inéquation $f(x)>\dfrac{2}{x}$ admet au moins une solution strictement positive.

c) La courbe Γ est-elle située dans le domaine $\mathcal{D}$?

c. *Le problème du Quid*

Nous avons vu, chapitre 3, que la distance d (en km) qui sépare l'horizon d'un observateur situé à une hauteur H (en km) est donnée par :

$$d=\sqrt{2RH+H^2},$$

R étant le rayon de la Terre (exprimé en km).

La valeur approchée de d utilisée alors dans les calculs était $d'=\sqrt{2RH}$. L'activité qui suit propose de mesurer l'erreur commise en remplaçant d par d'.

Activité 7

1° Montrer que $d \geqslant d'$, puis que :

$$d-d'=\frac{H^2}{d+d'} .$$

2° En déduire $0 \leqslant d-d' \leqslant \dfrac{H^2}{2d'}$.

3° On suppose que $\mathbf{0 \leqslant H \leqslant 1}$; vérifier que :

$$\frac{H^2}{2d'} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2R}} .$$

Sachant que 6366 est une valeur approchée par défaut du rayon de la Terre, montrer que :

$$0 \leqslant d-d' \leqslant 0{,}0045$$

(utiliser la calculatrice).

4° En déduire que lorsque l'observateur est situé à une hauteur inférieure à 1000 m, l'erreur commise sur d ne dépasse par 4,50 m.

Remarques

La démarche utilisée dans ce problème est essentielle dans les **problèmes d'approximation** (cf. paragraphe V). Deux points sont à souligner :

1. On « approche » la fonction :

$$H \longmapsto \sqrt{2RH+H^2}$$

par une fonction plus **simple** $H \longmapsto \sqrt{2RH}$ (l'objectif ici étant de **simplifier** les calculs).

2. Il est indispensable de **mesurer l'erreur commise** dans cette approximation afin de savoir quelle **précision** peut être attendue sur les résultats (précision, par ailleurs, excellente dans cet exemple).

II. Fonction monotone sur un intervalle

1. Fonction croissante ; fonction décroissante

a. Définition

Soit f une fonction numérique, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et *I un intervalle contenu dans $\mathcal{D}_f$*.

- **On dit que f est *croissante* sur I, lorsque les images par f de deux réels quelconques de I sont rangés dans le *même ordre* que ces réels.**
- **On dit que f est *décroissante* sur I, lorsque les images par f de deux réels quelconques de I sont rangés dans l' *ordre inverse* de celui de ces réels.**

Autrement dit :

(1) : f croissante sur I $\iff$ pour tous réels x et x' de I, si $x \leqslant x'$, alors $f(x) \leqslant f(x')$.

(2) : f décroissante sur I $\iff$ pour tous réels x et x' de I, si $x \leqslant x'$, alors $f(x) \geqslant f(x')$.

Rappelons qu'une fonction qui est soit croissante sur un intervalle I, soit décroissante sur I, est dite monotone sur I.

b. Intervalles de monotonie

La détermination des intervalles de monotonie d'une fonction — intervalles sur chacun desquels la fonction est monotone — est essentielle dans l'étude **globale** de la fonction.
Nous verrons dans les chapitres 7 et 8 le rôle important que joue la notion de dérivée dans le traitement de ce problème. Les exemples qui suivent illustrent divers autres procédés qui permettent d'étudier les **variations** d'une fonction.

1. Étude directe

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$. La fonction f étant **impaire,** nous pouvons réduire l'étude à l'intervalle $]0, +\infty[$.
Considérons alors x et x', deux éléments de $]0, +\infty[$ tels que $x \leqslant x'$. On a :

$$f(x') - f(x) = \left(x' + \frac{1}{x'}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) = x' - x + \frac{x - x'}{xx'}$$

$$f(x') - f(x) = (x' - x)\left(1 - \frac{1}{xx'}\right) = \frac{(x' - x)}{xx'}(xx' - 1).$$

Comme $\dfrac{x' - x}{x'x} \geqslant 0$, pour étudier le signe de $f(x') - f(x)$, on est amené à préciser celui de $xx' - 1$ et donc la position de xx' par rapport à 1.

Or : $\begin{cases} \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x' \geqslant 1 \end{cases} & \text{conduit à } xx' \geqslant 1 \text{ d'où } f(x') - f(x) \geqslant 0, \\ \begin{cases} x \leqslant 1 \\ x' \leqslant 1 \end{cases} & \text{conduit à } xx' \leqslant 1 \text{ d'où } f(x') - f(x) \leqslant 0. \end{cases}$

Conclusion

La fonction f est **croissante** sur $[1, +\infty[$, **décroissante** sur $]0, 1]$.

Remarques

1. On peut décrire ces résultats sur un tableau appelé **tableau de variations** qui donne une lecture immédiate des variations de f.

(Nous avons utilisé le fait que la fonction était impaire pour obtenir ses variations sur $]-\infty, 0[$ (cf. exercices 1 et 2 ci-dessous).)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	-2	↘	‖	↘	2	↗	

Tableau 1

2. On peut remarquer — par exemple — que sur l'intervalle $[1, +\infty[$, l'inégalité stricte $x<x'$ conduit à l'inégalité stricte $f(x)<f(x')$.
Rappelons que, dans cette situation, on dit que f est **strictement croissante** sur $[1, +\infty[$. (La notion de fonction strictement décroissante étant définie de façon analogue.)

Exercices

1. Soit f une fonction paire, a et b deux réels positifs $(a<b)$ tels que $[a, b]\subset \mathcal{D}_f$.

Préciser la monotonie de f sur l'intervalle $[-b, -a]$ sous chacune des hypothèses suivantes :

a) f est croissante sur $[a, b]$,

b) f est décroissante sur $[a, b]$.

2. Reprendre l'exercice **1** en supposant cette fois que f est une fonction impaire.

3. Déterminer les variations de la fonction :

$$x \longmapsto x^2+\frac{1}{x^2}$$

a) par une étude directe analogue à celle qui vient d'être faite,

b) en utilisant les résultats précédents et l'égalité :

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.$$

4. Préciser les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$x \longmapsto x^2+|x|+1.$$

2. Utilisation de la courbe représentative

C'est le point de vue qui a été utilisé lors de l'étude des **fonctions trinômes du second degré.**

Rappelons le principe sur deux exemples :

- $f(x)=-x^2+4x+1$

On a $f(x)=-(x-2)^2+1+4=-(x-2)^2+5$.

En désignant par Ω le point de coordonnées $(2\ ,\ 5)$, la courbe représentative de f est la parabole d'équation $Y=-X^2$, dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

On retrouve ainsi les résultats proposés, chapitre 2, page 69, notamment ceux relatifs aux variations de la fonction f.
f est croissante sur $]-\infty, 2]$, décroissante sur $[2, +\infty[$.

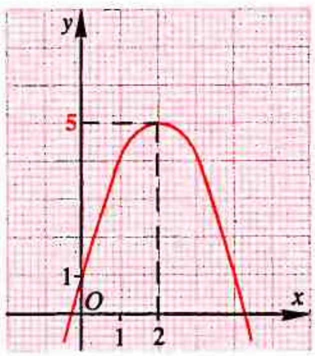


Figure 4

- $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$

Pour $x\neq 1$, $f(x)=\dfrac{3(x-1)+4}{x-1}=3+\dfrac{4}{x-1}$.

La courbe représentative de la fonction f a pour équation $Y=\dfrac{4}{X}$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, avec $\Omega(1, 3)$.

L'examen de l'hyperbole ainsi obtenue conduit immédiatement aux variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

Tableau 2

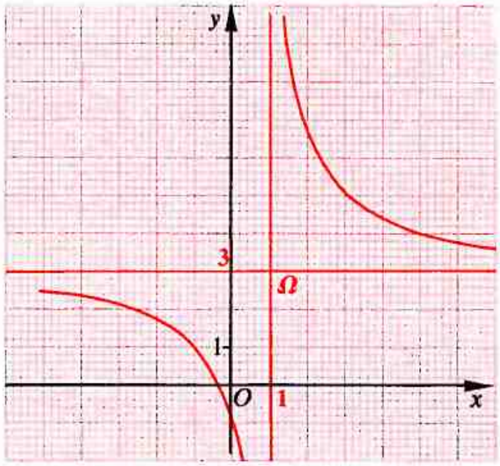


Figure 5 ►

Remarques

Le procédé utilisé : « **détermination des variations de la fonction f à partir de sa courbe représentative** » est d'autant plus pertinent qu'il est aisé de donner une représentation graphique de la fonction f.

C'est le cas notamment pour des représentations qui résultent de considérations d'ordre géométrique (changement de repère, utilisation d'une transformation) et donc par exemple pour les **fonctions associées aux fonctions de référence** (cet aspect sera développé dans le sous-paragraphe suivant : « monotonie et opérations »).

Exercices

5. Dresser le tableau de variations des fonctions f, g, h représentées graphiquement ci-après.

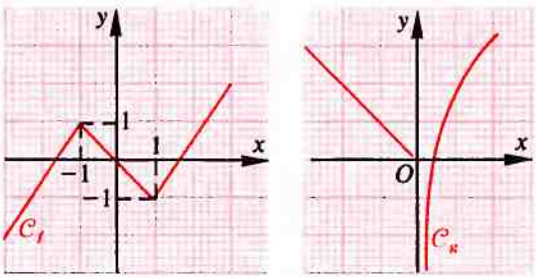
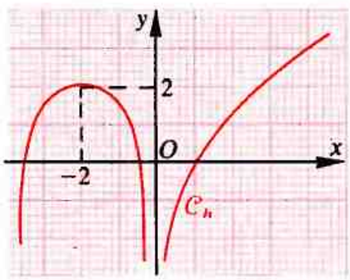


Figure 6



6. Dresser le tableau de variations de la fonction f représentée ci-dessous.

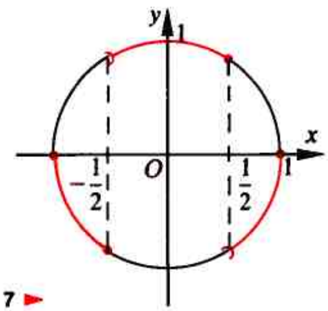


Figure 7 ►

7. Étudier les variations des fonctions f et g :

a) en utilisant leur représentation graphique,

b) directement (cf. procédé n° 1) :

$$f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}\ ;\quad g(x)=3x^2-5x-4.$$

8. Préciser les intervalles de monotonie de la fonction $x \longmapsto |2x-3|-|x+1|+2x$.

3. Utilisation de propriétés d'origine géométrique, cinématique, etc.

Dans certaines situations (en Physique, Cinématique, Géométrie, etc.) c'est la nature même du problème étudié qui fournit les variations de la fonction introduite.

Exemple 1

Quel que soit le mouvement d'un mobile, la fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui à t associe la distance $d(t)$ parcourue pendant l'intervalle de temps $[0, t]$ est une fonction croissante (éventuellement strictement croissante).

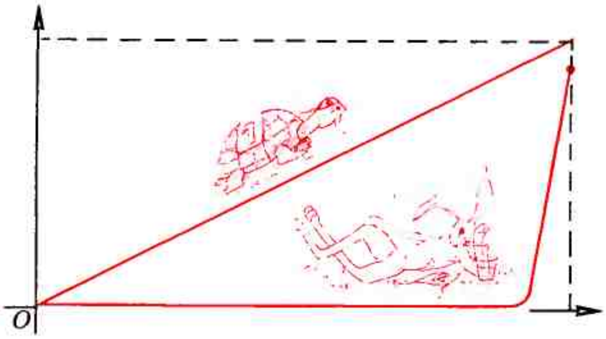


Figure 8

Exemple 2

Soit Γ le demi-cercle de diamètre $[I, I']$, de rayon 1. A tout réel α de $[0, \pi]$, on fait correspondre l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine représenté sur la figure 9.
Le schéma de la figure 10, montre que la fonction $\mathcal{A}$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}_+$ est une fonction croissante de 0 à $\frac{\pi}{2}$, autrement dit, que la fonction $\mathcal{A}$ admet pour tableau de variations :

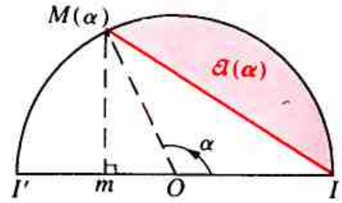


Figure 9

α	0	π
$\mathcal{A}(\alpha)$	0 $\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

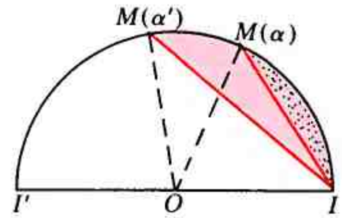


Figure 10

Essayons d'obtenir une formule explicite pour $\mathcal{A}(\alpha)$:

- aire du secteur circulaire IOM : $\frac{1}{2}\alpha$,
- aire du triangle isocèle IOM : $\frac{1}{2} OI \times Mm$ (d'après la figure 9). Comme $Mm = \sin\alpha$, l'aire de ce triangle est $\frac{1}{2}\sin\alpha$.

Ainsi, $\boldsymbol{\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha)}$.

Il en découle le résultat suivant :

« **la fonction** $\left\{\begin{aligned} [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - \sin x \end{aligned}\right.$ **est une fonction croissante** ».

Exercices

9. Vérifier qu'une étude directe de la monotonie de la fonction :

$$\begin{aligned} [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x - \sin x \end{aligned}$$

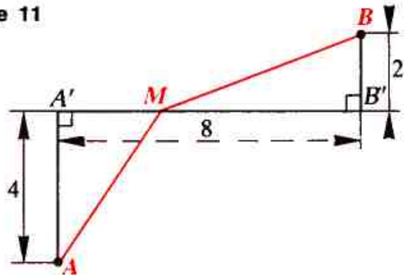
permet de conclure sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, mais pas, a priori, sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (Utiliser la monotonie de $x \longmapsto \sin x$ sur $[0, \pi]$.)

10. On considère le schéma ci-contre :
A tout point M du segment $[A', B']$ on associe le nombre $AM+MB$ (somme des distances).

On pose $A'M = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 8)$:

- exprimer $AM+MB$ en fonction de x,
- donner les variations de la fonction obtenue avec des arguments purement géométriques.

Figure 11



4. Autres procédés

Certains des exemples précédents ont permis d'esquisser qu'il était possible, dans certains cas, d'obtenir les variations de certaines fonctions $f+g$, $f \circ g$... à partir des variations de f et de g. C'est ce point que nous allons développer maintenant.

2. Monotonie et opérations

a. Fonctions monotones de même monotonie ; de monotonies différentes

Étant donné deux fonctions f et g et deux intervalles I et J respectivement contenus dans $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$, on dit que :

1° f et g sont **monotones de même monotonie** lorsque :

$$\begin{cases} f \text{ croissante sur } I \\ g \text{ croissante sur } J \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} f \text{ décroissante sur } I \\ g \text{ décroissante sur } J. \end{cases}$$

2° f et g sont **monotones de monotonies différentes** lorsque :

$$\begin{cases} f \text{ croissante sur } I \\ g \text{ décroissante sur } J \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} f \text{ décroissante sur } I \\ g \text{ croissante sur } J. \end{cases}$$

Note : Cette notion n'est pas fondamentale; son rôle essentiel est d'alléger un certain nombre d'énoncés.

b. Multiplication d'une fonction monotone par un réel

- Soit f une fonction monotone sur un intervalle I et α un nombre réel. Étudions la monotonie de la **fonction αf définie par $x \longmapsto \alpha f(x)$.**

Supposons par exemple la fonction f **décroissante** sur I; alors, pour x et x' appartenant à I tels que $x \leqslant x'$, on a $f(x) \geqslant f(x')$.
Il en découle que :

— si $\alpha > 0$: $\alpha f(x) \geqslant \alpha f(x')$; la fonction αf est **décroissante** sur I;

— si $\alpha < 0$: $\alpha f(x) \leqslant \alpha f(x')$; la fonction αf est **croissante** sur I.

Des résultats analogues étant obtenus dans le cas où f est une fonction croissante (cf. exercice 11 ci-après), on peut énoncer :

Soit f une fonction *monotone* sur I et α un nombre réel. Alors

1° La fonction αf est *monotone* sur I.

2° Si $\alpha > 0$, f et αf sont de *même* monotonie.
Si $\alpha < 0$, f et αf sont de monotonie *différente*.

Exercices

11. Étudier la monotonie de la fonction αf sur l'intervalle I, lorsque f est une fonction croissante sur I.

12. Dans chacun des cas, donner le tableau de variations des fonctions $3f$ et $-f$ sachant que les variations de f sont décrites par le tableau :

a)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	‖	$\nearrow$	

b)

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

c. *Somme de fonctions monotones*

Soit f et g deux fonctions monotones sur un même intervalle I; étudions les variations de la fonction $f+g$ **définie** sur I **par** $x \longmapsto f(x)+g(x)$.

Considérons x et x' deux réels quelconques de I tels que $x \leqslant x'$:

- Si f et g sont **toutes deux croissantes** sur I, on a :

$$\begin{cases} f(x) \leqslant f(x') \\ \text{et} \\ g(x) \leqslant g(x') \end{cases}$$

d'où : $f(x)+g(x) \leqslant f(x')+g(x')$: la fonction $f+g$ **est croissante** sur I.

- Si f et g sont **toutes deux décroissantes** sur I, cette fois :

$$\begin{cases} f(x) \geqslant f(x') \\ \text{et} \\ g(x) \geqslant g(x') \end{cases}$$

d'où: $f(x)+g(x) \geqslant f(x')+g(x')$: la fonction $f+g$ **est décroissante** sur I.

- Si f est **croissante** sur I et g **décroissante** sur I, alors :

$$\begin{cases} f(x) \leqslant f(x') \\ \text{et} \\ g(x) \geqslant g(x'). \end{cases}$$

De telles inégalités ne permettent pas de comparer $f(x)+g(x)$ et $f(x')+g(x')$: on ne peut donc conclure avec ce procédé sur la monotonie éventuelle de la fonction $f+g$. Il faut donc ou utiliser une autre technique ou... fabriquer un contre-exemple (cf. exercice **13** ci-dessous).

Exercice

13. Soit f et g les fonctions définies sur $I=[0, +\infty[$ par :

$$f(x)=-x \quad \text{et} \quad g(x)=x^2 .$$

Montrer que f est décroissante sur I, g croissante sur I, mais que $f+g$ n'est ni croissante ni décroissante sur I.

En résumé :

Soit f et g deux fonctions *monotones* sur un intervalle I et de *même* monotonie.
La fonction $f+g$ est alors monotone sur I :

- ***croissante*** **si f et g sont toutes deux** ***croissantes;***
- ***décroissante*** **si f et g sont toutes deux** ***décroissantes.***

Exemple

Variations de la fonction $f : x \longmapsto x - \frac{1}{x}$.

La fonction f est une fonction impaire, définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$:

- $x \longmapsto x$ est croissante,
- $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ est croissante (comme fonction opposée d'une fonction décroissante sur $]0, +\infty[$ à savoir la fonction inverse).

Conclusion : La fonction $f : x \longmapsto x - \frac{1}{x}$, somme de deux fonctions croissantes sur $]0, +\infty[$ est **croissante sur** $]0, +\infty[$. Les variations de f sur $\mathbb{R}^*$ s'en déduisent avec des arguments de parité.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

Remarque

On notera que les deux théorèmes précédents sont encore vrais lorsque l'on remplace « croissante » par « strictement croissante » et « décroissante » par « strictement décroissante ».

Exercices

14. Dresser le tableau de variations des fonctions :

a) $x \longmapsto x^2 - \frac{1}{x}$;

b) $x \longmapsto x - \cos x$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

15. Même exercice qu'en **14** avec :

a) $x \longmapsto \frac{1}{2x} - 2 \sin x$ sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$;

b) $x \longmapsto |2x - 1| + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$.

16. La fonction f est paire et admet pour tableau de variations sur $[0, +\infty[$:

x	0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	

Dresser le tableau de variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction g dont la courbe représentative est symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $x = 1$.

d. Composition de fonctions monotones

- ***Exemple***

Soit φ la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x}$.

La fonction φ est définie sur $]-\infty, 1]$; elle peut être considérée comme la **composée** des fonctions $f : x \longmapsto 1 - x$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$:

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{1-x} = \varphi(x).$$

Montrons comment la connaissance des variations des fonctions f et g permet d'obtenir celles de la fonction φ sur l'intervalle $I =]-\infty, 1]$.

Soit x et x' deux réels quelconques de I tels que $x < x'$:

. la fonction $f : x \longmapsto 1 - x$ étant strictement décroissante sur I, on a :

$$f(x) > f(x') \geqslant 0 \qquad (1);$$

. la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$, l'inégalité (1) implique :

$$g\big(f(x)\big) > g\big(f(x')\big) \quad \text{ou encore} \quad \varphi(x) > \varphi(x').$$

Conclusion : Pour tous réels x et x' de I tels que $x < x'$, on a $\varphi(x) > \varphi(x')$: **la fonction φ est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$.**

- ***Cas général***

Dans l'étude de la monotonie de la composée de deux fonctions, il faut séparer deux types de problèmes :
— ceux concernant uniquement la monotonie;
— ceux concernant les ensembles de définition.

. **Monotonie :** Soit f une **application** monotone d'un intervalle I dans un intervalle J et g une **application** monotone de J dans $\mathbb{R}$.

Alors $g \circ f$ est une **application** monotone de I dans $\mathbb{R}$. De façon plus précise :
— si f et g sont de **même** monotonie, $g \circ f$ est croissante,
— si f et g sont de monotonie **différente,** $g \circ f$ est décroissante.
(L'étude des divers cas est proposée dans l'exercice **17** ci-après.)

. **Ensembles de définition :** Lorsque f et g sont des fonctions respectivement définies sur I et J, on pourra appliquer les résultats précédents, à condition que **pour tout x de I, $f(x)$ soit élément de J.**

On peut alors énoncer le théorème :

Soit f une fonction *monotone* sur un intervalle I et g une fonction *monotone* sur un intervalle J tels que pour tout x de I, $f(x)$ *appartienne à* J.
Alors :

- **si f et g sont de *même monotonie*, la fonction $g \circ f$ est *croissante* sur I;**
- **si f et g sont de *monotonie différente*, la fonction $g \circ f$ est *décroissante* sur I.**

On notera que les résultats décrits par ce théorème sont encore vrais si l'on remplace « monotone » par « strictement monotone »; « croissante » par « strictement croissante », etc.

Exercices

17. Soit I et J deux intervalles, f une application de I dans J et g une application de J dans $\mathbb{R}$. Examiner la monotonie de l'application $g \circ f$ dans chacun des cas suivants :

a) f et g croissantes,

b) f et g décroissantes,

c) l'une est croissante, l'autre est décroissante.

18. Compléter le tableau ci-contre, sachant que + symbolise la croissance et − la décroissance.

f \ g	+	−
+		
−		

Tableau de monotonie de $g \circ f$.

Remarque?

19. Dresser le tableau de variations de la fonction $g \circ f$ à partir des tableaux de variations de f et de g :

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f(x)$		↗	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g(x)$		↗	1	↘	0	↗	

20. Étudier les variations de :

a) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2}$ sur $\mathbb{R}$;

b) $x \longmapsto \sqrt{1-\sin x}$ sur $[0, \pi]$.

e. *Quelques exemples*

Il s'agit de montrer, sur quelques exemples significatifs, comment les divers résultats précédents peuvent intervenir dans l'étude des variations d'une fonction.

• **Fonction $\sqrt{f}$**

Le théorème sur la composition des fonctions monotones permet d'affirmer que, sur tout intervalle I où f est définie et positive $\left(f(x) \geqslant 0\right.$ pour tout x de $\left.I\right)$, les fonctions f et $\sqrt{f}$ ont les mêmes variations.

Exemple

Soit φ la fonction $x \longmapsto \sqrt{(x+1)(3-x)}$.
En désignant par f la fonction $x \longmapsto (x+1)(3-x)$ (représentation graphique figure 12), on a $\varphi = \sqrt{f}$.
Il est clair que φ admet $[-1, 3]$ comme ensemble de définition et que ses variations sont données par :

x	-1		1		3
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

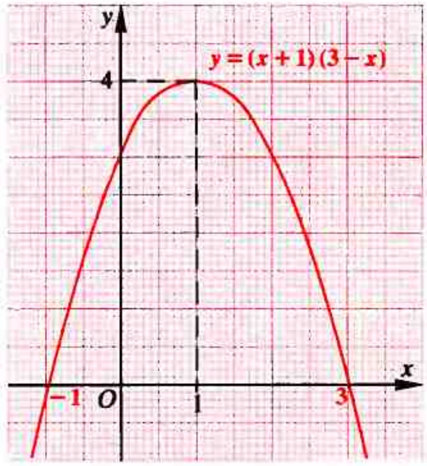


Figure 12

• **Fonction $\dfrac{1}{f}$**

Le théorème sur la composition des fonctions monotones permet également d'affirmer que, sur tout intervalle I où f est définie et non nulle, les fonctions f et $\dfrac{1}{f}$ sont de variations contraires.

Exemple

Le tableau ci-dessous donne à la fois les variations de la fonction $f : x \longmapsto (x+1)(3-x)$ et celle de la fonction $\dfrac{1}{f} : x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)(3-x)}$ (résultat essentiel utilisé : sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante).

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	
$\dfrac{1}{f(x)}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\dfrac{1}{4}$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

• **Fonctions associées**

Soit f une fonction numérique et g une fonction affine $x \longmapsto \alpha x + \beta$. La fonction g étant strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (croissante pour $\alpha > 0$, décroissante pour $\alpha < 0$), nous pouvons sans difficulté, déduire des variations de f, celles des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$, autrement dit des fonctions : $x \longmapsto f(\alpha x + \beta)$ et $x \longmapsto \alpha f(x) + \beta$.

Ainsi, par exemple, les variations de fonctions telles que (a désignant un réel fixé) :

$$x \longmapsto f(x+a)$$
$$x \longmapsto f(a-x)$$
$$x \longmapsto a-f(x)$$
$$x \longmapsto f(ax)$$
etc.

pourront être obtenues directement à partir de celles de la fonction f.

Remarque

On reconnaît dans ces fonctions, certaines des fonctions associées à la fonction f (cf. chapitre 3).
Il est clair alors que des **considérations géométriques** (utilisation de transformations; changement de repère) pourront accompagner l'étude des variations de telles fonctions.

Exercices

Dans les exercices **21** *à* **23**, *étudier, de deux façons, les variations de la fonction proposée :*

a) en la considérant comme fonction associée à une fonction f que l'on explicitera;

b) après avoir donné l'allure de sa courbe représentative à partir des résultats du chapitre 3.

21. $x \longmapsto 2+(1-x)^3$.

22. $x \longmapsto \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

23. $x \longmapsto 1-\sqrt{3-x}$.

Note : Le problème de la recherche d'extrémums d'une fonction — qui peut être considéré comme faisant partie de l'étude des variations d'une fonction — est abordé dans le paragraphe IV. (Un extrémum peut être perçu en effet comme un cas particulier de **majorant** ou de **minorant** et la plupart des méthodes élémentaires sur ce sujet s'appuient sur les techniques de « majoration-minoration ».)

III. Majoration, minoration et comparaison de fonctions

1. Définition

a. Majoration, minoration

Soit f une fonction numérique, $\mathcal{D}_f$ son ensemble de définition et I un *intervalle contenu* dans $\mathcal{D}_f$. On dit que :

- **f est *majorée par le réel M* sur I, lorsque $f(x) \leqslant M$ pour tout x de I;**
- **f est *minorée par le réel m* sur I lorsque $m \leqslant f(x)$ pour tout x de I.**

On dit également, dans ce cas, que M est un **majorant** de f sur I et que m est un **minorant** de f sur I.

- Lorsque $M=0$ (respectivement $m=0$) la fonction est dite **négative sur I** (respectivement **positive sur I**) (notations : $f \leqslant 0$ sur I et $f \geqslant 0$ sur I).

• **Interprétation graphique**

— L'inégalité $f(x) \leq M$ pour tout réel x de I se traduit graphiquement par le fait que la courbe représentative de f sur I est **toujours en dessous** de la droite d'équation $y = M$ (exemple figure 13).

— L'inégalité $m \leq f(x)$ pour tout réel x de I s'interprète graphiquement de façon comparable : la courbe représentative de f sur I est **toujours au-dessus** de la droite d'équation $y = m$.

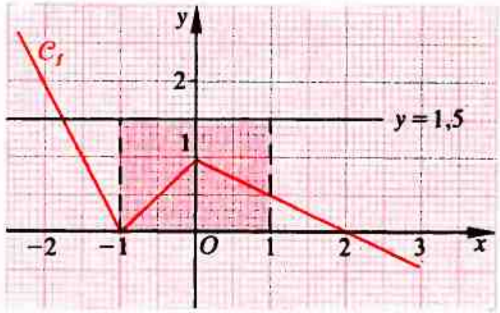


Figure 13 : La fonction f est majorée par 1,5 sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Ainsi, par exemple (figure 13) :
— la fonction f est minorée par 0 sur l'intervalle $[-1, 1]$;
— tout nombre négatif est un minorant de f sur l'intervalle $[-2, 2]$;
— par contre, 0 ne minore plus f sur l'intervalle $[-2, 3]$, puisque $f(3) < 0$.

Exercices

24. Soit f la fonction représentée graphiquement sur la figure 14. Dans chaque cas, pour l'intervalle I considéré, préciser si m (respectivement M) est un minorant (respectivement un majorant) de f sur I.

a) $I = [-2, 2]$, $m = -2$, $M = 1/2$.

b) $I = [-2, 2]$, $m = -1$, $M = 1$.

c) $I =]-1, 1]$, $m = 0$, $M = 1$.

d) $I = [-1, 1]$, $m = 0$, $M = 1$.

25. Montrer que, pour tout x de $[0, 1]$,

$$0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 .$$

Donner une illustration graphique de ce résultat.

26. *1°* Proposer plusieurs minorants sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2} - 4$.

2° Justifier que pour tout réel x, $\dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$.

3° Exploiter cette inégalité pour trouver un majorant de f sur $\mathbb{R}$.

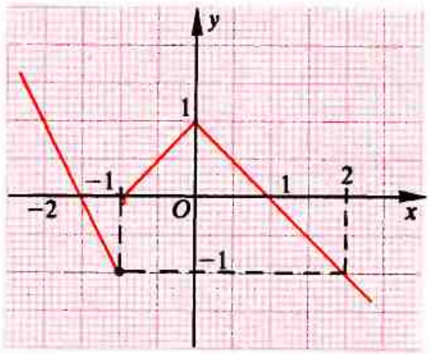


Figure 14

27. Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} ; \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que 0 est un minorant de f sur $\mathbb{R}$ et un majorant de g sur $\mathbb{R}$.
Existe-t-il un réel majorant f sur $\mathbb{R}$? De même, existe-t-il un réel minorant g sur $\mathbb{R}$?
Interpréter graphiquement.

Remarque

D'une part (cf. exercice **27** ci-dessus), une fonction n'admet pas nécessairement un majorant ou un minorant sur un intervalle et, d'autre part, il n'est pas toujours nécessaire de préciser quels réels peuvent éventuellement majorer une fonction (par exemple) : il est possible, parfois de se contenter de savoir que de tels réels existent.

On est donc conduit à la définition suivante :

Soit f une fonction numérique et I un intervalle ***contenu dans son ensemble de définition.*** **On dit que :**

- **f est *majorée* (respectivement *minorée*) sur I si f *admet un majorant* (respectivement un *minorant*) sur I;**
- **f est *bornée* sur I lorsqu'elle est *à la fois majorée* et *minorée* sur I.**

L'**interprétation graphique** résulte des considérations précédentes :
Une fonction majorée (respectivement minorée) sur I est une fonction dont la courbe représentative sur I est en dessous (respectivement au-dessus) d'une **droite parallèle à (Ox).**
Les courbes représentatives sur I des fonctions **bornées** sur I sont celles situées dans une **bande** de direction (Ox) (figure 15).

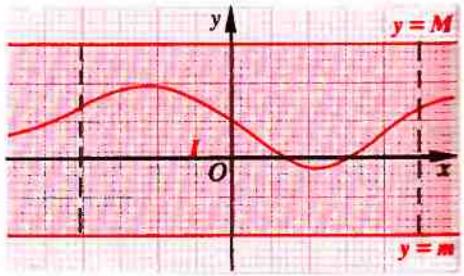


Figure 15

Exercices

28. Soit f une fonction définie sur I. Montrer que f est bornée sur I si et seulement si il existe $k>0$ tel que $|f(x)|\leqslant k$ pour tout x de I (autrement dit la fonction $|f|$ est majorée).

29. Montrer que les fonctions suivantes sont bornées sur $\mathbb{R}$:

$x \longmapsto \cos x$; $\quad x \longmapsto \sin x$;

$x \longmapsto 10^8 \sin x$; $\quad x \longmapsto \dfrac{1}{2+x^4}$.

30. En utilisant l'inégalité $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$, montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2+\sin x}$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Comparaison de fonctions sur un intervalle

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. On dit que *f est inférieure à g* sur I, et l'on note $f\leqslant g$, lorsque, pour tout x de I, $f(x)\leqslant g(x)$.

- Dans cette situation, on utilise également les formulations suivantes :
  . f **minore** g sur I,
  . f est **majorée** par g sur I ou g **majore** f sur I.
- La **traduction graphique** de $f\leqslant g$ sur I est la suivante : la courbe représentative de f **sur** I est située en dessous de la courbe représentative de la fonction g **sur** I.
- Remarquons que lorsque g est une fonction constante sur I prenant la valeur M, « $f\leqslant g$ » signifie : « f est majorée par le réel M sur I ».

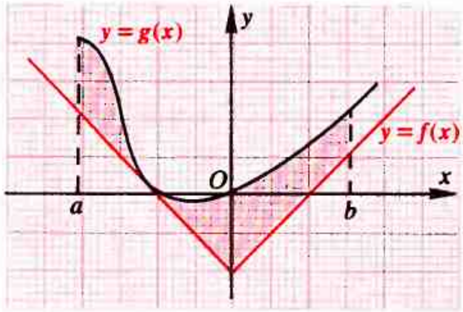


Figure 16 : $f\leqslant g$ sur $[a, b]$.

Exercices

31. Comparer, sur les intervalles I précisés, les fonctions f et g :

a) $I=[0, 4]$,

$$f(x)=\sqrt{x}\ ,\quad g(x)=\frac{x}{2}.$$

b) $I=[2, +\infty[$,

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^4}\ ,\quad g(x)=35x.$$

c) $I=\mathbb{R}$,

$$f(x)=x\sin x\ ,\quad g(x)=-x.$$

32. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, les courbes d'équations $y=\dfrac{1}{2x}$ et $y=x$ délimitent un domaine représenté en grisé figure 17. Montrer que la courbe représentative sur $]0, +\infty[$ de la fonction :

$$x \longmapsto x+\frac{1}{2x}$$

est contenue dans ce domaine.

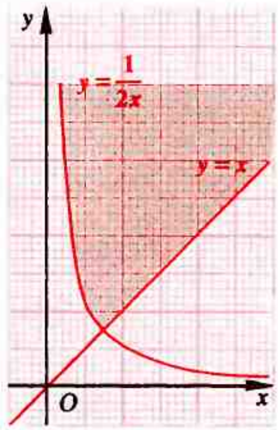


Figure 17

2. Les techniques de base

a. Divers problèmes

• Les deux énoncés suivants «*Montrer que pour tout réel positif* $0\leqslant\dfrac{1}{2+\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{2}$» et «*Montrer que la fonction* $x\longmapsto\dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$ *est bornée sur* $[0, +\infty[$» bien que concernant tous deux, majoration et minoration de la fonction f, sont de natures différentes.
Le premier problème peut être résolu par une simple **vérification** (ou traité comme une inéquation); le second nécessite un travail supplémentaire : **estimer** un majorant et un minorant de f sur $[0, +\infty[$.

• De même, concernant la **comparaison des fonctions,** les problèmes ne se limitent pas à comparer deux fonctions données. On pourra être aussi amené, par exemple :

. à chercher une fonction affine minorant une fonction f,

. à majorer la valeur absolue de f par une fonction de référence[1].

• Les exemples qui suivent illustrent divers **procédés que l'on peut mettre en œuvre dans le traitement de tels problèmes.**

b. Utilisation des résultats sur "ordre et opérations"

Exemple 1

Montrer que la fonction $f : x\longmapsto\dfrac{2x^2+3}{x+1}$ *est bornée sur l'intervalle* $I=[0, 2]$.

Il est clair que, pour $x\geqslant 0$, $f(x)$ est positif ou nul : **f est minorée par 0 sur I.**
Pour x dans $[0, 2]$, on a successivement :

• $x^2\leqslant 4$, d'où $2x^2\leqslant 8$ et $2x^2+3\leqslant 11$,

• $x+1\geqslant 1$, d'où $\dfrac{1}{x+1}\leqslant 1$.

[1] Voir, par exemple, dans les problèmes d'approximation (paragraphe V).

On en déduit que $\frac{2x^2+3}{x+1} \leqslant 11$ (multiplication « membre à membre » d'inégalités de même sens portant sur des nombres strictement positifs) : **la fonction f est majorée par 11 sur I.**
Cette fonction, à la fois minorée et majorée sur I, est donc **bornée sur I.**

Exemple 2

Comparer les fonctions $f : x \longmapsto \frac{1}{x^4+1}$ *et* $g : x \longmapsto \frac{1}{x^2+1}$.

- Les deux fonctions f et g étant **paires,** on doit se douter qu'un résultat sur $[0, +\infty[$ permettra d'obtenir un résultat sur $\mathbb{R}$...
- Examinons donc le problème sur $[0, +\infty[$.

Pour cela, étudions le **signe de la différence** $f(x)-g(x)$:

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{x^4+1}-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2-x^4}{(x^4+1)(x^2+1)}=\frac{x^2(x^2-1)}{(x^4+1)(x^2+1)}.$$

Comme $\frac{x^2}{(x^4+1)(x^2+1)}$ est positif, $f(x)-g(x)$ est du signe de x^2-1.
Ainsi : pour $x \in [0, 1]$, $x^2 \leqslant 1$ et donc $f(x) \geqslant g(x)$;
pour $x \in]1, +\infty[$, $x^2 \geqslant 1$ et donc $f(x) \leqslant g(x)$.

- Il découle alors des propriétés de parité[1] les résultats suivants :

. sur $[-1, 1]$, $f(x) \geqslant g(x)$,
. sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f(x) \leqslant g(x)$.

Commentaire général

Les techniques de « majoration-minoration » qui font appel aux propriétés de l'ordre et des opérations utilisent également la **monotonie** de certaines fonctions : $x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto \frac{1}{x}$; $x \longmapsto \sqrt{x}$... sur des intervalles précis.
Soulignons à cet égard une démarche assez délicate qui consiste à anticiper sur les majorations ou minorations à effectuer. Par exemple :

- on majore un rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ de termes strictement positifs, en majorant le numérateur ou en minorant le dénominateur;
- pour minorer $\sqrt{f(x)}$, il suffit de minorer $f(x)$;
- etc.

Exercices

33. Démontrer les inégalités :
- pour $x \in [0, 1]$, $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$;
- pour $x \in [1, +\infty[$, $x^3 \geqslant x^2 \geqslant x \geqslant \sqrt{x} \geqslant 1$.

34. On considère les fonctions f, g et h définies par :

$$f(x)=\frac{x}{10}, \quad g(x)=\frac{x}{10000}, \quad h(x)=\frac{x}{10^8}.$$

Montrer que, pour chacune d'elles, on peut trouver un intervalle de la forme $[0, a]$ $(a>0)$ tel qu'elle soit minorée par $x \longmapsto x^2$ sur cet intervalle.

[1] Voir exercice **36** ci-après.

35. Soit f la fonction $x \longmapsto \dfrac{2x^2+3}{x+1}$ (cf. exemple 1).

1° Vérifier que pour $0 \leqslant x \leqslant 2$:

$$f(x) = 2(x+1) + \frac{5}{x+1} - 4 \ .$$

2° En utilisant cette écriture, montrer que, pour $x \in [0, 2]$, $f(x) \leqslant 7$, puis que :

$$f(x) \geqslant 2(\sqrt{10} - 2).$$

3° Comparer avec l'encadrement obtenu dans l'exemple 2.

36. Soit f et g deux fonctions paires et $I = [a, b]$ un intervalle contenu dans $[0, +\infty[$. On suppose que $f \leqslant g$ sur I.
Comparer f et g sur $[-b, -a]$.

37. Reprendre l'exercice **36** en supposant f et g impaires.

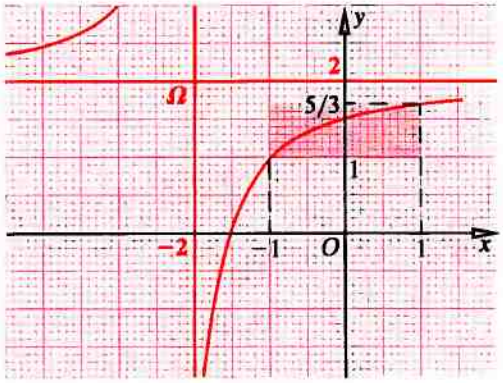
c. *Utilisation de la courbe représentative*

Exemple 3

Majoration et minoration éventuelle de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+3}{x+2}$ *sur l'intervalle* $[-1, 1]$.

La représentation graphique de f conduit à l'encadrement : $1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{5}{3}$ pour tout x élément de $[-1, 1]$.

Figure 18



Notons que la transformation d'écritures qui permet d'obtenir la courbe représentative de la fonction (à savoir :

$$\frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-4+3}{x+2} = 2 - \frac{1}{x+2})$$

peut être également utilisée pour majorer et minorer f : $-1 \leqslant x \leqslant 1$ implique $1 \leqslant x+2 \leqslant 3$;

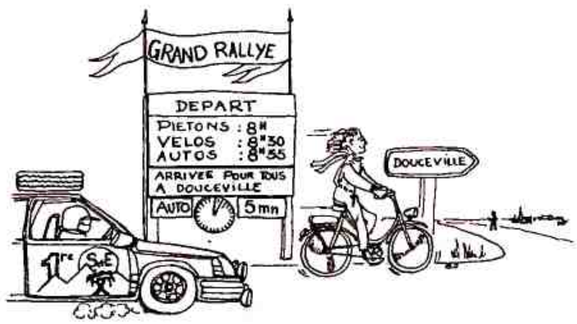
d'où : $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{x+2} \leqslant 1$; $-1 \leqslant -\dfrac{1}{x+2} \leqslant -\dfrac{1}{3}$ et enfin : $2-1 \leqslant 2 - \dfrac{1}{x+2} \leqslant 2 - \dfrac{1}{3}$, soit $1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{5}{3}$.

Exemple 4

Trois voyageurs partent d'une même ville et suivent la même route :

- *un piéton à* 8 h *à la vitesse de* 6 km/h,
- *un cycliste à* 8 h 30 *à la vitesse de* 18 km/h,
- *une automobile à* 8 h 35 *à la vitesse de* 90 km/h.

Déterminer pendant combien de kilomètres l'automobile sera entre le piéton et le cycliste.



Introduisons les trois fonctions du temps t (exprimé en heures), P, C et A définies par : $P(t)$, $C(t)$ et $A(t)$ sont les distances parcourues durant le temps t écoulé depuis 8 heures, par le piéton, le cycliste et l'automobile. Il est clair que :

$$P(t) = 6t \ ; \quad C(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 18\left(t - \dfrac{1}{2}\right) \ \text{ si } \ t \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} ; \qquad A(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } \ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{7}{12} \\ 90\left(t - \dfrac{7}{12}\right) \ \text{ si } \ t \geqslant \dfrac{7}{12}. \end{cases}$$

Le problème revient à **comparer les fonctions** A et P, puis A et C.

Une représentation graphique succincte (figure 19) montre qu'il suffit de résoudre le système d'inéquations :

$$18\left(t-\frac{1}{2}\right)\leqslant 90\left(t-\frac{7}{12}\right)\leqslant 6t$$

(l'automobile rencontre d'abord le cycliste, puis après le piéton). On obtient facilement :

$$\frac{29}{48}\leqslant t\leqslant\frac{30}{48}.$$

L'automobile est donc restée entre le cycliste et le piéton durant $\frac{1}{48}$ d'heure.

A la vitesse de 90 km/h, cela correspond à **1,875 km.**

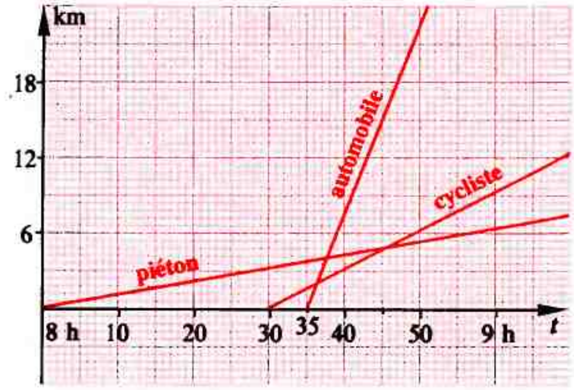


Figure 19

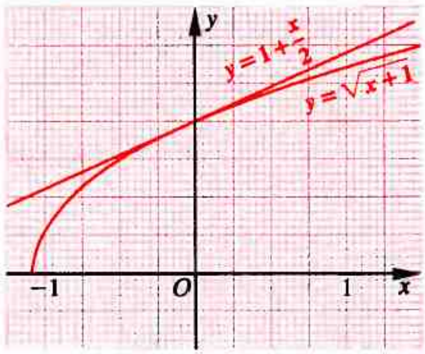
Remarque

Le tracé des courbes représentatives des fonctions P, C et A a pour effet de **réduire** les comparaisons à effectuer et de permettre une estimation, puis un contrôle graphique des résultats.

Exemple 5

Comparer sur $[-1, 1]$ *les fonctions* $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ et $x \longmapsto 1+\frac{x}{2}$.

Figure 20



Le tracé des courbes représentatives de ces fonctions (qui n'offre aucune difficulté) permet de conjecturer que $\sqrt{1+x}\leqslant 1+\frac{x}{2}$. Toutefois, un contrôle algébrique s'avère nécessaire, notamment pour x proche de 0, où l'on ne maîtrise pas parfaitement les positions relatives des deux courbes.

Par élévation au carré on est amené à comparer $1+x$ et $1+x+\frac{x^2}{4}$, ce qui est immédiat.

Conclusion : Sur l'intervalle $[-1, 1]$, $\sqrt{1+x}\leqslant 1+\frac{x}{2}$.

Commentaire général

Le fait de **disposer de la courbe représentative** de la fonction permet de préciser rapidement (en général) si cette fonction est majorée, minorée, bornée ou non. De plus, l'encadrement de f que l'on veut éventuellement obtenir est, le plus souvent, **le meilleur possible** (ceci n'est nullement une obligation et l'on peut se contenter, selon le problème posé, d'un encadrement plus large).

Cette remarque reste valable lorsque l'on souhaite comparer deux fonctions précises ou une fonction donnée, à certaines fonctions d'une même famille. Ainsi par exemple, comparer une fonction f aux fonctions affines revient à positionner la courbe représentative de f par rapport aux droites du plan.

Exercices

38. Soit f la fonction :

$$x \longmapsto |2x+3|-|x-1|.$$

1° En utilisant l'inégalité :

$$|a-b|\leqslant|a|+|b| \ ,$$

montrer que $|f(x)|\leqslant 3|x|+4$.

En déduire que f est bornée sur l'intervalle $[-2, 3]$ et préciser l'encadrement ainsi obtenu.

2° Comparer avec l'encadrement fourni — sur le même intervalle — par la représentation graphique.

39. Dans cet exercice, on demande de tracer la courbe représentative de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{2x+1}{x-4}$$

et de préciser, pour les intervalles I proposés, si la fonction est majorée, minorée, bornée ou non.

a) $I=[-8, -5]$,

b) $I=[4,1, +\infty]$,

c) $I=]4, +\infty[$.

40. Tracer les courbes représentatives sur $[-1, 1]$, des fonctions :

$$x \longmapsto \frac{1}{x-2} \quad \text{et} \quad x \longmapsto -\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} .$$

Contrôler algébriquement ce que suggère la figure.

d. Utilisation des variations

Exemple 6

Soit f la fonction[1] $x \longmapsto x+\dfrac{1}{x}$.

Préciser si la fonction est majorée, minorée, bornée ou non sur les intervalles $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$, $[1, +\infty[$ *et* $]0, 1]$.

Rappelons le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	‖	$\searrow$	2	$\nearrow$	

• **Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$:**

Il est clair que $2 \leqslant f(x)$ et que f est majorée par le plus grand des deux nombres $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(3)$.

Si l'on souhaite préciser : $f\left(\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{2}$, $f(3)=3+\frac{1}{3}$ et donc $f\left(\frac{1}{2}\right)<f(3)$. Ainsi :

$$\textbf{pour tout } x \textbf{ de } \left[\frac{1}{2}, 3\right], \quad 2 \leqslant f(x) \leqslant \frac{10}{3} .$$

• **Sur l'intervalle $[1, +\infty[$:**

La fonction f est manifestement **minorée par 2;** mais le tableau de variations ne permet pas de conclure sur la majoration ou non de f sur $[1, +\infty[$.

On voit que ce problème est lié au comportement de f pour les grandes valeurs de x; comme $x \leqslant f(x)$ la **fonction f n'est pas majorée** sur $[1, +\infty[$ (sinon la fonction $x \longmapsto x$ serait majorée sur cet intervalle, ce qui n'est pas le cas).

• **Sur l'intervalle $]0, 1]$:**

De même, d'après le tableau de variations, pour $x \in]0, 1]$, $f(x) \geqslant 2$. L'utilisation, cette fois de l'inégalité $\frac{1}{x} \leqslant f(x)$ permet de conclure que **f n'est pas majorée** sur $]0, 1]$:

— Soit graphiquement : si f était majorée sur $]0, 1]$; $x \longmapsto \frac{1}{x}$ le serait également.

Or, de toute évidence, cette branche d'hyperbole n'est située sous aucune parallèle à (Ox).

— Soit numériquement : l'inégalité $f(x) \leqslant M$ conduirait à $\frac{1}{x} \leqslant M$ pour tout x de $]0, 1]$ et donc à $x \geqslant \frac{1}{M}$, ce qui n'a pas lieu, par exemple pour $x=\frac{1}{2M}$.

[1] Les variations de cette fonction ont été étudiées dans le paragraphe II.

Commentaire

L'utilisation des variations d'une fonction dans les problèmes de majoration-minoration s'appuie sur le résultat suivant :

« Une fonction monotone sur $[a, b]$ est encadrée par $f(a)$ et $f(b)$. »

De façon plus précise :

- si f est croissante sur $[a, b]$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, pour tout $x \in [a, b]$;
- si f est décroissante sur $[a, b]$, $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$, pour tout $x \in [a, b]$.

Nous verrons dans les chapitres 8 et 9 une autre utilisation de la monotonie dans la comparaison de fonctions. Cette méthode, pertinente lorsque l'on dispose des résultats essentiels sur la **dérivation des fonctions**, sera fréquemment mise en œuvre dans les problèmes de comparaison de **suites numériques.**

Exercices

41. *1°* Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto 1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (utiliser les résultats sur la composition des fonctions monotones) et montrer que, pour $x>0$, $f(x)<1$.

2° Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est positive.

42. *1°* Montrer que la fonction f :

$$x \longmapsto 1-x+\frac{1}{x+1}$$

est décroissante sur $]-1, +\infty[$. Encadrer au mieux la fonction f dans $[0, 1]$.

2° Vérifier que, pour $-1<x\leq 0$, $f(x) \geq \dfrac{1}{x+1}$.

3° Cette fonction est-elle minorée sur $]-1, 0]$?

IV. Recherche d'extremums

1. Rappel des définitions

Soit f une fonction numérique et I un intervalle contenu dans $\mathcal{D}_f$.

1. On dit que f admet un *maximum* en un point x_0 de I lorsque (figure 21) :

$$\text{pour tout } x \text{ de } I,\quad f(x) \leq f(x_0).$$

2. On dit que f admet un *minimum* en un point x_0 de I lorsque (figure 22) :

$$\text{pour tout } x \text{ de } I,\quad f(x_0) \leq f(x).$$

Illustration

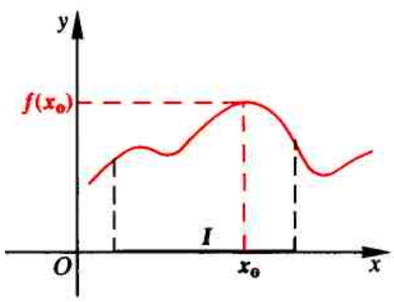


Figure 21
Maximum : $f(x_0)$ est la plus grande valeur de f sur I.

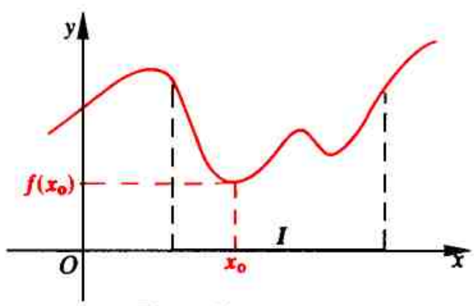


Figure 22
Minimum : $f(x_0)$ est la plus petite valeur de f sur I.

On notera que la notion d'extremum, telle qu'elle est définie ci-dessus, dépend de l'intervalle considéré ainsi (figure 23). f admet un maximum en x_0 sur $[b, c]$ mais ne présente pas de maximum sur $[a, c]$.

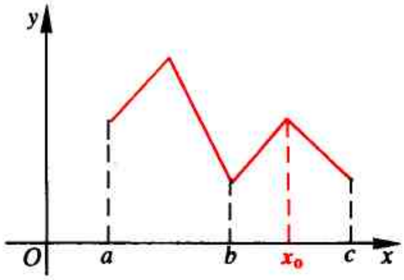


Figure 23

2. Méthodes élémentaires

a. Préliminaires

De nombreuses situations conduisent à déterminer le(s) maximum(s) ou minimum(s) de certaines fonctions numériques. Il est indispensable de préciser dans quel cadre sont abordés ces problèmes d'extrémums et ce qu'il faut entendre par méthodes élémentaires.

• **Problème abordé :** il s'agit de déterminer le(s) maximum(s) ou minimum(s) d'une fonction sur un **intervalle donné.**

• **Méthodes élémentaires :** un extrémum d'une fonction f sur un intervalle I peut être perçu comme un cas particulier de majorant ou de minorant de la fonction sur cet intervalle. On pourra donc mettre en œuvre les techniques élémentaires précédentes, basées sur :

. les propriétés de l'ordre vis-à-vis des opérations (exercices **43** et **44** ci-après),

. l'interprétation graphique (n^{os} **45** et **46**),

. l'usage des variations de la fonction (**47** et **48**).

Exercices

43. Pour chacune des fonctions f ci-dessous :

1° vérifier que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;

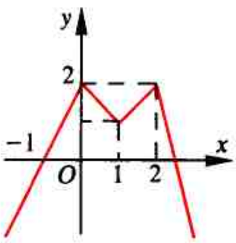
2° déterminer les valeurs de x pour lesquelles f présente un minimum sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur du minimum de f.

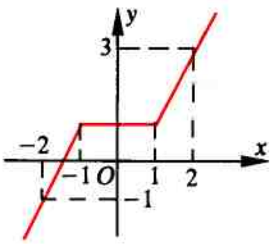
a) $f(x) = |x-1| - 2$; *b*) $f(x) = 1 + |x| + x^2$.

44. Même exercice que ci-dessus en remplaçant minimum par maximum.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 4$. *b*) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|x|}}$.

45. Dans chacun des cas ci-après, préciser si f admet un maximum ou un minimum en un point de I. Dans l'affirmative, préciser leurs valeurs et pour quel(s) réel(s) ils sont atteints.

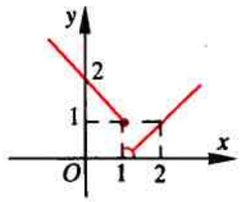




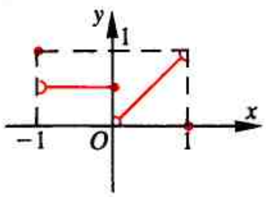
1° *a*) $I = [-1, 1]$
b) $I = [0, 1]$
c) $I = [0, 2]$

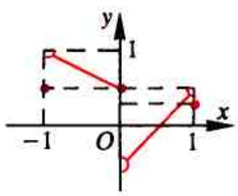
2° *a*) $I = [-2, 2]$
b) $I = [-2, 1]$
c) $I = [-1, 1]$

3° *a*) $I = [0, 1]$
b) $I = [0, 2]$
c) $I = [1, 2]$



46. Les fonctions représentées ci-dessous admettent-elles un minimum, un maximum, sur l'intervalle $[-1, 1]$, puis sur $[0, 1]$? Justifier la réponse.





47. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ $(a < b)$ et soit $x_0 \in]a, b[$.

1° On suppose f croissante sur $[a, x_0]$ et décroissante sur $[x_0, b]$. Montrer que f admet un maximum en x_0.

2° On suppose f décroissante sur $[a, x_0]$ et croissante sur $[x_0, b]$. Montrer que f admet un minimum en x_0.

48. Une fonction impaire, définie sur $\mathbb{R}$, admet un maximum $M = 25$ au point $x_0 = 2$. Admet-elle un minimum? Préciser.

b. *Exemples*

Exemple 1

Les deux extrémités d'une règle de longueur l se déplacent sur deux axes rectangulaires. Pour quelle position de la règle le triangle ainsi formé est-il d'aire maximum?

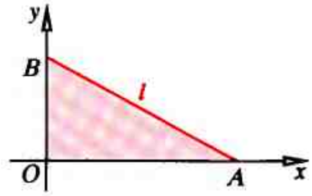


Figure 24

Désignons par A et B les extrémités de la règle qui reposent respectivement sur (Ox) et (Oy) et désignons par x la longueur de OA $(0 \leqslant x \leqslant l)$. D'après le théorème de Pythagore, $OB = \sqrt{l^2 - x^2}$ et donc l'aire du triangle OAB est égale à $\frac{1}{2}x\sqrt{l^2-x^2}$.

Il s'agit donc de déterminer — s'il existe — **le maximum de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2}x\sqrt{l^2-x^2}$ sur l'intervalle $[0, l]$.**

Il est clair que l'on peut ramener le problème à la recherche du maximum de la fonction $x \longmapsto x\sqrt{l^2-x^2}$ sur $[0, l]$. Lorsque x décrit $[0, l]$, $x\sqrt{l^2-x^2}$ et $(x\sqrt{l^2-x^2})^2$ sont maximums en même temps : cela est dû à la croissance sur $[0, +\infty[$ de la fonction $X \longmapsto X^2$. Or, $(x\sqrt{l^2-x^2})^2 = x^2(l^2-x^2)$ est le produit de deux nombres x^2 et l^2-x^2 de somme constante. On sait, dans ces conditions (cf. chapitre 1, page 21), que ce produit est maximal lorsque ces deux nombres sont égaux : $x^2 = l^2 - x^2$, soit $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l$. On vérifie alors que $\frac{\sqrt{2}}{2}\, l$ appartient bien à $[0, l]$ et l'on calcule la valeur de f en ce point : $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l\right) = \frac{1}{4}\, l^2$.

Il est immédiat de voir que la position de la règle correspondant à ce maximum est celle pour laquelle $OA = OB$ (figure 25).

Figure 25

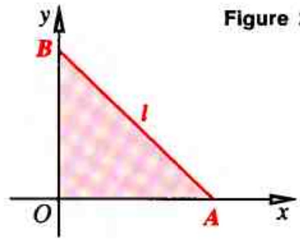
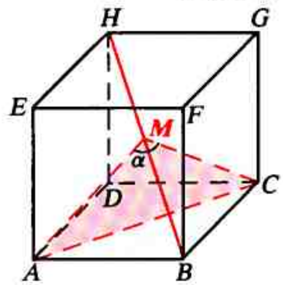


Figure 26



Exemple 2

On considère un cube ABCDEFGH de côté a.

Sur la figure 26, α désigne la mesure en radians de l'angle $\widehat{AMC}$ $(\alpha \in [0, \pi])$.

Déterminer la position du point M sur la diagonale $[B, H]$ de façon que α soit le plus grand possible.

- **Le triangle AMC est isocèle en M.**
En effet M appartient au plan des points B, D, H, F, qui est le plan médiateur de $[A, C]$ et donc $MA = MC$.

- **Dans le triangle AMC.**
Soit I le milieu de $[A, C]$. D'après ce qui précède, l'angle $\widehat{AMI}$ a pour mesure $\frac{\alpha}{2}$ et α est maximum lorsque $\frac{\alpha}{2}$ est maximum.

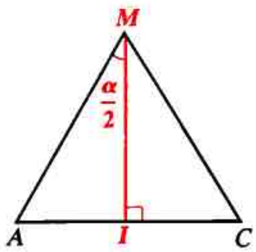


Figure 27 ▶

Comme $\frac{\alpha}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que la fonction $x \longmapsto \sin x$ est *croissante* sur cet intervalle, $\frac{\alpha}{2}$ est maximum quand $\sin\frac{\alpha}{2}$ est maximum.

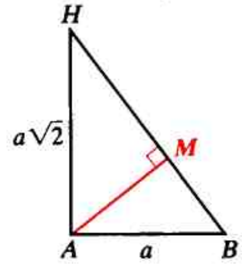
Dans le triangle rectangle AMI nous avons la relation trigonométrique $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AI}{AM}$.

La distance AI étant fixée $\left(AI = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\sin\frac{\alpha}{2}$ est maximum lorsque **AM est minimum.**

Conclusion : Le point M cherché est le point de $[B, H]$ le plus près de A.

• **Détermination de M.**
Plaçons-nous dans le plan (ABH). Le point M cherché et alors le projeté orthogonal de A sur $[B, H]$.
Il est possible, grâce aux relations métriques dans le triangle rectangle ou par un calcul d'aires de préciser la distance AM.
On a (par exemple) : $AM \times HB = AB \times AH$, soit, comme $AB = a$, $AH = a\sqrt{2}$ et $BH = a\sqrt{3}$: $AM = \dfrac{a \times a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Figure 28



Dans ce cas, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{AI}{AM} = \dfrac{a\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui donne $\dfrac{\alpha}{2} = 60°$ ou $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

Finalement, la valeur maximum de α est $\dfrac{2\pi}{3}$, soit 120°.

Commentaires

• L'utilisation des identités remarquables (exemple 1) et la connaissance des variations d'une fonction (exemple 2) joints — lorsque cela est possible — à des considérations géométriques (courbe représentative, par exemple) constituent l'essentiel des **méthodes élémentaires** dans la détermination des extremums (pour les autres méthodes, voir chapitre 8).

• Il faut noter cependant une démarche d'usage fréquent :

« pour obtenir les extrémums d'une fonction f sur un intervalle donné, on peut **composer avec une fonction strictement monotone** ».

Ainsi :

Exemple 1 : on cherche le maximum de la fonction $x \longmapsto x\sqrt{l^2 - x^2}$. Pour cela, on compose avec la fonction croissante sur $[0, +\infty[$: $x \longmapsto x^2$ et l'on est ramené à la détermination du maximum de $(f(x))^2$.

Exemple 2 : cette fois, le maximum de $\dfrac{\alpha}{2}$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, est obtenu grâce à la fonction décroissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x \longmapsto \dfrac{k}{\sin\dfrac{x}{2}}$ (avec $k = AI$) : on cherchera donc le minimum de cette fonction.

Exercices

49. Soit f une fonction **positive** sur un intervalle I. Montrer que f admet un maximum en x_0 appartenant à I si et seulement si la fonction $x \longmapsto (f(x))^2$ admet un maximum en x_0.

50. Reprendre l'exercice **49** en remplaçant maximum par minimum.

51. Déterminer géométriquement le minimum de la fonction de $x = A'M$ $(0 \leqslant x \leqslant 8)$ définie par $f(x) = AM + MB$ (cf. exercice **10** page 149).

Vérifier le résultat obtenu par un calcul algébrique.

V. Approximation de fonction

1. Introduction

• Pour des calculs n'exigeant pas une précision extrêmement fine, il est courant — et très commode — d'avoir recours à des **approximations numériques.** En Physique, en Chimie, etc., on utilise (à juste titre) des « formules » telles que :

$$\frac{1}{1 + 5{,}1 \times 10^{-6}} \approx 1 - 5{,}1 \times 10^{-6} \quad ; \quad \sqrt{1 + 3 \times 10^{-4}} \approx 1 + \frac{3 \times 10^{-4}}{2} \ldots$$

• Le point de vue développé ici — concernant ces approximations usuelles — est le **point de vue fonctionnel.** Autrement dit, il s'agit :

· **d'approximer une fonction donnée** $\left(x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}\ ,\quad x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}\ ,\quad x \longmapsto \sqrt{1+x}\ ,\ \ldots\right)$ dans des **conditions bien précisées** (« pour les petites valeurs de x ») par une **fonction plus simple** : en général une **fonction affine;**

· **de mesurer l'erreur** résultant de cette approximation.

• L'intérêt de telles approximations ne se limite pas à **l'aspect numérique :** leur intervention dans la **représentation graphique** d'une fonction est un exemple d'utilisation qui reste au niveau de cet ouvrage. En ce qui concerne la question — légitime — « comment obtient-on de telles approximations affines[1]? » une réponse sera fournie dans le chapitre 7 au moyen des **développements limités d'ordre 1.**

2. Approximation de $\dfrac{1}{1+x}$ et $\dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de 0[*]

a. Etude préliminaire

Elle est basée sur l'égalité $(1+x)(1-x)=1-x^2$, d'où l'on déduit :

$$\text{pour}\quad x \neq -1\ ,\quad \frac{1}{1+x}=1-x+\frac{x^2}{1+x}\ .$$

On obtient alors $\dfrac{1}{1+x}-(1-x)=\dfrac{x^2}{1+x}$, ce qui montre que l'erreur commise en remplaçant $\dfrac{1}{1+x}$ par $(1-x)$ est $\left|\dfrac{x^2}{1+x}\right|$.

Comme l'approximation visée concerne les « petites valeurs » de x, nous supposerons pour fixer les idées que $\dfrac{-1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$. Ainsi : $\dfrac{1}{2} \leqslant 1+x$ et $\dfrac{1}{1+x} \leqslant 2$.

D'où :
$$\text{pour}\quad \frac{-1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}\ ,\quad \left|\frac{1}{1+x}-(1-x)\right| \leqslant 2x^2\ . \qquad (1)$$

Lorsque x est dans l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, $-x$ l'est également et le changement de x en $-x$ dans (1) conduit à :
$$\left|\frac{1}{1-x}-(1+x)\right| \leqslant 2x^2\ . \qquad (2)$$

On peut donc énoncer le théorème :

b. Théorème

Sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ est *approchée* par la fonction affine $x \longmapsto 1-x$ avec une *précision de* $2x^2$.

(1) C'est-à-dire par des fonctions affines.

(*) C'est-à-dire pour des valeurs de x suffisamment petites.

Comme il a été vu dans l'étude préliminaire, il suffit de changer x en $-x$ pour obtenir un résultat comparable concernant $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$.
La figure 29 donne l'illustration graphique de ce résultat (unité : 2 cm).

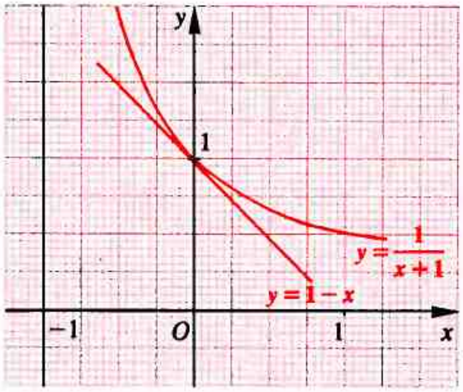


Figure 29

Exemples

1. Le calcul machine de $\frac{1}{1\,005}$ donne $0{,}000\,995\,024\ldots$
En écrivant : $\frac{1}{1\,005}=\frac{1}{1\,000+5}=\frac{1}{1\,000}\times\frac{1}{\left(1+\frac{5}{1\,000}\right)}$

et en utilisant l'approximation : $\frac{1}{1+\frac{5}{1\,000}}\approx 1-\frac{5}{1\,000}$,

on obtient : $\frac{1}{1\,005}\approx\frac{1}{1\,000}\left(1-\frac{5}{1\,000}\right)$, soit $0{,}000\,995$.

2. Essayons d'obtenir une valeur approchée de $\frac{1}{1+x^2}$ pour x assez petit.
En substituant x^2 à x dans le résultat ci-dessus, on a : $\left|\frac{1}{1+x^2}-(1-x^2)\right|\leqslant 2x^4$.

Et donc, par exemple, pour $x=\frac{1}{10}$, on a : $\frac{1}{1+\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{100}{101}\approx 1-\frac{1}{100}=0{,}99$ à 2×10^{-4} près.

Remarque : Comme le montrent ces exemples, l'approximation de $\frac{1}{1+x}$ par $1-x$ peut être utilisée pour obtenir des valeurs approchées d'expressions de la forme $\frac{1}{A+h}$ $\Big($dès que $\frac{h}{A}$ est suffisamment « petit »$\Big)$ ou de la forme $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{1-x^2}$, etc.

Exercices

52. Utiliser le théorème précédent pour majorer l'écart entre $\frac{1}{1\,005}$ et $0{,}000\,995$. Expliquer alors les résultats obtenus dans l'exemple ci-dessus.

53. Donner une valeur approchée de $\frac{1}{9\,995}$; préciser l'erreur.

54. Construire dans un même repère les courbes représentatives sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ des fonctions :

$$x \longmapsto \frac{x}{1+x} \quad \text{et} \quad x \longmapsto x.$$

Contrôler ce que suggère la figure en montrant que $\left|\frac{x}{1+x}-x\right|\leqslant 2x^2$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

3. *Approximation de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0*

a. *Etude préliminaire*

L'exemple 5 (page 160) « étude de la position respective sur $[-1, +1]$ des courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ et $x \longmapsto \frac{x}{2}$ » a pu faire percevoir que la fonction $\sqrt{1+x}$

pouvait être approchée par $x \longmapsto 1+\frac{x}{2}$ au voisinage de 0. (C'est, par ailleurs, la formule utilisée en Sciences Physiques.) Estimons l'**erreur** : $e(x)=1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}$.

En utilisant l'« expression conjuguée » $\left(1+\frac{x}{2}\right)+\sqrt{1+x}$, il vient :

$$e(x)=\frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2-(1+x)}{1+\frac{x}{2}+\sqrt{1+x}}, \quad \text{soit :} \quad e(x)=\frac{\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x}{2}+\sqrt{1+x}}.$$

Comme pour $x \geqslant -1$, on a $1+\frac{x}{2}+\sqrt{1+x} \geqslant \frac{1}{2}$, $e(x)$ est un réel positif[1] majoré par $\frac{x^2}{2}$.

Conclusion : pour $x \geqslant -1$, $\mathbf{0 \leqslant 1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x} \leqslant \frac{x^2}{2}}$. D'où le théorème :

b. *Théorème*

Sur l'intervalle $[-1, +\infty[$, la fonction affine $x \longmapsto 1+\frac{x}{2}$ est une *approximation* par excès de la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ avec une *erreur inférieure à* $\frac{x^2}{2}$.

Exemples

1. On pourra approcher $\sqrt{1+4\times10^{-6}}$ par $1+2\times10^{-6}$ (valeur par excès) avec une précision de 8×10^{-12} (donc inférieure à 10^{-11}).

2. Considérons le triangle rectangle ABM, avec $AB=1$ et $AM=x>0$. On note $p(x)$ le périmètre de ce rectangle. Montrons comment les résultats précédents permettent d'obtenir de « bonnes » valeurs approchées de $p(x)$ pour les petites valeurs de x, mais **également pour les grandes valeurs de x.** Il est clair que $p(x)=1+x+\sqrt{1+x^2}$.

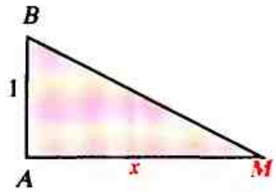


Figure 30

• **Pour x petit :** On estimera $\sqrt{1+x^2}$ à $1+\frac{x^2}{2}$ avec une erreur inférieure à $\frac{x^4}{2}$.

Ainsi $p(x)\approx 2+x+\frac{x^2}{2}$, avec une erreur inférieure à $\frac{x^4}{2}$.

De façon plus précise : $$\mathbf{0 \leqslant p(x)-\left(2+x+\frac{x^2}{2}\right) \leqslant \frac{x^4}{2}} \qquad (1)$$

On peut contrôler l'approximation $p(x)\approx 2+x$ que suggère la figure 31 :

$$\mathbf{0 \leqslant p(x)-(2+x) \leqslant \frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}} \qquad (2)$$

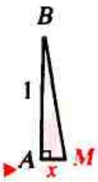


Figure 31

• **Pour x grand :** Même si l'inégalité $0 \leqslant 1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x} \leqslant \frac{x^2}{2}$ est vraie sur $[-1, +\infty[$ elle n'offre que peu d'intérêt en tant qu'approximation pour les grandes valeurs de x.

Écrivons $\sqrt{1+x^2}$ sous la forme $\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

(1) Ceci découle également des résultats de l'exemple 5, page 160.

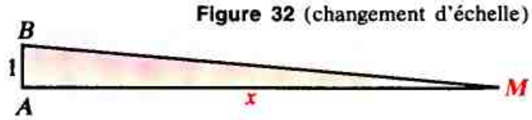
On a alors : $$p(x)=1+x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\text{, avec } x>0.$$

L'inégalité $\sqrt{1+X}\leqslant 1+\frac{X}{2}$, appliquée à $X=\frac{1}{x^2}$, donne (tous calculs faits) :

$$\mathbf{0\leqslant p(x)-(1+2x)\leqslant\frac{1}{2x}} \qquad (3)$$

estimant ainsi l'erreur commise dans l'approximation suggérée par la figure 32 (basée sur $MB\approx x$).

Figure 32 (changement d'échelle)



4. Remarques générales

1. L'approximation **au voisinage de 0** d'une fonction par une fonction affine peut permettre de trouver une approximation d'une fonction pour les **grandes valeurs de la variable :** on notera à ce sujet le rôle essentiel du changement de variables de x en $\frac{1}{x}$.

2. L'exemple 2 ci-dessus montre que l'on peut envisager des approximations d'une fonction **autres que par une fonction affine :** fonctions polynômes par exemple, avec un gain de précision...

3. On cherche en général à obtenir une **majoration simple** de l'erreur dans une appròximation. On est donc conduit à établir assez souvent des inégalités telles que :

$$|e(x)|\leqslant k|x| \quad \text{ou} \quad |e(x)|\leqslant kx^2\text{, etc.}$$

(k étant un réel strictement positif).

VI. Compléments

1. Problèmes d'extremum et factorisation de polynômes

Considérons le problème suivant :

D'après *Représentations graphiques*. IREM de Rennes in « *Thèmes pour la classe de Seconde* ». Bulletin Inter-Irem.

On dispose d'une plaque carrée de 6 dm de côté. A chaque coin de la plaque, on découpe un carré de x dm de côté. On obtient alors le patron d'une boîte ouverte.

1° Calculer le volume $v(x)$ de cette boîte en fonction de x.

2° Pour quelle valeur de x obtient-on la boîte de plus grand volume?

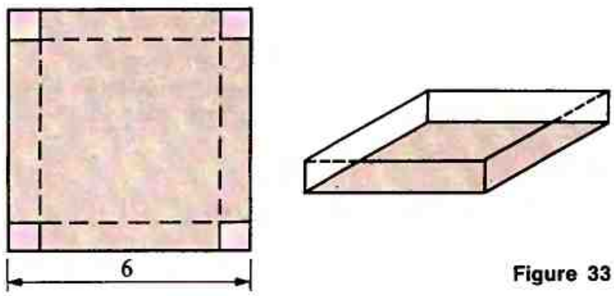


Figure 33

Solution

Il n'y a aucune difficulté à exprimer le volume $v(x)$ de la boîte : $v(x)=(6-2x)^2x$, avec pour ensemble de définition l'intervalle]0, 3[(sans quoi il n'y a plus ni patron, ni boîte...). Puisque $v(x)=4(3-x)^2x$, le problème est de **déterminer le maximum de la fonction $f : x \longmapsto (3-x)^2x$ sur l'intervalle]0, 3[.**

• **1re méthode :**

On tabule quelques valeurs, en y associant le tracé de la courbe « point par point ».

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	0	3,125	4	3,375	2	0,625	0

Il semble raisonnable de conjecturer que le maximum de f est égal à 4 et est atteint au point $x=1$.
Il s'agit donc de contrôler que pour $x\in]0,3[$, $f(x)\leqslant f(1)$ ou encore que $f(x)-f(1)\leqslant 0$.
La fonction f étant polynomiale, il est possible de factoriser $f(x)-f(1)$ par $(x-1)$ (cf. chapitre 2).

On peut vérifier (successivement que) :
- $f(x)-f(1)=x^3-6x^2+9x-4$;
- $f(x)-f(1)=(x-1)(x^2-5x+4)$;
- $f(x)-f(1)=(x-1)^2(x-4)$.

Ce dernier résultat permet d'affirmer que, pour $0<x<3$, $f(x)-f(1)\leqslant 0$, soit $f(x)\leqslant f(1)$.

Conclusion : Le volume maximum est atteint pour $x=1$ et $v(1)=16 \text{ dm}^3$.

- **2e méthode :**

On cherche a priori un point x_0 de $]0,3[$ tel que $f(x)\leqslant f(x_0)$ pour tout réel x de $]0,3[$ ou encore $f(x)-f(x_0)\leqslant 0$.
La fonction f étant polynomiale, on peut alors factoriser $f(x)-f(x_0)$ par $(x-x_0)$.
En développant, il vient $f(x)=x^3-6x^2+9x$. En effectuant la factorisation à l'aide du schéma de Hornër (par exemple), on obtient : $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\left(x^2+(-6+x_0)x+9-6x_0+x_0^2\right)$.
Désignons par P le polynôme $x\longmapsto x^2+(-6+x_0)x+9-6x_0+x_0^2$.
L'étude du signe de $f(x)-f(x_0)$ se présente donc ainsi (tableau I) :

I

x	0		x_0		3
$x-x_0$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		?		?	
$f(x)-f(x_0)$		$-$	0	$-$	

II

x	0		1		3
$x-1$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)-f(1)$		$-$	0	$-$	

Rappel : $f(x)-f(x_0)\leqslant 0$.

Un tel tableau ne peut être vérifié que si le polynôme du **second degré P change de signe** en x_0. D'après ce que nous savons des propriétés du trinôme, il est nécessaire que x_0 soit une racine de P.
Comme $P(x_0)=3(x_0^2-4x_0+3)=3(x_0-1)(x_0-3)$, la seule solution de l'équation $P(x_0)=0$ dans l'intervalle $]0,3[$ est $x_0=1$. On obtient alors le tableau de signes **II**.

Conclusion : Pour tout réel x de $]0,3[$, $f(x)\leqslant f(1)$.
La fonction f admet un maximum sur $]0,3[$ au point $x_0=1$.

- **Remarque**

La deuxième méthode peut s'adapter à la recherche des extrémums d'un quelconque polynôme du troisième degré.

2. Les papillons(*)

a. Introduction

Comme signalé page 169, les inégalités de la forme $|f(x)|\leqslant k|x|$, $|f(x)|\leqslant k|x^2|$, etc., jouent un rôle important en analyse (approximation, mais aussi **limite** (chapitre 7) et **dérivation** (chapitres 7 et 8)).
Nous proposons ici — sous forme d'activités — l'étude de quelques situations de ce type.

(*) Cette terminologie — très significative — a été empruntée à l'ouvrage : *Mathématique* 1re S.E. Collection N. Dimathème. Didier.

b. Activités graphiques

Activité 8

Montrer que chacun des domaines suivants, représentés en rosé (figures **34** à **37**, ci-dessous) peut être défini comme l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant un système d'inéquations de la forme :

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ |y| \leqslant \varphi(x) \end{cases}$$

On précisera pour chacun d'eux les réels a et b et la fonction φ.

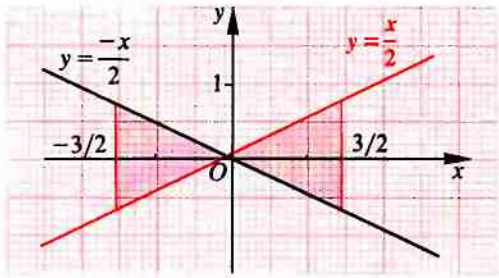


Figure 34 : « Papillon linéaire »

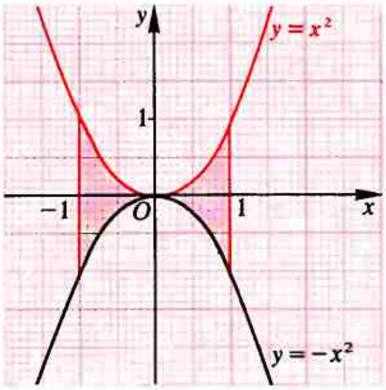


Figure 35 : « Papillon parabolique »

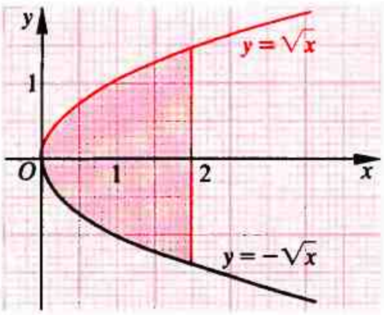


Figure 36 : « Papillon racine; à une aile »

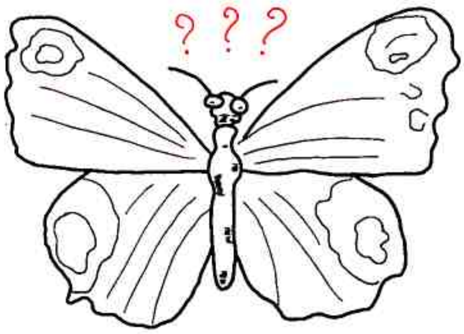


Figure 37 : « Papillon entré par erreur dans l'ouvrage »

Activité 9

1° Représenter graphiquement la fonction $x \longmapsto 2\sqrt{|x|}$ sur son ensemble de définition.

2° Soit f une fonction définie sur $[-1, 1]$ telle que pour tout x de $[-1, 1]$, $|f(x)| \leqslant 2\sqrt{|x|}$. Donner — par leur courbe représentative — plusieurs exemples de telles fonctions.

c. Activités de comparaison

Activité 10

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Montrer que, pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant 2|x|$.

Localiser la courbe représentative de f dans un domaine analogue à ceux présentés dans l'activité 8.

Activité 11

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} & \text{pour } x \neq 0. \end{cases}$$

Montrer que la courbe représentative de la fonction f est contenue dans le domaine $\mathcal{D}$ défini par : $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x}. \end{cases}$

EXERCICES

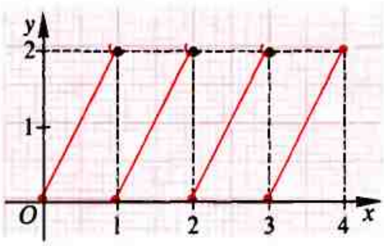
Vrai-Faux

1. Si une fonction f est décroissante sur un intervalle I, $f(x)$ diminue quand x diminue.

2. Une fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire et monotone, est une fonction constante.

3. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

4. La fonction représentée sur la figure ci-contre est strictement croissante sur $[0, 4]$.



5. Si $0 < a < f(x) < b$ alors $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{b}$.

6. Sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto \left|\sin \dfrac{x}{2}\right|$ est majorée par $\dfrac{1}{2}$.

7. La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

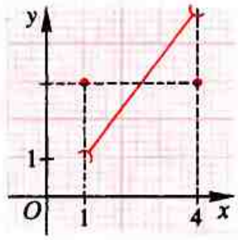
8. La fonction $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{2x-1}$ est bornée sur $[0, 1]$.

9. Pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a : $-1 \leqslant \dfrac{1}{\cos x} \leqslant 1$.

10. Pour $x \geqslant 0$, $\dfrac{x^2}{x+1} \leqslant x^2$.

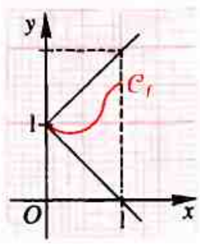
11. Une fonction positive sur un intervalle admet un minimum.

12. La fonction représentée sur la figure ci-contre n'admet pas d'extrémum sur $[1, 4]$.



13. Pour tout réel x, de $[0, 1]$, on a (cf. figure ci-contre) :

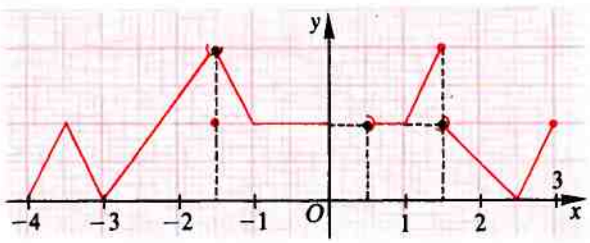
$$|f(x) - 1| \leqslant |x|.$$



Applications

1. Déterminer à partir de la courbe représentative de la fonction f (figure ci-dessous) :

- son ensemble de définition,
- les intervalles sur lesquels la fonction f est strictement monotone ou constante.



2. On pose $f(x) = x^2 - 2x$.

1° En factorisant $f(x) - f(x')$ par $x - x'$, étudier les variations de f.

2° Retrouver les résultats obtenus à l'aide d'une représentation graphique.

3. Compléter le tableau de variations de la fonction f sachant qu'elle est impaire sur $[-10; 10]$.

x	0		3		5		6		10
$f(x)$	0	↗	2	↘	1 ; −4	↗	−3	↘	0

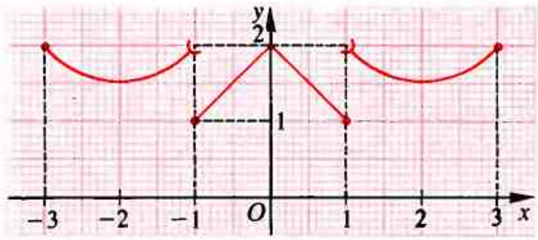
4. Préciser l'ensemble de définition de la fonction :

$$x \longmapsto \sqrt{(x-2)(x+2)}+3$$

et déduire ses variations de celles de :

$$x \longmapsto (x-2)(x+2).$$

5. Donner le tableau de variations de la fonction représentée ci-dessous.



6. En se ramenant à l'étude d'une fonction de référence, donner les variations des fonctions suivantes :

a) $f_1 : x \longmapsto 2x^2-4x$; *b*) $f_2 : x \longmapsto 2+\dfrac{3}{x-4}$;

c) $f_3 : x \longmapsto 3+2\sqrt{x-1}$; *d*) $f_4 : x \longmapsto (2x-1)^3$.

7. Établir les tableaux de variations des fonctions suivantes :

a) $f_1(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$; *b*) $f_2(x)=\dfrac{-x+3}{2x+4}$;

c) $f_3(x)=-4x^2+12x$; *d*) $f_4(x)=(x-1)(x+5)$.

8. A partir du tableau de variations de f (ci-dessous) donner le tableau de variations des fonctions :

a) $3f$; $-4f$;

b) $2f+4$; $6-2f$.

x	0		4		6		8		10
$f(x)$	‖ 0	↗	4	↘	1 ‖ 5	↘	4	↗	2

9. Expliquer comment l'on peut déduire des variations de f celles de la fonction $f+|f|$.

10. Faire une étude des variations des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto |x|+3x^2$; *b*) $x \longmapsto \sqrt{x}-\dfrac{1}{x^2}$;

c) $x \longmapsto -x-1+\dfrac{3}{x}$; *d*) $x \longmapsto 3+\dfrac{1}{x-1}$.

11. Déduire du tableau de variations de f (courbe représentative $\mathcal{C}_f$) ceux des fonctions dont la courbe est :

a) symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'origine,

b) symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport la droite Δ d'équation $x=4$.

x	−3		−1		2		4		6
$f(x)$	−2	↗	2	↘	1 ‖ 3	↘	−4	↗	0

12. Montrer que les fonctions suivantes sont strictement croissantes :

a) $x \longmapsto (2x+1)+x^2$ sur $]0, +\infty[$;

b) $x \longmapsto \sin x+\sqrt{x}$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

c) $x \longmapsto \sqrt{x}+4-\cos x-\dfrac{1}{x}$ sur $]0, \pi]$.

13. En considérant chaque fonction comme une fonction composée, déterminer ses variations sur son ensemble de définition :

a) $f_1 : x \longmapsto \sqrt{2x+1}$; *b*) $f_2 : x \longmapsto \sqrt{1-4x}$;

c) $f_3 : x \longmapsto (3x+1)^2$; *d*) $f_4 : x \longmapsto \sqrt{(x+1)^2+1}$.

14. Exercice analogue pour :

a) $f_1 : x \longmapsto \sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$; *b*) $f_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}}$.

15. Comparer les tableaux de variations de f et g pour :

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad g(x)=1+\frac{1}{x-1}.$$

16. Déterminer les variations des fonctions définies par les séquences suivantes (x est le nombre à l'affichage) :

a) x $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

b) x $\boxed{+}$ 5 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\div}$ 5 $\boxed{1/x}$ $=$

c) x $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

17. Étudier, dans chaque cas, la monotonie de $\sqrt{f}$:
a) $f : x \longmapsto 9-x^2$; *b*) $f : x \longmapsto (x-3)(x-6)$.

18. Étudier, dans chaque cas, la monotonie de $\dfrac{1}{f}$:
a) $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$; *b*) $f : x \longmapsto x^2-3x-2$.

19. Soit $f_1 : x \longmapsto (3x-2)^2+\sqrt{3x-2}$
et $f_2 : x \longmapsto 3\sqrt{x-1}-2$.

1° Montrer que f_1 peut s'écrire $g \circ f$, avec f affine, et en déduire ses variations.

2° Montrer que f_2 peut s'écrire $f \circ h$, avec f affine, et en déduire ses variations.

20. Donner les variations des fonctions suivantes :

a) $f_1 : x \longmapsto \dfrac{7}{x}+2$; *b*) $f_2 : x \longmapsto -3-\dfrac{9}{x}$;

c) $f_3 : x \longmapsto \cos(2x+\pi)$;

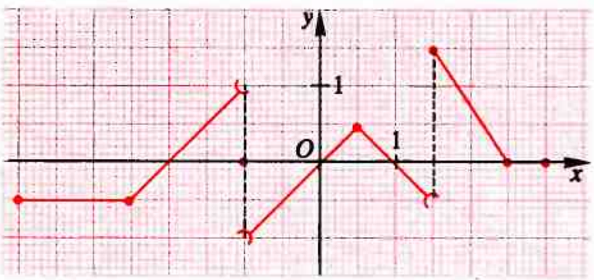
d) $f_4 : x \longmapsto \sqrt{3-x}-x$;

e) $f_5 : x \longmapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$;

f) $f_6 : x \longmapsto -3\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

(f_3, f_5, f_6 seront étudiées sur $[0, \pi]$.)

21. La fonction f définie sur $[-4; 3]$ est représentée sur la figure ci-dessous.



Rechercher des majorants et des minorants de f sur chacun des intervalles suivants :

a) $[0, 1]$; *b*) $[0, 2]$; *c*) $[-3{,}5; -1{,}5]$;
d) $]-4; -1{,}5[$; *e*) $[-2; 0]$; *f*) $]-4; 3[$.

22. Déterminer des majorants et des minorants sur $\mathbb{R}$ pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+3$;

b) $f_2 : x \longmapsto \sin x+\cos x$.

23. La fonction f est affine; de plus, elle est bornée sur $\mathbb{R}$.
Que peut-on conclure?

24. Montrer que la fonction f définie dans $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ par $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x-1}$ n'est pas majorée sur $\left]\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$, et n'est pas minorée sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right[$.

25. Montrer que les fonctions suivantes sont bornées sur $\mathbb{R}$:

a) $f_1 : x \longmapsto (\sin x+1)^{10}$;

b) $f_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+\sqrt{|x|}}$;

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{1}{10-\sin x-\cos x}$;

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{1}{1+\cos^2 x}$.

26. Déterminer sur $[0; 1]$ les extrémums des fonctions suivantes :
a) $f_1 : x \longmapsto \dfrac{3x+2}{2x+1}$; *b*) $f_2 : x \longmapsto x(1-x)$;

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{3+x^2}{x-2}$; *d*) $f_4 : x \longmapsto \sin \pi x$.

27. Donner deux méthodes permettant de montrer que : pour tout réel x strictement positif : $4x+\dfrac{25}{x} \geqslant 20$.
$\left(\text{L'une utilise la remarque } 4x \times \dfrac{25}{x} \text{ est constant.}\right)$

28. Comparer sur $\mathbb{R}$ les fonctions : $x \longmapsto x^3$;
$x \longmapsto x^2\sqrt{|x|}$; $x \longmapsto x|x|^2$; $x \longmapsto x^2$.

29. Comparer sur $\mathbb{R}_+$ les fonctions f et g définies par :

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1} \quad \text{et} \quad f(x)=\frac{1}{x+1}.$$

30. Construire un domaine plan limité par une parabole et une hyperbole et contenant la représentation graphique de la fonction indiquée :

a) $f_1 : x \longmapsto x^2+\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$;

b) $f_2 : x \longmapsto 2x^2+\dfrac{1}{x-1}+2$ $(x>0)$.

31. Trouver un minorant sur $\mathbb{R}$ de la fonction, puis rechercher, s'il existe, le plus grand de ces minorants :

a) $f_1 : x \longmapsto |2x-4|$;

b) $f_2 : x \longmapsto |x+1|+|x-5|$;

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{1}{4+x^2+2x}$.

32. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie : f est de période 2, f est paire, f est majorée par 3 sur $[0, 1]$ et positive.
Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

33. Représenter la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{-7x+1}{x-1}$ et l'encadrer sur $[2, 4]$.

34. Utiliser la courbe représentative de :

$$f : x \longmapsto 4x^2+6x+1$$

pour majorer $4x^2+6x+1$ sur $[-4, 0]$.

35. *1°* Montrer à l'aide d'une représentation graphique des fonctions :

$$x \longmapsto \sqrt{x} \quad \text{et} \quad x \longmapsto x+\frac{1}{3}$$

que, pour tout réel x positif : $\sqrt{x}<x+\dfrac{1}{3}$.

Contrôler le résultat par le calcul.

2° Reprendre ce qui précède pour $\sqrt{x}$ et $x+\dfrac{1}{4}$.

36. Soit f la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}+\dfrac{9}{\sqrt{x}}-2$.

1° Montrer que f n'est pas majorée sur $]0, +\infty[$ (utiliser l'inégalité $f(x) \geqslant \sqrt{x}-2$).

2° Proposer un minorant « évident » de f sur $]0, +\infty[$.

3° Montrer que 4 est la valeur minimum de f sur $]0, +\infty[$.

37. Déterminer sur $\mathbb{R}$ le minimum de chaque fonction :

a) $f(x)=|3x-6|+(x-2)^2+2$,

b) $g(x)=3(x-3)^2-|x-3|$.

38. Déterminer sur $\mathbb{R}$ le maximum de chaque fonction :

a) $f(x)=\dfrac{3}{|x|^3+1}+5$; *b*) $g(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x^3}+2}-5$.

39. Déterminer le minimum de $x+\dfrac{4}{x}$ pour $x>0$ et en déduire pour $x>0$ les minimums de :

a) $\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)^2$; *b*) $\sqrt{x^2+\dfrac{4}{x^2}}$.

40. Les haricots verts

(D'après *« Édition spéciale : activités en Seconde »* de l'IREM de Lille, 1981.)

Un supermarché vend des boîtes de haricots verts.
En temps normal :

— la boîte est vendue 6 F,

— il s'en vend 1000 par semaine.

Un organisme de marketting fait une étude de marché, et conclut que chaque baisse de 10 centimes sur le prix de la boîte permettra au supermarché d'augmenter la vente de 100 boîtes par semaine.
Le supermarché achète ces boîtes à 4 F pièce.

Soit x le prix de vente choisi ($4<x\leqslant 6$: le supermarché ne travaille pas à perte).

1° Calculer $N(x)$, $R(x)$ et $B(x)$ les nombres définis par :

- $N(x)$ = nombre de boîtes vendues par semaine,
- $R(x)$ = recette effectuée dans la semaine,
- $B(x)$ = bénéfice effectué dans la semaine.

2° Représenter graphiquement les fonctions N, R et B.

3° Le gérant touche un pourcentage sur les recettes, le caissier sur les bénéfices. Quel est le prix de vente le plus intéressant pour chacun d'eux?

*Déterminer pour chacun des nombres x suivants une valeur approchée de $(1+x)^2$, $(1+x)^{-1}$ et $\sqrt{1+x}$, en donnant une majoration de l'erreur commise (exercices **41** et **42**).*

41. $x=4\times 10^{-5}$; **42.** $x=-10^{-4}$.

43. Déterminer pour chacun des nombres a, b et c une valeur approchée et un majorant de l'erreur commise :

$$a=\sqrt{90002}\ , \quad b=\frac{1}{10008}\ , \quad c=(0{,}10003)^2.$$

Exercices

• Variations d'une fonction

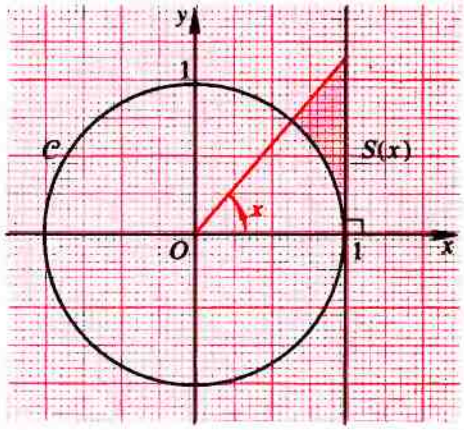
44. Étudier les variations des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto \dfrac{2x-3}{5-x}$; *b*) $x \longmapsto \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{5}$;

c) $x \longmapsto (x-E(x))^2$; *d*) $x \longmapsto \sqrt{x-E(x)}$.

45. Soit x un réel de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On désigne par $S(x)$ l'aire du domaine représenté sur la figure ci-dessous.



1° Calculer $S(x)$.

2° En déduire les variations de la fonction $x \longmapsto \tan x - x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, puis sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (utiliser les propriétés de parité).

46. Pour chacun des cas suivants, proposer deux fonctions f et g et un intervalle I tels que f soit strictement croissante et g strictement décroissante sur I afin que :

a) $f+g$ soit strictement croissante sur I;

b) $f+g$ soit strictement décroissante sur I;

c) $f+g$ ne soit pas monotone sur I.

47. Reprendre l'exercice précédent en remplaçant la somme $f+g$ par le produit $f \times g$.

48. Soit f et g deux fonctions définies, positives et monotones de même monotonie sur un intervalle I. Étudier la monotonie sur I de la fonction produit $f \times g$.

49. A partir des variations de $x \longmapsto x^2$, étudier les variations de :

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}, \quad x \longmapsto \sqrt{1+x^2}, \quad x \longmapsto (1+x^2)^2.$$

Dans les exercices **50** *à* **55**, *on demande de donner les variations de la fonctions g à partir de celles de la fonction f indiquée dans le tableau T_1.*
On reprendra ces exercices avec les tableaux de variation T_2 et T_3.

T_1

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	5	13	2	7	4	9

T_2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	0	-2	0	1	0	-3	0	5

T_3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	-6	-2	-7	-3	-8	-1

50. *a*) $g(x)=f(-x)$; *b*) $g(x)=f(3x-4)$.

51. *a*) $g(x)=f(x^2)$; *b*) $g(x)=(f(x))^2$.

52. *a*) $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$; *b*) $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

53. *a*) $g(x)=f(|x|)$; *b*) $g(x)=|f(x)|$.

54. *a*) $g(x)=\sqrt{f(x)}$; *b*) $g(x)=f(\sqrt{x})$.

55. *a*) $g(x)=|f(x)|+f(x)$; *b*) $g(x)=|f(x)|-f(x)$.

Dans les exercices **56** *à* **58**, *montrer que la fonction f est monotone sur l'intervalle I.*

56. *a*) $f(x)=(x-2)^3+2(x-2)+1$, $I=\mathbb{R}$;

b) $f(x)=2x-1-\frac{1}{x-1}$, $I=]1, +\infty[$.

57. *a*) $f(x)=5x^3+2x^2+x+1$, $I=[0, +\infty[$;

b) $f(x)=(x-2)^2-\frac{1}{x+3}$, $I=[2, +\infty[$.

58. *a*) $f(x)=x^2+x-\frac{1}{x}$, $I=[2, +\infty[$;

b) $f(x)=3(x+3)^3+5x-2$, $I=\mathbb{R}$.

59. Dresser le tableau des variations des fonctions suivantes :

$$x \longmapsto x^4+x^2+1 \ ; \quad x \longmapsto x^6-2x^3+2.$$

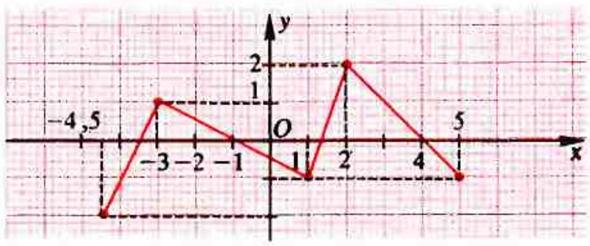
60. Étudier les variations des fonctions suivantes :

a) $f_1 : x \longmapsto \dfrac{1}{6+\sqrt{\frac{x}{2}+1}}$;

b) $f_2 : x \longmapsto \dfrac{1}{6+\sqrt{f_1(x)}}$;

c) $f_3 : x \longmapsto (f_2 \circ f_2)(x)$.

La fonction f admet la représentation graphique suivante :



En déduire la représentation graphique et les variations des fonctions g suivantes (exercices **61** *à* **63**).

61. *a*) $g(x)=f(2x)$; *b*) $g(x)=f(-x+3)$.

62. *a*) $g(x)=|f(x)|$; *b*) $g(x)=f(|x|)$;
c) $g(x)=|f(|x|)|$.

63. *a*) $g(x)=f(x^2)$; *b*) $g(x)=[f(x)]^2$.

64. Donner les variations des fonctions suivantes :

a) $f_1 : x \longmapsto |x-1|$;

b) $f_2 : x \longmapsto |x-1|+|x-2|$;

c) $f_3 : x \longmapsto |x-1| + |x-2| + |x-3|$;

d) $f_4 : x \longmapsto |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$;

e) $f_5 : x \longmapsto |x-1| + |x-2| + \ldots + |x-99| + |x-100|$.

• Majoration, minoration, comparaison de fonctions

65. Montrer que, pour tout réel x, $x+\sqrt{1+x^2}>0$.

66. Montrer que chacune des fonctions suivantes est minorée et majorée sur $\mathbb{R}$ et donner le meilleur minorant, le meilleur majorant :

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2} \; ; \; x \longmapsto \frac{1}{1+\sin^2 x} \; ;$$

$$x \longmapsto \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x^2}}.$$

67. Comparer sur $]0, +\infty[$ les fonctions :

$$x \longmapsto \frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} \quad \text{et} \quad x \longmapsto \frac{x}{2}.$$

En déduire la comparaison sur $]-\infty, 0[$.

68. Étudier les variations de chaque fonction puis l'encadrer sur $[0, 6]$:

$$x \longmapsto \frac{2}{3+x} \; ; \quad x \longmapsto \sqrt{\frac{2}{3+x}} \; ; \quad x \longmapsto (3+x)^2.$$

69. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'équation $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ et de la droite Δ d'équation $y=x+5$.

70. Comparer sur $\mathbb{R}$ les fonctions f, g et h définies par :

$$f(x)=\begin{cases} (x-1)^2-1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -(x-1)^2+1 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

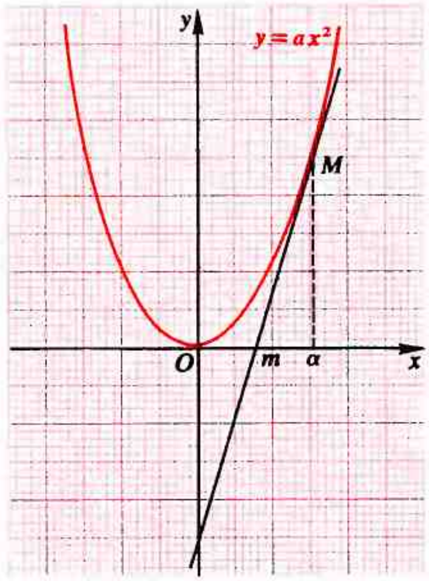
$$g(x)=x^3-4x \; ; \quad h(x)=x^3-2x.$$

71. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto 2\sqrt{x}$ et A le point de $\mathcal{C}$ de coordonnées $(1, 2)$.
A tout réel $x \geqslant 0$ différent de 1, on associe le point M_x de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et on désigne par $m(x)$ le coefficient directeur de la droite (AM_x) (figure ci-contre).

1° Quelles conjectures le graphique permet-il de faire sur la fonction m (monotonie, majoration, minoration)?

2° Expliciter $m(x)$ et contrôler les conjectures émises. (On montrera, en particulier, que sur $]1, +\infty[$: $0<m(x)<1$ et que l'on ne peut améliorer cet encadrement.)

72. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y=ax^2$ $(a>0)$. On désigne par M le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse α $(\alpha \neq 0)$ et par m le point de l'axe (Ox) d'abscisse $\dfrac{\alpha}{2}$.



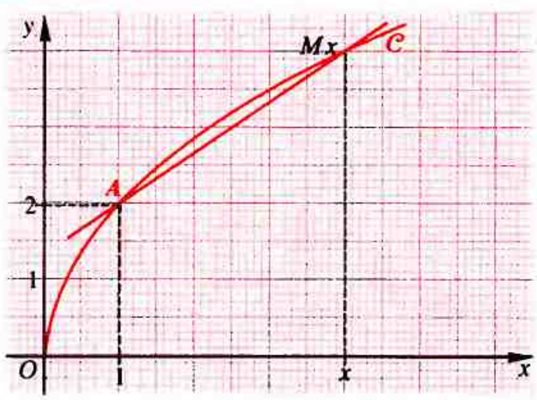
1° Écrire l'équation de la droite (Mm) : $y=d(x)$.

2° Étudier le signe de $ax^2-d(x)$ et en déduire la position relative de $\mathcal{P}$ et de la droite (Mm).

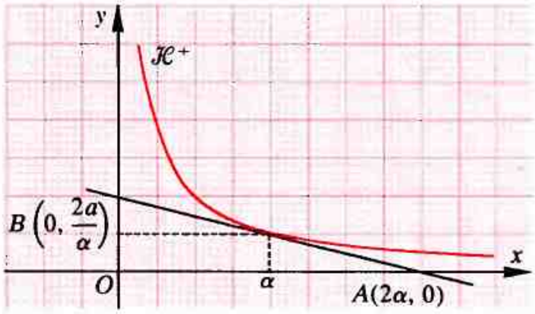
3° Calculer l'ordonnée du point d'intersection de (Mm) avec (Oy).

73. Comparer les nombres $\dfrac{1}{(1{,}000\,000\,2)^2}$ et $0{,}999\,999\,6$. (On pourra introduire le nombre $\alpha=2\times 10^{-7}$.)

(*Illustration «Jeux et Stratégies».*)



74. Soit $\mathcal{H}^+$ la branche d'hyperbole d'équation $y = \dfrac{a}{x}$ $(a > 0\ ,\ x > 0)$ et, sur (Ox) le point A d'abscisse 2α, sur (Oy) le point B d'ordonnée $\dfrac{2a}{\alpha}$.



1° Écrire l'équation $y = d(x)$ de la droite (AB).

2° Montrer, en comparant $\dfrac{a}{x}$ et $d(x)$ que, sauf un point M, $\mathcal{H}^+$ est au-dessus de (AB).
Préciser les coordonnées du point M commun à $\mathcal{H}^+$ et à (AB).

3° Obtient-on une propriété analogue pour $a < 0$? pour la branche correspondant à $x < 0$ (selon le signe de a)?

4° En utilisant la position de M sur $[A, B]$, préciser comment l'on peut tracer (AB) connaissant M.

5° Reprendre la construction de $\mathcal{H}$ en utilisant la propriété démontrée.

75. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto ax^3$ $(a > 0)$ et, M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse α $(\alpha \neq 0)$.

1° Écrire sous la forme $y = f(x)$ l'équation de la droite $\mathcal{D}$, passant par M et de coefficient directeur $3a\alpha^2$.

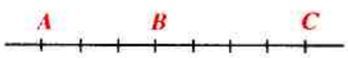
2° Factoriser complètement le polynôme du troisième degré $x \longmapsto P(x) - f(x)$.
En déduire que $\mathcal{D}$ recoupe $\mathcal{C}$ en un autre point, N, dont on précisera les coordonnées.

3° Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

4° Préciser les coordonnées des points d'intersection A et B de la droite $\mathcal{D}$ avec (Ox) et (Oy).
Donner une construction de la droite $\mathcal{D}$ et des points A, B et N à partir du seul point M.

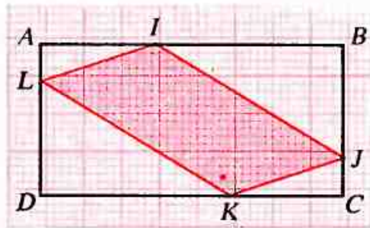
• Extrémums

76. Les points A, B et C de la droite $\mathcal{D}$ étant repérés comme l'indique la figure ci-contre, préciser le point M de cette droite pour lequel : $MA + 2MB + 3MC$ est minimum.



77. Déterminer les extrémums sur $\mathbb{R}$ des fonctions :
$f : x \longmapsto 2|x-1| + |x|$;
$g : x \longmapsto |x-2| - |x-4| + |2x+1|$;
$h : x \longmapsto |x-2| + |x-5| + |4+5x|$.

78. Sur les côtés d'un rectangle $ABCD$ de longueur 8 et de largeur 4, on place les points I, J, K, L tels que : $AI = BJ = CK = DL$ (figure ci-contre).
On pose $AI = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$.



1° Exprimer en fonction de x l'aire $\mathcal{A}(x)$ du quadrilatère $IJKL$. (On pourra — auparavant — préciser la nature de ce quadrilatère.)

2° Déterminer les extrémums de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $[0, 4]$.

79. Soit f une fonction numérique et I un intervalle. Pour tout réel m, on désigne par (E_m) l'équation :

$$\begin{cases} f(x) = m \\ x \in I. \end{cases}$$

On suppose que (E_m) admet une solution (au moins) si et seulement si m appartient à un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$.
Montrer que α et β sont respectivement le minimum et le maximum de f sur I.

Dans les exercices **80** *à* **82**, *étudier les extrémums de la fonction f en s'inspirant de la méthode proposée dans l'exercice* 79. *(On déterminera les valeurs de ces extrémums ainsi que les points où ils sont atteints.)*

80. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4x - 1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

81. $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2 + x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

82. $f(x) = x + a + \dfrac{1}{x - a}$ $(a > 0)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$.

83. Soit a et b deux réels non nuls et f la fonction $x \longmapsto ax + \dfrac{b}{x}$.

1° On suppose que a et b sont de signes contraires. Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[$; en déduire celles sur $]-\infty, 0[$.

2° On suppose a et b positifs.

a) Montrer que f n'est pas majorée sur $]0, +\infty[$.

b) En utilisant la méthode de l'exercice **79**, montrer que f admet un minimum sur $]0, +\infty[$. (Préciser sa valeur et en quel(s) point(s) il est atteint.)

c) Retrouver les résultats du *b*) en considérant $f(x)$ comme la somme de deux réels positifs dont le produit est constant.

3° Soit x, y tels que $0<x<y$. Montrer que :

$$f(y)-f(x)$$

est du signe de $xy-\frac{a}{b}$.

Donner alors le tableau des variations de f sur son ensemble de définition.

84. La boîte rectangulaire.

On dispose d'un morceau de carton rectangulaire de 80 cm sur 50 cm, que l'on évide à chaque coin d'un carré de x cm de côté.

On obtient alors le patron d'une boîte (sans couvercle) de volume noté $V(x)$.

1° Préciser l'ensemble de définition de V et calculer $V(x)$.

2° Soit x_0 appartenant à $]0, 25[$. Déterminer le polynôme P tel que :

$$V(x)-V(x_0)=(x-x_0)P(x).$$

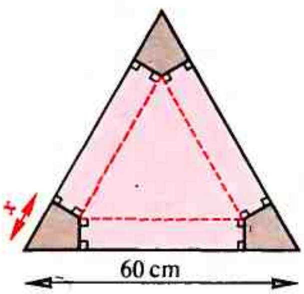
3° On suppose que V admet un maximum sur $]0, 25[$ au point x_0.

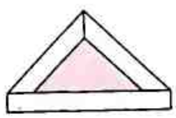
A l'aide d'un tableau de signes, montrer que $P(x_0)=0$. Quelle valeur de x_0 obtient-on?

4° Déterminer pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est maximum.

85. La boîte triangulaire.

En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer le volume maximum de la boîte triangulaire obtenue à partir d'un triangle équilatéral de 60 cm de côté.





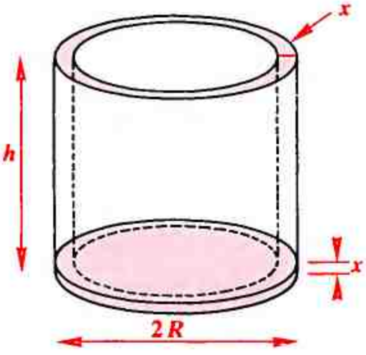
Approximations de fonctions

86. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a : $\left|\frac{1}{(1+x)^2}-(1-2x)\right|\leq 8x^2$.

En déduire que, sous les mêmes conditions :

$$\left|\frac{1}{(1-x)^2}-(1+2x)\right|\leq 8x^2.$$

87. Une boîte de conserve (sans couvercle) est fabriquée dans une plaque de métal d'épaisseur x. Ses dimensions **extérieures** sont portées sur la figure ci-contre.



1° Calculer le volume $V(x)$ de métal utilisé.

2° Montrer que $\pi R^2x+2\pi Rhx$ réalise une approximation de $V(x)$ pour les petites valeurs de x avec une erreur que l'on calculera dans le cas d'une boîte « normale » : $h=2R$.

3° Interpréter la quantité $\pi R^2x+2\pi Rhx$.

88. Soit f la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x+x^2}$.

Déterminer deux réels α et β strictement positifs tels que, pour tout réel x de $[-1, 1]$, on ait :

$$\alpha x^2\leq f(x)\leq \beta x^2.$$

89. Soit $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$.

1° Montrer que, pour $x>0$:

$$x+\frac{1}{2}\leq f(x)\leq x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}.$$

2° On note Δ_h $(h>0)$ la bande délimitée par les droites d'équations $y=x+\frac{1}{2}$ et $y=x+\frac{1}{2}+h$.

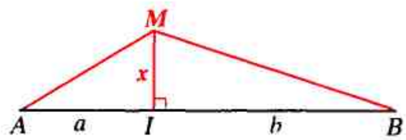
Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f sur l'intervalle $[10, +\infty[$ est contenue dans la bande $\Delta_{\frac{1}{20}}$.

Proposer un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ sur lequel, la courbe $\mathcal{C}_f$ est contenue dans Δ_h (h étant donné).

90. Une corde élastique est tendue entre deux points A et B. Elle est légèrement pincée dans une direction perpendiculaire à (AB) en un point I fixé de $[A, B]$.

On pose $IA=a$, $IB=b$ et $IM=x$ $(x>0)$.

On se propose d'obtenir une valeur approchée de l'allongement de la corde, pour des petites valeurs de x $(x>0)$.



1° Montrer que l'allongement $f(x)$ de la corde est :

$$f(x)=a\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}-1\right)+b\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}-1\right).$$

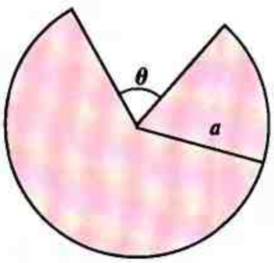
2° En utilisant le théorème, page 168, montrer que :

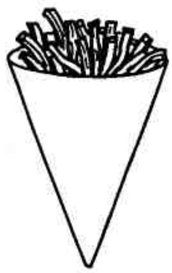
$$0\leqslant\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-f(x)\leqslant\frac{x^4}{2}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right).$$

3° Application numérique : On suppose que $a=4$, $b=2$.
Montrer que $f(x)\approx 0{,}375\times x^2$ avec une erreur inférieure à $0{,}1\times x^4$.

Problèmes

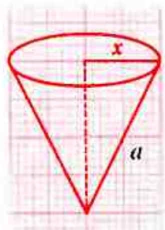
91. Les cornets de frites.
On désire confectionner des cornets de frites à l'aide de disques en carton de rayon a.





On se propose de déterminer l'angle θ $(0<\theta<2\pi)$ (correspondant à la partie du disque évidé) qui conduit à un cornet de volume maximum.

1° Soit x le rayon de la base du cône obtenu $(0<x<a)$. Montrer que :



a) le volume du cône est égal à :

$$\frac{1}{3}\,2\pi x^2\sqrt{a^2-x^2}\ ;$$

b) x et θ sont liés par : $\theta=\frac{2\pi}{a}(a-x)$.

2° Soit f la fonction de $]0,\,a[\ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x\longmapsto x^2\sqrt{a^2-x^2}.$$

Étudier les variations de la fonction $x\longmapsto[f(x)]^2$ au moyen du changement de variable $X=x^2$.
En déduire les variations de f et préciser en quel point elle atteint son maximum.

3° Déterminer l'angle θ correspondant (on vérifiera qu'il ne dépend pas du rayon du disque).

92 (D'après *« Activités en analyse »*. Publication de l'IREM de Rennes.)
Soit f une fonction définie sur $[0,\,1]$ à valeurs dans $[0,\,1]$ telle que, pour tous réels x et y de $[0,\,1]$:

$$|f(x)-f(y)|\geqslant|x-y|.$$

1° Montrer que :

$$u:[0,\,1]\longrightarrow\mathbb{R}\quad x\longmapsto x \qquad\text{et}\qquad v:[0,\,1]\longrightarrow\mathbb{R}\quad x\longmapsto 1-x$$

sont des exemples de telles fonctions.

2° Montrer que l'on a :

$$\begin{cases}f(0)=0\\ \text{et}\\ f(1)=1\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}f(1)=0\\ \text{et}\\ f(0)=1\end{cases}$$

3° On suppose que $f(0)=0$ (et donc $f(1)=1$).

a) Démontrer que pour tout x de $[0,\,1]$, $f(x)\geqslant x$.

b) Exploiter l'inégalité $|f(x)-1|\geqslant|x-1|$ pour établir que, pour tout x de $[0,\,1]$, $f(x)=x$.

4° Examiner le cas $f(0)=1$ en considérant (par exemple) la fonction $x\longmapsto 1-f(x)$.

5° a) Déduire de cette étude que les seules fonctions qui satisfont à la condition énoncée sont les fonctions u et v.

b) Montrer que chacune des fonctions :

$$x\longmapsto\frac{x^2}{2},\quad x\longmapsto\frac{x^3}{3}\quad\text{et}\quad x\longmapsto\frac{1}{1+x}$$

est définie sur $[0,\,1]$ à valeurs dans $[0,\,1]$ et vérifie :

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$$

pour tous réels x et y de $[0,\,1]$.

93. La boite cylindrique

I — Soit a, b deux réels strictement positifs et f la fonction :

$$]0,\,+\infty[\ \longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto\frac{a}{x}+bx^2.$$

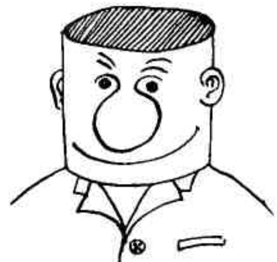
1° Soit x, y tels que $0<x<y$. Montrer que $f(y)-f(x)$ est du signe de $xy(x+y)-\frac{a}{b}$.

2° Justifier l'inégalité :

$$2x^3-\frac{a}{b}<xy(x+y)-\frac{a}{b}<2y^3-\frac{a}{b}.$$

En déduire les variations de f sur $]0,\,+\infty[$ et préciser notamment en quel point elle atteint son minimum.

II — « Les boîtes ».
On se propose de montrer qu'à contenance égale, la boîte cylindrique dont la hauteur est égale au diamètre de la base est celle qui nécessite le minimum de matière première.



Soit un cylindre de volume V donné et r le rayon du cercle de base.

1° Exprimer la hauteur du cylindre $h(r)$ et l'aire totale $\mathcal{A}(r)$.

2° Utiliser les résultats du *1°* pour montrer que $\mathcal{A}(r)$ est minimum lorsque $r^3 = \dfrac{V}{\pi}$.

Vérifier le résultat annoncé.

94. (Olympiades de Mathématiques.)
Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n nombres réels strictement positifs. Démontrer l'inégalité :

$$\frac{x_1}{x_n} + \frac{x_2}{x_{n-1}} + \frac{x_3}{x_{n-2}} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_2} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

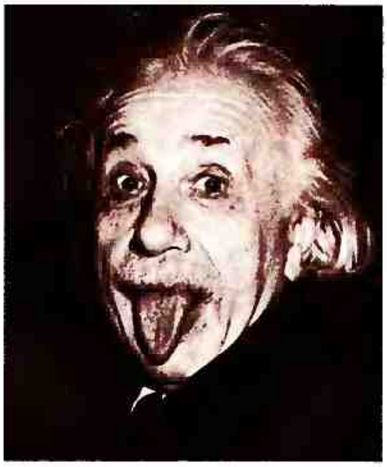
Dans quel cas a-t-on l'égalité?
(**Indication :** faire intervenir la fonction :

$$x \longmapsto x + \frac{1}{x}.)$$

95. Mécanique classique; mécanique relativiste.
En mécanique relativiste, la masse d'un corps en mouvement est fonction de sa vitesse v :

$$(1) \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

(c désignant la vitesse de la lumière, v et c étant exprimées avec les mêmes unités).
Dans ces conditions, l'énergie cinétique E est donnée par : (2) $E = (m - m_0)c^2$.



On se propose de montrer que pour $\dfrac{v}{c}$ suffisamment petit, une valeur approchée de E est $\dfrac{1}{2} m_0 v^2$ (ce qui correspond à la formule donnant l'énergie cinétique en mécanique classique).

1° On pose $x = \left(\dfrac{v}{c}\right)^2$.

Montrer que $E = m_0 c^2 \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)$.

2° Soit f la fonction : $]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1.$$

a) Montrer que pour $x \in]0, 1[$, on peut écrire :

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \varphi(x), \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

(Utiliser le théorème, page 168.)

On pose $u = \dfrac{x}{2} + \varphi(x)$. Établir que :

$$f(x) = u + \frac{u^2}{1-u}.$$

b) Montrer que, pour $x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, $u \leqslant \dfrac{3x}{4}$ et que $1 - u \geqslant \dfrac{1}{2}$.

En déduire : $0 < \dfrac{u^2}{1-u} \leqslant \dfrac{9x^2}{8}$.

c) Montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$\left|f(x) - \frac{x}{2}\right| \leqslant kx^2 \quad \text{pour} \quad 0 < x \leqslant \frac{1}{2}.$$

3° En déduire que lorsque $v \leqslant 10\,000$ km/h, $\dfrac{1}{2} m_0 v^2$ est une valeur approchée de E avec une précision de :

$$1{,}4 \times 10^{-10} m_0$$

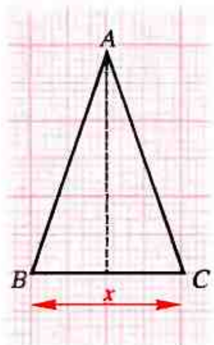
(on donne $c = 300\,000$ km/s).

96. (D'après *«Exemple d'étude de fonctions»*. Bulletin spécial de l'IREM de Lille (1981) : «Activités en seconde».)

Objet de l'exercice : Étudier comment varie l'aire $\mathcal{A}(x)$ d'un triangle isocèle ABC, où

$$AB = AC = 10,$$

quand on fait varier la longueur x du côté $[B, C]$.



1° Quel est l'ensemble de définition de la fonction $\mathcal{A}$?

2° Montrer que :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{x}{4}\sqrt{400 - x^2}$$

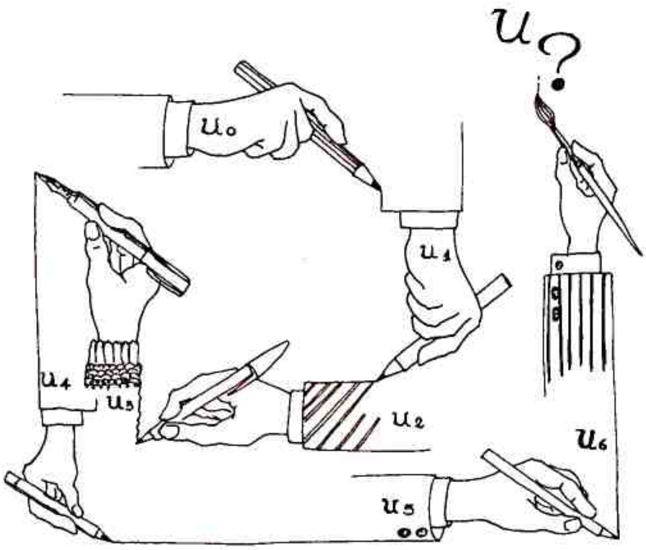
pour $0 < x < 20$.

3° Étudier les variations de la fonction $x \longmapsto [\mathcal{A}(x)]^2$ à l'aide du changement de variable $X = x^2$. En déduire les variations de $\mathcal{A}$ et déterminer en particulier son maximum. (Préciser le triangle obtenu.)

4° Retrouver le maximum de la fonction $\mathcal{A}$ en considérant le projeté orthogonal H de C sur (AB) (le point B étant supposé fixé).

5

Suites Exemples



Une suite est une succession infinie de quantités $u_0, u_1, u_2, u_3...$ qui se succèdent en vertu d'une loi déterminée. Ces quantités sont elles-mêmes les différents termes de la suite considérée. »

Augustin CAUCHY (1789-1857)
Cours d'analyse

« J'en eus mille preuves dans la suite. »

ALAIN

Intentions

Deux chapitres sont consacrés aux suites numériques, le second (chapitre 6) étant spécifique de leur « comportement à l'infini ». En ce qui concerne ce premier chapitre, ce sont les objectifs suivants qui guident son organisation et ses développements :

1° Donner les notions de base indispensables relatives aux suites : **définition, notation indicielle, modes de génération** (formule explicite, récurrence) **représentation graphique,** en dégageant les divers aspects sous lesquels une même suite peut être perçue.

2° Mettre en place certaines techniques spécifiques aux suites sur des questions déjà abordées avec les fonctions : **monotonie, majoration, minoration, comparaison.**

3° Procéder à une étude approfondie des suites arithmétiques et géométriques et aborder le problème du **calcul des sommes partielles** $u_0 + u_1 + ... + u_n$.

4° Explorer la diversité des situations qui nécessitent l'intervention d'une suite numérique, par des problèmes relevant aussi bien de la géométrie, de l'arithmétique, du dénombrement que de l'analyse proprement dite.

Enfin une part relativement importante est consacrée aux méthodes qui permettent — au niveau d'une classe de Première scientifique — de traiter le problème de **l'explicitation du terme général d'une suite** qui serait définie — par exemple — par une **relation de récurrence.**

numériques et généralités

Plan du Chapitre

I. Introduction

1. Préliminaires

Pour le mathématicien expérimenté, une suite numérique se présente comme une fonction particulière : **définie sur une partie de $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$**[1].

Cependant...

« Le débutant qui rencontre des suites par un travail de recherche sur des situations ou problèmes ne rencontre pas de prime abord de telles fonctions, mais plutôt des rangées d'objets, des figures articulées les unes aux autres, des successions d'événements, des colonnes de nombres... Qui plus est, *presque chaque suite ainsi rencontrée possède plusieurs facettes* et peut être considérée de plusieurs points de vue ou matérialisée dans divers supports. »[2]

Il en découle pour ce paragraphe introductif à la notion de suite, une organisation des activités procédant de trois objectifs :

- Proposer des situations, des problèmes, d'origines diverses (géométriques, graphiques, issus de dénombrements, numériques, ...) qui provoquent **l'intervention d'une suite.**
- Dégager quelques exemples de procédés qui permettent de définir une suite et percevoir ainsi certains **modes de génération des suites.**
- Familiariser avec **la notation indicielle** u_n spécifique aux suites et avec quelques problèmes qu'elle peut soulever, comme, par exemple, celui de la modification d'écriture après changement d'indice.

2. Premiers exemples

a. Activité 1

1. On considère la liste des nombres impairs (rangés par ordre croissant) :

$1\ ,\quad 3\ ,\quad 5\ ,\quad 7\ ,\quad 9\ ,\quad \ldots$

On note u_1 le premier terme de la liste, u_2 le second, ... et u_n le n-ième terme (n entier supérieur ou égal à 1).

Donner les valeurs de u_{25} , u_{758} , u_{895} et u_{994}.

Exprimer u_n en fonction de n.

2. Donner une interprétation graphique de la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n$, à l'aide de la figure 1.

Que suggère cette figure quant aux expressions des sommes :

$u_1+u_2\ ,\quad u_1+u_2+u_3\ ,\quad u_1+u_2+u_3+u_4\ ,\quad \ldots\ ,$

plus généralement $u_1+u_2+\ldots+u_n$?

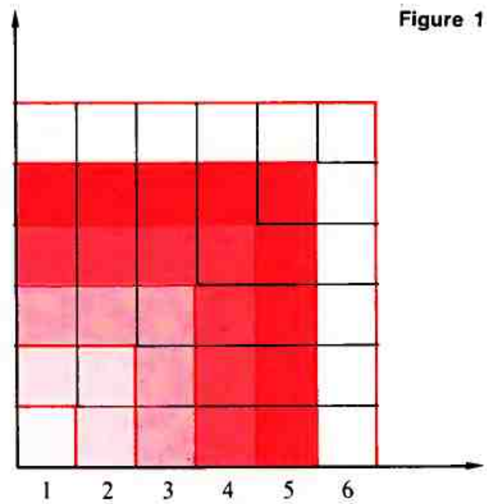


Figure 1

[1] Voir page 189.

[2] Nicolas Rouche. G.E.M. (Louvain-la-Neuve).

3. Soit S l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto n^2.$$

On note S_n l'image de n par S (au lieu de la notation habituelle $S(n)$).

a) Exprimer S_{n-1} et montrer que :

$$S_n - S_{n-1} = u_n.$$

b) En sommant les n égalités ci-après :

$$S_n - S_{n-1} = u_n$$
$$S_{n-1} - S_{n-2} = u_{n-1}$$
$$\text{- - - - - - - - - - - - - - -}$$
$$S_3 - S_2 = u_3$$
$$S_2 - S_1 = u_2$$
$$S_1 = u_1$$

montrer que : $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_n$.

En déduire que : $\mathbf{1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2}$.

b. *Activité 2*

1. On note u_n le chiffre des unités de $(1987)^n$.
Calculer u_1, u_2, u_3, etc.
Quelles sont les valeurs de $u_{1\,000}$, $u_{1\,001}$, $u_{1\,002}$ et $u_{1\,003}$?
On suppose que $u_{n+1} = 1$. Que vaut u_n ?
Préciser u_{4n}, u_{4n+1}, u_{4n+2} et u_{4n+3}.

2. Le graphique de la figure 2 permet de définir une application U de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$. Expliciter l'image (notée u_n) de l'entier n par U.

3. Même question qu'en 2 avec le procédé graphique suivant :

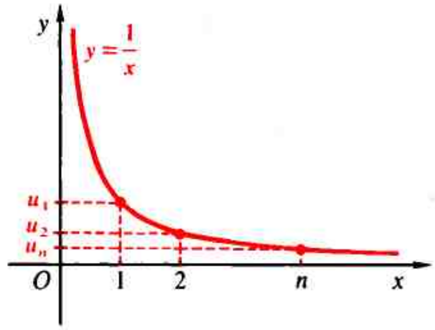
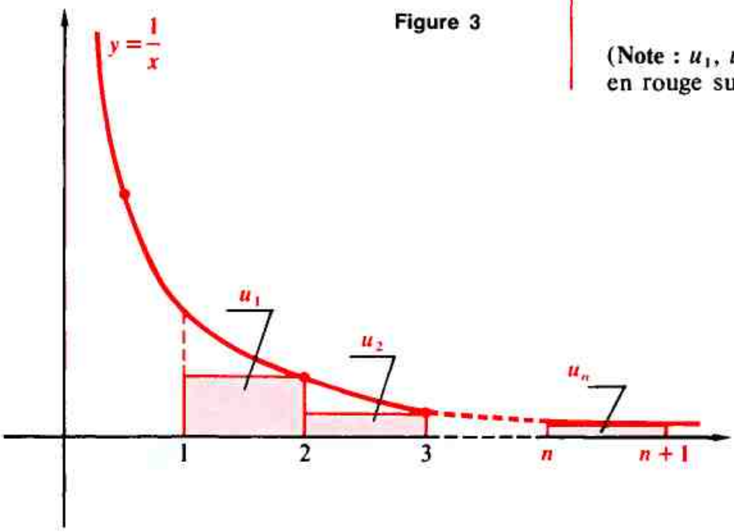
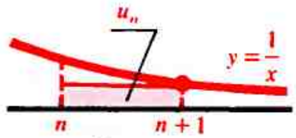


Figure 2

(**Note :** u_1, u_2, ..., u_n sont les aires des rectangles en rouge sur la figure 3.)

Figure 3





(effet de loupe)

3. *Suites et relations de récurrence*

a. *Exemple (résolu)*

Problème

Combien de régions du plan 50 droites délimitent-elles? (Les droites sont telles que trois quelconques d'entre elles ne soient pas concourantes et deux quelconques non parallèles.)

• On peut être tenté de tracer 50 droites et de compter les régions ainsi déterminées en espérant (ce que sous-entend l'énoncé) que le résultat soit indépendant de la position des droites.

5 Suites numériques. Exemples et généralités

Quelques essais :

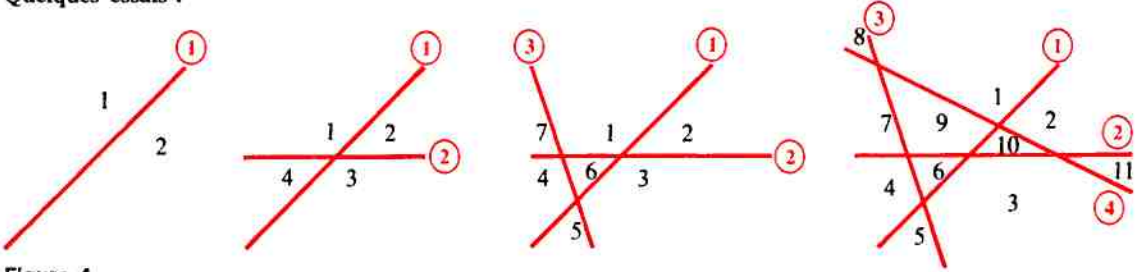


Figure 4

On s'aperçoit assez rapidement que cette tentative à de forts risques d'être infructueuse. Pas tout à fait cependant...

- En effet, si l'on désigne par $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ le nombre de régions du plan que délimitent 1, 2, 3, ..., n droites, on a : $r_1 = 2$; $r_2 = 4$; $r_3 = 7$; $r_4 = 11$.

Il semble alors que l'on puisse dégager une **loi** expliquant comment ces nombres sont obtenus. Par exemple :

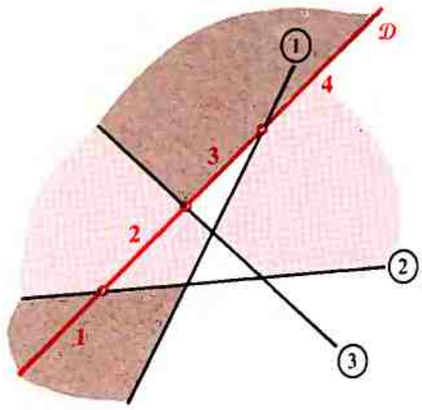
- La **3**ᵉ droite « rajoute » **3** régions à celles déjà obtenues, ce qui correspond à l'égalité $7 = 4 + 3$ ou $r_3 = r_2 + 3$.
- La **4**ᵉ droite « rajoute » **4** régions à celles déjà obtenues : $11 = 7 + 4$ ou $r_4 = r_3 + 4$.

On peut donc émettre la ***conjecture*** *suivante* : « **la** n**-ième droite** « **rajoute** » n **régions à celles déjà obtenues** », ce qui numériquement va se traduire par : $r_n = r_{n-1} + n$.

Question 1 : Tester la conjecture pour $n = 5$ *, puis* $n = 6$.

- **Essayons d'établir l'égalité** $r_n = r_{n-1} + n$.

Le procédé de dénombrement que nous allons utiliser est illustré figures 5 et 6 pour $n = 4$.



4 régions traversées
4 régions en plus
4 segments découpés sur $\mathcal{D}$

Figure 5

Remarque 1 : une droite $\mathcal{D}$ rajoute autant de régions qu'elle en traverse.

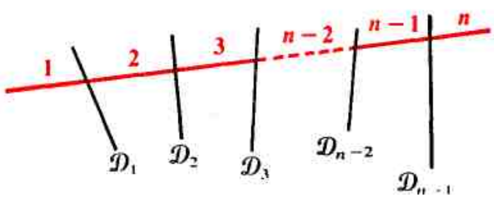
Remarque 2 : chaque région traversée correspond à un « segment »[1] découpé sur $\mathcal{D}$ par les droites précédentes. Or $(n-1)$ droites découpent sur une droite donnée n « segments »[2] (figure 6).
On en déduit le résultat annoncé : $r_n = r_{n-1} + n$.

- La suite $(r_n)_{n \geqslant 1}$ se trouve alors entièrement déterminée par les conditions :

$$\begin{cases} r_1 = 2 \\ r_n = r_{n-1} + n \quad \text{pour } n \geqslant 2 \end{cases}$$

qui permettent de calculer de proche en proche **tous** les « termes » $r_2, r_3, r_4, \dots,$ etc.

Figure 6



Question 2 : Calculer r_{50} *(on pourra élaborer un programme fonctionnant sur la calculatrice).*

Note : L'expression générale de r_n sera abordée à l'intérieur du chapitre (page 194).

[1] Ici, la signification du mot « segment » est étendue aux demi-droites.

[2] Sous les conditions de l'énoncé : pas de droites parallèles, pas d'intersection commune à trois droites.

Commentaires

1. L'exercice que nous venons de traiter est un cas particulier d'un problème que l'on rencontre fréquemment et que l'on peut schématiser ainsi :

a) Un certain procédé conduit à introduire une suite $(r_1, r_2, ..., r_n)$ et on cherche à **expliciter** r_n.

b) Un **calcul direct** s'avère **impossible.**

c) On essaie alors de trouver une **loi** permettant le **calcul de proche en proche** de r_2, r_3, r_4, etc., à partir du (des) précédent(s).

2. Les activités qui suivent visent à se familiariser avec ce type de suites appelées **suites récurrentes** (ou encore suites définies par une relation de récurrence).

b. Autres exemples

Activité 3

On considère la suite de nombres $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ définie par $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = 10x_n + 1$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

1° Calculer x_2, x_3, x_4 et x_5.

2° Peut-on faire une conjecture sur x_{10} ? x_{500} ? plus généralement sur x_n ?

Activité 4

1. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}. \end{cases}$$

Montrer que $u_{n+2} = u_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et expliciter u_n.

2. Une suite (a_n) est définie ainsi : $a_0 = \dfrac{1}{2}$; puis de proche en proche par le procédé graphique ci-contre qui permet de calculer a_n connaissant a_{n-1}.
A-t-on $a_n = 2^{n-1}$?

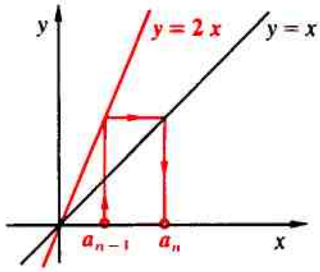


Figure 7

3. On pose, pour tout entier n :

$$u_n = 2^n + 1.$$

Trouver deux nombres réels a et b tels que $u_n = au_{n-1} + b$ pour $n \geqslant 1$.

Activité 5

Étant donné un carré $ABCD$, on appelle carré des milieux le carré $IJKL$, où I, J, K, L sont les milieux des côtés $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$.

On considère alors un carré C de côté 1 : on peut lui associer en itérant ce procédé des carrés C_1, C_2, C_3, ..., C_n... (figure 8) dont on note :

- $\mathcal{a}_1, \mathcal{a}_2, \mathcal{a}_3, ..., \mathcal{a}_n, ...$, les aires;
- $p_1, p_2, p_3, ..., p_n, ...$, les périmètres.

1° Calculer $\mathcal{a}_n$ et p_n pour $n = 1$, 2 et 3.

2° Exprimer $\mathcal{a}_n$ en fonction de $\mathcal{a}_{n-1}$ et p_n en fonction de p_{n-1}.

3° Peut-on calculer $\mathcal{a}_n$ et p_n en fonction de n?

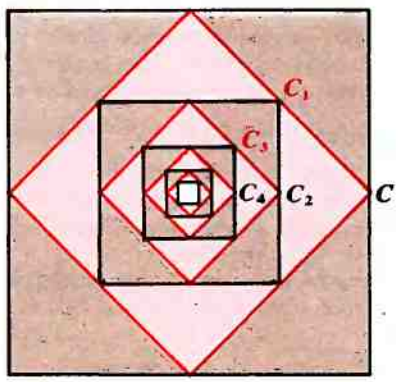


Figure 8

4. Premiers problèmes

Les deux « petits problèmes » que nous proposons dans ce paragraphe peuvent être considérés comme des « exercices d'application ». Cependant, quatre raisons au moins légitiment leur place dans ce paragraphe introductif.

1° Ils préparent aux **procédés de sommation** qui seront mis en œuvre à propos notamment des suites arithmétiques et géométriques (paragraphe III).

2° Ils montrent comment une suite — a priori — « infinie » $(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ peut intervenir dans la **résolution d'un problème** où l'on ne considère pourtant que des quantités connues et bien déterminées.

3° Ils fournissent d'autres « **supports** dans lesquels une suite peut être matérialisée » (cf. citation page 184).

4° Enfin, ils pourraient être perçus comme motivants... pour la suite.

a. Somme de carrés ; boulets de canons

Soit u l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(On notera u_n l'image par u de l'entier n.)

1° Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et exprimer u_{n-1} en fonction de n.

2° Calculer $u_n - u_{n-1}$. Que vaut $u_{n-1} - u_{n-2}$?

3° En utilisant la méthode de calcul suggérée par la disposition ci-contre montrer que :

$$u_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$$

(somme des n premiers carrés).

$$\boxed{\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \\ u_{n-1} - u_{n-2} &= \\ &\cdots \\ u_3 - u_2 &= \\ u_2 - u_1 &= \\ u_1 - u_0 &= \end{aligned}}$$

4° Résoudre alors le problème suivant (*Nouveaux jeux de l'Esprit et divertissements mathématiques.* J.-P. ALEM. Seuil).

« Bombardes et pyramides »

Au temps où les canons liraient des boulets, ceux-ci étaient stockés dans les parcs d'artillerie sous forme de pyramides à base carrée, chaque côté du carré de base comptant 15 boulets.
Quel était le nombre de boulets par pyramide?

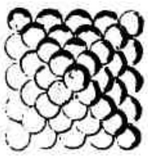
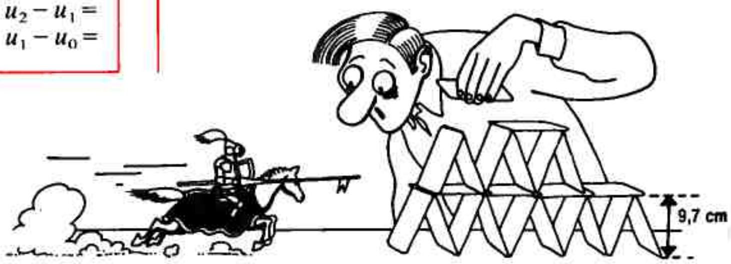


Figure 9

b. Château de cartes

(D'après une idée de *Jeux et Stratégies*, n° 17.)



On a utilisé 155 cartes pour construire un château de cartes suivant le procédé illustré par le dessin ci-dessus et schématisé par la figure 10.
(Chaque rangée est constituée d'assemblages de 3 cartes  sauf la dernière où les assemblages sont de 2 cartes.)
Le problème est le suivant : **« sachant que chaque rangée a une hauteur de 9,7 cm[1], quelle est la hauteur du château? »**
On désigne par n le nombre de rangées que l'on numérote comme l'indique la figure 10.

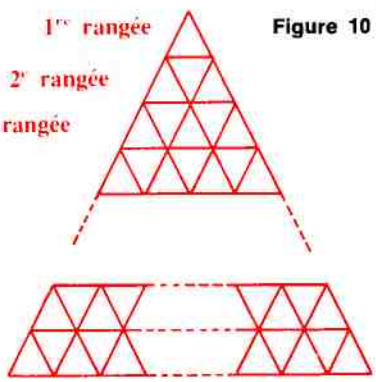


Figure 10

[1] Il s'agit donc de cartes de tarot.

1° Compléter le tableau ci-dessous.

n° de la rangée	nombre d'assemblages	nombre de cartes
1		
2		
3		
...		
$n-2$		
$n-1$		
n		

2° En déduire que le nombre de cartes utilisées peut aussi s'exprimer par :

$$3(1+2+\ldots+n-1)+2n.$$

3° On désigne par S la somme :

$$S=1+2+\ldots+(n-2)+(n-1).$$

Montrer que $S=\dfrac{n(n-1)}{2}$ (on calculera $S+S$ à l'aide de « l'astuce »[1]) :

$$\begin{array}{rl} & S = 1 + 2 + \ldots + (n-2)+(n-1) \\ + & S=(n-1)+(n-2)+ \ldots + 2 + 1 \\ \hline & 2S= \end{array}$$

4° En déduire que n est solution de l'équation du second degré : $3n^2+n-310=0$.

Conclure.

II. Généralités sur les suites

1. Définitions relatives aux suites

a. Définition d'une suite numérique

Il résulte des activités du paragraphe I que la notion mathématique de suite numérique coïncide avec celle de fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Cependant, concernant les suites, une des préoccupations essentielles réside dans l'étude de leurs comportements pour « les grandes valeurs de n » (cf. chapitre 6). Aussi, nous limiterons, dans cet ouvrage, la notion de suite à celle de **fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie à partir d'un certain rang,** c'est-à-dire définie sur une partie de $\mathbb{N}$ de la forme :

$$[p, +\infty[=\{p\ ,\ p+1\ ,\ p+2\ ,\ \ldots\}$$

Ainsi, par exemple :

- $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{n-4}}$ est une suite définie à partir du rang 5.
- $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto \dfrac{1}{n+1}$ est une suite définie sur $\mathbb{N}$.
- Par contre $w : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto \sqrt{5-n}.$ ne sera pas l'objet de nos préoccupations.

En résumé :

Toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie à partir d'un certain rang est appelée *suite numérique*.

[1] Déjà vue dans le livre de Seconde, page 52, sera reprise dans le paragraphe II.

b. Notations usuelles

1. Nous avons déjà signalé (paragraphe I) l'utilisation habituelle pour les suites numériques de **la notation indicielle :** l'image par une suite numérique u d'un entier n est notée u_n de préférence à $u(n)$.

2. Il est également fréquent pour désigner une suite u de substituer à la notation fonctionnelle

$$u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u_n \end{array}$$

des écritures telles que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ ou $(u_n)_{n\geqslant p}$.
(Une écriture telle que $(u_n)_{n\geqslant p}$ vise à préciser que la suite est définie à partir du rang p; mais cela n'est nullement une obligation.)
Dans cet ouvrage nous utiliserons la notation (u_n) pour désigner une suite numérique quelconque.

3. Les réels u_n s'appellent **les termes de la suite** et il est courant d'utiliser l'expression (par exemple) : « soit (u_n) la suite de **terme général** $\frac{1}{n}$ » pour signifier que :

$$\text{« pour tout } n \geqslant 1 \text{ , } u_n = \frac{1}{n} \text{ ».}$$

Attention! Il est important de faire la distinction entre les écritures u_n et (u_n) :

- la première u_n désigne un **nombre réel,**
- la seconde (u_n) désigne une **suite** (donc une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$).

Remarques

1. Il est parfois plus parlant de présenter une suite sous la forme d'une **liste.** Ainsi, par exemple, la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pourra être écrite :

$$\left(1 \text{ , } \frac{1}{2^2} \text{ , } \frac{1}{3^2} \text{ , } \frac{1}{4^2} \text{ , } \dots \text{ , } \frac{1}{n^2} \text{ , } \dots\right).$$

2. Il est fondamental de saisir la **modification d'écriture du terme général de la suite qui peut résulter d'un changement d'indice.**
Les exercices 1 à 3 ci-dessous visent à compléter les activités introductives relatives à cette question.

Exercices

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n^2 - 1$.
Exprimer, en fonction de n, u_{n+1} , u_{n-1} , u_{2n} , u_{2n+1} et u_{2n-1}.

2. Reprendre l'exercice 1 avec :

$$u_n = n(2-n).$$

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2^{2^n}$.
Répondre par VRAI ou FAUX aux affirmations suivantes :

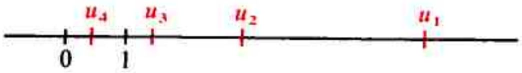
a) $u_{n+1} = (u_n)^2$;

b) $u_{2n} = 2^{4^n}$; *c*) $u_n = 16u_{n-2}$.

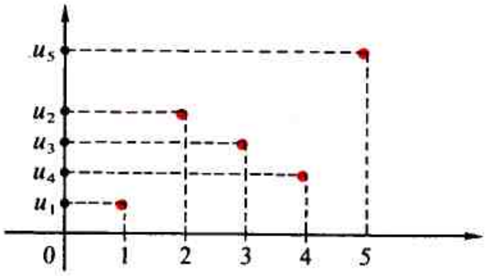
c. Représentation graphique d'une suite

Certaines suites admettent « naturellement » une représentation graphique : cela est dû, en général, à leur origine (voir par exemple activités 2 et 4).

Dans de nombreux cas, il est souhaitable cependant d'associer à une suite (u_n) des représentations telles que :

(1) 

: représentation sur une droite.

(2) 

: représentation dans un plan muni d'un repère.

(Ces schémas permettent d'illustrer assez souvent certaines propriétés d'une suite : croissance, décroissance, majoration, etc. (cf. § 2).)

2. Modes de génération d'une suite numérique

a. Suite définie par une formule explicite

C'est le cas par exemple des suites proposées dans les activités 1 et 2 : on dispose d'un procédé de calcul qui donne une formule explicite de u_n.
De façon plus générale, elles apparaissent comme des suites (u_n) dont le terme général est défini par :
$u_n = f(n)$ où f **est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.**
On dispose alors, à partir de la courbe représentative de la fonction f, d'une **représentation graphique** de la suite (u_n) (figure 11).

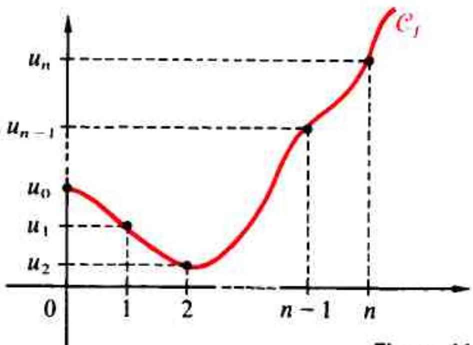


Figure 11

b. Suite définie par récurrence[*]

• Le problème résolu, page 186, et les activités 3, 4 et 5 par exemple, concernent de telles suites :

(1) $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 10x_n + 1 \text{ pour } n \geqslant 0 \end{cases}$ (activité 3)

(2) $\begin{cases} r_1 = 2 \\ r_n = r_{n-1} + n \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1 \end{cases}$ (problème résolu)

(3) $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}. \end{cases}$ (activité 4)

[*] On dit aussi « suite récurrente ».

• Ces suites apparaissent comme étant définies par :
— la donnée d'un procédé de calcul permettant d'exprimer le terme u_n de la suite à l'aide des termes d'indices plus petit $(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots)$;
— des conditions initiales : elles fixent les valeurs des premiers termes et permettent d'enclencher le procédé de calcul.
L'exemple le plus célèbre de telles suites est la suite de Fibonacci[1] définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ pour $n \geqslant 0$.

Note : En ce qui concerne les suites récurrentes, nous nous limiterons dans cet ouvrage aux suites définies par une relation de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$.

• Pour les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout entier } n. \end{cases}$$

où **f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$**, on dispose également d'une interprétation graphique :

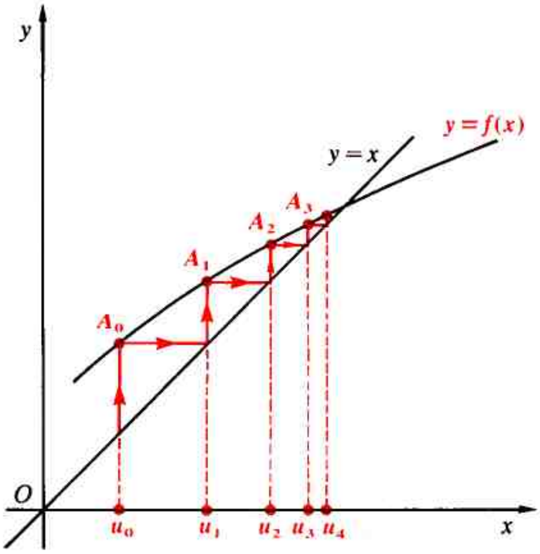


Figure 12 : L'escalier

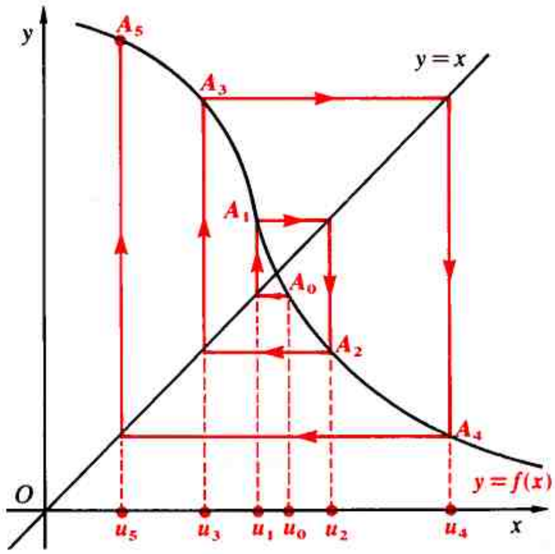


Figure 13 : La spirale

Commentaires
Les points A_n ont pour coordonnées $(u_n, f(u_n))$, c'est-à-dire (u_n, u_{n+1}). On utilise alors la droite d'équation $y=x$ afin de « reporter » le réel u_{n+1} en abscisse, ce qui permet d'obtenir graphiquement $u_{n+2}=f(u_{n+1})$, etc.

Exercices

4. Représenter graphiquement la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=-2u_n+1. \end{cases}$$

5. Définir par récurrence et représenter graphiquement la suite de terme général

$$u_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}$$

(n symboles $\sqrt{\ }$).

1
2
3
⋮
$n-1$
n

[1] Léonard de Pise (vers 1180-1250) dit Fibonacci. Dans son ouvrage *Liber Abaci,* Fibonacci aborde le problème suivant, qui conduit à l'étude de cette suite : « Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin d'une année si, commençant avec un couple, chacun des couples produit chaque mois un nouveau couple lequel devient productif au second mois de son existence. »

Remarques

Les deux procédés :

$$\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n)\ ,\ n\geqslant 0 \\ u_0=1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_n=f(u_{n-1})\ ,\ n\geqslant 1 \\ u_0=1. \end{cases}$$

définissent la même suite.
Elles ont le même premier terme $u_0=1$ et le mode de calcul d'un terme de rang donné à l'aide du terme de rang précédent est le même : il est obtenu dans chacun des cas au moyen de la fonction f.

c. *Calcul de u_n dans les suites récurrentes*

Le calcul de u_1, u_2, u_3, etc., peut être effectué de proche en proche (éventuellement, dans la plupart des cas, avec une calculatrice programmable).
Un problème, différent et que nous aborderons à propos des suites arithmétiques et géométriques, est d'**obtenir une expression explicite du terme général u_n en fonction de n.**

Les exemples qui suivent développent deux **méthodes** essentielles :

- l'une basée sur la **conjecture** et le **contrôle** de la relation de récurrence (exemple 1);
- l'autre s'appuyant sur le procédé d'**opérations en cascade** (exemple 2).

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par la relation $\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=u_n^2\ ,\ n\geqslant 0. \end{cases}$

Peut-on expliciter u_n?

Calculons les premiers termes de la suite :

$$u_0=4\ ,\quad u_1=4^2\ ,\quad u_2=(4^2)^2=4^4\ ,\quad u_3=(4^4)^2=4^8\ ,\quad u_4=4^{16}\ ,\quad \dots$$

On fera la **conjecture** que u_n est une puissance de 4. Essayons de préciser suivant quelle loi s'obtiennent les exposants successifs; pour cela écrivons :

$$u_0=4\ ,\quad u_1=4^2\ ,\quad u_2=4^{2^2}\ ,\quad u_3=4^{2^3}\ ,\quad u_4=4^{2^4}\ ,\quad u_5=4^{2^5}\ ,\quad \dots$$

La conjecture sera donc que : $u_n=4^{2^n}$.
Pour contrôler ce résultat, il suffit de vérifier que la suite (v_n) avec $v_n=4^{2^n}$ satisfait à $v_0=4$ et $v_{n+1}=v_n^2$ pour $n\geqslant 0$ (laissé à titre d'exercice).

Conclusion : Pour tout entier n, $u_n=4^{2^n}$.

Remarques

1. Dégageons le principe sur lequel repose la méthode ci-dessus qui vise à calculer explicitement le terme général u_n d'une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0=a \\ u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour } n\geqslant 0. \end{cases}$$

- On **conjecture** une certaine valeur α_n pour le terme u_n.
- On **contrôle** que la suite (α_n) vérifie

$$\begin{cases} \alpha_0=a \\ \alpha_{n+1}=f(\alpha_n) \text{ pour tout } n\geqslant 0. \end{cases}$$

- Il est alors possible de **conclure que $u_n=\alpha_n$** pour tout $n\geqslant 0$.

2. Dans cet exemple, les écritures $u_4=4^{2^4}$, $u_5=4^{2^5}$, etc., facilitent la conjecture : il y a intérêt, en général, à ne pas effectuer les calculs mais à attendre qu'une règle semble s'établir pour en dégager une loi générale.

Exemple 2 (Cf. problème résolu, page 186.)

Combien de régions sont délimitées par n droites, trois quelconques d'entre elles n'étant pas concourantes?

En désignant par r_n ce nombre de régions, nous avons vu (cf. page 186) que :

$$\begin{cases} r_1 = 2 \\ r_n = r_{n-1} + n \ , \ n \geqslant 2. \end{cases}$$

Écrivons alors les égalités $r_p = r_{p-1} + p$ pour $p = 1, 2, \ldots, n$, les unes sous les autres

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-1} + n \\ r_{n-1} &= r_{n-2} + n - 1 \\ r_{n-2} &= r_{n-3} + n - 2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_3 &= r_2 + 3 \\ r_2 &= r_1 + 2 \\ r_1 &= 2. \end{aligned}$$

En additionnant « membre à membre » on voit qu'il est possible de simplifier : r_{n-1} (1re et 2e lignes); r_{n-2} (2e et 3e lignes), etc., jusqu'à r_1, (n-ième ligne). Il vient alors :

$$r_n = n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 2$$

que l'on peut écrire $r_n = 1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$.

Sachant que[1] $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, on obtient $r_n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Remarques

1. Cette méthode d'« opérations en cascade » peut également être pratiquée avec la multiplication.
2. Il ne faut pas craindre d'écrire suffisamment de lignes :

- d'une part, cela permet de bien saisir les simplifications qui vont suivre;
- d'autre part, cela facilite le comptage des lignes (si besoin est).

Exercices

Dans les exercices **6** *à* **9**, *expliciter le terme général u_n en fonction de n en utilisant une des méthodes précédentes.*

6. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = 1 - u_n. \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \dfrac{1}{3} u_{n-1}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} - 1. \end{cases}$

3. Monotonie

Les notions mises en place ci-dessous pour les suites de nombres réels sont analogues à celles concernant les fonctions.

a. Suite croissante ; suite décroissante

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que :

- **la suite (u_n) est *croissante* lorsque, pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1}$;**
- **la suite (u_n) est *décroissante* lorsque, pour tout entier n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.**

[1] Voir page 203.

Les termes d'une suite **monotone**, c'est-à-dire croissante ou décroissante, sont donc rangés ainsi :

- **suite croissante :** $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ldots$
- **suite décroissante :** $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots$

Remarques

1. Si l'on se réfère à la notion de fonction croissante (par exemple), une définition correcte de la croissance d'une suite devrait être : « une suite (u_n) est croissante si, quels que soient les entiers p et q, u_p et u_q sont rangés dans le même ordre que p et q ». Autrement dit :

« si $p \leqslant q$ alors $u_p \leqslant u_q$. »

Le rangement précédent effectué « de proche en proche » permet de comprendre pourquoi l'on se contente de l'inégalité « $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout entier n ».

2. Une suite donnée n'est pas nécessairement croissante ou décroissante; c'est le cas par exemple de (u_n) et (v_n), avec $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \sin n\dfrac{\pi}{2}$.

3. Dans certains cas, les inégalités $u_n \leqslant u_{n+1}$ ne se produisent qu'à partir d'un certain rang p. On dit alors que la **suite est croissante à partir du rang p.**

b. Exemples et méthodes

1. Les suites définies par $u_n = f(n)$.

Soit f une fonction croissante sur $]0, +\infty[$ (par exemple), il est clair que la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est une suite croissante. (Bien sûr on dispose d'un résultat analogue lorsque f est décroissante : la suite (u_n) est aussi décroissante.)

Ainsi :

- les suites de terme général $an + b$ $(a > 0)$, n^2, n^3 sont **croissantes;**
- les suites de terme général $an + b$ $(a < 0)$, $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n^3}$ sont **décroissantes.**

2. Étudions la monotonie[1] des suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = 2^n - n$ et $v_n = \dfrac{2^n}{n}$.

- On a $u_{n+1} - u_n = (2^{n+1} - (n+1)) - (2^n - n)$, soit $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n - 1 = 2^n - 1$, quantité positive ou nulle pour toute valeur de n. Ainsi $u_{n+1} \geqslant u_n$: **la suite (u_n) est une suite croissante.**
- Considérons le rapport $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}}$. Il vient : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2n}{n+1}$. Comme pour $n \geqslant 1$, $n + 1 \leqslant 2n$, on a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$, c'est-à-dire puisque $v_n > 0$, $v_{n+1} \geqslant v_n$.

La suite (v_n) est croissante.

Exercice

10. Préciser parmi les suites ci-dessous lesquelles sont croissantes, décroissantes ou ni l'un ni l'autre :

a) $n \longmapsto 1 + \dfrac{1}{n}$; *b)* $n \longmapsto 1 - \dfrac{1}{n}$;

c) $n \longmapsto -\sqrt{n+3}$;

d) $n \longmapsto 2 - \sqrt{n}$;

e) $n \longmapsto n - n^2$.

[1] Étudier la monotonie d'une suite : déterminer si cette suite est croissante, décroissante ou ni l'un ni l'autre.

Commentaires

1. Ces exemples illustrent deux méthodes utilisables dans l'étude de la monotonie d'une suite :

- **la méthode « $u_{n+1} - u_n$ »** qui vise à déterminer le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;
- **la méthode « $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ »** où l'on cherche à positionner le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1. Cette méthode exige certaines précautions; en particulier elle ne fonctionne que lorsque $\boldsymbol{u_n}$ **est strictement positif,** par exemple.

2. Pertinence des deux méthodes : un peu d'habitude et un certain coup d'œil permettent de juger, suivant « l'allure » du terme général u_n, quelle méthode semble la mieux adaptée à l'étude de la monotonie de la suite. Disons, cependant, en une première approche, que la présence de rapports, de produits incite à utiliser la méthode $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, tandis que la présence de sommes, de différences se prête mieux à l'utilisation de la méthode[1] $u_{n+1} - u_n$.

Exercice

11. Étudier la monotonie des suites ci-dessous en essayant d'anticiper sur le choix de la méthode :

a) $n \longmapsto (0{,}3)^n \times n$; *b)* $n \longmapsto n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$;

c) $n \longmapsto \dfrac{1}{n+1} + 2n$; *d)* $n \longmapsto \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$; *e)* $n \longmapsto \dfrac{1}{n^2} - 2n$.

3. Les suites (a^n) (où $a > 0$)

On peut utiliser indifféremment l'un des deux procédés. En posant $u_n = a^n$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = a^{n+1} - a^n = a^n(a-1).$$

Comme $a^n > 0$, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $a - 1$. Ainsi :

- pour $a > 1$, $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite est croissante (strictement);
- pour $a < 1$: la suite est décroissante (strictement).

En résumé : **la suite $n \longmapsto a^n$ est croissante pour $a > 1$, décroissante pour $0 < a < 1$.**

4. Les suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Hormis quelques cas assez simples, comme $u_{n+1} = u_n - 4$, ou $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n$ (de façon plus générale : suites arithmétiques et suites géométriques[2]), où il est immédiat de préciser la monotonie des suites considérées, c'est **l'étude de la fonction f** qui joue un rôle essentiel.

Exemple 1

Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a & (a > 0) \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

à l'aide de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f (figure 14).

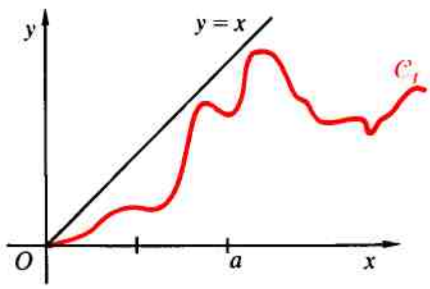


Figure 14

La figure 14 montre que, sur $[0, +\infty[$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant x$.
On a donc pour tout entier n :

$$0 \leqslant f(u_n) \leqslant u_n \text{, soit } u_{n+1} \leqslant u_n.$$

La suite (u_n) est décroissante.

---

[1] Ceci ne saurait constituer une loi générale, tout au plus une tendance.

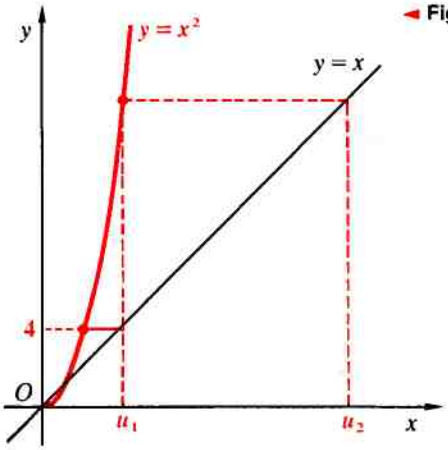
[2] Voir paragraphe II.

Exemple 2

Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ *et* $u_{n+1} = u_n^2$ *dans les cas suivants :*

$$a = 2 \quad et \quad a = \frac{1}{2}.$$

Une représentation graphique donne[1] :



◄ Figure 15

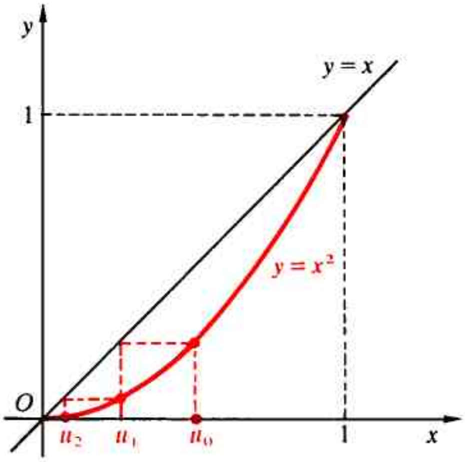


Figure 16 ►

Il apparaît manifestement que, dans le premier cas, la suite est **croissante,** et dans le deuxième cas **décroissante.** (On trouvera une justification numérique dans l'exercice 14 ci-dessous.)
Un tel résultat appelle deux remarques d'ordre général sur les suites définies par récurrence : $(u_{n+1} = f(u_n))$:

- le choix de la valeur initiale u_0 peut modifier le comportement de la suite (u_n);
- le fait que la fonction f soit croissante ne conduit pas nécessairement à (u_n) croissante.

Exercices

Dans les exercices 12 *et* 13, *étudier la monotonie de chaque suite.*

12. $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n} \\ u_0 = 4 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n} \\ u_0 = \frac{1}{4}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n^2 + u_n - 2 \\ u_0 = 1. \end{cases}$

14. On considère la suite de l'exemple 2 ci-dessus $\left(\text{avec} \quad a = 2 \quad \text{ou} \quad a = \frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 \\ u_0 = a \end{cases}$$

1° Montrer que pour tout n, $u_n > 0$ puis que $u_{n+1} - 1$ et $u_n - 1$ sont de même signe, pour tout n.

2° En déduire que, pour tout n :
si $a = 2$: $u_n > 1$
si $a = \frac{1}{2}$: $0 < u_n < 1$

3° En déduire la monotonie de la suite (u_n).

4. Majoration, minoration

a. Définitions

- **Une suite (u_n) est dite *majorée* lorsqu'il existe un réel M tel que, pour tout entier n :** $u_n \leq M$.
- **Une suite (u_n) est dite *minorée* lorsqu'il existe un réel m tel que pour tout entier n :** $m \leq u_n$.
- **Une suite à la fois *majorée* et *minorée* est dite bornée.**

[1] Noter le changement d'échelle.

Les nombres M et m intervenant dans la définition sont respectivement appelés **majorant** et **minorant** de la suite (u_n).

b. Exemples

1. Les suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$ sont toutes minorées par 0 et majorées par 1.

2. Une suite décroissante est **majorée** par son premier terme : $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots$

De même, une suite croissante est **minorée** par son premier terme : $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ldots$

3. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{n+1}{n-4}$.

(La suite est définie à partir du rang 5.)

La **représentation graphique** de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{x+1}{x-4}$$

(figure 17) permet de voir que :

$$1 < u_n \leqslant 6 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 5$$

(ce qu'il est facile de contrôler par le calcul).

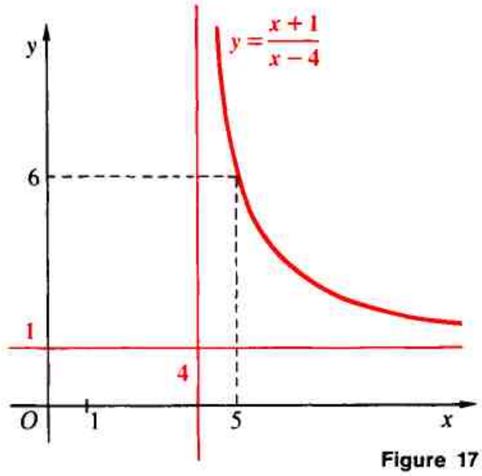


Figure 17

4. Soit (a_n) la suite définie par $a_n = (1{,}1)^n$.

Montrons qu'à partir d'un certain rang $a_n \geqslant 10$ (on dit que la suite est minorée par 10 à partir d'un certain rang). Un calcul machine montre que

$$a_{25} \approx 10{,}83\ldots \quad \text{et donc que} \quad a_{25} \geqslant 10.$$

Comme la suite (a_n) est croissante, pour $n \geqslant 25$: $a_n \geqslant a_{25} \geqslant 10$.

Remarque

Le dernier exemple situe un certain type de questions auxquelles nous serons souvent confrontés[1] : on ne se contente plus de renseignements **qualitatifs** « la suite est majorée; la suite est minorée »; il s'agit de tester si, à partir d'un certain rang la suite est — par exemple — minorée par une **quantité** préalablement choisie.

Exercices

14. Montrer que chacune des suites ci-dessous est bornée :

a) $n \longmapsto 1 - \dfrac{1}{n}$; *b)* $n \longmapsto (-1)^n + \sin n$;

c) $n \longmapsto \dfrac{3n-2}{3n+2}$; *d)* $n \longmapsto \dfrac{n}{3^n}$.

15. Soit f une fonction bornée. Montrer que les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_n = f(u_{n-1}) \text{ pour } n \geqslant 1 \end{cases}$$

et : $\begin{cases} v_0 = a \\ v_n = f(n) \end{cases}$ sont des suites bornées.

16. Montrer que la suite de terme général $(-1)^n \times n$ n'est ni monotone, ni majorée, ni minorée.

17. Donner un exemple de suite strictement croissante majorée.

18. On considère la suite $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Montrer que tout réel inférieur ou égal à 1 est un minorant de la suite. En est-il de même pour le réel 1,001 ?

[1] Dans le chapitre 6 notamment.

c. Comparaison de suites

Le traitement d'inégalités de la forme $u_n \leqslant v_n$ (pour tout entier n ou à partir d'un certain rang) joue un rôle fondamental dans l'étude d'une suite pour les grandes valeurs de n (cf. chapitre 6). Les quelques exemples précédents montrent de plus que la comparaison des termes généraux de deux suites intervient à la fois dans les problèmes de monotonie et de « majoration-minoration ».

Ce qui suit précise le **vocabulaire** adapté à ce genre de situations et dégage deux **méthodes** de comparaison :

- l'une s'appuyant sur le **procédé d'opérations en cascade;**
- l'autre liée aux **propriétés des suites monotones.**

Soit deux suites (u_n) et (v_n). Lorsque l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ se produit à partir d'un certain rang p, on dit que *la suite (u_n) est majorée par la suite (v_n)* **à partir du rang p.**

Bien sûr, on dit également que la suite (v_n) est **minorée** par la suite (u_n) à partir d'un certain rang. (Le fait de préciser le rang ou non dépend du problème abordé.)

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}}\right)$ *pour* $n \geqslant 1$ *et par* $u_0 = 2$.
Montrer que pour tout entier n : $0 < u_n < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Introduisons la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)$.

On a alors : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = f(u_{n-1}). \end{cases}$

1° Tout d'abord, il est clair que pour tout $x > 0$, on a $f(x) > 0$. Ceci permet de montrer de « proche en proche » que la **suite (u_n) est formée de termes strictement positifs.**

2° Ensuite, pour $x > 0$, $f(x) < \frac{x}{2}$: ce résultat, illustré figure 18, découle de l'inégalité $\frac{x}{1+x} < x$ pour $x > 0$.

On en déduit : pour $n \geqslant 1$, $u_n < \frac{1}{2} u_{n-1}$.

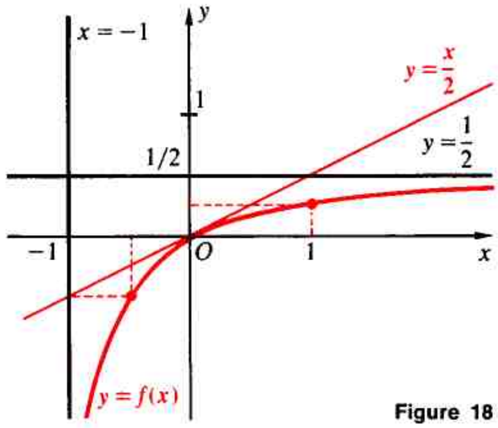


Figure 18

Utilisons alors le procédé de multiplications en cascade de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{ll} 0 < u_n & < \frac{1}{2} u_{n-1} \\ 0 < u_{n-1} & < \frac{1}{2} u_{n-2} \\ \dots\dots\dots & \\ 0 < u_2 & < \frac{1}{2} u_1 \\ 0 < u_1 & < \frac{1}{2} u_0 \end{array}\right\} n \text{ lignes}$$

En multipliant « membre à membre », on obtient :

$$0 < u_n \times u_{n-1} \times u_{n-2} \times \ldots \times u_2 \times u_1 < \frac{1}{2^n}\, u_{n-1} \times u_{n-2} \times \ldots \times u_2 \times u_1 \times u_0.$$

Il est possible de « simplifier » par le réel strictement positif $u_{n-1} \times u_{n-2} \times \ldots \times u_2 \times u_1$, d'où $0 < u_n < \frac{1}{2^n} \times u_0$. Comme $u_0 = 2$, il vient finalement $0 < u_n < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Remarque

On voit que le procédé d'opérations en cascade peut être mis en œuvre avec des **inégalités.** Cependant, lorsqu'il s'agit de multiplications (comme ici), il y a lieu de prendre certaines précautions, notamment :

- sur le **signe des termes** qui permet de contrôler le produit membre à membre;
- sur la **simplification :** s'assurer que l'on ne divise pas par 0.

Exemple 2

Comparer les suites de terme général $(1{,}2)^n$ *et* n.

Un test à la calculatrice permet :

- d'affirmer que $(1{,}2)^n < n$ pour $n \leqslant 14$;
- de conjecturer que $(1{,}2)^n > n$ pour $n \geqslant 15$ (et que l'écart entre les deux suites à tendance à s'accroître puisque, par exemple : $(1{,}2)^{19} \approx 31{,}9$, $(1{,}2)^{26} \approx 114{,}5$, etc.).

Nous procéderons de la façon suivante :

1° Introduction de la suite $u_n = (1{,}2)^n - n$.
Il s'agit donc d'étudier le **signe** de u_n.

2° Étude de la monotonie de (u_n).
Nous avons $u_{n+1} = (1{,}2)^{n+1} - n - 1$ et donc : $u_{n+1} - u_n = (1{,}2)^{n+1} - (1{,}2)^n - 1 = 0{,}2 \times (1{,}2)^n - 1$, soit :

$$u_{n+1} - u_n = 0{,}2 \times \big((1{,}2)^n - 5\big).$$

Or pour $n = 9$, $(1{,}2)^9 \approx 5{,}1597\ldots$

pour $n > 9$, $(1{,}2)^n > (1{,}2)^9$ (la suite $n \longmapsto (1{,}2)^n$ est croissante).

Conclusion
La suite (u_n) est croissante à partir du rang 9, puisque $u_{n+1} - u_n > 0$ pour $n \geqslant 9$.

3° Rangement des termes u_n
La suite (u_n) étant croissante à partir du rang 9, on peut ranger les termes de la façon suivante :

$$u_9 \leqslant u_{10} \leqslant u_{11} \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \ldots\ .$$

4° Intervention du calcul des premiers termes. Le calcul à la machine a mis en évidence l'inégalité $u_{15} > 0$.
Le rangement ci-dessus permet d'écrire pour $n \geqslant 15$, $u_n \geqslant u_{15}$ et donc que u_n est positif pour $n \geqslant 15$.

Conclusion : pour $n \geqslant 15$, $(1{,}2)^n > n$.

Remarques

1. Le cadre général de fonctionnement de cette méthode est le suivant : « on veut établir, pour des raisons diverses (calculs machine, interprétation graphique, conjecture[(1)], ...) que $a_n \geqslant b_n$ à partir d'un certain rang».
On introduit alors la suite (u_n), $u_n = a_n - b_n$. L'étape n° 2 «**monotonie de (u_n)**» est le point-clé du procédé :

- si la suite (u_n) est monotone (à partir d'un certain rang), il y a de grandes chances de pouvoir conclure;
- sinon, la méthode échouera en général; il sera alors nécessaire d'utiliser un autre point de vue afin de traiter l'inégalité $a_n \geqslant b_n$.

2. Cette méthode est à rapprocher d'une pratique analogue concernant la comparaison des fonctions[(2)].

---

(1) Ou tout simplement parce que proposé par un énoncé...

(2) Voir, par exemple, chapitre 4, mais surtout chapitres 8 et 9.

Exercices

19. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + \dfrac{1}{u_{n-1}}. \end{cases}$$

Après avoir montré que $u_n > 0$ pour tout n, établir l'inégalité $u_n \geqslant 2^n$.

20. En utilisant la méthode développée dans l'exemple 2 ci-dessus montrer que :

$$2^n \geqslant 20n + 10 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 8.$$

21. On se propose de comparer les suites de terme général 2^n et $10n^2$.
Soit $u_n = 2^n - 10n^2$.

1° Montrer que $u_{10} > 0$.

2° Vérifier que :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 8$$

(utiliser l'exercice **20**).

3° En déduire que :

$$2^n \geqslant 10n^2 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 10.$$

III. Suites arithmétiques et géométriques

1. Introduction

a. Exemples

Activité 6

1. On considère la suite (u_n) des entiers naturels (rangés par ordre croissant) dont le chiffre des unités est égal à 2 :

$$u_0 = 2 \; ; \; u_1 = 12 \; ; \; u_2 = 22 \; , \; \ldots$$

Définir la suite (u_n) :

1° au moyen d'une formule explicite,

2° par une relation de récurrence.

2. Mêmes questions qu'en 1 avec la suite de nombres : 5 , 50 , 500 , 5 000 , 50000 , etc.

Activité 7 : « Spirale »

A partir d'un point A_0 de l'axe (Ox), on définit de proche en proche, les points A_1, A_2, ..., A_n et l'on note d_1, d_2, ..., d_n les distances OA_1, OA_2, .., OA_n.

1° Calculer d_n en fonction de d_{n-1}.

2° Exprimer d_n en fonction de n et de d_0.

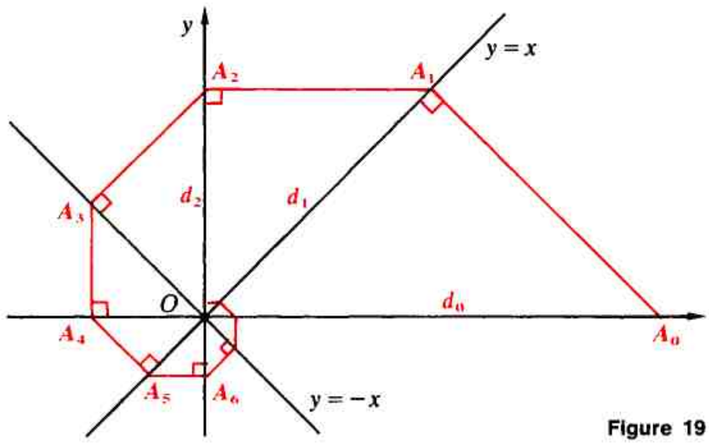


Figure 19

Activité 8 : « L'intérêt est capital »

Une somme S est placée à intérêts composés, au taux de 10 % avec capitalisation annuelle[1].
On désigne par C_n le capital obtenu à la fin de la n-ième année (on convient que $C_0 = S$).
Ainsi $C_1 = S + 0{,}1S$, $C_2 = C_1 + 0{,}1C_1$, ...

1° Établir que $C_n = (1,1)C_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

En utilisant le procédé de « multiplications en cascade », montrer que $C_n = (1,1)^n S$ pour $n \geqslant 0$.

2° Après combien d'années, le capital aura-t-il doublé? Le nombre ainsi obtenu dépend-t-il de la somme S initialement placée?

[1] Cela veut tout simplement dire que :
1° le placement rapporte 10 % d'intérêts par an;
2° à la fin de chaque année les intérêts sont eux-mêmes placés avec le capital afin de produire à leur tour des intérêts.

b. "Et pour quelques dollars de plus"

La « No. Standard Company » propose à ses ingénieurs deux types de contrats relatifs au paiement des primes.

- Contrat type 1 *(les primes sont versées à la fin de chaque année) :*
  1re année : 2 500 dollars,
  puis, augmentation de 300 dollars chaque année.
- Contrat type 2 *(les primes sont versées à la fin de chaque semestre) :*
  1er semestre : 1 000 dollars,
  puis, augmentation de 100 dollars chaque semestre.

Quel est le contrat le plus avantageux?

Note : Il est tout à fait admissible de considérer cette question comme farfelue...

- Désignons par u_n la somme perçue avec le contrat du type 1 à la fin de la n-ième année.

Question 1 : *Vérifier que* (u_n) *satisfait à la relation :*

$$\begin{cases} u_1 = 2\,500 \\ u_n = u_{n-1} + 300 \text{ pour } n \geqslant 2 \end{cases}$$

En déduire par le procédé « d'additions en cascade » que $u_n = 2\,500 + (n-1)\,300.$

- Désignons par :
  . α_n la somme perçue avec le contrat du type 2 à la fin du n-ième semestre.
  . v_n la somme perçue avec le contrat du type 2 à la fin de la n-ième année.

Question 2 : *Justifier les relations :*

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1\,000 \\ \alpha_n = \alpha_{n-1} + 100 \end{cases} \quad et \quad v_n = \alpha_{2n} + \alpha_{2n-1}$$

après avoir exprimé α_n en fonction de n (même méthode qu'en 1), montrer que :

$$v_n = 2\,000 + (4n-3)\,100.$$

- Nous sommes donc amenés à comparer u_n et v_n. Un calcul élémentaire (à vérifier) montre que :

$$v_n - u_n = (n-5) \times 100.$$

Conclusion

Le choix à effectuer dépend donc pour chaque ingénieur du nombre d'années n pendant lesquelles il sera employé par la société :

- si $n \leqslant 4$: il faut choisir le contrat de type 1;
- si $n > 5$: il vaut mieux cette fois choisir le contrat de type 2!

Remarque

Ce résultat n'est pas « paradoxal » comme l'illustre le tableau ci-contre. L'augmentation annuelle, avec le contrat du type 2 n'est pas de 200 dollars mais de **400** dollars...

Année	1er semestre	2e semestre	TOTAL
1	1 000	1 100	2 100
2	1 200	1 300	2 500
3	1 400	1 500	2 900
4	1 600	1 700	3 300

c. Commentaires

La plupart des suites qui interviennent dans ces exemples sont des suites **définies par récurrence** : c'est la simplicité des lois qui les définissent qui permet d'expliquer leur présence dans de nombreuses situations :

- les suites arithmétiques : chaque terme est obtenu à partir du précédent par **addition d'une constante;**
- les suites géométriques : chaque terme est obtenu à partir du précédent par **multiplication par une constante.**

2. Suites arithmétiques

a. Définition

On dit qu'une suite (u_n) est *arithmétique* lorsqu'il existe un réel r tel que :

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{pour tout entier } n.$$

Le nombre r est appelé *raison* de la suite arithmétique.

On dit alors que la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

Exemples

1. La suite des **entiers naturels** est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 0.

2. La suite des **nombres pairs** est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 0.

3. Soit f une **fonction affine** $f : x \longmapsto ax + b$.
Alors la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est une **suite arithmétique.**
En effet on a : $u_n = an + b$ et $u_{n+1} = a(n+1) + b$

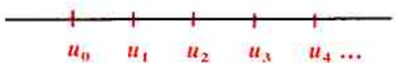
d'où : $$u_{n+1} - u_n = (an + a + b) - (an + b) = a.$$

Ainsi $u_{n+1} = u_n + a$ pour tout entier n : la suite (u_n) est donc une suite arithmétique de raison a.

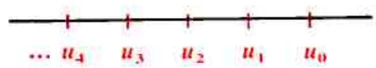
Remarques

1. L'exemple 3 propose à la fois un **résultat** sur les suites arithmétiques et un **moyen** de reconnaître si une suite est arithmétique.
Une suite est arithmétique si et seulement si la différence de deux termes consécutifs quelconques est constante.

2. Une suite arithmétique est représentée sur une droite par des points régulièrement espacés.



$r > 0$



$r < 0$

b. Expression du terme général u_n

En sommant les égalités (cf. méthode page 194) : (n égalités)
$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + r \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ \quad\vdots \\ u_2 = u_1 + r \\ u_1 = u_0 + r \end{cases}$$

on obtient $u_n = u_0 + nr$.

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Alors pour tout entier n :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Ce résultat — joint à l'exemple 3 ci-dessus — montre que les **suites arithmétiques** sont les suites définies par $u_n = f(n)$ où f est une fonction affine.

Une suite arithmétique est une suite de la forme : $n \longmapsto an + b$.

Dans une représentation plane de la suite (u_n) les points de coordonnées (n, u_n) sont donc situés sur une droite (figure 20).

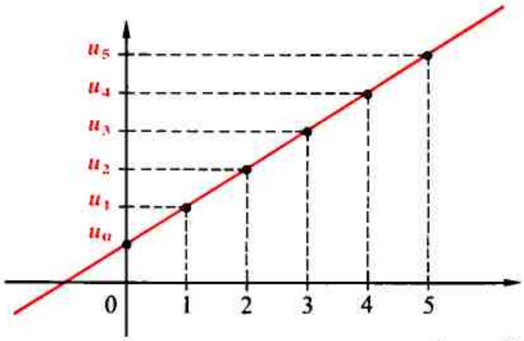


Figure 20

Remarques

1. On peut avoir besoin d'exprimer u_n en fonction de u_1, u_2, etc., plus généralement de u_p.
Il est clair que : $u_n = u_1 + (n-1)r$;
$u_n = u_2 + (n-2)r$; etc.; $u_n = u_p + (n-p)r$.

2. Nous connaissons divers moyens pour déterminer une droite du plan, par exemple :

- par la donnée de deux points,
- par la donnée d'un point et du coefficient directeur.

Il découle alors de la représentation graphique d'une suite arithmétique qu'une telle suite est entièrement déterminée par la donnée (par exemple) :

- de deux termes de la suite et de leurs rangs,
- d'un terme (et de son rang) et de la raison.

Exemple

Expliciter le terme général d'une suite arithmétique (u_n) sachant que $u_{12} = 5$, $u_{30} = 41$.
La suite (u_n) étant arithmétique, il existe deux réels a et b tels que :

$$u_n = an + b \quad \text{pour tout entier } n.$$

Les données de l'énoncé conduisent au système : $\begin{cases} 5 = a \times 12 + b \\ 41 = a \times 30 + b. \end{cases}$

La résolution (immédiate) de ce système conduit à : $a = 2$ et $b = -19$.
Ainsi, pour tout n : $u_n = 2n - 19$.

Exercices

22. Reprendre l'exemple ci-dessus en utilisant la relation :

$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

23. Soit trois termes consécutifs u_{n-1} , u_n , u_{n+1} d'une suite arithmétique. Montrer que u_n est la **moyenne arithmétique**(1) de u_{n-1} et u_{n+1}.

24. Dans chacun des cas suivants, déterminer le terme général u_n d'une suite arithmétique sachant que :

a) $\begin{cases} u_{20} = -52 \\ u_{51} = -145. \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{20} = u_{10} + 25 \\ u_0 = 3. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{22} = 15 \\ \text{la raison } r \text{ est égale à } \frac{3}{4}. \end{cases}$

(1) C'est de cette propriété qu'est issue l'appeliation : « suite **arithmétique** ».

c. Somme des termes d'une suite arithmétique

De nombreux problèmes font intervenir **la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :** le calcul (par exemple) de la somme des n premiers nombres impairs (cf. activité 1) relève de ce point de vue.

Nous étudierons le cas général sous la forme suivante :

Soit p termes ($p \geqslant 1$) consécutifs d'une suite arithmétique de raison r. Notons a le premier terme et l le dernier.

- Nous pouvons les noter :

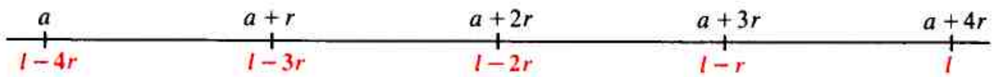
— d'une part, du « premier vers le dernier » par :

$$a \ , \ a+r \ , \ a+2r \ , \ \dots \ , \ a+(p-2)r \ , \ a+(p-1)r \ ;$$

— d'autre part, du « dernier vers le premier » par :

$$l \ , \ l-r \ , \ l-2r \ , \ \dots \ , \ l-(p-2)r \ , \ l-(p-1)r.$$

Illustration de la notation utilisée ($p=5$) :



- En désignant par S la somme de ces termes, nous avons :

$$S = a + (a+r) + (a+2r) + \dots + \big(a+(p-2)r\big) + \big(a+(p-1)r\big)$$
$$S = l + (l-r) + (l-2r) + \dots + \big(l-(p-2)r\big) + \big(l-(p-1)r\big)$$

d'où, en additionnant et en associant les termes l'un sous l'autre :

$$2S = \underbrace{(a+l)+(a+l)+(a+l)+\dots+(a+l)+(a+l)}_{p \text{ termes}}$$

ainsi :

$$S = p \times \frac{a+l}{2}.$$

Ce résultat est à retenir sous la forme suivante :

La somme de termes *consécutifs* d'une suite arithmétique est égale au *produit* du *nombre de termes* par la *moyenne arithmétique des termes extrêmes.*

Exemples

1. $S = 1+2+\dots+n$ (somme des n premiers entiers). On a :

- nombre de termes : n;
- termes extrêmes : 1 et n; moyenne arithmétique : $\dfrac{n+1}{2}$;

d'où :

$$\boxed{1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

ce résultat, d'une utilisation fréquente, est à retenir.

2. $S = 1+3+5+\dots+(2n-1)$ (somme des n premiers nombres impairs) :
- nombre de termes : n;
- termes extrêmes 1 et $2n-1$; moyenne arithmétique : n; d'où (cf. page 185) :

$$\mathbf{1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2.}$$

3. Soit (u_n) une suite arithmétique; le calcul de $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ s'effectue suivant le même principe :
- nombre de termes : $n+1$ (attention);
- moyenne arithmétique des termes extrêmes : $\dfrac{u_0+u_n}{2}$.

On a donc :

$$\boldsymbol{u_0+u_1+\dots+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right).}$$

4. Soit à calculer la somme des entiers pris de 3 en 3 de 22 jusqu'à 100 :

$$\mathbf{S=22+25+28+\dots+97+100}$$

(on peut vérifier que 100 fait effectivement partie de la liste).

Le nombre S étant la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique (de raison 3), nous avons :
- moyenne arithmétique des termes extrêmes : $\dfrac{100+22}{2}=61$;
- nombre de termes : $\dfrac{100-22}{3}+1=27$; d'où $S=27\times 61=1\,647$.

Note (sur le calcul du nombre de termes).

Il s'appuie sur cette vieille histoire de « piquets » et d'« intervalles » :
- le quotient $\dfrac{100-22}{3}$ donne le nombre d'intervalles;
- il y a **un** « piquet » de plus que d'intervalles...

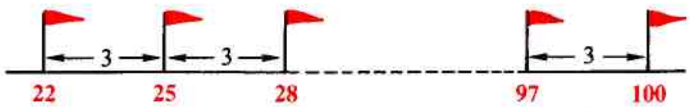


Figure 21

Commentaire

Dans l'application du résultat précédent, la seule difficulté (éventuelle) réside dans le « comptage » du nombre de termes : il faut donc procéder avec soin.

Exercices

25. Calculer la somme des entiers multiples de 7, qui sont plus grands que 100 et plus petits que 1 000.

26. Calculer chacune des sommes suivantes :

a) $S=u_1+u_2+\dots+u_n$ avec $u_n=\dfrac{1}{2}n-1$ pour $n\geqslant 0$.

b) $S=u_2+u_4+u_6+\dots+u_{100}$ (somme des termes d'indices pairs de 2 à 100) avec :

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1}=u_n-4. \end{cases}$$

27. Exprimer en fonction de n l'aire des deux domaines (en gris et en rouge) sur la figure 22.

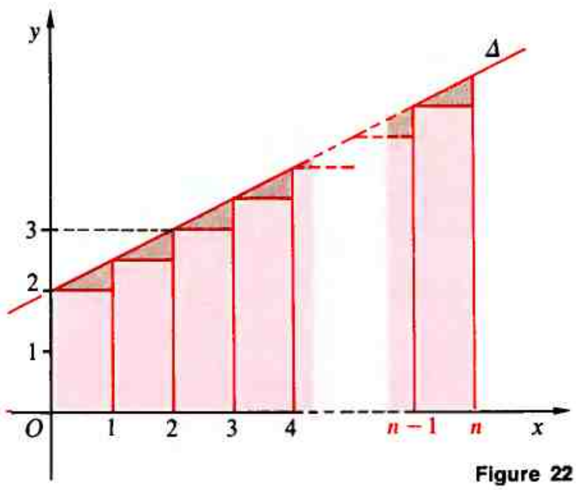


Figure 22

d. Quelques problèmes

Problème 1 : « Générosité »

(D'après *Jeux et Stratégies*, n° 15.)

Rencontrant un mendiant, un homme lui donne une pièce; il en rencontre un deuxième, et lui donne deux pièces. Il rencontre d'autres mendiants encore, à qui il donne une pièce de plus que précédemment à chaque fois... jusqu'à ce qu'il n'ait plus rien en poche.
Il réfléchit alors et se dit : « Si j'avais donné autant de pièces à chacun d'entre eux, cela aurait été plus équitable et chaque mendiant aurait reçu 8 pièces »...
Combien a-t-il rencontré de mendiants?

Désignons par n le nombre de mendiants. Le nombre de pièces distribuées est $1+2+\ldots+n$, soit $\frac{n(n+1)}{2}$. Ce nombre de pièces est aussi égal à $8n$ (d'après la dernière partie de l'énoncé). On a donc : $\frac{n(n+1)}{2}=8n$, ce qui conduit sans difficultés à $\mathbf{n=15}$ (puisque, manifestement $n \neq 0$).

L'homme a donc rencontré 15 mendiants et distribué 120 pièces.

Problème 2 : « Grains et Damiers »

(D'après *Jeux et Stratégies*, n° 8.)

On met un certain nombre de grains dans la première case d'un damier.
Dans la seconde case on met le même nombre de grains que dans la première case plus 5 grains. Ainsi de suite.
Dans la n^e case, on met la même quantité de grains que dans la $(n-1)$-ième case plus 5 grains. On a ainsi réparti 352 grains, et utilisé plus d'une case.
Combien de cases a-t-on utilisées et combien de grains a-t-on mis dans la première case?

Désignons par k le nombre de grains mis dans la 1re case et par n le nombre de cases. Le nombre de grains mis dans chaque case est :

1re case : k
2e case : $k+5$
....
$n$ième case : $k+5\times(n-1)$.

On reconnaît là les premiers termes d'une suite arithmétique de raison 5.
Le nombre total de grains disposés sur le damier est donc :

$$n\times\left(\frac{k+k+5(n-1)}{2}\right).$$

D'où la relation : $n\times\left(k+\frac{5(n-1)}{2}\right)=352.$ **(1)**

On obtient donc une équation pour deux inconnues : c'est la nature des inconnues (n et k entiers) qu'il faut prendre en compte pour résoudre un tel problème.

Écrivons la relation (1) sous la forme : $n\times(2k+5(n-1))=704.$ (2)

On peut l'exploiter de deux façons :

- d'une part, comme $n\times(2k+5(n-1))\geqslant 5n(n-1)$, on a $n(n-1)\leqslant\frac{704}{5}$, d'où $\mathbf{n\leqslant 12}$;
- d'autre part, il apparaît que n est un diviseur de 704.

Comme $704 = 11 \times 64 = 11 \times 2^6$, les seules valeurs possibles de n sont donc[1] : 2, 4, 8 et 11. Il suffit alors de tester ces différentes valeurs dans la relation (1) ou (2) : la condition k entier conduisant à retenir une seule valeur[2] $n = 11$.

Conclusion

On a utilisé 11 cases et on a mis 7 grains dans la 1^re^ case.

Remarque

On notera la diversité des arguments et des techniques utilisés dans l'étude de la relation (1) :

- recherche d'un encadrement ($2 \leqslant n \leqslant 12$);
- recherche de propriétés (n diviseur de 704);
- examen cas par cas des nombres « candidats » restants.

3. Suites géométriques

a. Définition

On dit qu'une suite (u_n) est *géométrique* lorsqu'il existe un réel q tel que :

$$u_{n+1} = qu_n \quad \text{pour tout entier } n.$$

Le nombre q est appelé *raison* de la suite géométrique.

On dit alors que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison[3] q.

Exemples

1. La suite des **puissances d'un nombre** a est une suite géométrique, de raison a. Cela résulte de l'égalité : $a^{n+1} = a \times a^n$.

2. Une suite telle que : $(1, x^2, x^4, x^6, \ldots, x^{2n}, \ldots)$ est également une suite géométrique. En effet, comme $x^{2n} = (x^2)^n$, il s'agit donc de la suite des puissances de x^2 : c'est une suite géométrique de raison x^2.

3. Considérons le procédé géométrique qui consiste à associer à un triangle son triangle des milieux.
Partant d'un triangle T_1 donné, on peut lui associer en itérant ce procédé des triangles T_2, T_3, ..., T_n, ... (figure 23).
Alors la suite des périmètres (P_n) et des aires (a_n) de ces triangles sont des suites géométriques. Cela découle des égalités (évidentes) :

$$\begin{cases} P_{n+1} = \dfrac{1}{2} P_n \\[2ex] a_{n+1} = \dfrac{1}{4} a_n. \end{cases}$$

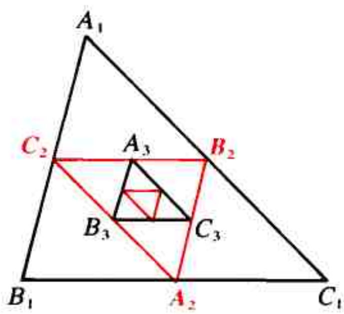


Figure 23

[1] Il est clair que $n \neq 1$.

[2] On peut aussi utiliser l'égalité $5(n-1) = \dfrac{704}{n} - 2k$ et remarquer que pour $n = 2$, 4 ou 8, $\dfrac{704}{n}$ est un nombre pair, ce qui conduirait à $n-1$ pair...

[3] Dans ce qui suit, nous supposerons $q \neq 0$. En effet, une suite géométrique de raison 0 est nulle à partir de son second terme (sans grand intérêt donc).
Remarquons également que lorsque $q = 1$, la suite (u_n) est constante.

4. La suite (u_n) avec $u_n = n \times 6^n$ est-elle une suite géométrique?
On a $u_{n+1} = (n+1)6^{n+1}$; d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 6 \times \frac{n+1}{n}$. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'étant pas constant, la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique

Remarque[1]
Elle est issue de l'exemple précédent :
Une suite (de termes non nuls) **est géométrique si et seulement si le rapport de deux termes consécutifs est constant.**

Exercices

28. Montrer que chacune des suites ci-dessous est géométrique et préciser sa raison :
a) $u_n = 4 \times (\sqrt{3^n})^2$;
b) $u_n = \begin{cases} -5 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 5 \text{ si } n \text{ est impair}; \end{cases}$
c) $u_n = (-4)^{2n+1}$; *d*) $u_n = x^{2n}$, x réel donné;
e) $u_n = 2^n \times \frac{1}{3^{n+1}}$.

29. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Vérifier que les suites :

$$v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto v_n = u_{2n}$$
et
$$w : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad n \longmapsto w_n = u_{2n+1}$$

sont aussi des suites géométriques et préciser leur raison.

b. Expression du terme général u_n

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q $(q \neq 0)$. Alors pour tout entier n :

$$u_n = u_0 q^n.$$

A titre d'exemple, nous démontrerons ce résultat par la méthode développée page 193. Soit (α_n) la suite définie par $\alpha_n = u_0 q^n$. On a :

- $\boldsymbol{\alpha_0 = u_0}$;
- $\alpha_{n+1} = u_0 q^{n+1} = q \times (u_0 q^n)$ et donc : $\boldsymbol{\alpha_{n+1} = q\alpha_n}$.

Conclusion : $u_n = \alpha_n$ pour tout entier n.
Ce résultat permet d'obtenir une relation entre deux termes quelconques d'une suite géométrique :

$$\frac{u_n}{u_m} = \frac{q^n}{q^m} \quad \text{ou encore} \quad u_n = u_m q^{n-m}.$$

Exercices

30. Donner une autre démonstration du résultat précédent : « $u_n = u_0 q^n$ » en utilisant le procédé de « multiplications en cascade ».

31. Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Montrer que b est la moyenne géométrique de a et c.

32. Quel taux d'augmentation de salaire faut-il appliquer chaque **mois** pour obtenir une augmentation sur l'**année** de 12 % (utiliser la calculatrice)?

33. Montrer que, dans une suite géométrique (u_n), u_n et u_{n+2} sont de même signe, quel que soit $n \geqslant 0$.

[1] On notera l'analogie avec la remarque 1 de la page 203.

34. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$u_n = -2^n \ , \quad v_n = (-2)^n.$$

Montrer que $u_3 = v_3$; $u_7 = v_7$; et, de façon plus générale, que : $u_{2n+1} = v_{2n+1}$ pour tout n.

35. Déterminer la (ou les) suite(s) géométrique(s) (u_n) vérifiant :

1er cas $\begin{cases} u_3 = 5 \\ u_6 = 135. \end{cases}$ 2e cas $\begin{cases} u_3 = 5 \\ u_7 = 405. \end{cases}$

c. *Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique*

• On pourrait espérer obtenir une formule aussi simple et maniable que pour les suites arithmétiques. Hélas...
Le calcul de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique s'appuie sur :
— la connaissance de $1 + q + \ldots + q^n$,
— une technique de mise en facteurs.

• **Calcul de $1 + q + \ldots + q^n$**
Désignons par S la somme $1 + q + \ldots + q^{n-1} + q^n$.
On a, en multipliant par q : $qS = q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}$.
D'où, par différence :

$$S - qS = 1 - q^{n+1} \quad \text{ou} \quad (1-q)S = 1 - q^{n+1}.$$

Ainsi, lorsque $q \neq 1$, $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$.

Il est impératif de retenir le résultat suivant :

Pour tout réel $q \neq 1$, on a :

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

On notera comment on peut repérer l'exposant de q dans le résultat (au numérateur) en fonction du dernier exposant de q dans la somme :

$$1 + q + q^2 + q^3 = \frac{1-q^4}{1-q}$$

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Autres exemples :

• $1 + 2 + \ldots + 2^n = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1.$

• $1 + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{3}}$ $\left(\text{en effet, ici } q = \dfrac{1}{3}\right)$.

On préférera écrire : $1 + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{2}\left(3 - \dfrac{1}{3^n}\right)$ (calcul à contrôler).

Notons que pour $q = 1$, $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = n + 1$ ($n + 1$ termes tous égaux à 1).

• Application (méthode de calcul)

— Examinons le calcul de la somme :

$$S = ax^3 + ax^4 + \dots + ax^{32} \quad \text{où} \quad x \neq 1 \quad \text{et} \quad a \neq 0.$$

(Il s'agit bien de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison x.)
Mettons ax^3 en facteurs :

$$S = ax^3(1 + x + \dots + x^{29}),$$

puis appliquons le résultat précédent : $1 + x + \dots + x^{29} = \dfrac{1 - x^{30}}{1 - x}$.

On obtient donc :

$$\boldsymbol{S = ax^3 \times \frac{1 - x^{30}}{1 - x}}.$$

— La méthode ci-dessus est générale : « **le premier terme étant mis en facteur, on est ramené au calcul d'une somme de la forme $1 + q + \dots + q^n$** ».
— Illustrons à l'aide de deux exemples :

1° Calcul de $x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n}$ pour $x \neq \pm 1$.

Il s'agit d'une suite géométrique de raison x^2

$$S = x^2 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \dots + (x^2)^n$$
$$S = x^2\left(1 + x^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^2)^{n-1}\right)$$

(mise en facteur du 1^er^ terme)

$$S = x^2\,\frac{1 - (x^2)^n}{1 - x^2}$$

(calcul de $1 + q + \dots + q^{n-1}$ avec $q = x^2 \neq 1$).

D'où le résultat $\boldsymbol{S = x^2\,\dfrac{1 - x^{2n}}{1 - x^2}}$.

2° Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et S la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Si $q = 1$, $\quad S = u_0(n + 1)$.

Si $q \neq 1$, $\quad S = u_0 + qu_0 + \dots + q^n u_0$.

Soit $\quad S = u_0(1 + q + \dots + q^n)$.

$$\boxed{S = u_0\,\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.}$$

Exercices

Dans chacun des exercices suivants :

- *vérifier qu'il s'agit de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique (préciser la raison);*
- *appliquer la méthode précédente pour effectuer le calcul;*
- *contrôler à l'aide de la réponse indiquée.*

36. $2^5 + 2^6 + \dots + 2^{11} + 2^{12}$.
(*Réponse :* 8 160.)

37. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
$\left(\textit{Réponse :}\ 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}.\right)$

38. $-x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots - x^{17}$.
$\left(\textit{Réponse :}\ \dfrac{-x(1 + x^{17})}{1 + x}.\right)$

39. $\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - 4 + 4\sqrt{2} - \dots - 64 + 64\sqrt{2}$.
(*Réponse :* $127\sqrt{2} - 126$.)

d. Quelques problèmes

Problème 1 : « Les nombres parfaits »

(D'après *La Mystification Mathématique*. Alain BOUVIER. Hermann.)

« Depuis l'antiquité grecque, un nombre entier est dit parfait **s'il est égal à la somme de ses diviseurs (distincts de lui-même) comme 6 et 28 puisque :**

$$6 = 1 + 2 + 3$$
$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Quatre nombres parfaits furent découverts par les Grecs :

$$6 \ , \ 28 \ , \ 496 \ \text{ et } \ 8\,128.$$

Un progrès décisif fut obtenu par Euler qui établit que tout nombre parfait pair **est de la forme :**

$$2^{n-1}(2^n - 1) \quad \text{où} \quad 2^n - 1 \quad \text{est premier.»}$$

1° Vérifier que 496 *et* 8 128 *sont des nombres parfaits.*

2° Montrer qu'effectivement tout nombre de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$, *avec* $2^n - 1$ *premier, est parfait.*

1° La liste des diviseurs de 496 est donnée par le schéma ci-contre.
On peut alors vérifier que :

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$$

496	1
248	2
124	4
62	8
31	16

et donc **496 est un nombre parfait.**

(Le cas de 8 128 peut être abordé de la même façon à titre... d'exercice.)

2° Soit p un nombre premier; la liste des diviseurs de $N = 2^{n-1} \times p$ est :

$$1 \ , \ 2 \ , \ 2^2 \ , \ \ldots \ , \ 2^{n-1} \ , \ p \ , \ 2p \ , \ 2^2p \ , \ \ldots \ , \ 2^{n-1}p = N.$$

Ainsi la somme des diviseurs de N (N compris) est :

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + p + 2p + \ldots + 2^{n-1}p$$

ou encore
$$S = (p+1)(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) = (p+1) \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2}.$$

Autrement dit :
$$S = (p+1) \times (2^n - 1).$$

Si $p = 2^n - 1$, on obtient

$$S = 2^n \times (2^n - 1) = 2\left(2^{n-1}(2^n - 1)\right),$$

soit $S = 2N$ (puisque $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$).

Il est clair alors que la somme des diviseurs de N, distincts de N, est $S - N = N$.

Ainsi **le nombre N est parfait.**

Commentaires

1. Les nombres premiers de la forme $2^n - 1$ sont appelés aujourd'hui nombres de Mersenne (1588-1648)[1].

2. On ne sait actuellement s'il existe des nombres parfaits **impairs.** La conjecture est qu'il n'existe pas de tels nombres... Citons à ce sujet un résultat impressionnant : « s'il existe un nombre parfait impair, il est nécessairement plus grand que[2] 10^{150}. »

[1] A ce jour, le plus grand nombre premier connu est un nombre de Mersenne : $2^{216091} - 1$.

[2] Il est difficile de se faire une idée de la « taille » de 10^{150}. (Voir cependant chapitre I, page 9.)

Problème 2 : « Suites (u_n) définies par $u_{n+1} = au_n + b$

Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ pour $n \geqslant 0$.
Il s'agit d'obtenir une expression explicite de u_n en fonction de n et de son premier terme u_0.

1° Examiner les cas : $a = 0$; $b = 0$; $a = 1$.

2° On suppose $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

a) Vérifier que l'équation $x = ax + b$ admet une solution unique x_0.

b) On pose alors $v_n = u_n - x_0$. Étudier la suite (v_n). En déduire l'expression cherchée pour u_n.

1° Pour $a = 0$, la suite (u_n) est **constante.** Lorsque $a = 1$, la suite (u_n) est **arithmétique** de raison b. Lorsque $b = 0$, la suite (u_n) est **géométrique** de raison a.
Dans chaque cas, il n'y a aucune difficulté à exprimer le terme général u_n (cf. pages 206 et 211).

2° L'équation $x = ax + b$ est équivalente à :

$$(1 - a)x = b \ ;$$

comme $a \neq 1$, elle admet une solution unique :

$$x_0 = \frac{b}{1 - a}.$$

On a : $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ x_0 = ax_0 + b. \end{cases}$

En faisant la différence, il vient :

$$u_{n+1} - x_0 = a(u_n - x_0);$$

la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - x_0$ est donc une suite géométrique de raison a.

Note : la figure 24 illustre la relation $v_{n+1} = av_n$ $\left(a = \tan\alpha = \dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$.

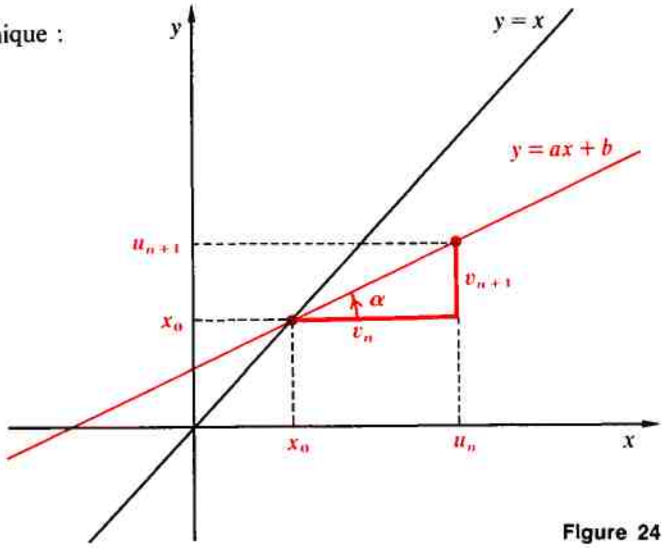


Figure 24

On peut donc écrire :

$$v_n = v_0 a^n = (u_0 - x_0)\,a^n$$

d'où : $u_n = (u_0 - x_0)\,a^n + x_0$.

Exercices

Dans chacun des cas ci-dessous, exprimer u_n en fonction de n.

40. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{3}\,u_n + 4. \end{cases}$

41. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2. \end{cases}$

42. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n - 6. \end{cases}$

Remarques

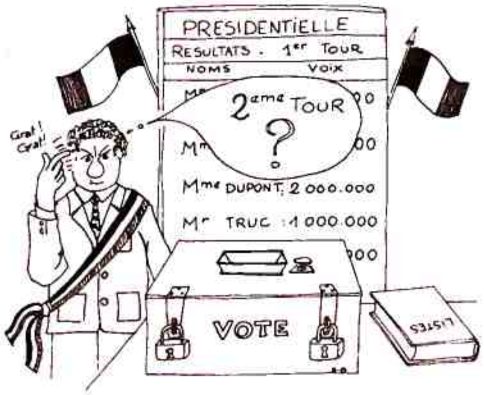
1. Le cas où u_0 est solution de l'équation $x = ax + b$ peut se traiter directement. (Cf. exercice 42, ci-dessus.)

2. On verra dans le paragraphe IV quelle méthode sous-tend ce genre de procédé.

Problème 3 : « Élections »

(D'après « *Euréka* ». *Les Jeux mathématiques.* Dunod.)

Lors de l'élection présidentielle française, en 2001, un certain nombre de candidats sont en présence au premier tour.
Chacun d'eux réunit exactement deux fois moins de voix que celui qui lui est immédiatement supérieur. Un deuxième tour sera-t-il nécessaire?



Soit n le nombre de candidats et x le nombre de voix recueillies par le meilleur candidat... Z.
Classons les candidats dans l'ordre « d'arrivée » au premier tour : le candidat classé 2[e] a recueilli $\frac{x}{2}$ voix ;

celui classé 3[e] : $\frac{1}{2}\frac{x}{2}=\frac{x}{2^2}$; etc.

Le **nombre total de voix** est donc :

$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{x}{2^{n-1}}=x\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=x\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=x\times\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

La **proportion de voix** obtenue par Z est donc :

$$\frac{x}{x\times\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}=\frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}}>\frac{1}{2}$$

car $2-\frac{1}{2^{n-1}}<2 \quad (n\geqslant 2)$[1].

Le candidat a donc obtenu plus de 50 % de voix au premier tour : il est directement élu.

(Par exemple, on peut vérifier que :

- si $n=7$, Z a obtenu 50,39 %;
- si $n=11$, Z a obtenu 50,02 %.)

4. *Divers aspects des suites arithmétiques et géométriques*

L'étude qui vient d'être faite sur les suites arithmétiques et géométriques (avec les exemples et problèmes qui s'y rapportent) permet de dégager plusieurs aspects pour ces suites (tableau ci-dessous).

Divers aspects	Suites arithmétiques	Suites géométriques
récurrence	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=q\times u_n$
caractérisation	$u_{n+1}-u_n=$ constante	$\frac{u_{n+1}}{u_n}=$ constante
formule explicite	$u_n=u_0+nr$	$u_n=u_0\times q^n$
liste	$(a,\ a+r,\ a+2r,\ \ldots,\ a+nr,\ \ldots)$	$(a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^n,\ \ldots)$

Une remarque
Une démarche importante dans les problèmes qui font appel aux suites arithmétiques ou géométriques réside dans le **changement de point de vue :** modifier l'aspect sous lequel les données conduisent à considérer de telles suites vers un aspect mieux adapté à la résolution du problème.

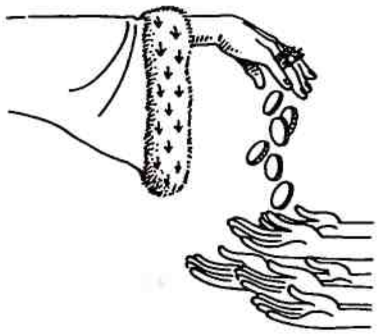
(1) On suppose qu'il n'y a pas qu'un seul candidat...

IV. Compléments

De nombreuses situations introduisent des **suites récurrentes** et font appel, alors, à **l'explicitation du terme général** de cette suite. L'exemple qui suit a pour objet de se faire une idée de certaines **méthodes** que l'on peut mettre en œuvre dans le traitement de tels problèmes.

1. Le partage du roi

(D'après *Jeux et Stratégies*, n° 3.)



Un roi décide de distribuer à ses ministres une certaine quantité de pièces d'or.
En toute équité, il répartit ainsi les pièces : au premier des ministres, il donne 5 pièces d'or; au second ministre, le double du premier moins 2 pièces; et ainsi de suite. Au *n*-ième ministre le double du (*n* − 1)-ième ministre moins *n* pièces.
Le *n*-ième ministre avide, désire sa part, sans attendre son tour. Peut-on exprimer le nombre de pièces d'or à donner au *n*-ième ministre, en fonction de son rang?
Quelle est sa part, si $n = 10$?

• **Relation de récurrence**
Aucune difficulté : elle est donnée par l'énoncé. En désignant par a_n le nombre de pièces d'or reçu par le n-ième ministre, on a :

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 2a_{n-1} - n. \end{cases}$$

• **Calcul des premiers termes**
Ce calcul des premiers termes de la suite :

$$a_1 = 5 \ ; \quad a_2 = 8 \ ; \quad a_3 = 13 \ ; \quad a_4 = 22 \ ; \quad a_5 = 39 \ ; \quad a_6 = 72 \ ; \quad \ldots$$

ne semble pas conduire à une conjecture « simple » sur l'expression de a_n...

• **Autre méthode**
1° On « oublie » momentanément la condition initiale $a_1 = 5$ et l'on s'intéresse à **toutes les suites** (u_n) qui vérifient la relation de récurrence $u_n = 2u_{n-1} - n$.

2° La méthode est alors basée sur la remarque suivante.

Dès que l'on connait une suite vérifiant la relation de récurrence $u_n = 2u_{n-1} - n$, alors on les connait toutes !

En effet supposons qu'une suite (α_n) vérifie $\alpha_n = 2\alpha_{n-1} - n$. Alors, pour tout autre suite (u_n) vérifiant $u_n = 2u_{n-1} - n$, on aura, en faisant la différence :

$$u_n - \alpha_n = 2(u_{n-1} - \alpha_{n-1}).$$

Ainsi, $u_n - \alpha_n$ sera le terme général d'une suite géométrique de raison 2 et donc $u_n - \alpha_n$ s'écrira $k2^n$, où k est une constante réelle.

Conclusion : $$u_n = k2^n + \alpha_n.$$

Exercice

43. **Réciproquement** : soit (α_n) une suite vérifiant $\alpha_n = 2\alpha_{n-1} - n$.
Montrer que quel que soit le réel k, la suite :

$$n \longmapsto u_n = k2^n + \alpha_n$$

vérifie $u_n = 2u_{n-1} - n$.

3° Pour obtenir **une** suite (α_n) vérifiant la relation de récurrence, il suffit — dans les cas simples envisagés ici — de tester quelques suites « simples » (suites constantes, suites arithmétiques, plus généralement, suites polynomiales, etc.).
Dans le cas particulier qui nous préoccupe, il est assez facile de voir que la suite (α_n) définie par $\alpha_n = n+2$ convient.

4° On revient alors à l'étude de la suite (a_n).
Il existe un réel k tel que $a_n = k2^n + n + 2$.
Sa valeur est déterminée par la condition initiale $a_1 = 5$, ce qui conduit à $k=1$.
Ainsi : $a_n = 2^n + n + 2$.

Remarques

1. Pour $n = 10$, on obtient $a_{10} = 1\,036$ (il est bien évident que ce résultat peut être obtenu directement).

2. On peut vérifier sur les premiers termes le résultat obtenu[1] :

$$a_1 = 5 = 2+3 \qquad a_4 = 22 = 16+6$$
$$a_2 = 8 = 4+4 \qquad a_5 = 39 = 32+7$$
$$a_3 = 13 = 8+5 \qquad a_6 = 72 = 64+8 \quad \ldots$$

2. Commentaires

1. Il n'y a aucune difficulté à généraliser cette méthode aux suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = qu_n + b_n$, où q est une constante et (b_n) une suite fixée. Cependant, il est clair, que si la suite (b_n) est « trop compliquée », on risque d'avoir de sérieuses difficultés pour obtenir **une** suite (α_n)...

2. L'étude des suites (u_n), avec $u_{n+1} = au_n + b$, à laquelle nous avons procédé (cf. page 213) relève en fait de la même idée :

- la suite (α_n) est cherchée sous la forme d'une suite constante, ce qui conduit à l'équation $x_0 = ax_0 + b$;
- la suite $(u_n - \alpha_n)$ devient alors $(u_n - x_0)$ suite géométrique de raison a.

3. Schéma illustrant la méthode précédente

Problème

Obtenir l'expression explicite générale de la suite (x_n), définie par :

$$\begin{cases} x_0 = a & a,\ q \text{ réels donnés} \\ x_n = qx_{n-1} + b_n & (b_n) \text{ suite fixée.} \end{cases}$$

- **Étape 1 :** On considère $\boxed{\text{toutes}}$ les suites (u_n) vérifiant : $u_n = qu_{n-1} + b_n$.
- **Étape 2 :** On détermine $\boxed{\text{une}}$ suite (α_n) vérifiant : $\alpha_n = q\alpha_{n-1} + b_n$.
- **Étape 3 :** On détermine les suites (u_n) (étape 1) : elles sont de la forme :
$$u_n = kq^n + \alpha_n, \quad k \text{ réel quelconque.}$$
- **Étape 4 :** Retour à la suite (x_n) : le réel k est calculé grâce à la condition initiale $x_0 = a$.

[1] On peut se rendre compte — maintenant — que de telles écritures suggèrent aisément une conjecture sur l'expression de a_n.

EXERCICES

Vrai-Faux

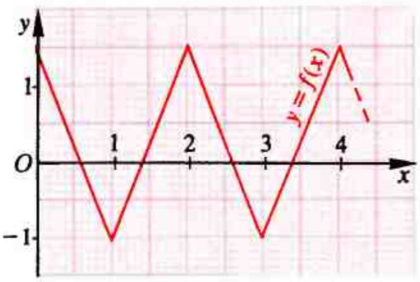
1. Si S : $u_n = \dfrac{(n-2)^2}{n+1}$, alors $u_{n+2} = \dfrac{n^2}{n+3}$.

2. La suite des nombres impairs vérifie la relation :
$$u_{n+1} = u_{n+2}.$$

3. Avec $u_n = 2^n + 3^n$, on a $u_{2n} = 4^n + 9^n$.

4. La suite (u_n) définie par $u_n = (n+1)^2 + (n-1)^2$ vérifie la relation $u_{n+1} = u_{n-1}$.

5. La suite (u_n) étant définie par $u_n = f(n)$ (cf. figure ci-contre) :

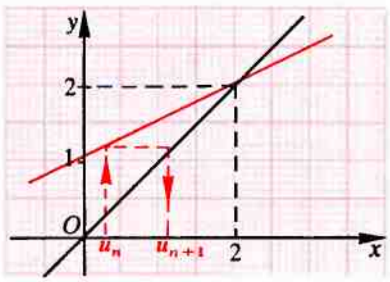


a) $n \longmapsto u_{2n}$ est une suite constante;

b) pour tout $n \geqslant 1$, $u_{2n+1} = u_{2n-1}$.

6. La suite (u_n) définie par la figure ci-dessous vérifie la propriété suivante :

pour tout n , $2u_{n+1} - u_n$ est constant.



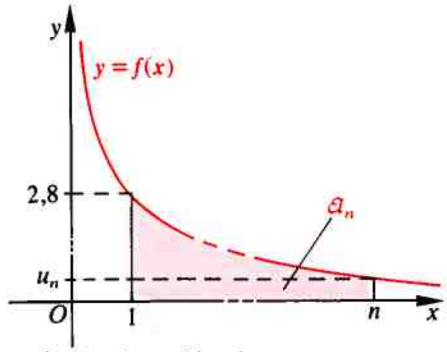
7. La liste a_{n+5} , a_{n+6} , a_{n+7} , ... , a_{2n-1} , a_{2n} comporte $n-5$ termes.

8. Toute suite croissante de premier terme positif a tous ses termes positifs.

9. Toute suite croissante de premier terme $u_0 < 0$ admet un terme positif.

10. Si $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Pour les numéros **11** *à* **14,** *u_n désigne la valeur de la fonction f en n et $\mathcal{A}_n$ l'aire du domaine en rouge (figure ci-dessous).*



11. La suite (u_n) est décroissante.

12. La suite $(\mathcal{A}_n)$ est décroissante.

13. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant k$.

14. Pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{A}_n \leqslant 2{,}8n - 2{,}8$.

15. $a + (a+5) + (a+10) + (a+15) + \dots$
$$+ (a+100) + (a+105) = \frac{a + (a+105)}{2} \times 105.$$

16. La suite de terme général $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

17. $1 + \pi + \pi^2 + \dots + \pi^{99} + \pi^{100} = \dfrac{\pi^{100} - 1}{\pi - 1}$.

Applications

Dans tous les exercices, S_n désignera, s'il y a lieu, la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

1. *1°* Vérifier que pour tout entier naturel n :
$$n^3 - 5n^2 + 7 = n^2(n-5) + 7.$$

2° Montrer que la suite de terme général :

$$u_n = \sqrt{n^3 - 5n^2 + 7}$$

est définie pour tout $n \geqslant 5$.

2. La suite (u_n) est définie par : $u_n = \dfrac{n^2 + 6n + 12}{2n + 6}$.

On pose $v_n = u_{n-3}$ pour $n \geqslant 3$.
Exprimer v_n en fonction de n.

3. On pose pour tout entier naturel n : $u_n = \sin \dfrac{n\pi}{3}$.

Comparer :

a) u_n et u_{n+6} ; *b*) u_n et u_{n+3} .

4. Soit (u_n) la suite de terme général :

$$u_n = \cos(4n - 1)\frac{\pi}{6}.$$

Calculer u_{3k} , u_{3k+1} , u_{3k+2} .

5. Montrer que la suite $\left(\cos \dfrac{2n\pi}{5}\right)$ est une suite périodique dont on précisera la période.

6. Montrer que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n} \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0 \end{cases}$$

est une suite périodique de période 2.

Dans les exercices **7** *à* **10** *tracer la courbe représentative de la fonction f, puis à l'aide de ce schéma représenter les premiers termes de la suite* (u_n).

7. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, avec $f(x) = 1 - x^2$.

8. $\begin{cases} u_0 = -\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, avec $f(x) = \sqrt{x+1}$.

9. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, avec $f(x) = \sqrt{2-x}$.

10. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{8} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, avec $f(x) = 4x(1-x)$.

Dans les exercices **11** *à* **22**, *étudier la monotonie de la suite* (u_n).

11. $u_n = 2n - \dfrac{5}{n}$.

12. $u_n = 1 - \sqrt{n-1}$.

13. $u_n = -5n^2 + 3n + 1$.

14. $u_n = \dfrac{n+1}{3^n}$.

15. $u_n = 2n + \dfrac{1}{5^n}$.

16. $u_n = \dfrac{2^n\sqrt{2n}}{3^n}$.

17. $u_n = \dfrac{n^3 - n}{3}$.

18. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2 + 1} \quad \text{pour } n \geqslant 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n^2}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n + 3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2. \end{cases}$

22. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + u_n - 2}{u_n^2 + 1}. \end{cases}$

23. Une suite arithmétique a pour premier terme $u_0 = -6$ et pour raison 4.
Calculer u_7, u_{12}, u_{20}, S_8, S_{12}.

24. Déterminer la raison d'une suite arithmétique (u_n) sachant que : $u_0 = 2$ et $u_{13} = 67$.

25. Même exercice avec : $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $u_{26} = 19$.

26. Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique sachant que : $u_6 = 7$ et $u_{12} = 37$.

27. Même exercice avec : $u_5 = 3$ et $u_{15} = -27$.

28. Calculer : $3 + 7 + 11 + 15 + \ldots + 115 + 119$.

29. Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique sachant que : $u_4 = 9$ et $S_9 = 55$.

30. La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 7. Déterminer u_0 et n sachant que :

$$u_n = 14 \quad \text{et} \quad S_n = -1\,309.$$

31. Montrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites arithmétiques de même raison, $(u_n - v_n)$ est une suite constante.

32. (u_n) et (v_n) désignent deux suites arithmétiques.

1° Montrer que $(u_n + v_n)$ est une suite arithmétique.

2° Montrer que, si k est un réel fixé, (ku_n) est une suite arithmétique.

33. La suite (u_n) est une suite arithmétique. Montrer que la suite (v_n) définie par : $v_n = au_n + b$, où a et b désignent deux réels, est une suite arithmétique.

34. Une suite de nombres est définie de la façon suivante :

a) le premier terme est 13;

b) un terme de rang pair s'obtient en ajoutant 8 au précédent;

c) un terme de rang impair s'obtient en retranchant 2 du précédent.

1° Quelles remarques faites-vous :

a) sur la constitution de cette suite?

b) Sur le chiffre des unités des différents nombres écrits?

2° Donner la valeur du 12ᵉ terme, du 25ᵉ terme, du nᵉ terme.

3° Calculer la somme des 12 premiers termes, des 25 premiers termes.

35. Les bougies du sabbat

(D'après *« Nouveaux Jeux et divertissements mathématiques. »* J.-P. ALEM. Seuil.)

Mme Bloch allume un premier samedi une bougie de son candélabre pendant une heure, le deuxième samedi deux bougies pendant le même temps, le troisième samedi trois bougies, et ainsi de suite.

Chaque bougie met quatre heures pour se consumer entièrement.
Quel doit être le nombre *n* des bougies pour que le *n*-ième samedi, cette manière de procéder aboutisse à la consommation totale des bougies?

36. Un carré chinois d'ordre n est consitué par les n^2 premiers nombres disposés en lignes et colonnes de telle sorte que les sommes des lignes, des colonnes et des deux diagonales soient égales.

Exemple :
carré chinois d'ordre 3.

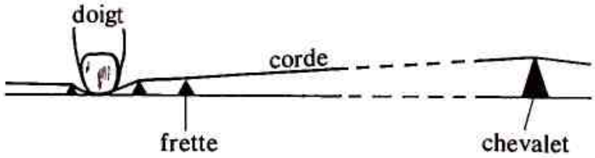
2	7	6
9	5	1
4	3	8

Montrer que dans un tel carré la somme de chaque ligne est égale à $\dfrac{n\times(n^2+1)}{2}$.

37. Sur une guitare, on a mesuré les distances successives d_n entre les frettes et le chevalet. Les résultats (en mm) sont consignés ci-dessous :

660 , 623 , 588 , 555 , 524 , 495 ,
467 , 441 , 416 , 393 , 371 , 350 , 330 ,
311 , 293 , 277 , 262 , 247 , 233 , 220 .

(*Rappel :* la fréquence du son émis par une corde vibrante est inversement proportionnelle à la longueur de cette corde.)



1° Calculer les valeurs successives de $\dfrac{d_n}{d_{n+1}}$.

2° Quelle hypothèse peut-on faire sur la nature de la suite (d_n)?

38. Les nombres :

$$24\,157\,817 \ , \quad 39\,088\,169 \ , \quad 63\,245\,986$$

sont-ils trois termes consécutifs d'une suite géométrique?

39. Une suite géométrique a pour premier terme $u_0=-9$ et pour raison $\dfrac{1}{3}$.

Calculer u_4, u_6, S_5.

40. Calculer : $S=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}-\ldots-\dfrac{1}{1\,048\,576}$.

41. Déterminer la raison d'une suite géométrique (u_n) dans les cas suivants :

a) $u_{10}=8$, $u_7=-1$; b) $u_8=16$, $u_6=4$.

42. Même exercice avec :

a) $u_6=4$, $u_3=\dfrac{4}{27}$; b) $u_3=-12$, $u_1=-3$.

43. *1°* Calculer le nombre des ascendants à la 10ᵉ génération, que possède une personne vivant actuellement.

2° Pour cette même personne, quel est le nombre total des ascendants de toutes les générations depuis l'époque actuelle jusqu'à la 10ᵉ inclusivement?

44. Quelles sont les suites qui sont à la fois arithmétiques et géométriques?

45. (u_n) et (v_n) désignent deux suites géométriques.

1° Montrer que $(u_n\times v_n)$ est une suite géométrique.

2° Montrer que, si k est un réel fixé, (ku_n) est une suite géométrique.

46. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n=\frac{2^n-4n+3}{2} \quad \text{et} \quad v_n=\frac{2^n+4n-3}{2}.$$

Montrer que la suite de terme général u_n+v_n (respectivement u_n-v_n) est une suite géométrique (respectivement arithmétique).
En déduire les sommes :

$$u_0+u_1+\ldots+u_n \ , \quad v_0+v_1+\ldots+v_n.$$

Exercices

• Généralités

47. Préciser à partir de quel rang les suites de terme général u_n sont définies :

a) $u_n = \dfrac{3n+1}{3n^2-1}$; c) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n-9}}$;

b) $u_n = \dfrac{5n^2-2}{2n^2+n-3}$; d) $u_n = \sqrt{n^2+n-12}$.

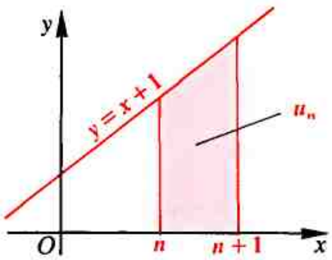
48. Même exercice que précédemment avec :

a) $u_n = \dfrac{-4n+1}{5n^5+8n^3+1}$; c) $u_n = (n-3)^{-n}$;

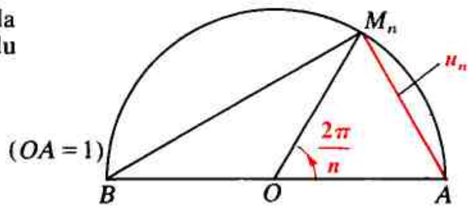
b) $u_n = \dfrac{1}{2^n - 1\,024}$; d) $u_n = \sqrt{n^2\left(n-\dfrac{5}{2}\right)+5}$.

Dans les exercices **49** *à* **52,** *on demande d'expliciter le terme général de la suite* (u_n).

49. u_n est l'aire du domaine représenté dans la figure ci-contre.



50. u_n est la longueur du segment $[A, M_n]$.



51. u_n est le chiffre des unités de $(1\,789)^n - (1\,515)^n$.

52. u_n est le $n^{\text{ième}}$ chiffre de la partie décimale de $\dfrac{11}{65}$.

53. On désigne par u_n la longueur du côté du $n^{\text{ième}}$ carré construit suivant le schéma de la figure ci-contre.

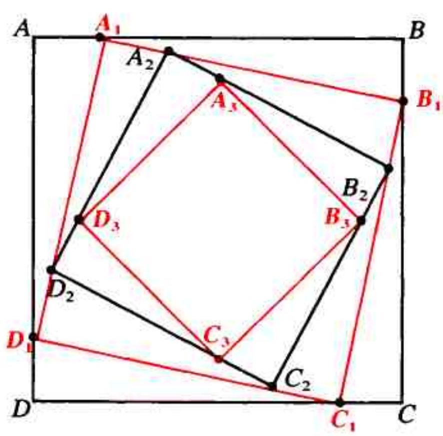
$u_0 = AB = 6$;

$AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 1$;

$A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = D_1D_2 = 1$;

etc.

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.



54. Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{3}{2}u_n^2 + \dfrac{5}{2}u_n + 1. \end{cases}$$

Calculer les premiers termes de la suite et expliciter u_n.

55. On pose : $u_0 = 1$; $u_1 = \dfrac{1}{2+1}$; $u_2 = \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+1}}$.

De façon plus générale :

$$u_n = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots\; 2+\cfrac{1}{2+1}}}} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{matrix} \quad \Bigg\} \text{ (n traits de fraction)}$$

Déterminer une fonction f permettant de définir la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = f(u_{n-1}) \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1. \end{cases}$

• Monotonie, majoration, minoration, comparaison

56. Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{4^n}{n^2}$ $\left(\text{on pourra calculer } \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

57. Montrer que quel que soit a, la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2 \end{cases}$ est croissante.

58. La suite (u_n) est définie par : $u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

1° Tracer la courbe représentative de la fonction f : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ pour $x>0$. Interpréter graphiquement la suite (u_n).

2° Après avoir fait une conjecture sur la monotonie de la suite (u_n), contrôler celle-ci numériquement.

59. La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2+u_n^2}. \end{cases}$

1° Montrer que, pour tout entier n, u_n et u_{n+1} sont de même signe. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

2° Étudier la monotonie de la suite (u_n).

60. Étudier le monotonie de la suite de terme général :

$$u_n=n^3-2n^2-n.$$

61. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2}{\sqrt{u_n^2+3}}. \end{cases}$$

1° Montrer que, pour tout entier n, $u_n \geqslant 0$.

2° Étudier la monotonie de la suite (u_n).

62. Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}\,u_n+2$ et la donnée de son premier terme u_0.

1° Représenter graphiquement la suite (u_n) lorsque :

$$u_0=1\ ;\quad u_0=2.$$

2° Étudier, suivant la valeur de u_0, la monotonie de la suite (u_n).

63. Les suites définies ci-après sont-elles majorées? minorées?

a) $u_n=2{,}5-\cos n$; *c*) $u_n=2+\frac{1}{n^2+1}$;

b) $u_n=\frac{4n-5}{2n+1}$; *d*) $u_n=|n-n^2|$.

64. Soit $u_n=\dfrac{\sin n+(-1)^n\cos n}{5n+4}$.

Montrer que, pour tout n, $|u_n| \leqslant \frac{2}{5n}$.

65. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n=\frac{2n+(-1)^n}{3n+(-1)^{n+1}}.$$

Déterminer u_{2n} et u_{2n+1}. Montrer que pour tout entier n non nul : $0<u_n<\frac{2n+1}{3n-1}$.

66. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ la suite définie par la liste suivante :

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3^2},\ \frac{2^2}{3^2},\ \frac{2^2}{3^3},\ \frac{2^3}{3^3},\ \frac{2^3}{3^4},\ \text{etc.}$$

La suite (u_n) est-elle croissante? décroissante?

Vérifier que, pour tout entier n, $0<u_n \leqslant \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$.

67. On considère la suite de terme général :

$$u_n=-3+\frac{1}{n^2}.$$

1° Montrer que tout réel inférieur ou égal à -3 est un minorant de la suite.

2° En est-il de même pour $-2{,}9999$?

68. On se propose de comparer les suites de terme général $(1{,}5)^n$ et $10^2 \times n^2$.
On pose $u_n=(1{,}5)^n-10^2 \times n^2$.

1° A l'aide de la calculatrice, montrer que $u_{28}>0$.

2° Établir que (u_n) est croissante à partir d'un rang que l'on précisera.

3° En déduire que pour $n \geqslant 28$, $(1{,}5)^n \geqslant 10^2 \times n^2$.
(On pourra s'inspirer de la méthode développée pages 200 et 201.)

69. Soit f une fonction telle que : pour tout x réel,

$$f(x) \geqslant x \quad (\text{resp. } f(x) \leqslant x).$$

Montrer que la suite (u_n) définie par :

$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ est croissante (resp. décroissante).

Application : Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) définies par :

$\begin{cases} u_0=a \\ u_{n+1}=-u_n^2+3u_n-2 \end{cases}$ $\begin{cases} v_0=b \\ v_{n+1}=\sqrt{2v_n^2+1} \end{cases}$

(a et b désignant des réels quelconques)

• Suites récurrentes

70. Donner une expression explicite de u_n dans chacun des cas ci-dessous :

a) $\begin{cases} u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n+12 \\ u_0=0. \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} u_{n+1}-3u_n=2 \\ u_0=2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{n+1}=\sqrt{2}u_n-1 \\ u_0=\sqrt{2}. \end{cases}$ *d*) $\begin{cases} u_{n+1}-3u_n=2 \\ u_0=-1. \end{cases}$

71. Soit (u_n) la suite définie par récurrence :

$$u_n=u_{n-1}+\frac{n^2}{2^n} \quad \text{et} \quad u_1=\frac{1}{2}.$$

Montrer que, pour $n \geqslant 1$: $u_n=6-\dfrac{n^2+4n+6}{2^n}$.

72. On considère la suite (u_n) définie par :

$$(1) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n \end{cases}$$

1° Calculer les premiers termes de la uite et faire une **conjecture** sur l'expression explicite de u_n.

2° Exprimer u_n en fonction de n en contrôlant que la suite conjecturée au *1°* vérifie les relations (1).

73. Montrer que la suite de terme général :

$$u_n = 1 + 2^n(n-1)$$

vérifie : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n \\ u_1 = 1 \end{cases}$

Exploiter ce résultat pour calculer :

$$1 + 2\times 2^1 + 3\times 2^2 + 4\times 2^3 + 5\times 2^4 + 6\times 2^5 + \ldots + 11\times 2^{10}\ .$$

74. On considère la suite définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence :

$$(R) \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n.$$

1° Déterminer un polynôme du second degré P, de façon que la suite de terme général $\alpha_n = P(n)$ vérifie la relation (R).

2° Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3° Donner l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n et de a.

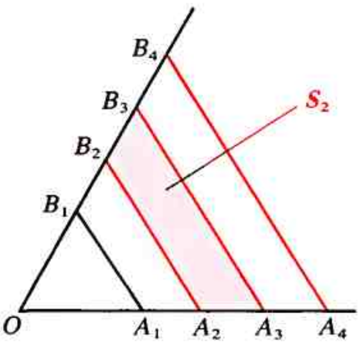
• Suites arithmétiques

75. On pose : $S = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 3 + \ldots + \frac{19}{3} + 7$.

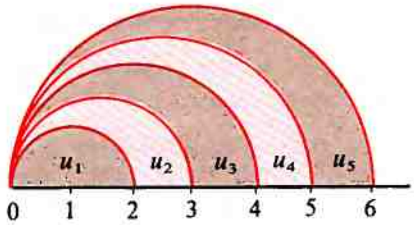
Calculer S après avoir vérifié que S est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.

76. On considère une suite de carrés $(C_n)_{n\geq 0}$ dont les longueurs des côtés forment une suite arithmétique $(a_n)_{n\geq 0}$ de raison $r > 0$.
Les suites des périmètres (P_n) et des aires (S_n) de ces carrés sont-elles des suites arithmétiques?

77. On considère une suite de triangles équilatéraux OA_nB_n dont les longueurs des côtés OA_n forment une suite arithmétique.
On désigne par S_n l'aire du trapèze $A_nB_nB_{n+1}A_{n+1}$ $(n \geq 1)$.
Étudier la suite (S_n).



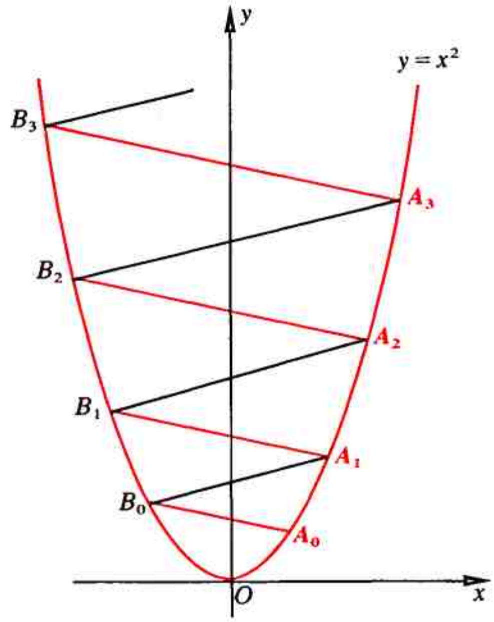
78. Montrer que la suite (u_n) des aires définies par la figure ci-dessous est une suite arithmétique.



79. Sur la parabole
A partir d'un point A_0 de la parabole d'équation $y = x^2$, on construit les suites de points (A_n) et (B_n) par le procédé suivant :

- les droites (A_0B_0), (A_1B_1), ..., (A_nB_n), ..., ont toutes pour pente $-\frac{1}{5}$;
- les droites (B_0A_1), (B_1A_2), ..., (B_nA_{n+1}), ..., ont toutes pour pente $\frac{1}{4}$.

On désigne par a_n l'abscisse de A_n et par b_n celle de B_n.



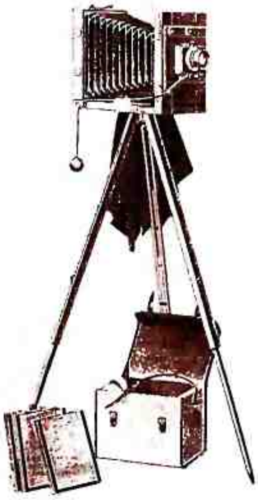
1° Déterminer une relation entre a_n et b_n, puis b_n et a_{n+1}.

2° Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont arithmétiques et préciser leur raison.

80. La cible
On considère une famille $(C_n)_{n\geq 0}$ de cercles concentriques dont les rayons forment une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 3.
On désigne par $\mathcal{A}_n$ l'aire de la couronne délimitée par les cercles C_{n+1} et C_n $(n \geq 1)$.
Montrer que $(\mathcal{A}_n)$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison. Exprimer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n.

81. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite arithmétique et a un nombre réel. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ de terme général $v_n = au_{n+1}^2 - au_n^2$ est également une suite arithmétique.
Préciser les liens entre ce résultat et l'exercice précédent (voir également exercices **77** et **78**).

82. Histoires de voleurs (1er épisode)
(D'aprè «*Jeux de l'esprit et divertissements mathématiques.*» J. P. ALEM. Seuil.)



Les V.F.H. (Voleurs fortement hiérarchisés) avaient tous, dans leur bande, un grade différent.
Comme ils avaient, une nuit, volé un lot d'appareils photographiques, leur chef déclara :
— Le moins gradé en prendra un. Celui du grade immédiatement supérieur, deux. Celui du troisième grade, trois. Et ainsi de suite.
Mais les voleurs se révoltèrent contre cette injustice.
— Nous en prendrons cinq chacun, dit le plus audacieux. Et ainsi fut fait.
Combien les V.F.H. avaient-ils volé d'appareils?

83. La location d'une machine coûte 375 F la première journée. La seconde journée de location coûte 410 F et chaque journée supplémentaire 35 F de plus que la précédente.
Combien de jours pourra-t-on utiliser la machine avec un budget de 23 730 F?

84. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$.
Préciser u_0 et l'entier p de façon que :

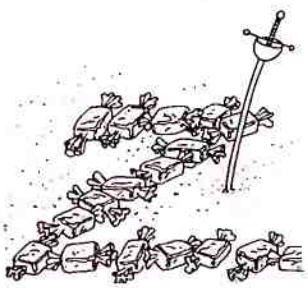
$$u_6 = 4 \quad \text{et} \quad u_4 + u_5 + \dots + u_p = 682{,}5 .$$

85. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison 7. Déterminer u_0 et l'entier k sachant que :

$$u_k = 14 \quad \text{et} \quad u_0 + u_1 + \dots + u_k = -1\,309.$$

86. Au club Zorro
(D'après «*Jeux et Stratégies*», n° 2.)

On distribue, après l'épreuve de gymnastique, 437 bonbons aux participants : un certain nombre au premier, deux de moins au second, deux de moins encore au troisième, etc., jusqu'au dernier. Combien y a-t-il eu de participants? Combien de bonbons a reçu le dernier?



87. Le butin cubique
(D'après «*Jeux de l'esprit et divertissements mathématiques.*» J. P. ALEM. Seuil.)

A l'issue d'une guerre heureuse, un roi décida de répartir entre ses meilleurs officiers l'immense butin de pièces d'or qu'il avait conquis.
Dans la plus grande salle de son palais, les pièces furent réparties en tas.
Le premier tas se réduisait à une pièce, le second en comptait 3, le troisième 5, et ainsi de suite en suivant la série des nombres impairs. Le nombre de pièces se prêta à cette répartition.
Les officiers furent ensuite disposés par ordre de mérite croissant : le moins méritant prit le premier tas (une seule pièce), le second les deux tas suivants, le troisième les trois tas suivants et ainsi de suite, le nombre de tas étant tel que tous les officiers jusqu'au dernier purent se servir selon cette règle et qu'il ne resta rien.
Sachant que le butin se composait de 25 502 500 pièces, combien d'officiers bénéficièrent-ils de la répartition?

Indication : Calculer d'abord le nombre de tas.

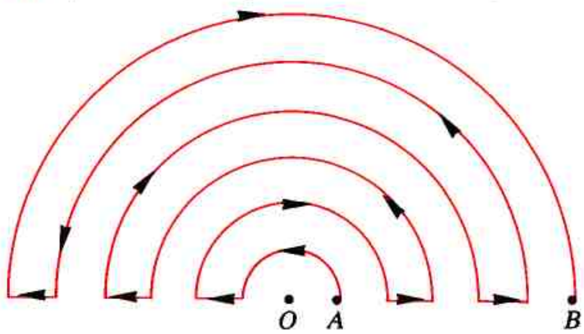
88. Le renard et les poulets
(D'après «*Jeux et Stratégies*», n° 16.)

Un fermier avait calculé que la quantité de grains qu'il possédait suffisait à nourrir ses 75 poulets pendant une certaine période. Malheureusement un renard est venu lui dévorer un poulet chaque nuit, de telle sorte qu'il a eu suffisamment de grains pour une période 50 % plus longue que celle initialement prévue.
Si le renard n'avait pas mangé de poulets, combien de jours aurait duré la réserve de grains?

Indication : Désignons par $2n$ le nombre cherché. Appelons «part de nourriture» ce que le fermier donne chaque jour à chaque poulet. Montrer que le nombre total de parts de nourriture peut s'exprimer de deux façons :

a) $75 \times 2n$; *b*) $\underbrace{75 + 74 + 73 + \dots + \dots}_{(2n+n) \text{ termes}}$

89. Quelle est la longueur du chemin d'origine A et



d'extrémité B (cf. figure de la page 223)? (Les demi-cercles sont de même centre O et de rayons 1, 2, 3, 4, 5 et 6.) Généraliser à n demi-cercles.

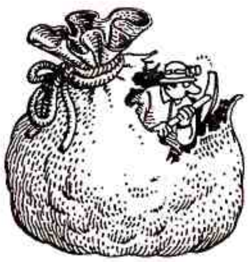
90. La table de Pythagore
Calculer la somme des termes du tableau carré ci-contre. (Ce tableau rassemble toutes les « tables de multiplications » de 1 à n.)

1	2	3	4	...	$n-1$	n
2	4	6	8	...		$2n$
3	6	9	12	...		$3n$
4	8	12	16	...		$4n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
$n-1$						
n	$2n$	$3n$	$4n$	...		n^2

Déterminer n pour que la somme soit égale à :

a) 100 ; b) 1296 .

91. Détournement de mineur
« Jeux et Stratégies », n° 2.



Dans la mine d'or, Gaston a caché dans le premier sac un certain nombre de pépites. Dans le second sac, le même nombre que dans le premier plus 4 pépites. Dans le troisième sac, le même nombre que dans le second plus 4 pépites. De même dans le quatrième sac, et ainsi de suite... jusqu'au dernier sac où il a caché le même nombre que dans l'avant-dernier plus 4 pépites. Il a ainsi détourné 261 pépites d'or. Combien de sacs avait-il?

• Suites géométriques

92. Une personne a obtenu un prêt progressif pour financer sa résidence.
La durée de ce prêt est de 20 ans et, chaque année, les mensualités augmentent de 3,5 %.
La première année les mensualités sont de 4816 F. Quel sera le montant des mensualités au cours de la vingtième année de remboursement?

93. Calculer : $S=\frac{4}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+1+\ldots+\frac{27\sqrt{3}}{128}+\frac{81}{256}$.

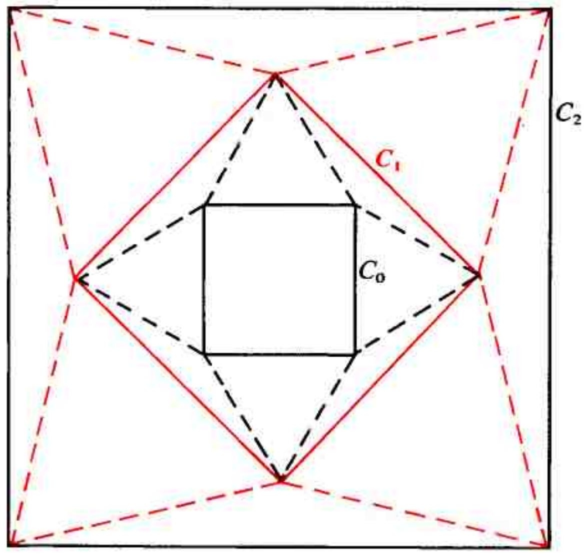
94. On considère une suite de carrés $(C_n)_{n\geq 0}$ dont les longueurs des côtés forment une suite géométrique $(a_n)_{n\geq 0}$ de raison $q>0$.
Les suites des périmètres (p_n) et des aires (S_n) de ces carrés sont-elles des suites géométriques?

95. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3=0 .$$

$\left(\text{On posera } q=\frac{x+1}{x-1} .\right)$

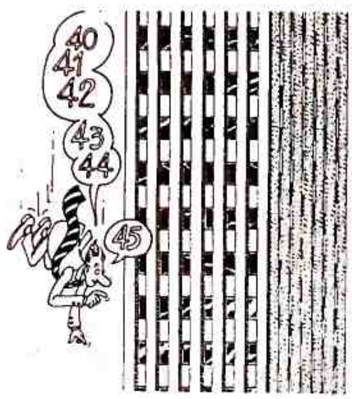
96. Le carré C_0 a pour côté a_0. On construit sur chaque côté un triangle équilatéral. Les sommets de ces triangles sont alors les sommets d'un carré C_1. En itérant ce processus, on obtient une suite de carrés C_n dont on note la longueur du côté a_n.



1° Calculer la longueur a_{n+1} en fonction de a_n.

2° Exprimer a_n en fonction de a_0 et n.

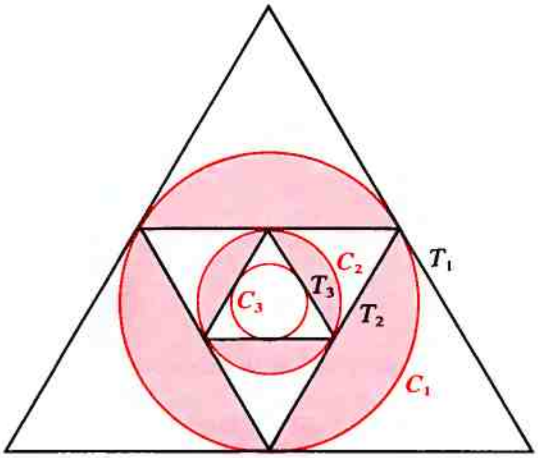
97. Les gratte-ciel de Manhattan
(D'après *« Jeux et Stratégies »*, n° 5.)



Un gratte-ciel compte au moins 20 étages; les deux plus hauts de Manhattan en comportent 112 (ce sont les deux tours du World Trade Center). On constate que le nombre de gratte-ciel de n étages y est de 6 % supérieur à celui des gratte-ciel de $(n+1)$ étages. Pourriez-vous dénombrer les gratte-ciel de Manhattan?

98. On appelle période d'un élément radioactif le temps au bout duquel la moitié des atomes de cet élément initialement présents dans un échantillon s'est désintégrée.
Ainsi la période du polonium 210 est de 138 jours. Si un échantillon contient 20 g de polonium 210, combien en restera-t-il dans 20 ans?

99. T_1 est un triangle équilatéral de côté 1 et C_1 son cercle inscrit. On construit la suite de triangles équilatéraux (T_n) et la suite de cercles (C_n) comme l'indique la figure ci-dessous.



1° Déterminer le côté c_n du triangle équilatéral T_n en fonction de c_{n-1} pour $n \geqslant 2$.

2° Calculer le rayon r_n du cercle C_n en fonction de c_n.

3° Montrer que (c_n) et (r_n) sont des suites géométriques.
Exprimer c_n et r_n en fonction de n.

100. Une suite géométrique a pour premier terme $u_0 = 3$ et pour raison 2.
Calculer n sachant que : $S_n = 6\,291\,453$.

101. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n}\, u_n \end{cases}$

1° Calculer u_2, u_3, u_4, u_5, u_6.

2° Montrer que la suite de terme général : $v_n = \dfrac{u_n}{n}$

est une suite géométrique.

3° En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

102. Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14 qui est un élément radioactif. Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux ont la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère. Cette proportion initiale de carbone 14 décroît de 1,24 % en 100 ans après la mort du tissu.

1° Déterminer les pourcentages de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de 1 000 ans, 2 000 ans, 10 000 ans.

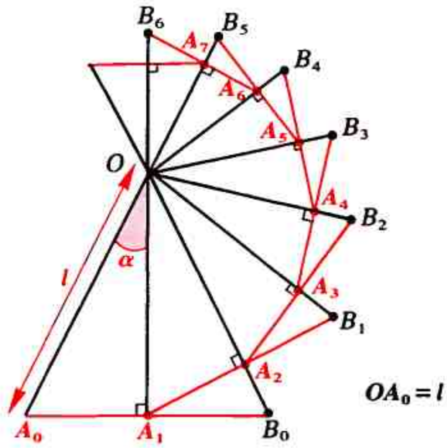
2° Exprimer le pourcentage de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de $k \times 10^3$ années.

3° Un fossile ne contient plus que 20 % de ce qu'il devait contenir en carbone 14. Donner une estimation de son âge.

103. Soit la suite de terme général : $u_n = \dfrac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}$.
Calculer la somme :

$$\frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \frac{1}{u_3 - 1} + \dots + \frac{1}{u_n - 1}.$$

104. Dans le triangle isocèle OA_0B_0, A_1 est le milieu de $[A_0, B_0]$. On note B_1 le symétrique de A_1 par rapport à (OB_0) et par A_2 le milieu de $[A_1, B_1]$. En itérant ce processus on obtient une suite de triangles isocèles OA_nB_n (figure ci-dessous).



1° Pour $n \geqslant 1$, exprimer OA_n en fonction de OA_{n-1} et de α. En déduire OA_n en fonction de n, l et α.

2° Exprimer la distance A_nA_{n+1} en fonction de la distance $A_{n-1}A_n$. Calculer la longueur de la ligne polygonale $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$.

105. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ dont les premiers termes sont :

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3^2},\ \frac{2^2}{3^2},\ \frac{2^2}{3^3},\ \frac{2^3}{3^3},\ \frac{2^3}{3^4},\ \frac{2^4}{3^4},\ \dots$$

Donner en fonction de n les expressions de u_{2n} et u_{2n+1}. Calculer les sommes :

$$u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n+1}$$
$$u_0 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}$$
$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

106. Histoire de voleurs (2e épisode)
(D'après *« Jeux de l'esprit et divertissements mathématiques. »* J.-P. ALEM. SEUIL.)

Des gentlemen cambrioleurs avaient fondé le club des Vingt Cœurs. Mais il arrivait qu'ils fussent moins de vingt, car l'un d'eux était parfois arrêté, ou même abattu, au cours de leurs dangereuses expéditions. Un jour ils s'emparèrent d'une petite cassette contenant des pièces d'or. Leur président, les ayant rapidement

comptées, proposa :
Nous pouvons nous partager ces pièces de deux manières : ou bien le moins ancien dans le club en prendra deux, le suivant quatre, le suivant huit, le suivant seize, et ansi de suite, ou bien nous en prendrons chacun le même nombre.
Vous ne saurez jamais, hélas, quelle solution fut adoptée. Mais vous pouvez trouver le nombre des Vingt Cœurs ce jour-là.

Note : L'énoncé conduit à une équation à deux inconnues : n le nombre de Vingt Cœurs ($n \leqslant 20$);
p la part de chacun.

1° Utiliser la calculatrice pour déterminer les solutions **entières** de cette équation.

2° Prendre en compte certaines données de l'énoncé ($n \geqslant 4$ et le nombre de pièces d'or a pu être « rapidement compté »).

Problèmes

107. Étant donnée une suite arithmétique (u_n), tous les calculs précédents laissent entrevoir que la somme $u_0+u_1+\ldots+u_n=P(n)$ où $P(n)$ est un polynôme du second degré. Cet exercice propose de donner une caractérisation de ces polynômes.

1° Soit (u_n) une suite arithmétique, montrer que $u_0+u_1+\ldots+u_n=P(n)$, où P est un polynôme de la forme $x \longmapsto (x+1)(ax+b)$ (a et b réels). Exprimer a et b en fonction de u_0 et de la raison r.

2° Réciproquement, montrer que pour tout polynôme P de la forme $x \longmapsto (x+1)(ax+b)$ (a et b réels), il existe une suite arithmétique (u_n) telle que :

$$u_0+u_1+\ldots+u_n=P(n) .$$

3° Dans chacun des cas suivants, montrer qu'il existe une suite arithmétique (u_n), dont on déterminera le premier terme u_0 et la raison r, telle que :

$$u_0+u_1+\ldots+u_n=P(n) \text{ , avec :}$$

a) $P(x)=(x+1)^2$; *b*) $P(x)=x^2-1$;

c) $P(x)=3x^2-5x-8$.

4° Pour quelles valeurs du réel λ existe-t-il une suite arithmétique (u_n) telle que $u_0+u_1+\ldots+u_n=P(n)$, avec $P(x)=(\lambda^2+1)x^2+2(2\lambda-1)x+3-\lambda$?

108. Pliage et découpage
(D'après « *Petit Archimède* », n^{os} 57-58.)

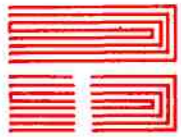
On dispose d'un ruban de papier (situation S_0)

que l'on plie :

et que l'on coupe :

On superpose alors les morceaux de ruban ainsi découpés pour obtenir la situation S_1 :

on itère alors le procédé :
on plie :
on coupe :



et l'on superpose les nouveaux morceaux. On obtient la situation S_2.

5 morceaux pliés
6 morceaux non pliés

On continue à plier, à couper et à superposer... A la fin de la situation S_n, on dispose donc de :

- p_n morceaux pliés,
- d_n morceaux non pliés,
- u_n morceaux au total :

$$u_n=p_n+d_n.$$

L'objet du problème est de calculer p_n, d_n et u_n.

1° Montrer (à l'aide d'un schéma) que d'une étape à la suivante :

- 1 morceau plié fournit 2 morceaux non pliés et 3 morceaux pliés.
- 1 morceau non plié fournit 2 morceaux non pliés et 1 morceau plié.

En déduire que les suites (p_n) et (d_n) vérifient :

$$\begin{cases} d_{n+1}=2d_n+2p_n \\ p_{n+1}=d_n+3p_n. \end{cases}$$

2° Déduire de ces relations que la suite (d_n-p_n) est constante.
Préciser la valeur de cette constante.

3° Établir que la suite (u_n) vérifie :

$$\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=4u_n-1. \end{cases}$$

4° En déduire par la méthode de la page 213 que :

$$u_n=\frac{2^{2n+1}+1}{3}.$$

Quelles sont les valeurs de p_n ? de d_n ?

109. Calcul des sommes : $1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \dots + n^k$ pour $k = 1, 2, 3$ et 4

1° On pose : $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

et : $S_2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

Additionner membre à membre les égalités de la forme :

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1\\ n^3 - (n-1)^3 &= 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1\\ &\dots\dots\dots\\ 2^3 - 1^3 &= 3\times 1^2 + 3\times 1 + 1.\end{aligned}$$

En déduire S_2.

2° Calcul de $S_3 = 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.
On utilise le même le développement de $(n+1)^4$:

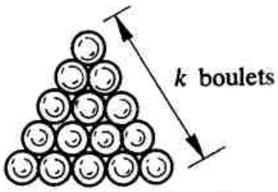
$$\begin{aligned}(n+1)^4 - n^4 &= 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1\\ &\dots\dots\dots\\ 2^4 - 1^4 &= 4\times 1^3 + 6\times 1^2 + 4\times 1 + 1.\end{aligned}$$

Exprimer S_3 en fonction de S_2 et S_1, puis en fonction de n. Montrer que $S_3 = (S_1^2)$.

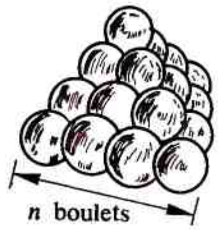
3° Expliquer la démarche à suivre pour calculer de façon analogue :

$$S_4 = 1 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4.$$

110. Histoire de boulets
Un problème classique, autrefois dans les écoles militaires, consistait à déterminer le nombre de boulets que l'on entassait à proximité des canons. Les entassements pratiqués étaient sous forme de pyramide à base carrée (voir page 188) ou à base triangulaire.



• Disposition des diverses couches de boulets :



• Disposition finale :

1° Déterminer en fonction de k le nombre de boulets d'une couche.

2° Montrer que le nombre de boulets d'une pyramide à n couches est $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

3° Montrer qu'avec les boulets d'une pyramide à 8 couches et ceux d'une pyramide à 14 couches, il est possible de constituer une autre pyramide (préciser le nombre de couches).

111. Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui à tout entier n associe la somme des carrés des chiffres de n (en écriture décimale). On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_0 (u_0 entier naturel) et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1° Calculer les termes u_n lorsque $u_0 = 4$.

2° On suppose que $1 \leqslant u_0 \leqslant 999$. Montrer que

$$u_1 \leqslant 243 \ , \quad u_2 \leqslant 163 \quad \text{et que} \quad u_n \leqslant 162$$

pour tout entier $n \geqslant 3$.
En déduire que la suite (u_n) est périodique à partir d'un certain rang (on pourra montrer qu'il y a deux termes égaux parmi $\{u_3, u_4, \dots, u_{165}, u_{166}\}$).

3° *a*) Montrer que, pour $p > 3$, $81 \times p < 10^{p-1}$ (on pourra étudier la monotonie de la suite

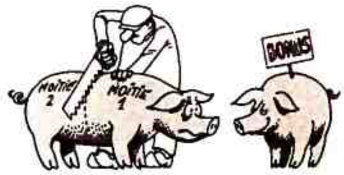
$$n \longmapsto 10^{n-1} - 81n).$$

b) En déduire que, si u_n s'écrit avec p chiffres ($p > 3$), u_{n+1} s'écrit avec au plus $p-1$ chiffres.

c) Établir que quelque soit u_0, il existe un rang N tel que $u_N \leqslant 999$, puis que la suite (u_n) est périodique à partir d'un certain rang.

112. Au marché aux cochons
(D'après «*Jeux et Stratégies*», n° 15.)

Un éleveur possède plusieurs centaines de cochons, qu'il mène au marché. Au premier client, il vend la moitié de ses cochons plus un cochon; au deuxième client, il vend la moitié du reste plus 2 cochons; et ainsi de suite, jusqu'au dernier qui lui achète exactement le nombre de cochons restants, en utilisant le procédé de vente de l'éleveur. Peut-on savoir combien, de cochons l'éleveur a conduit au marché?



Indications : Soit x le nombre de cochons. On conviendra que la phrase «un éleveur possède plusieurs centaines de cochons» sous-entend que $200 \leqslant x < 1\,000$.
On désigne par N le nombre de clients et par r_n le nombre de cochons restants après la vente au n-ième client ($0 \leqslant n \leqslant N$ en posant $r_0 = x$).

1° Montrer que $\begin{cases} r_n = \dfrac{r_{n-1}}{2} - n \ ; \ 1 \leqslant n \leqslant N \\ r_0 = x. \end{cases}$

2° On considère les suites (u_n) qui vérifient :

$$(1) \qquad u_n = \frac{1}{2}\, u_{n-1} - n \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1.$$

a) Trouver une suite arithmétique vérifiant (1).

b) En déduire l'expression de u_n (s'inspirer de la méthode développée dans le § IV).

c) Exprimer r_n en fonction de n et de x.

3° Montrer que $x = 2^{N+1}(N-1) + 2$.
Préciser quelles valeurs de N conduisent à

$$200 \leqslant x < 1\,000$$

et donner les valeurs de x correspondantes.

6 Suites numériques comportement à l'infini

Intentions

Un des objectifs de ce chapitre sera de mettre en évidence **différents types possibles d'évolutions des suites lorsque l'entier *n* augmente indéfiniment.** Cependant, avant d'aborder des questions telles que « Où va la suite? Que se passe-t-il quand on essaye de la pousser loin, très loin? Peut-on aller aussi loin qu'on veut? Peut-on discerner où va une suite prolongée indéfiniment? »[1], il est indispensable de considérer quels **problèmes** peuvent conduire à de telles interrogations (ceci est l'objet du paragraphe **I** à titre introductif, mais surtout des paragraphes VI et VII).

En ce qui concerne **les techniques de base** qui permettent l'étude du comportement à l'infini d'une suite réelle, il s'agit :

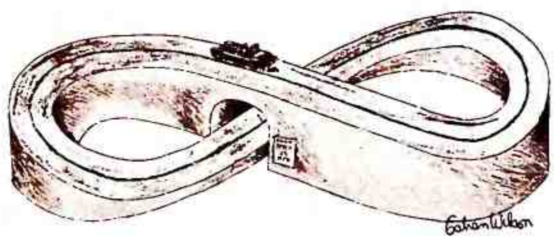
- d'une part, à partir « d'observations d'origine numérique, graphique, géométrique, etc. » de **mettre en place un échantillonnage** de suites « simples » qui servira de référence pour des suites plus générales (c'est la **notion d'échelle de référence**, que ce soit en 0 ou en $+\infty$);
- d'autre part, au travers de quelques exemples de montrer quels renseignements on peut obtenir sur le comportement à l'infini d'une suite donnée par **comparaison à une suite de référence** : il s'agit alors de **la notion de suite dominée par une autre.**

Enfin, les **problèmes d'approximation** trouvent à juste titre une place prépondérante dans ce chapitre. Qu'ils concernent le calcul (exact ou approché) **d'aires,** de **volumes,** de **racines** d'une équation, ils sont significatifs à la fois de la **diversité des domaines concernés** et des **méthodes** pertinentes dans l'utilisation du comportement à l'infini des suites numériques.

[1] Nicolas ROUCHE (déjà cité chapitre 5, page 184).

« Une suite de limite infinie ne risque pas d'atteindre prématurément sa limite : il y a de la place entre u_n et $+\infty$. »

Point de vue pédagogique



« Je me demande comment nous avons fait pour en arriver là. »

Plan du Chapitre

1. Introduction

1. Préliminaires

L'objet de ce paragraphe est de sensibiliser aux problèmes de **convergence d'une suite numérique.**
Plusieurs éléments sont mis en jeu. (à la fois sous forme d'« exposé » et d'activités) :

- **l'aspect historique** — avec notamment la question importante de l'**approximation** — montrant quelles motivations peuvent conduire à s'intéresser au **comportement d'une suite pour les grandes valeurs de n**[(1)];
- des exemples — d'accès facile — mais qui **interrogent sur ce comportement;**
- une **approche de la notion de convergence en 0** avec en exergue le rôle de certaines suites privilégiées : les **suites de référence** et l'intérêt des **méthodes de comparaison.**

2. L'aspect historique

a. Le rôle de l'approximation

Dès l'Antiquité, l'**approximation** des quantités, de nombres (aires, volumes, nombre π, racines carrées, nombre d'or, sin 1°, etc.) est la **motivation essentielle** qui conduit à considérer les termes d'une suite pour des grandes valeurs de n.
Les problèmes envisagés sont alors les suivants :

- fabriquer une suite[(2)] permettant d'approcher un nombre donné (ou parfois d'étudier ses propriétés);
- apprécier la qualité de l'approximation obtenue et éventuellement améliorer le procédé.

Quelques exemples

- **L'algorithme de Babylone**

Il permet l'**approximation des racines carrées.** Avec les notations actuelles, il s'agit de la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)$ qui permet d'obtenir des valeurs approchées de $\sqrt{a}$ avec une très grande précision.

- **Avec le nombre π**

. Une approximation du nombre π due à Newton[(3)] utilise la suite (u_n) définie par :

$$u_1=6\times\frac{1}{2}\ ;\quad u_2=6\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^3}\right)\ ;\quad u_3=6\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^3}+\frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2^5}\right];$$

$$u_4=6\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^3}+\frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2^5}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{2^7}\right];\ \text{etc.}$$

Activité 1

(Avec la calculatrice.)

1° Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2° Pour $n=1$, 2, 3 et 4, préciser quelle(s) valeur(s) de $\varepsilon>0$ permettent d'affirmer que « u_n est une valeur approchée de π à ε près ».

---

(1) Nous dirons plus tard : « comportement à l'infini ».

(2) En fait, il s'agit davantage d'algorithmes, de processus itératifs... que de suites au sens qui a été dégagé dans le chapitre 5 (la notation indicielle u_n date, par exemple, de LAGRANGE (1736-1813)).

(3) On trouvera une bibliographie de NEWTON dans le chapitre 9.

. Une autre approximation de π obtenue par Leibniz[1] en 1673 fait intervenir la suite (v_n) définie par :

$$v_1=4\ ;\quad v_2=4\left(1-\frac{1}{3}\right)\ ;\quad v_3=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\ ;$$

$$v_4=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\ ;\quad v_5=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)\ ;\quad \text{etc.}$$

Activité 2

1° Reprendre les mêmes questions qu'à l'activité 1 avec v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 et éventuellement v_6.

2° Quel est de ces deux procédés d'approximation, celui qui paraît le plus **performant?**

b. Le comportement à l'infini

Parallèlement, de nombreux problèmes (non limités au domaine purement mathématique) conduisent à s'interpeller sur le « devenir d'une suite » :

. Ses termes tendent-ils à s'accumuler vers un certain réel lorsque n augmente?

. Dans l'affirmative, que dire de ce réel? Peut-on le référencier parmi les nombres « connus »? Obtenir des propriétés sur ce nombre?

. Sinon, peut-on prévoir le comportement de la suite?

. Etc.

Ce sont de tels problèmes qui devaient conduire à préciser la notion de convergence d'une suite permettant de lever certaines ambiguïtés, d'expliquer certains « paradoxes » et de valider ou réfuter certaines pratiques.
Les exemples qui suivent permettent d'une part, d'illustrer certaines de ces interrogations, mais aussi d'autre part, de rencontrer quelques problèmes qui font actuellement l'objet d'études et de recherches de la part des mathématiciens et informaticiens.

• La constante d'Euler
Elle est apparue pour la première fois vers le milieu du XVIII[e] siècle dans les travaux... d'Euler. Le schéma suivant en donne une interprétation géométrique à partir de la représentation graphique de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

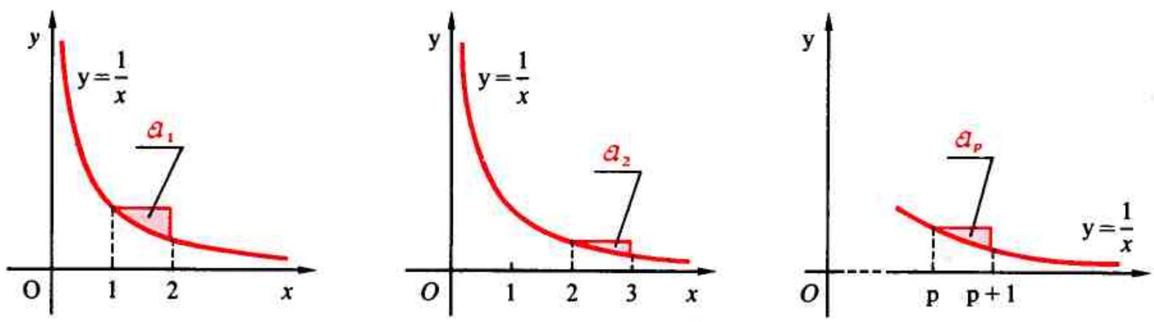
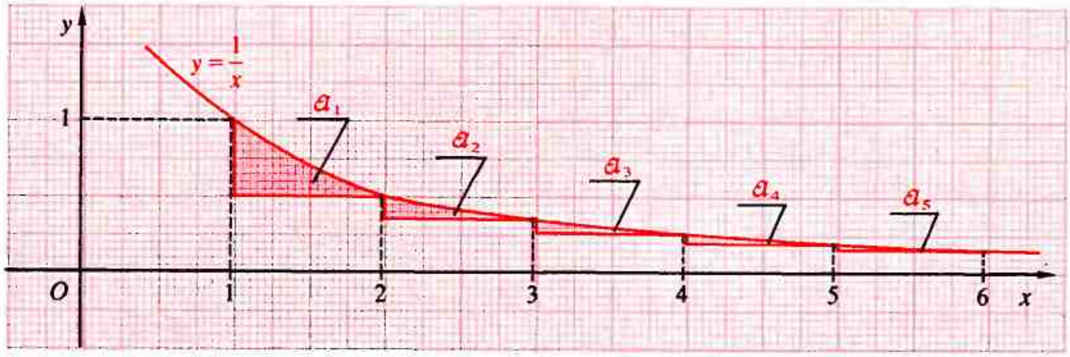


Figure 1

---
[1] LEIBNIZ (1846-1716) Gottfried Wilhelm de son prénom. Mathématicien allemand. Considéré avec NEWTON comme le fondateur du calcul différentiel et infinitésimal. Une controverse célèbre s'établit entre NEWTON et LEIBNIZ, chacun défendant (avec ses partisans) ses propres conceptions : usage des méthodes géométriques pour NEWTON, méthodes analytiques pour LEIBNIZ.

Figure 2



On désigne par $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_p$ les aires des domaines en rouge sur la figure 1. Considérons alors la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = \mathcal{A}_1 \ ; \quad u_2 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \ ; \quad u_3 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \ ; \quad \text{etc.}$$

Lorsque n augmente indéfiniment, les termes de la suite (u_n) tendent à s'accumuler vers un nombre γ, appelé constante d'Euler dont une valeur approchée[1] est 0,577218. Cette constante résiste aux travaux des mathématiciens : si plus de cent décimales ont été calculées, on **ne sait pas** si, par exemple, ce nombre est rationnel ou irrationnel[2].

• Le $3x+1$ problème

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 **entier naturel** et la relation de récurrence :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{u_{n-1}}{2} & \text{si } u_{n-1} \text{ est un nombre pair} \\ 3u_{n-1}+1 & \text{si } u_{n-1} \text{ est un nombre impair.} \end{cases}$$

Calculons quelques valeurs de (u_n) suivant les valeurs de u_0.

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}
1	4	2	1										
2	1												
3	10	5	16	8	4	2	1						
4	2	1											
5	16	8	4	2	1								
6	3	10	5	16	8	4	2	1					
7	22	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5	.	.
8	4	2	1										
9	28	14	7	.	.	.							

...

[1] Résultat obtenu par Euler lui-même en 1734-1735.

[2] La suite (u_n) peut être explicitée numériquement $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln(n)$, où ln désigne la fonction **logarithme népérien** associée sur toutes les calculatrices scientifiques à la touche $\boxed{\ln}$ et qui est au programme de mathématiques de toutes les classes Terminales.

La conjecture est la suivante : « **Quelle que soit la valeur de u_0, il existe un terme de la suite qui prend la valeur 1** » (on retrouve alors le cycle 1, 2, 4, 2, 1...).
« Ce problème a des allures fort simples. Et pourtant, depuis qu'il a été mentionné au Congrès International de Cambridge en 1950, les plus grands mathématiciens[1] s'y sont penchés et s'y sont cassés les dents... »

- **Fac-similé d'un article sur ce sujet**
  (in *American Mathematical Monthly* - Volume 92 - Année 85)

THE $3x+1$ PROBLEM AND ITS GENERALIZATIONS

JEFFREY C. LAGARIAS
AT & T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ 07974

1. Introduction. The $3x+1$ *problem*, also known as *the Collatz problem, the Syracuse problem, Kakutani's problem, Hasse's algorithm*, and *Ulam's problem*, concerns the behavior of the iterates of the function which takes odd integers n to $3n+1$ and even integers n to $n/2$. The $3x+1$ Conjecture asserts that, starting from any *positive* integer n, repeated iteration of this function eventually produces the value 1.
The $3x+1$ Conjecture is simple to state and *apparently* intractably hard to solve. It shares these properties with other iteration problems, for example that of aliquot sequences (see Guy [36], Problem B6) and with celebrated Diophantine equations such as Fermat's last theorem. Paul Erdös commented concerning the intractability of the $3x+1$ problem: "Mathematics is not yet ready for such problems." Despite this doleful pronouncement, study of the $3x+1$ problem has not been without reward. It has interesting connections with the Diophantine approximation of...

Activité 2

1° On suppose que $u_0 = 9$. En examinant le tableau précédent, déterminer (sans calcul) le premier entier N tel que $u_N = 1$.

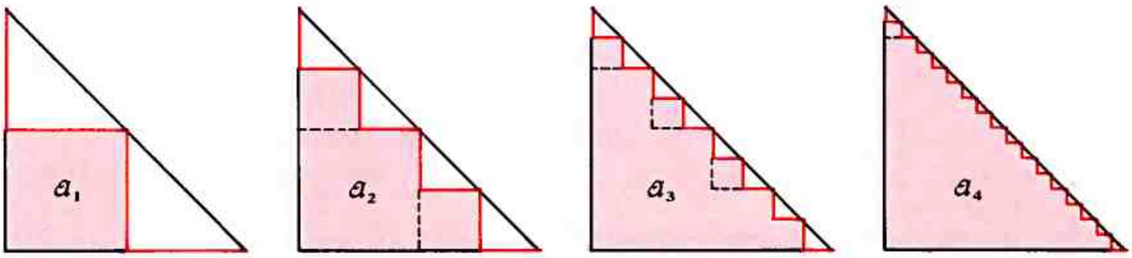
2° Examiner le cas où u_0 est une puissance de 2.

3° Tester le programme ci-dessous. Ce programme permet d'obtenir (pour les premières valeurs de u_0) l'indice du premier terme de la suite qui prend la valeur[2] 1.

```
10 INPUT "PREMIER TERME DE LA SUITE ? ", U
20 N=0
30 IF U=1 THEN GOTO 80
40 V=INT(U/2)
50 IF U=2*V THEN U=V ELSE U=3*U+1
60 N=N+1
70 GOTO 30
80 PRINT "LE PREMIER TERME DE LA SUITE EGAL
A 1 EST CELUI D' "INDICE "; N
```

3. Un exemple significatif

Considérons la suite de constructions suivantes (la longueur des « côtés de l'angle droit » est 1) :



1^re^ étape — 2^e^ étape — 3^e^ étape — 4^e^ étape

Figure 3

(**Note** : les points qui interviennent sur l'hypoténuse à une étape donnée sont les milieux des segments découpés sur l'hypoténuse à l'étape précédente.)

(1) Les autres aussi.

(2) Ne pas espérer trouver un contre-exemple avec ce programme... : la conjecture est vraie pour toute valeur de $u_0 \leqslant 10^{50}$.

Activité 3

1° On considère la suite des aires ($\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots$) des polygones ainsi obtenus.

a) Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement de ($\mathcal{A}_n$) pour de grandes valeurs de n ?

b) Calculer $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$. Quelle loi peut-on dégager?

c) Vérifier que $\mathcal{A}_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}$.

En déduire $\frac{1}{2} - \mathcal{A}_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.

d) Montrer que pour $n \geqslant 9$ la différence d'aire entre le triangle et le n-ième polygone est plus petite que 10^{-3}.

2° On note $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n, \ldots$ la longueur des lignes brisées (en rouge sur chacune des figures).

a) Peut-on faire une conjecture?

b) Calculer L_n pour $n \geqslant 1$.

c) Alors?

Commentaire général

Lorsque l'on s'intéresse au comportement d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour les grandes valeurs de n (que ce soit pour approcher un réel donné l, ou pour vérifier une conjecture (cf. activité précédente)), on est amené à contrôler si **la distance entre les termes u_n et le réel l** devient « très petite ».
C'est l'idée de **convergence vers 0** que nous allons aborder maintenant.

4. Convergence vers 0 : approche de la notion

L'intuition nous fait percevoir — de façon plus ou moins précise — que **lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes,** les nombres $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ deviennent de plus en plus petits et très proches de 0.
Une telle formulation sous-entend en fait deux choses :

1° $\frac{1}{n}$ **diminue** quand n augmente $\left(\text{la suite } \left(\frac{1}{n}\right) \text{ est décroissante}\right)$.

2° $\frac{1}{n}$ est « très petit » lorsque n est très grand.

Or, des suites telles que :

$$\left(1\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ -\frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ -\frac{1}{6}\ ,\ \ldots\right)$$

ou

$$\left(\frac{1}{10}\ ,\ \frac{3}{10}\ ,\ \frac{1}{1\,000}\ ,\ \frac{3}{10\,000}\ ,\ \frac{1}{100\,000}\ ,\ \ldots\right)$$

sont des exemples de suites qui vérifient le **2°** mais pas le **1°**.
Il s'agit donc de préciser indépendamment du fait que la suite soit décroissante ou non, ce que suggère le **2°**.
Considérons alors le tableau de valeurs ci-contre et examinons par exemple la suite (u_n) : $u_n = \frac{1}{n^2}$. La lecture de la première ligne laisse supposer que u_n sera plus petit que n'importe quel nombre choisi à l'avance, même très petit pourvu que l'entier n soit suffisamment grand.

n	100	10^8	10^{20}	10^{30}
$u_n = \frac{1}{n^2}$	10^{-4}	10^{-16}	10^{-40}	10^{-60}
$v_n = \frac{1}{n}$	$\frac{1}{100}$	10^{-8}	10^{-20}	10^{-30}
$w_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{10}$	10^{-4}	10^{-10}	10^{-15}

Exemples

1. Dès que $n > 10^8$, on a $u_n < 10^{-16}$.
2. Pour avoir $u_n < 10^{-60}$, il suffit que n soit plus grand que 10^{30}.
3. De façon analogue, dès que $n > 10^{20}$, on a $w_n < 10^{-10}$.

Autres exemples : activité 4

1. La suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)$

a) Vérifier l'inégalité $2^{10} \geqslant 10^3$.

b) Proposer un rang à partir duquel $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-100}$.

c) Établir que $\frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$ (cf. méthode, chapitre 5).

2. Comparaison

a) Vérifier que $u_n = \dfrac{1}{n^2 + |\sin n|}$ satisfait à :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

b) Trouver un rang à partir duquel :

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2 - \sqrt{1\,988} \times n} \leqslant 2 \times \frac{1}{n^2}.$$

c) Même question avec l'inégalité :

$$\frac{1}{2n - \sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. On suppose que l'on dispose de trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) qui permettent de calculer des valeurs approchées d'un réel l sous les conditions suivantes :

$$|a_n - l| \leqslant \frac{1}{100\sqrt{n}}\ ;$$

$$|b_n - l| \leqslant \frac{1}{10n^2}\ ;$$

$$|c_n - l| \leqslant \frac{10}{2^n}\ .$$

On veut obtenir une valeur de l à 10^{-7} près. Quelle est la suite la plus « performante »?

5. En conclusion

a. Sur la convergence vers 0

Toutes les suites qui viennent d'être étudiées ont la propriété commune suivante « **un nombre réel strictement positif étant choisi arbitrairement — (et ce aussi petit que l'on veut) — on peut trouver un rang, au-delà duquel les termes de la suite sont (en valeur absolue) inférieurs à ce réel** ».

On décrit le comportement de telles suites en disant qu'**elles tendent vers 0 quand n tend vers l'infini** ou encore qu'elles **sont convergentes vers 0.**

b. Sur le rôle de certaines suites

Cependant, l'étude que nous venons de faire, met en évidence le rôle privilégié de certaines suites telles que : $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, etc., sous un double aspect :

. par rapport à la propriété qui vient d'être dégagée, leur étude ne présente aucune difficulté;

. on peut, à partir de ces suites, déduire le comportement à l'infini de suites plus compliquées (activité 4) (essentiellement par des techniques liées à la majoration du terme général).

Cela nous conduira à introduire une **famille de suites de référence** et la notion de **suite dominée par une autre** (qui vise à préciser dans quel cadre s'effectuent ces majorations).

II. Suites convergentes vers 0

1. L'échelle de référence en 0

Nous adoptons la définition suivante :

On appelle *échelle de référence en* 0 la famille de suites :

- $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geqslant 1}$; $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$; $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geqslant 1}$; $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n \geqslant 1}$;
- $(a^n)_{n \geqslant 1}$ avec $0 < a < 1$.

Cette famille sera notée $\mathcal{E}$ et nous utiliserons la notation $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ pour désigner l'une quelconque de ces suites. La définition ci-dessus appelle quelques commentaires :

- **Sur la terminologie :** les définitions et résultats qui suivent dans ce paragraphe permettront de comprendre tout d'abord le mot « référence » puis le mot « échelle ».
- **Sur les suites (a^n) $(0 < a < 1)$:**

[Notons en premier lieu que, par rapport au problème envisagé — celui de la convergence en 0 —, il est exclu de considérer les cas $a \geqslant 1$ (puisque, pour tout entier n on a alors $a^n \geqslant 1$)]. En ce qui concerne les suites (a^n) avec $0 < a < 1$, elles interviennent dans l'échelle de référence à un double titre :

— leur comportement est semblable à celui de la suite $\frac{1}{2^n}$ étudiée dans l'activité 4, page 235 (les exercices 1 à 3 ci-dessous ont pour objet l'étude de ce comportement);

— elles interviennent fréquemment dans les problèmes en tant que suites géométriques.

Exercices

Étude de (a^n) , $0 < a < 1$

1. On considère la suite (u_n) définie géométriquement par le procédé ci-dessous.

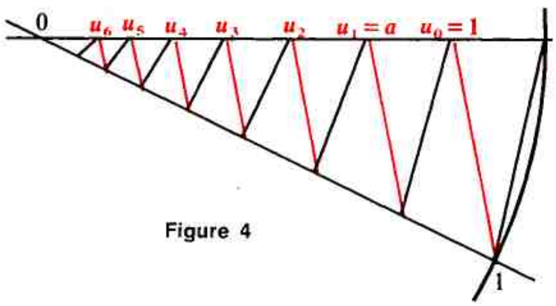


Figure 4

(Les droites d'une même famille sont parallèles.) Expliciter u_n en fonction de a et de n. Que suggère ce schéma quant au comportement de $(u_n)_{n \geqslant 0}$ pour les grandes valeurs de n?

2. On pose $a = 0{,}9$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, l'écriture décimale de a^n est de la forme « 0, 00 ... », autrement dit la partie décimale de a^n débute par deux zéros (utiliser la calculatrice et la monotonie de la suite).

3. On pose $\frac{1}{a} = 1 + \alpha$.

a) Vérifier que $\alpha > 0$.

b) Soit (u_n) définie par :

$$u_n = (1+\alpha)^n - (1 + n\alpha).$$

Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que :

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha \quad \text{pour tout } n.$$

c) En déduire l'inégalité :

$$0 < a^n \leqslant \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{n}.$$

d) On prend $a = 0{,}96$.

Montrer que :

$$0 \leqslant a^n \leqslant \frac{24}{n}.$$

Proposer un rang à partir duquel l'écriture décimale de a^n commence par :

$$0{,}\underbrace{000\ldots00}_{20 \text{ zéros}}\ldots$$

2. Suite convergente vers 0

a. Suite dominée par une autre

Soit (v_n) une suite positive. On dit que la suite (u_n) *est dominée par la suite* (v_n) s'il existe un réel $k>0$ tel que :

$$|u_n| \leqslant kv_n \quad \textit{à partir d'un certain rang.}$$

« A partir d'un certain rang » : comme l'on s'intéresse au comportement à l'infini, autrement dit à l'étude de u_n pour des grandes valeurs de n, on peut se contenter de l'inégalité $|u_n| \leqslant kv_n$ **à partir d'un certain rang** (au lieu de $n \geqslant 1$).

Exemples

1. La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ de terme général $\dfrac{1}{3n^2+n+1}$ est dominée par la suite de terme général $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n \geqslant 1}$.

Cela résulte de l'inégalité $1+n+3n^2 \geqslant 3n^2$ d'où l'on déduit :

$$\frac{1}{1+n+3n^2} \leqslant \frac{1}{3} \times \frac{1}{n^2} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1.$$

2. Montrons que la suite $\left(\dfrac{8}{4n-5}\right)_{n \geqslant 1}$ est dominée par la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$.

En effet, pour $n \geqslant 5$, on a $n \leqslant 4n-15$ (le vérifier) et donc $0 \leqslant \dfrac{8}{4n-5} \leqslant \dfrac{8}{n}$ pour $n \geqslant 5$.

Exercices

4. Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ est dominée par la suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
De façon plus générale, montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$ la suite $\left(\dfrac{1}{n^{p+1}}\right)$ est dominée par la suite $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$.

5. Montrer qu'à partir d'un certain rang :

$$\left|\frac{5}{n^2-2}\right| \leqslant 6 \times \frac{1}{n^2}.$$

En déduire que la suite (u_n) de terme général $\dfrac{5}{n^2-2}$ est dominée par la suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b. Condition de convergence en 0

***Si* une suite (u_n) est *dominée par une suite de l'échelle de référence en* 0, *alors* elle est *convergente vers* 0.**

Dans ce cas, on dit également que **(u_n) est de limite nulle** (ou à pour limite 0), ce que l'on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (*lecture :* « limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ égale 0 »).

Remarques

1. La proposition ci-dessus donne une condition suffisante de convergence en 0 (qui suffit d'ailleurs largement à l'étude des suites envisagées dans cet ouvrage).

Autrement dit :

- Si une suite (u_n) est dominée par une suite (ε_n) de l'échelle, on peut écrire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- **Sinon,** on ne peut pas conclure a priori :

Un **exemple significatif** est donné par la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}}$. Un réel $\alpha > 0$ étant choisi arbitrairement, il est évident que, dès que $n \geqslant \dfrac{1}{\alpha^4}$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

La suite (u_n) satisfait donc au critère énoncé dans le paragraphe I. Mais — et ceci est l'objet de l'exercice 38 — cette suite n'est dominée par aucune suite de l'échelle $\mathcal{E}$.

2. Il est clair que toute suite dominée par une suite de $\mathcal{E}$ satisfait au critère qui vient d'être évoqué.

Exemples

1. Les suites de terme général $\dfrac{100}{n^2}$, $\dfrac{-5}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{10^4}{3^n}$, ... , et de façon plus générale, les **suites** $(k\varepsilon_n)$ où k est une constante et (ε_n) une suite de l'échelle, **convergent vers 0.**

2. La **suite** (a_n) **définie par** $a_n = \dfrac{1}{n^2+5}$ **a pour limite 0.** En effet, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2+5} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$; la suite (a_n) est donc dominée par la suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

3. Étudions la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n n}{1+\dfrac{n^2}{3}}$.

On a l'inégalité $|u_n| = \dfrac{n}{1+\dfrac{n^2}{3}} \leqslant \dfrac{n}{\dfrac{n^2}{3}} = \dfrac{3}{n}$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercices

6. Montrer que les suites de terme général $\dfrac{\sin n}{n}$, $\dfrac{\sqrt{n-1}}{n}$ et $\dfrac{5}{(-4)^n}$ convergent vers 0.

7. Soit (u_n) une suite bornée. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n^2}\right)$ est de limite nulle.

III. Suites convergentes

1. Suite convergente vers un réel l

On dit que la suite (u_n) *converge vers le nombre réel l* **lorsque la suite $(u_n - l)$ converge vers 0.**

Les formulations suivantes sont également admises :

(u_n) tend vers l quand n tend vers $+\infty$; **l est la limite de (u_n) ;**

et l'on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Exemples

1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{4}{n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - 1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{n}\right) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_n = \frac{n-1}{4n+1}$.

On a $v_n - \frac{1}{4} = \frac{n-1}{4n+1} - \frac{1}{4} = \frac{-5}{4(4n+1)}$.

D'où $\left|v_n - \frac{1}{4}\right| \leq \frac{5}{16n}$. Il s'ensuit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{4}$.

Remarque

Il est tout à fait légitime de se poser la question (par exemple) : «pourquoi $\frac{1}{4}$ dans l'exemple 2? ».
Des éléments de réponse seront apportés dans le paragraphe IV.

Exercices[1]

8. On considère les suites de terme général :

$$a_n = \frac{2n+3}{5n+4} \ ; \quad b_n = \frac{3}{1+\frac{1}{3^n}} \ ;$$

$$c_n = \frac{(n+1)^2}{n^2-1} \ ; \quad d_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \ .$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{5} \ ; \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 3 \ ;$$

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = 1 \ ; \quad \lim_{n\to+\infty} d_n = 0 \ .$$

9. Dans chacun des cas ci-dessous proposer un réel l tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et effectuer un contrôle du résultat pronostiqué.

a) $u_n = 3 + \frac{1}{n^2}$; b) $u_n = \pi + \frac{(-1)^n}{2^n}$;

c) $u_n = 6 - \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$; d) $u_n = \frac{\sqrt{2n} + \cos n}{n}$.

10. Même exercice qu'en **9** avec :

a) $u_n = \frac{2n+1}{n}$;

b) $v_n = (2^n - 2)2^{1-n}$;

c) $w_n = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$;

d) $x_n = \frac{\sqrt{n}}{1-\sqrt{n}}$.

2. Suite convergente. Unicité de la limite

Lorsqu'une suite admet une limite, on dit que la suite est **convergente.** Nous admettrons qu'une suite ne peut prétendre avoir plus d'une limite. Autrement dit, si une suite (u_n) tend vers un nombre l, (u_n) ne tend pas vers un autre réel l' différent de l.
En résumé :

Une suite convergente admet une limite unique.

[1] Pour l'instant, les exercices proposés sont à considérer comme des exercices d'entraînement à des techniques élémentaires.

Exercice

11. On itère le procédé de construction schématisé figure 5. On désigne par a_n l'aire du domaine obtenu à la n-ième construction (en rose sur la figure 5) et par l_n la longueur de la courbe (représentée en rouge) à la même étape.
Les suites (a_n) et (l_n) sont-elles convergentes?

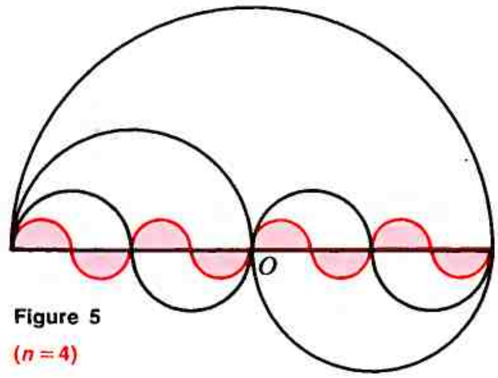


Figure 5
$(n = 4)$

3. Remarque

Le contrôle de la convergence d'une suite nécessite l'intervention des suites de limite nulle et donc, en particulier, celle des **suites de référence** (via la notion de suite dominée). Il est clair que le terme général de telles suites $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$, ..., $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{3^n}$, etc., se présente comme **l'inverse** de celui des suites (n), (n^2), (n^3), ..., (2^n), (3^n), etc.
La mise en place de quelques résultats et techniques relevant de la notion de convergence passe donc par l'étude préalable du comportement à l'infini de telles suites.

IV. Suites divergentes vers $+\infty$

1. Introduction

a. Exemples

Considérons les suites (u_n), (v_n) et (w_n) de terme général : $u_n = \sqrt{n}$, $v_n = n^2$ et $w_n = 2^n$ et soit A un réel positif fixé. Alors :

. pour $n \geqslant A^2$, on a $u_n \geqslant A$;

. pour avoir $v_n \geqslant A$, il suffit de choisir $n \geqslant \sqrt{A}$;

. comme $2^n \geqslant n$ (cf. chapitre 5) l'inégalité $w_n \geqslant A$ est vérifiée par tous les entiers plus grands que A.

Toutes ces suites satisfont donc à la propriété suivante : « un réel étant arbitrairement choisi — et ce aussi grand que l'on veut — il est possible de trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grands que ce réel ».
On décrit un tel comportement à l'infini en disant qu'**elles divergent vers $+\infty$.**

b. La suite (b^n) avec $b > 1$

Activité 5

On pose $b = 1{,}1$.

1° Vérifier à la calculatrice que $b^{25} \geqslant 10$.

2° En utilisant ce résultat et la monotonie de la suite (b^n) proposer un rang à partir duquel $b^n \geqslant 10^{20}$.

• **De façon plus générale, soit $b > 1$ et (u_n) la suite définie par $u_n = b^n$.**
Un réel $A > 0$ étant choisi, examinons s'il est possible de trouver un rang à partir duquel on a $u_n \geqslant A$.

Pour cela, considérons la suite (ε_n) telle que $\varepsilon_n = \left(\frac{1}{b}\right)^n$: cette suite fait partie de l'échelle de référence en 0 $\left(\text{elle est en effet de la forme } a^n \text{ avec } 0<a<1 : a=\frac{1}{b}\right)$.

On peut donc trouver un rang à partir duquel $0<\varepsilon_n \leqslant \frac{1}{A}$, c'est-à-dire $0<\frac{1}{b^n}\leqslant\frac{1}{A}$.

On en déduit qu'à partir de ce même rang $b^n \geqslant A$.

Conclusion : **les suites (b^n) avec $b>1$ divergent vers $+\infty$.**

c. Commentaires

A propos de l'étude des suites divergentes vers $+\infty$ les exemples précédents permettent d'anticiper :

1° sur la **démarche utilisée,** analogue à celle relative aux suites convergentes vers 0, à savoir :

. mise en place d'une échelle de référence en **l'infini,**

. introduction de la notion de suite **dominant** une suite de l'échelle;

2° sur le rôle de la **fonction** $\begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{array}$ (déjà souligné : remarque ci-contre) qui échange entre elles les suites des échelles en 0 et en $+\infty$ et qui conduira, de façon tout à fait logique au théorème page 243.

2. Définitions. Exemples

a. Echelle de référence en $+\infty$

On appelle *échelle de référence en* $+\infty$ la famille de suites :

- $(\sqrt{n})$; (n) ; (n^2) ; (n^3) ;
- (b^n) *avec* $b>1$.

Nous noterons Ω cette famille de suites et nous utiliserons la notation (ω_n) pour désigner l'une quelconque de ces suites.

b. Suite divergente vers $+\infty$

Nous dirons qu'une suite (u_n) **domine** une suite (a_n) à termes positifs lorsqu'il existe un réel $k>0$ tel que l'inégalité $u_n \geqslant ka_n$ soit vérifiée à partir d'un certain rang.
Dans ces conditions :

Si une suite (u_n) *domine une suite de l'échelle de référence en* $+\infty$, elle *diverge vers* $+\infty$.

Au lieu de « la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ » on utilise également les expressions : « la suite (u_n) tend vers $+\infty$ » et « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ » (cette dernière constituant un abus de langage et de notation puisque la suite (u_n) n'a pas de limite réelle).

Exemples

1. Les suites $(k\omega_n)$, où (ω_n) est une suite de l'échelle et où k est un réel strictement positif, **divergent vers $+\infty$.**

2. Soit $u_n = \frac{n^2+1}{n}$. L'inégalité $\frac{n^2+1}{n} \geqslant n$, vraie pour $n \geqslant 1$ permet d'écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+1}{n} = +\infty.$$

3. Soit $\alpha_n = 3^n - 200$. Montrons que $3^n - 200$ est supérieur à $\frac{1}{2} \times 3^n$ à partir d'un certain rang.

L'inégalité $3^n - 200 \geqslant \frac{1}{2} 3^n$ est équivalente à l'inégalité $3^n \geqslant 400$ qui est vraie pour $n \geqslant 6$ car :

. $3^6 = 729 \geqslant 400$;

. la suite (3^n) est croissante et donc pour $n \geqslant 6$, $3^n \geqslant 3^6$.

La suite (α_n) domine donc la suite (3^n) : il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} (3^n - 200) = +\infty$.

Exercices

Dans les exercices **12** *à* **14**, *montrer que chacune des expressions proposées est le terme général d'une suite divergente vers* $+\infty$.

12. $(n+3)^2$; 2^{n+2} ; $\frac{n^2}{n-1}$.

13. $n^2 + \frac{1}{n}$; $3^n + \sqrt{n}$; 5^{n-2} .

14. n^n ; 2^{2n-15} ; $\frac{n^4+1}{n^3+n^2}$.

c. L'addition d'une constante

L'exemple 3 précédent peut être interprété comme suit :

. On dispose d'une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ ($u_n = 3^n$ dans l'exemple).

. On s'intéresse au comportement de la suite de terme général $u_n + k$ où k est une constante (positive ou négative) ($k = -200$ dans l'exemple).

Le résultat que nous avons obtenu : $\lim\limits_{n \to +\infty} (3^n - 200) = +\infty$ est général[1] :

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors pour tout réel k on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + k) = +\infty$.

Il est indispensable d'associer à cette propriété certaines considérations sur l'ordre de grandeur.

Exemples

1. Considérons la suite de (u_n) terme général $n - 1000$.

On a $n - 1000 = n\left(1 - \frac{1000}{n}\right)$ et donc, dès que n sera suffisamment grand on pourra dire que « u_n est de l'ordre de n ».

[1] Une idée de la démonstration : « Soit A un réel fixé. On sait qu'à partir d'un **certain rang** les termes u_n dépassent n'importe quel nombre donné à l'avance en particulier le nombre... $A - k$. Or $u_n \geqslant A - k$ équivaut à $u_n + k \geqslant A$. A partir du même **rang** $u_n + k$ dépasse donc le réel A ». (Notons que le résultat est surtout intéressant pour k **négatif.**)

Ainsi, pour $n = 10^6$, $u_n = 10^6\left(1 - \frac{1\,000}{10^6}\right) = 0{,}999 \times 10^6$ et donc $u_{10^6} \approx 10^6$.

2. De même, pour la suite (v_n) de terme général $2^n - 2^{50}$, on a $v_n = 2^n(1 - 2^{50-n})$ et, par exemple pour $n = 60$, $v_{60} = 2^{60}\left(1 - \frac{1}{1\,024}\right) \approx 2^{60}$.

De telles situations sont souvent décrites par des expressions telles que :

- *exemple 1 :* pour n assez grand $n - 1\,000$ « **est de l'ordre de** n »;
- *exemple 2 :* $2^n - 2^{50}$ « **est de l'ordre de** 2^n » dès que n est suffisamment grand.

Remarque

Il est tout à fait légitime d'écrire $u_{10^6} \approx 10^6$ et $v_{60} \approx 2^{60}$. Par contre, on évitera, pour l'instant, des écritures telles que $u_n \approx n$ et $v_n \approx 2^n$ lorsque l'entier n **n'est pas précisé.**

3. Lien entre la convergence en 0 et la divergence vers $+\infty$

Il prend appui sur les équivalences suivantes :

(1) Une suite (ε_n) est dans l'échelle de réfrence en 0 si et seulement si la suite (ω_n), avec $\omega_n = \frac{1}{\varepsilon_n}$, est dans l'échelle de référence en $+\infty$.

(2) Une suite (u_n) positive à partir d'un certain rang est dominée par une suite de $\mathcal{E}$ si et seulement si la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ domine une suite de Ω.

Exemples

- Si l'on a $u_n \geqslant 5 \times 3^n$ à partir d'un certain rang, alors $0 < \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ à partir du même rang.
- De même, si l'on a $0 < u_n < \frac{k}{\sqrt{n}}$ avec $k > 0$, on aura $\frac{1}{u_n} > \frac{1}{k}\sqrt{n}$.

On peut alors énoncer le **théorème :**

Soit (u_n) une suite dont les termes sont *strictement positifs à partir d'un certain rang*. Alors, il est équivalent de dire :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty \; .$$

Exercices

15. Montrer que les suites ci-dessous sont convergentes vers 0 :

$n \longmapsto \frac{1}{n^2 - 5}$; $\quad n \longmapsto \frac{5}{100 - \sqrt{n}}$;

$n \longmapsto \frac{1}{2^n - 1\,000}$; $\quad n \longmapsto \frac{\cos n}{n - 12}$.

16. Soit (u_n) une suite divergente vers $+\infty$.

Montrer que pour tout réel k, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n + k} = 0$.

17. On considère la suite (u_n) avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

a) Vérifier que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

b) A-t-on $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$?

Quelle est l'hypothèse du théorème ci-dessus qui n'est pas satisfaite?

V. Quelques exemples fondamentaux

1. Divers problèmes

Les questions suivantes qui concernent toutes le comportement à l'infini d'une suite réelle (u_n) sont cependant de nature différente :

1° La suite (u_n) est-elle convergente? divergente?

2° Quelle est la limite (éventuelle) de la suite (u_n)?

3° Quelle approximation le terme u_n fournit-il de l $\left(\text{lorsque } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l\right)$? Autrement dit, de quelle façon la suite $(u_n - l)$ converge-t-elle vers 0?

Dans le cadre de cet ouvrage ce sont essentiellement les questions **2°** et **3°** qui retiendront notre attention[1]. De façon plus précise[2], on s'intéressera à **quelques cas simples de suites de la forme $u_n = f(n)$**, sous un double aspect :

- comment pronostiquer une limite éventuelle?
- comment contrôler cette conjecture?

Quant aux suites récurrentes $u_n = f(u_{n-1})$, leur rôle essentiel dans les problèmes de calcul ou d'approximation (racines d'une équation par exemple) sera développé dans le paragraphe VI.

2. Exemples de suites polynomiales

Il s'agit des suites définies par $u_n = f(n)$ ou f est un polynôme.

a. Exemple 1 : $u_n = n^3 + 5n^2 + 1$

Aucune difficulté car $u_n \geqslant n^3$ quel que soit n. Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b. Exemple 2 : $u_n = n^3 - 2n$

Plusieurs points de vue peuvent permettre de se convaincre que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

- **Le point de vue numérique :** $u_{10} = 980$; $u_{20} = 7\,960$; $u_{100} = 999\,800$; il semble que la suite (u_n) prenne des valeurs aussi grandes que l'on veut.
- **Le point de vue algébrique :** on a $u_n = n^2(n-2)$ et donc par exemple, pour $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant n^2$, ce qui assure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

---

[1] La question 1° ne sera pas abordée. (Il existe des résultats permettant d'affirmer qu'une suite est convergente sans connaître sa limite; ceci explique — en partie — pourquoi les questions 1° et 2° peuvent être considérées comme de nature différente.)

[2] Conformément aux programmes.

c. *Exemple 3:* $u_n = -2n + 1$

L'examen des valeurs de u_n permet de penser que la suite prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue. Il est facile de voir que :

- pour $n \geqslant 1$, $u_n < 0$,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = \lim\limits_{n \to +\infty} (2n-1) = +\infty$.

Ainsi (u_n) se présente comme **l'opposée d'une suite qui tend vers** $+\infty$. On décrit ce comportement en disant que **la suite (u_n) tend vers $-\infty$** (notation : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).

d. *Exemple 4:* $u_n = \dfrac{1}{100} n^2 - 100n - 1000$

Là aussi, l'examen de quelques termes laisse penser que la suite (u_n) prend des valeurs négatives avec des valeurs absolues de plus en plus grandes :

$$u_{10} = -1999 \ ; \quad u_{20} = -2996 \ ; \quad u_{50} = -5975 \ ; \quad u_{100} = -10900.$$

La conjecture «raisonnable» serait donc « $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ».

Deux moyens vont permettre de se convaincre du contraire!

- **Le calcul de termes d'indices plus élevés :**

— pour $n = 100\,000$, $u_n = 10^8 - 10^7 - 1\,000 = 89\,999\,000$;

— pour $n = 10^{20}$, $u_n = 10^{38} - 10^{22} - 10^3$ qui reste de l'ordre de 10^{38} puisque :

$$10^{38} - 10^{22} - 10^3 = 10^{38}(1 - 10^{-16} - 10^{-35}) \approx 10^{38}.$$

- **Le point de vue graphique :** La courbe représentative de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{100} x^2 - 100x - 1\,000$$

est une parabole tournée vers le haut et cette fonction prend de grandes valeurs pour les grandes valeurs de la variable...

Essayons alors de **contrôler si** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

On peut écrire (de façon analogue au calcul de u_n pour $n = 10^{20}$) :

$$u_n = \frac{n^2}{10^2}\left(1 - \frac{10^4}{n} - \frac{10^5}{n^2}\right),$$

où l'on voit qu'il est possible de rendre $\dfrac{10^4}{n}$ et $\dfrac{10^5}{n^2}$ très petits. Ainsi, par exemple, pour $n \geqslant 10^5$ les nombres $\dfrac{10^4}{n}$ et $\dfrac{10^5}{n^2}$ sont inférieurs à $\dfrac{1}{10}$.

En conséquence $u_n \geqslant \dfrac{n^2}{10^2} \times 0{,}8$ **pour** $n > 10^5$ **: la suite (u_n) domine la suite (n^2)** et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

- **Remarque :** Cette suite est volontairement «pathologique», et — par la suite — nous n'aurons pas à considérer de telles curiosités (avec les difficultés techniques qui les accompagnent). Cependant, cette étude est **significative du comportement à l'infini des diverses suites de référence** et permettra d'étayer les quelques points de repère que nous dégagerons dans le paragraphe 6.

Exercices

18. Soit (u_n), (v_n) et (w_n) les suites de terme général : $u_n = 3n^5 + n + 12$, $v_n = n^2 - 5n$ et $w_n = -n^2 + 15$.
Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$.

19. Étudier le comportement à l'infini des suites de terme général :

$$\frac{1}{3n^5 + n + 12}, \quad \frac{1}{n^2 - 5n}, \quad \frac{1}{15 - n^2}$$

(utiliser les théorèmes des pages 242 et 243).

3. Exemples de suites homographiques

Il s'agit des suites $u_n = f(n)$ où f est une fonction homographique.

a. Exemple 5 : $u_n = \dfrac{3n+1}{5n-4}$

Trois approches conduisent à conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{3}{5}$:

- **L'approche « intuitive » :** $3n + 1$ et $5n - 4$ se comportent à l'infini respectivement comme $3n$ et $5n$. Le quotient semble donc de l'ordre de $\dfrac{3}{5}$.

- **L'approche graphique :** Le tracé de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \dfrac{3x+1}{5x-4}$ (figure 6) permet de conjecturer que :

$$\lim_{n \to +\infty} f(n) = \frac{3}{5}.$$

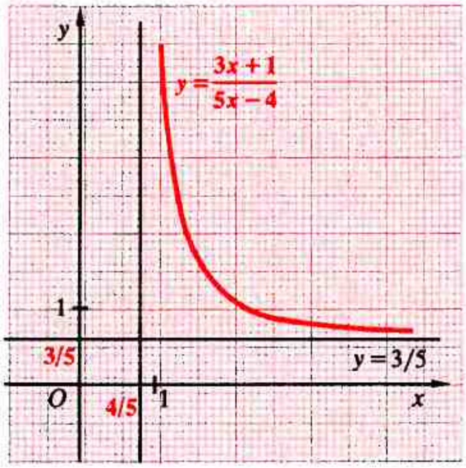


Figure 6

- **L'approche algébrique :** En écrivant :

$$u_n = \frac{3 + \dfrac{1}{n}}{5 - \dfrac{4}{n}},$$

il paraît clair que (u_n) tend vers $\dfrac{3}{5}$.

Considérons alors :

$$u_n - \frac{3}{5} = \frac{3n+1}{5n-4} - \frac{3}{5} = \frac{17}{5(5n-4)}.$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (5n - 4) = +\infty$, on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{17}{5(5n-4)} = 0 \; ; \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(u_n - \frac{3}{5}\right) = 0.$$

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{3}{5}$.

b. Exemple 6 : $u_n = \dfrac{3-\sqrt{2}\,n}{\sqrt{3}\,n+1}$

Des raisons analogues à celles évoquées dans l'exemple 1 conduisent à étudier $u_n - \left(\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ c'est-à-dire :

$$u_n + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{2}n}{\sqrt{3}n+1} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}n+1)}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3}n+1} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Exercice

20. Étudier le comportement à l'infini des suites définies par :

a) $u_n = \dfrac{n-5}{2n+3}$; *b*) $u_n = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2-n}{3n-4}$;

c) $u_n = \dfrac{2n+1}{n-8} - 5$; *d*) $u_n = \dfrac{\sqrt{2}n-1}{2n-\sqrt{2}}$.

4. Sommes partielles d'une suite géométrique

Le cadre général est l'étude de la suite (S_n) des sommes partielles d'une suite géométrique (u_n) de raison q; $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

a. Exemple 7 : $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \quad (|x|<1)$

Nous avons vu (chapitre 5) que $S_n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Comme pour $|x|<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$, on obtient donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-x}$ (puisque $S_n - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{-x^{n+1}}{1-x}$ est le terme général d'une suite de limite nulle).

Remarques

1. En changeant x en $-x$, toujours sous la condition $|x|<1$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} (1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n) = \frac{1}{1+x}.$$

2. Pour $x>1$, on a $S_n > x^n$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

3. La relation $S_n - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{-1}{1-x}\, x^{n+1}$ permet d'estimer (dans le cas $|x|<1$) la rapidité de convergence.

Ainsi, par exemple, pour $x = \dfrac{1}{2}$: $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$ et $\dfrac{1}{1-x} = 2$. D'où : $|S_n - 2| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ [1].

[1] Ce résultat est à rapprocher de l'étude faite page 234, Activité 3.

b. *Exemple 8 : 0,999...*(*)

L'objet de l'étude qui suit est de donner une **signification** plus rigoureuse à des écritures telles que 0,999... et de **percevoir le sens de l'égalité 1 = 0,999...**
Considérons la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 0{,}9 \ ; \quad u_2 = 0{,}99 \ ; \quad u_3 = 0{,}999 \ ; \quad u_n = 0{,}\underbrace{99\ldots\ldots 9}_{n \text{ chiffres } 9}.$$

On a $u_1 = \frac{9}{10}$, $u_2 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2}$, $u_3 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3}$ et de façon plus générale

$$u_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n}.$$

Le terme u_n apparaît donc comme la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique. La technique générale conduit à écrire :

$$u_n = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{9}{10} \times \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n}.$$

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ $\left(\text{puisque } u_n - 1 = -\frac{1}{10^n}\right)$.
Il faut comprendre que, puisque pour $n \geqslant 1$ on a $u_n = 0{,}99\ldots9$ (partie décimale formée de n chiffres égaux à 9), il est naturel d'envisager pour $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ une écriture telle que 0,999...
En fait, comme on vient de le voir :

$$0{,}999\ldots = \lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

c. *Commentaires*

De nombreuses situations conduisent à examiner soigneusement des sommes partielles de suites géométriques et leur comportement à l'infini (cf. paragraphe VII).
En attendant... :

Exercices

21. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_1 = 0{,}7 \ ; \ u_2 = 0{,}77 \ ; \ \ldots$$
$$u_n = \underbrace{0{,}777\ldots7}_{n \text{ chiffres } 7}$$

Étudier la convergence de cette suite.

22. On pose :

$d_1 = 0{,}428\,571$

$d_2 = 0{,}428\,571\,428\,571$

$$d_n = 0{,}\underbrace{428\,571\ldots428\,571}_{n \text{ fois le bloc } 428\,571}$$

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = \frac{3}{7}$.

(*) Sous-entendu : « infinité » de chiffres 9.

5. Autres exemples

a. Exemple 9 : $u_n = \dfrac{n^2-4}{2n+5}$

A « vue d'œil » le numérateur est de « l'ordre de n^2 » et le dénominateur de « l'ordre de $2n$ »; le quotient u_n semble donc de l'ordre de $\dfrac{n}{2}$ et il devient tout à fait légitime de penser que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Ce point de vue est confirmé par la **transformation d'écriture :** $u_n = \dfrac{n-\dfrac{4}{n}}{2+\dfrac{5}{n}}$.

Pour établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il est donc normal d'essayer de voir si : $u_n \geqslant \dfrac{n}{2}$, à partir d'un certain rang.

Or : $u_n \geqslant \dfrac{n}{2} \iff \dfrac{n^2-4}{2n+5} \geqslant \dfrac{n}{2} \iff -8 \geqslant 5n$; ceci n'est vérifié pour aucune valeur de n.

Il faut interpréter un tel résultat de la façon suivante : « $\dfrac{n}{2}$ est trop fort »; essayons donc $\dfrac{n}{3}$ (par exemple) :

$$u_n \geqslant \frac{n}{3} \iff 3n^2-12 \geqslant 2n^2+5n \iff n^2-5n \geqslant 12$$
$$\iff n(n-5) \geqslant 12.$$

Il est clair que dès que $n-5 \geqslant 12$, $n(n-5)$ est aussi plus grand que 12 : l'inégalité $u_n \geqslant \dfrac{n}{3}$ est donc vérifiée à partir d'un certain rang.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque

Cet exemple illustre une démarche assez efficace :

1. Se faire une idée de « l'ordre de u_n » $\left(\text{ici } \dfrac{n}{2}\right)$ et pronostiquer le comportement de la suite à l'infini $\left(\text{ici } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty\right)$;

2. « Tester » l'inégalité ainsi suggérée $\left(\text{ici } u_n \geqslant \dfrac{n}{2}\right)$ et, en cas d'échec (ici, c'est le cas), modifier le terme qui sert à la comparaison $\left(\text{on essaie l'inégalité } u_n \geqslant \dfrac{n}{3} \text{ par exemple}\right)$.

b. Exemple 10 : $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

En tabulant quelques valeurs, on obtient :

(Les valeurs portées sur le tableau sont des valeurs **approchées** basées sur l'estimation $2^{10} \approx 10^3$.)

n	10	20	100	1 000
2^n	10^3	10^6	10^{30}	10^{300}
n^2	100	400	10^4	10^6
$u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$	10	$2{,}5 \times 10^3$	10^{26}	10^{294}

On peut donc conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n^2} = +\infty$.

Exercice

23. On se propose d'établir que :

(1) $\dfrac{2^n}{n^2} \geqslant (1{,}5)^n$ à partir d'un certain rang.

1° Montrer que (1) équivaut à :
$v_n \geqslant 1$ à partir d'un certain rang,
avec $v_n = \dfrac{4^n}{3^n \times n^2}$.

2° Calculer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ et montrer qu'il existe un rang N à partir duquel :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqslant 1$$

(on ne demande pas d'expliciter le rang).

3° En déduire que $v_n \geqslant 1$ à partir de ce rang, puis, l'inégalité (1) proposée.

Ainsi la suite $\left(\dfrac{2^n}{n^2}\right)$ domine la suite $(1{,}5)^n$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^n}{n^2} = +\infty$.

6. Le théorème des "gendarmes"[*]

Une situation que l'on rencontre fréquemment (notamment dans les calculs d'aires et de volumes) est la suivante :

1° Une quantité réelle $\mathcal{A}$ (inconnue a priori) est encadrée par deux suites (u_n) et (v_n) :

$$u_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant v_n.$$

2° On peut, par contre, calculer les limites des suites (u_n) et (v_n) et, de plus, ces limites sont **égales :**

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = l.$$

Alors le « théorème des gendarmes » permet d'affirmer que $\mathcal{A} = l$.
En résumé :

Soit $\mathcal{A}$ un réel, (u_n) et (v_n) deux suites numériques tels que :

- $u_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant v_n$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$

alors, on a l'égalité $\mathcal{A} = l$.

Nous admettrons ce résultat bien que dans la pratique, il puisse être établi dans la plupart des cas considérés (voir exercice ci-dessous).

Exercice

24. Lors d'un calcul de volume[1] $\mathcal{V}$, on obtient l'encadrement : $u_n \leqslant \mathcal{V} \leqslant v_n$, avec :

$$u_n = 8\pi \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = 8\pi \times \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

1° Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite que l'on calculera.

2° Montrer que $|\mathcal{V} - 8\pi| \leqslant \dfrac{8\pi}{n}$ **pour tout entier $n \geqslant 1$.**

3° En déduire que $\mathcal{V} - 8\pi = 0$ (faire un **raisonnement par l'absurde :** montrer que l'on serait conduit à la conclusion : « la suite des entiers naturels est majorée »).

[*] Il ne s'agit pas d'une appellation personnelle des auteurs qui se voudrait humoristique.

[1] Cf. page 255.

7. Conclusion

a. Quelques points de repère

Il s'agit de faire une synthèse — au niveau **méthode** — des remarques, commentaires, etc., qui accompagnent les exemples précédents, concernant **l'étude du comportement à l'infini de** suites $u_n = f(n)$.

Deux points sont à dégager :

1. Le rôle de la conjecture
Tous les moyens et approches peuvent être mis en œuvre : « **intuitif** », **graphique, géométrique, numérique** (tabulation mais aussi ordre de grandeur), etc. Insistons sur le fait que les **premiers termes d'une suite ne permettent pas de préjuger son devenir à l'infini.** Ce sont les « grandes » valeurs de n qui sont essentielles et parfois, il ne faut pas craindre d'« aller assez loin » (cf. l'exemple 4).

2. Le contrôle de la conjecture : l'aspect technique
Certains cas sont particulièrement simples : ceux qui relèvent d'une **majoration** (ou **minoration**) **directe** : (exemples 1, 7, 8). D'autres, nécessitent la notion de **suite dominée** et donc un travail supplémentaire (les exemples 4, 9 et 10 sont à cet égard significatifs) qui s'organise à partir :

- **du choix d'une suite de référence :** l'ordre de grandeur est en général l'outil efficace;
- **de la détermination de la « constante k de domination » :** la remarque 2 (page 249) offre la possibilité de traiter les cas les plus délicats.

b. Sur le mot "échelle"

Il suggère une « classification » à laquelle on a pu être sensibilisé lorsqu'on a été amené à « comparer » le comportement à l'infini de $\frac{n^2}{100}$ et $100n$ (exemple 4) ou de 2^n et n^2 (exemple 10).
Les problèmes d'approximation (paragraphe suivant) mettront l'accent sur le critère de rangement utilisé : la **rapidité de convergence.**

Disons, dans une première approche, que pour ce qui concerne l'échelle $\mathcal{E}$ (de référence en 0) :

- $\left(\frac{1}{3^n}\right)$ converge « plus vite » vers 0 que $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ qui à son tour converge « plus vite » vers 0 que $\left(\frac{1}{n^3}\right)$, etc.

- Si l'on écrit les suites dans l'ordre suivant :

$$\ldots,\ \left(\frac{1}{4^n}\right),\ \left(\frac{1}{3^n}\right),\ \left(\frac{1}{2^n}\right),\ \left(\frac{1}{n^3}\right),\ \left(\frac{1}{n^2}\right),\ \left(\frac{1}{n}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ \ldots$$

chacune converge « plus vite » vers 0 que celle qui la suit[1], la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ apparaissant alors comme la « plus lente »[2].

---

[1] Ce qui semble parfaitement logique...

[2] Cette suite peut donc être considérée comme le « gros barreau » de l'échelle.

VI. Quelques problèmes essentiels

1. Objectifs

Nous avons déjà souligné l'**importance des suites numériques dans les problèmes d'approximation :** ces problèmes sont très divers et fort nombreux. Nous nous limitons cependant dans ce paragraphe à deux types de problèmes :

- **calcul d'aires et de volumes,**
- **résolution d'équations.**

Les raisons essentielles en sont les suivantes :

1. l'importance de ces problèmes en mathématiques;

2. le fait qu'ils constituent un support particulièrement significatif :

a) du **rôle des suites** dans l'approximation;

b) du **fonctionnement des résultats et techniques** dégagés précédemment;

c) des phénomènes de **rapidité de convergence;**

d) des **méthodes** adaptées à l'étude de telles questions.

Note : Les exemples qui suivent sont proposés sous la forme de **problèmes résolus** mais accompagnés de « petites questions » d'ordre technique : contrôler un calcul, calculer une limite, obtenir un encadrement, etc.

2. Calculs d'aires et de volumes

a. Sous la parabole

Problème

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ représenté sur la figure 7.

Le principe

Il consiste à **encadrer** l'aire du domaine $\mathcal{D}$ par des aires « faciles » à calculer (comme celles de rectangles par exemple), puis à **affiner** cet encadrement en augmentant le nombre de rectangles (illustration figures 8 et 9 dans un cas particulier).

- *Question 1 : Quel encadrement de l'aire obtient-on à l'aide des figures 8 et 9?*

On considère alors n rectangles correspondant à un partage du segment $[0, 2]$ en n parties égales[1]. On désigne par u_n l'aire totale des rectangles contenus dans le domaine $\mathcal{D}$ et par v_n celle des rectangles contenant le domaine $\mathcal{D}$.

L'examen du schéma[2] (figure 10) permet d'affirmer que :

$$u_n = \frac{2}{n}\,(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2)$$

$$v_n = \frac{2}{n}\,(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2)$$

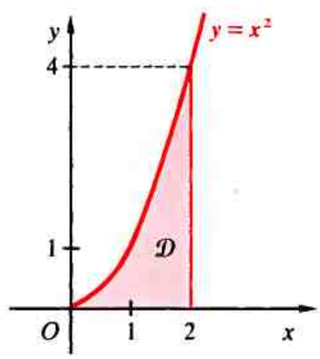


Figure 7

[1] Les figures 8 et 9 correspondent au cas $n = 4$.

[2] Ce schéma est erroné (il ne respecte pas l'échelle par exemple). Dans ce genre de situations, cela n'est pas extrêmement important... L'essentiel est de disposer d'un support graphique permettant d'obtenir et de comprendre les égalités qui suivent.

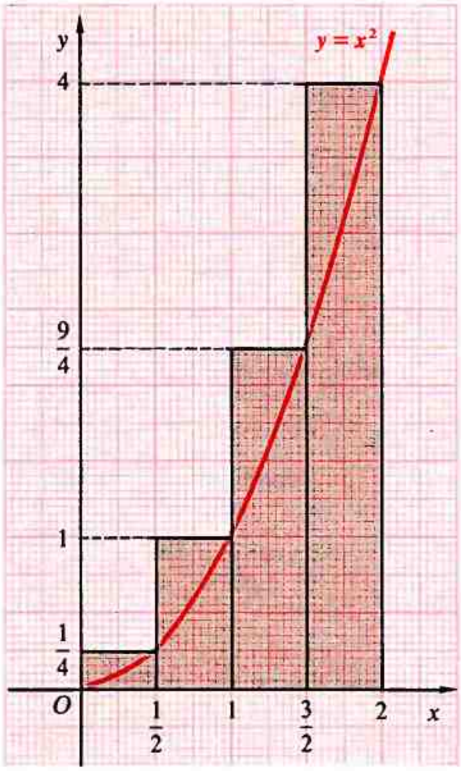


Figure 8

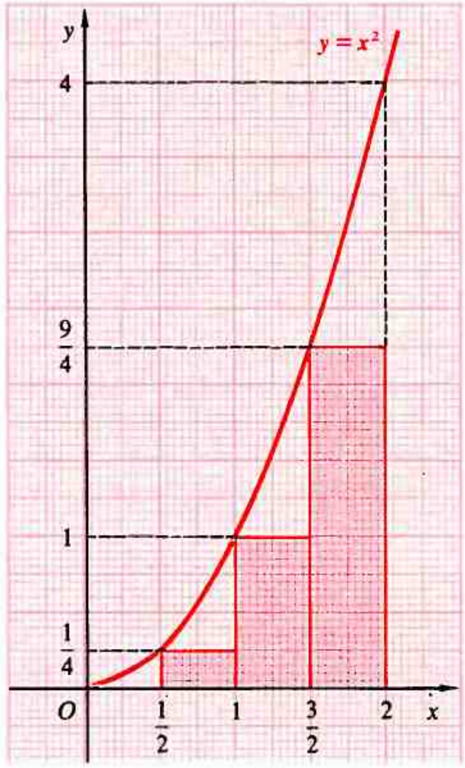


Figure 9

avec de plus :

$$x_1 = 1 \times \frac{2}{n}$$

$$x_2 = 2 \times \frac{2}{n}$$

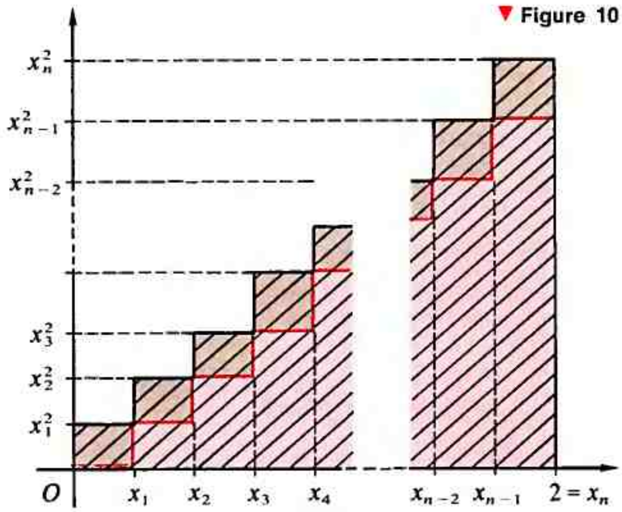
$$x_3 = 3 \times \frac{2}{n}$$

....

$$x_{n-1} = (n-1) \times \frac{2}{n}$$

$$x_n = n \times \frac{2}{n}.$$

Figure 10



« base » de tous les rectangles : $\frac{2}{n}$

• *Question 2 : En déduire les inégalités :*

$$\frac{8}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right) \leqslant \mathcal{A} \leqslant \frac{8}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2).$$

Quel encadrement de $\mathcal{A}$ obtient-on pour $n = 10$?

Nous avons vu dans le chapitre 5 une expression des sommes de la forme $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, à savoir :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

d'où : $1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \dfrac{(n-1)\,n(2n-1)}{6}.$

On en déduit : $$\frac{4}{3}\times\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}\leqslant \mathcal{A}\leqslant\frac{4}{3}\times\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

Étudions alors le comportement à l'infini des suites de terme général :
$$u_n=\frac{4}{3}\times\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}\quad\text{et}\quad v_n=\frac{4}{3}\times\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

L'écriture $u_n=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(2-\frac{1}{n}\right)$ permet de conjecturer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{4}{3}\times 2$. Contrôlons cette affirmation par le calcul de $\left|u_n-\frac{4}{3}\times 2\right|$:
$$\left|u_n-\frac{4}{3}\times 2\right|=\frac{4}{3}\left|\frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}-2\right|=\frac{4}{3}\times\left|\frac{1-3n}{n^2}\right|=\frac{4}{3}\times\frac{3n-1}{n^2},$$

d'où $\left|u_n-\frac{4}{3}\times 2\right|\leqslant\frac{4}{3}\times\frac{3n}{n^2}=\frac{4}{n}$.

On a donc effectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{8}{3}$.

• *Question 3 : Montrer que de même :* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{8}{3}$.

Conclusion

D'après le « théorème des gendarmes » on peut affirmer que $\mathcal{A}=\frac{8}{3}$.

Remarque

L'égalité $\left|u_n-\frac{8}{3}\right|=\frac{4}{3}\times\frac{3n-1}{n^2}$ montre que $|u_n-\mathcal{A}|$ est sensiblement égal à $\frac{4}{n}$.

Ceci explique la **qualité très moyenne** des encadrements de l'aire $\mathcal{A}$ que peuvent fournir les suites (u_n) et (v_n). (Cf. la question 2 ci-dessus.)

• *Question 4 : Calculer l'aire $\mathcal{A}'$ du domaine Δ en grisé de la figure 11.*

Vérifier que cette aire $\mathcal{A}'$ est égale à $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle ABC (résultat obtenu par Archimède dans son traité sur la quadrature de la parabole).

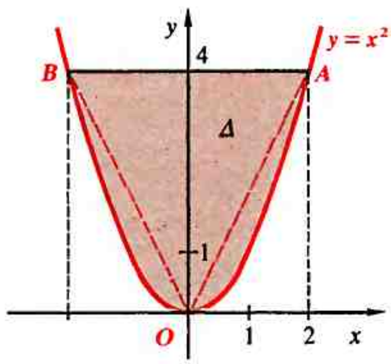


Figure 11

b. Le volume du phare

Problème

Calculer le volume $\mathcal{V}$ du phare obtenu par révolution du domaine Δ précédent autour de l'axe de la parabole (figure 12).

Le **principe** est analogue à celui utilisé pour le calcul d'aire : les rectangles étant remplacés par des cylindres.
Si l'on effectue une section plane par un plan contenant l'axe du phare on obtient un schéma analogue à celui représenté figure 13 : le segment [0, 4] est divisé en n segments égaux $\left(\text{donc de longueur } \frac{4}{n}\right)$ conduisant à n cylindres « extérieurs » numérotés en noir (figure 13) et $n-1$ cylindres intérieurs.

On désigne par u_n **le volume total des cylindres intérieurs et par** v_n **celui des cylindres extérieurs.**

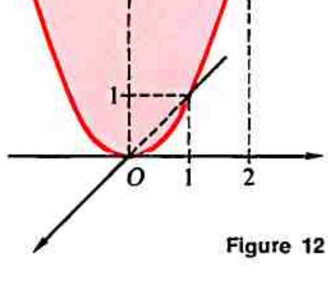


Figure 12

Question 1 : En utilisant le schéma de la figure 14, montrer que les bases des cylindres extérieurs ont pour aires (dans l'ordre de 1 à n) :

$$\pi\times\frac{4}{n}\ ;\quad \pi\times 2\times\frac{4}{n}\ ;\quad \pi\times 3\times\frac{4}{n}\ ;\quad \ldots\ ;$$

$$\pi\times(n-1)\times\frac{4}{n}\ ;\quad \pi\times n\times\frac{4}{n}.$$

En déduire que : $u_n=\frac{16\pi}{n^2}\left(1+2+\ldots+(n-1)\right)$

$$v_n=\frac{16\pi}{n^2}\left(1+2+\ldots+(n-1)+n\right).$$

- On obtient donc l'encadrement :

$$\frac{16\pi}{n^2}\left(1+2+\ldots+(n-1)\right)\leqslant \mathcal{V}\leqslant\frac{16\pi}{n^2}\left(1+2+\ldots+(n-1)+n\right).$$

Ici aussi nous disposons d'une « formule sommatoire » à savoir :

$$1+2+\ldots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$$

et : $$1+2+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Il en découle : $8\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)\leqslant\mathcal{V}\leqslant 8\pi\left(1+\frac{1}{n}\right).$

Question 2 : Étudier le comportement à l'infini des suites de terme général :

$$8\pi\left(1-\frac{1}{n}\right)\quad\text{et}\quad 8\pi\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

- On peut alors conclure que $\mathcal{V}=8\pi.$

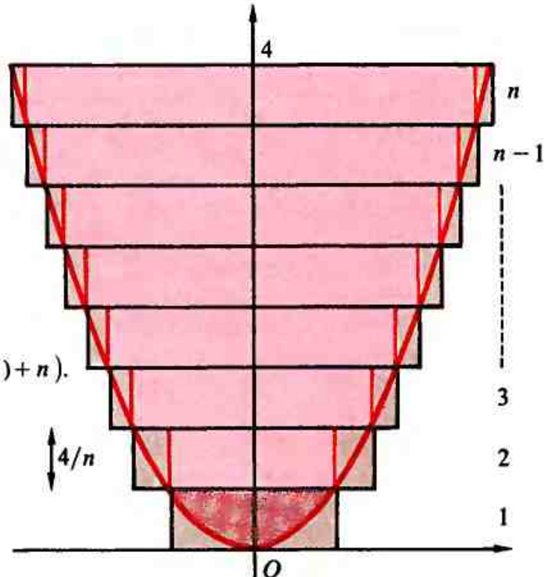
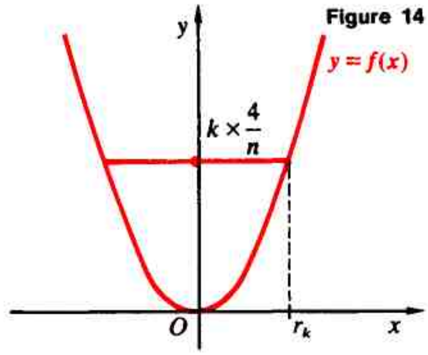


Figure 13

Figure 14



aire de la base du k-ième cylindre : $\pi\times r_k^2$ avec $r_k^2=k\times\frac{4}{n}$

c. Calcul approché

Dans les deux exemples précédents nous disposions de formules explicites pour u_n et v_n, ce qui a permis le calcul de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{V}$. Dans certains cas, il faut se contenter de valeurs approchées. (Voir exercice **60.**)

3. Valeurs approchées des racines d'une équation : le nombre d'or (*)

a. Position du problème

L'équation $x^2-x-1=0$ admet deux racines $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; la racine positive de cette équation est appelée **nombre d'or** et notée $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

L'objet de l'étude qui suit est de dégager, sur cet exemple **quelques méthodes générales sur l'approximation des racines d'une équation**[1].

(*) D'après le *Petit Larousse :* « Nombre égal à $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, soit environ 1,618 correspondant à une proportion considérée comme particulièrement esthétique ». Quelques propriétés de ce nombre ont été abordées dans le livre de Seconde, pages 42 et 43; pour une étude relativement complète (points de vue géométrique, arithmétique, algébrique... artistique) voir Collection « Que sais-je? » n° 1530, *Le nombre d'or* par Marius CLEYET-MICHAUD.

(1) Ce point sera repris et développé dans le chapitre 9.

b. Construction d'un algorithme

Sur la figure 17, on a représenté sur $[0, +\infty[$ la fonction $f : x \longmapsto x^2 - x - 1 = 0$. On choisit un point A de la courbe (d'abscisse positive).

On définit alors une suite de réels $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, comme abscisses des points $(M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots)$ de la courbe par le **procédé suivant** (illustré figure 17, pour $n = 0$, 1 , 2 et 3) :

- le réel x_0 est convenablement choisi (voir plus loin),
- la droite (AM_0) rencontre l'axe (Ox) en x_1;
- la droite (AM_1) rencontre l'axe (Ox) en x_2;

... de façon plus générale :

- la droite (AM_{n-1}) rencontre l'axe (Ox) en un point d'abscisse x_n et l'on itère le procédé avec le point $M_n(x_n, y_n)$ de la courbe $(y_n = f(x_n))$.

Dans toute la suite on notera ***a* l'abscisse de *A*** $(a > 0)$.

Un certain nombre de conjectures peuvent être formulées à l'examen de la figure 15 :

— la suite (x_n) tend vers le nombre Φ,

— les termes x_n sont alternativement de part et d'autre de Φ,

— la convergence de la suite vers Φ semble relativement rapide.

Procédons alors à l'étude de la suite (x_n).

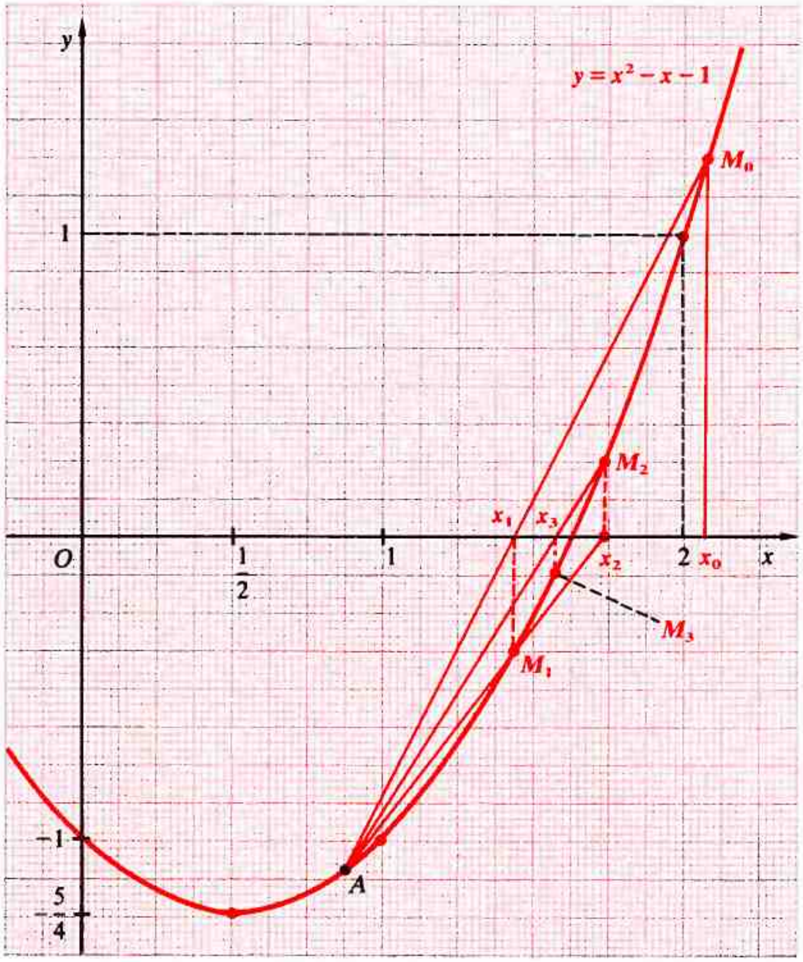


Figure 15

Question 1 : Écrire l'équation de la droite (AM_{n-1}) avec $A(a, f(a))$, $M_{n-1}(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$. En déduire la relation :

$$x_n = \frac{ax_{n-1} + 1}{x_{n-1} + a - 1}.$$

- Ainsi la suite (x_n) se présente sous la forme : $x_n = g(x_{n-1})$ où g est une fonction homographique : $x \longmapsto \dfrac{ax + 1}{x + (a - 1)}$.

Une autre interprétation de la suite (x_n) est donc possible à l'aide de la courbe représentative de la fonction g.

Remarquons que quel que soit a, l'équation $g(x) = x$ admet une seule racine positive : le nombre Φ[1].

Ainsi $g(\Phi) = \Phi$.

[1] Ce résultat confirme une tendance qui semble se dégager de l'étude de quelques exemples : « soit g une fonction usuelle, si une suite définie par $u_n = g(u_{n-1})$ converge, sa limite est racine de l'équation $g(x) = x$ ».

c. *Etude de la suite (exemple 1 : a = 1)*

La suite (x_n) est alors définie par la donnée de $x_0>0$ et la relation de récurrence :

$$x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n} \quad \text{pour} \quad n\geq 0.$$

On initialise la suite avec $x_0=1$ (figure 16).

Question 2 : Vérifier que pour tout n, x_n est un nombre rationnel supérieur à 1 et que :

$$|x_n-\Phi|\leq\frac{|x_{n-1}-\Phi|}{\Phi}.$$

En appliquant alors le procédé de « multiplication en cascade » (voir chapitre 5), il vient :

$$|x_n-\Phi|\leq\frac{|x_0-\Phi|}{\Phi^n}.$$

• L'inégalité (facile à vérifier) $\frac{3}{2}<\Phi$ conduit à :

$$|x_n-\Phi|\leq\frac{|x_0-\Phi|}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n|x_0-\Phi|.$$

• Comme $|x_0-\Phi|<1$, on obtient finalement la relation :

$$|x_n-\Phi|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{pour} \quad n\geq 0.$$

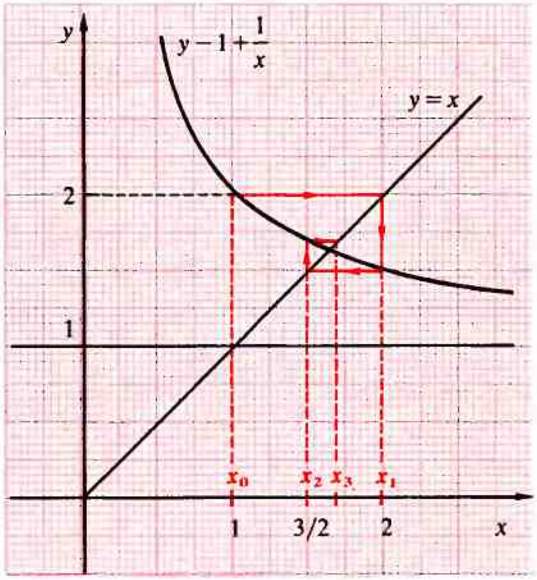


Figure 16

Ainsi la **suite (x_n) converge vers Φ,** et l'on peut tester la qualité de l'approximation ainsi fournie.

Question 3 : Vérifier à partir de la relation $x_n-\Phi=\frac{\Phi-x_{n-1}}{\Phi x_{n-1}}$ un certain nombre de conjectures émises page précédente :

1° Les termes de la suite (x_n) sont de part et d'autre de Φ.

2° La suite $(|x_n-\Phi|)$ est décroissante.

Complétons l'étude de la suite (x_n) par l'**aspect numérique :**

Question 4 : En utilisant la calculatrice, déterminer à partir de quel rang on a $|x_n-\Phi|\leq 10^{-1}$. Quel renseignement obtient-on sur la même question en utilisant l'inégalité :

$$|x_n-\Phi|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n\ ?$$

(Essayer d'expliquer ce décalage.)

Remarque

Si l'on pose $x_n=\frac{p_n}{q_n}$ avec $p_0=q_0=1$, la relation $x_n=1+\frac{1}{x_{n-1}}$ permet d'écrire :

$$\begin{cases}p_n=p_{n-1}+q_{n-1}\\ q_n=p_{n-1}\end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases}p_n=p_{n-1}+p_{n-2}\ ;\ p_0=1\ ,\ p_1=2\\ q_n=p_{n-1}.\end{cases}$$

La suite (p_n) est donc la suite de Fibonacci, présentée page 192. D'où le résultat :

Soit (u_n) la suite de Fibonacci, la suite des rapports $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers le nombre d'or!

d. Exemple 2 : $a=\frac{3}{2}$ (toujours $x_0=1$)

On a cette fois : $g(x)=\frac{3x+2}{2x+1}$

et donc : $\begin{cases} x_0=1 \\ x_n=\dfrac{3x_{n-1}+2}{2x_{n-1}+1}. \end{cases}$

On procède de façon analogue à ce qui vient d'être fait.

- **Relation entre $x_n-\Phi$ et $x_{n-1}-\Phi$.**

En utilisant l'égalité :
$x_n-\Phi=g(x_{n-1})-g(\Phi)$, on trouve :

$$x_n-\Phi=\frac{\Phi-x_{n-1}}{(2x_{n-1}+1)(2\Phi+1)}.$$

- **Majoration de $|x_n-\Phi|$ à l'aide de $|x_{n-1}-\Phi|$.**

On essaie de travailler le plus finement possible (en s'aidant de la représentation graphique).
Par exemple, on voit que pour $x\geqslant 0$, $g(x)\geqslant\frac{3}{2}$ et donc $2x+1\geqslant 4$ pour $x\geqslant 0$.

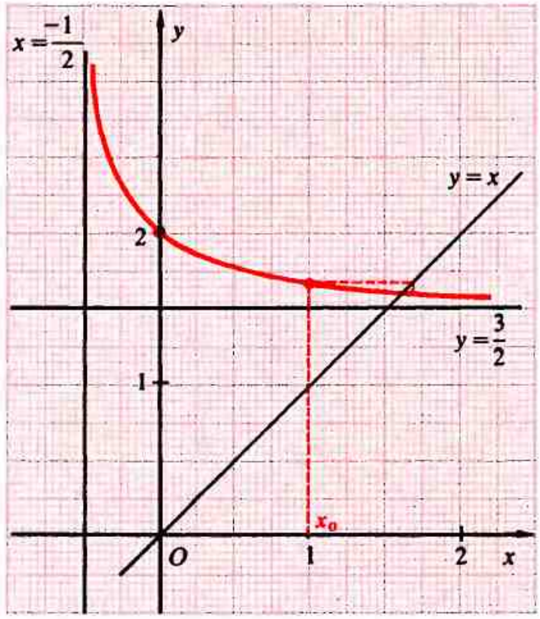


Figure 17

Ainsi : $|x_n-\Phi|\leqslant\frac{|\Phi-x_{n-1}|}{4(2\Phi+1)}$;

avec $\frac{3}{2}\leqslant\Phi$, on obtient : $|x_n-\Phi|\leqslant\frac{1}{16}\,|x_{n-1}-\Phi|.$

- **Majoration de $|x_n-\Phi|$ en fonction de n et de $|x_0-\Phi|$.**

C'est toujours l'idée d'« opérations en cascade » qui est dominante.

Ici, tous calculs faits $|x_n-\Phi|\leqslant\frac{1}{(16)^n}|x_0-\Phi|$, soit (avec la même estimation que tout à l'heure à savoir $|x_0-\Phi|\leqslant 1$) : $|x_n-\Phi|\leqslant\frac{1}{16^n}.$

- **Conclusions sur le comportement de (x_n).**

— Convergence : la suite (x_n) converge vers le nombre Φ.
— Rapidité de la convergence : cette fois, par exemple, pour $n=10$, on a :

$$|x_{10}-\Phi|\leqslant\frac{1}{16^{10}}=\frac{1}{(2^4)^{10}}=\frac{1}{(2^{10})^4}\approx 10^{-12} ,$$

puisque $2^{10}\approx 10^3$.
Le procédé est donc très nettement plus performant que le précédent.

Question 5 : Contrôler tous les calculs et raisonnements qui viennent d'être effectués.

e. Amélioration du procédé

Une idée qui se dégage de l'étude des suites :

$$(1)\quad\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_n=\dfrac{ax_{n-1}+1}{x_{n-1}+a-1}. \end{cases}$$

est la suivante :
« Plus le nombre a est proche de la racine de l'équation, plus le procédé est performant. »
La démarche va consister alors à fonctionner avec des valeurs de a les plus proches possible

de Φ; un moyen d'obtenir de telles valeurs est de considérer les premiers termes de la suite : x_0, x_1, x_2... (puisque la distance des termes x_n à Φ diminue). On optimise alors le phénomène en substituant à a dans (1) le meilleur terme obtenu à savoir... x_{n-1}.
On est donc conduit à étudier la suite :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_n = \dfrac{x_{n-1}^2+1}{2x_{n-1}-1}. \end{cases}$$

Remarque
Ce qui précède est relativement intuitif et pragmatique. Son fondement trouvera une justification plus pertinente lors de la « méthode des tangentes » que nous illustrerons dans le chapitre 9.

4. Commentaire général

Il est essentiel de dégager de cette étude les trois étapes suivantes :

- construction d'un algorithme d'approximation (procédé graphique dans cet exemple);
- étude de la suite ainsi obtenue (contrôle de la convergence vers le nombre objet de l'approximation et d'autres propriétés (éventuellement) : monotonie ou alternance des termes autour de ce nombre, etc.);
- obtention de la précision visée, mais aussi amélioration de la performance.

VII. Compléments

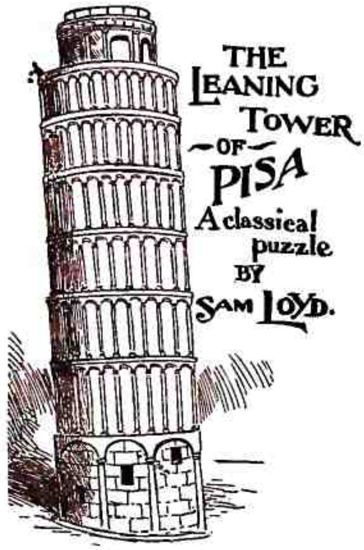
De nombreuses situations font appel au **comportement à l'infini des sommes partielles d'une suite géométrique.** Les deux exemples (classiques) que nous proposons, l'un d'origine cinématique, l'autre d'origine géométrique permettent de se rendre compte des types de problèmes auxquels on se trouve alors confronté. De plus, certaines d'entre elles montrent combien il est facile, à propos de la notion de limite, de tomber dans quelques chausse-trappes qui semblent inévitables, tel, par exemple les paradoxes de Zénon.

1. Les rebonds de la balle

« La balle riait. Si vous n'avez jamais entendu rire une balle de caoutchouc, vous ne pouvez pas comprendre. C'est une sorte de petit rire de plus en plus rapide, rapide, rapide... »

E. NESBIT. *Nine Unlikely Tales.*

La tour penchée de Pise.
Quelle est la distance parcourue par la balle?
Si une balle élastique tombe de la tour penchée de Pise, haute de 63 mètres, et qu'à chaque rebond, la balle remonte exactement d'un dixième de sa hauteur de chute, quelle sera la distance totale parcourue par la balle, avant de s'arrêter au sol?



Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd. Dunod Éditeur.

Désignons par h_n la hauteur en mètres à laquelle remonte la balle après le n-ième rebond. D'après l'énoncé :

$$h_1 = \frac{63}{10} \; ; \; h_2 = \frac{h_1}{10} \; ; \; h_3 = \frac{h_2}{10} \; , \ldots , \; h_n = \frac{h_{n-1}}{10}.$$

Ainsi h_n est le terme général d'une suite géométrique et donc $h_n = \dfrac{63}{10^n}$.

Soit d_n la distance parcourue par la balle depuis son lâcher initial du haut de la tour jusqu'au n-ième rebond. On a alors :

$$d_1 = 63 \; ; \; d_2 = 63 + 2h_1 \; ; \; d_3 = 63 + 2h_1 + 2h_2;$$

de façon générale :

$$\boldsymbol{d_n = 63 + 2h_1 + 2h_2 + \ldots + 2h_{n-1}}.$$

• ***Calcul de d_n***

En utilisant l'expression de $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, il vient :

$$d_n = 63 + 2\left(\frac{63}{10} + \frac{63}{10^2} + \ldots + \frac{63}{10^{n-1}}\right),$$

soit tous calculs faits :

$$\boldsymbol{d_n = 77 - 14 \times \frac{1}{10^{n-1}}}$$

(on contrôlera ce résultat).

• ***Interprétation***

De façon évidente, $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = 77$.

Alors : **la distance parcourue par la balle est 77 mètres.**

En effet :

1° Tout d'abord, la balle est supposée « idéale », c'est-à-dire qu'elle évolue scrupuleusement suivant la loi : « à chaque rebond, la balle remonte exactement d'un dixième de la hauteur atteinte au rebond précédent ».

2° Dans ces conditions, la distance totale d parcourue par la balle apparaît comme la « somme sans fin » :

$$d = 63 + 2 \times \frac{63}{10} + 2 \times \frac{63}{10^2} + 2 \times \frac{63}{10^3} + 2 \times \frac{63}{10^4} + \ldots$$

(les points de suspension indiquant que l'on continue indéfiniment). Quelle signification accorder à une telle écriture?

De même que la « somme sans fin » $\dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{10^2} + \dfrac{9}{10^3} + \ldots$ que nous notons 0,999 ... est en fait définie mathématiquement (cf. page 248) par la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de :

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \ldots + \frac{9}{10^n} = \underbrace{0{,}999\ldots9}_{n \text{ décimales égales à } 9}$$

ici, le nombre d est défini, comme la limite de : $63 + 2 \times \dfrac{63}{10} + \ldots + 2 \times \dfrac{63}{10^n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Et donc, d'après les calculs précédents :

$$d = \lim_{n \to +\infty} d_n = 77.$$

Remarque

La question (légitime?) « comment une balle qui rebondit une infinité de fois peut-elle s'arrêter? » renvoie tout de suite aux paradoxes de Zénon... (voir § 2).

2. Le cas Zénon

Zénon d'Élée, philosophe grec du Ve siècle avant J.-C. prétendait démontrer l'impossibilité du mouvement moyennant quelques paradoxes restés célèbres.
Examinons le paradoxe de la flèche (pour Achille et la Tortue, voir problème **56**).

• **L'argument de Zénon**

« Une flèche lancée d'un point *A* ne peut pas atteindre la cible en *B*. En effet, il lui faudra auparavant parcourir la moitié de la distance *AB*, puis la moitié de la distance restante ce qui l'amènera aux $\frac{3}{4}$ du trajet. Mais avant d'effectuer le dernier quart, la flèche doit parcourir la moitié de ce dernier quart, etc. Et ainsi de suite : une infinité de moitiés successives à parcourir. »

• **Que répondre à un tel argument?**

1° « Les paradoxes de Zénon soulèvent des problèmes en ce qui concerne l'espace, le temps, le déplacement, problèmes trop profonds pour qu'on y réponde légèrement comme le fit **Diogène** le cynique. Il se leva et marcha de A à B. »

Martin GARDNER in *Scientific American*.

2° Il est facile de décrire une « expérience » qui semblerait donner raison à Zénon : « un objet est déplacé de A vers B de la manière suivante : lorsque l'objet a parcouru la moitié de la distance entre A et B, il est immobilisé une seconde, avant d'être déplacé de la moitié du chemin restant, où il est de nouveau immobilisé une seconde et ainsi de suite ».
Il est clair que l'objet ainsi déplacé n'arrivera jamais en B!

3° Par contre, supposons — pour fixer les idées — que $AB = 10$ m et que la vitesse de la flèche soit de 10 m/s. Il est clair que la **flèche atteint le point *B* en 1 seconde.**

Le tableau ci-contre donne les liaisons entre les distances parcourues par la flèche et les temps de parcours correspondants (en suivant les diverses étapes du raisonnement de Zénon).
On a déjà vu que :

$$\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^{n+1}}$$

(chapitre 5 par exemple) et donc :

$$d_n = 10\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

et : $$t_n = 1-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Etapes de l'argument de Zénon	Distance parcourue par la flèche (en m)	Temps mis par la flèche pour parcourir la distance (en s)
1	$d_1=\frac{10}{2}$	$t_1=\frac{1}{2}$
2	$d_2=\frac{10}{2}+\frac{10}{2^2}$	$t_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$
n	$d_n=\frac{10}{2}+\frac{10}{2^2}+\ldots+\frac{10}{2^n}$	$t_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$

Alors il est vrai que, pour tout entier n : $d_n < 10$ et que $t_n < 1$. Cela prouve tout simplement que lorsque l'on **repère la position de la flèche,** aux instants $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ la flèche n'a pas encore atteint le point B. Mais c'est tout...
On ne peut en conclure comme le fait Zénon, que la flèche n'atteindra jamais le point B : il suffit de repérer sa position en un autre instant t que ceux $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ énoncés implicitement par Zénon,

$t = 1$ **par exemple...**

EXERCICES

Vrai-Faux

1. La suite définie par :

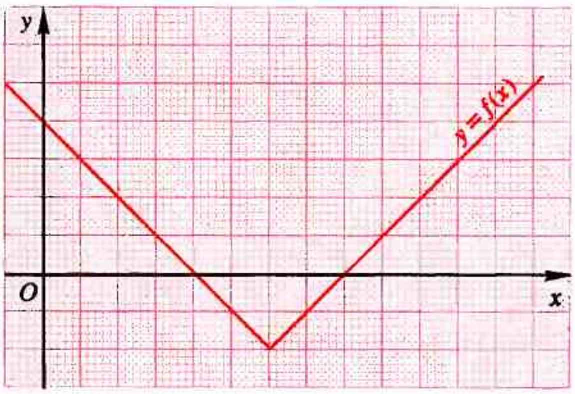
$$u_n = \begin{cases} n & \text{pour} \quad n \leqslant 100\,000 \\ \dfrac{1}{n} & \text{pour} \quad n > 100\,000 \end{cases}$$

converge vers zéro.

2. Toute suite croissante diverge vers $+\infty$.

3. Si la suite (u_n) converge vers 0, la suite de terme général $u_n + k$ où k est une constante converge vers k.

4. La suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ (figure ci-dessous) diverge vers $+\infty$.



5. Si la suite (u_n) vérifie :

$$\text{pour tout} \quad n \geqslant 1 \ , \quad 10^{-50} < \frac{u_n}{n} < 10^{-30} \ ,$$

alors la suite (u_n) converge vers 0.

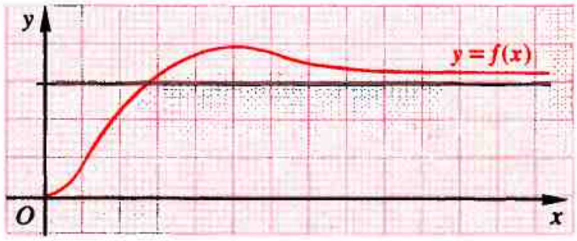
6. Si la suite (u_n) vérifie :

$$\text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} \ , \quad 10^{10} < n^2 u_n < 10^{11}$$

alors la suite (u_n) converge vers 0.

7. Si la suite (u_n) vérifie $u_n \leqslant \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang, elle converge vers 0.

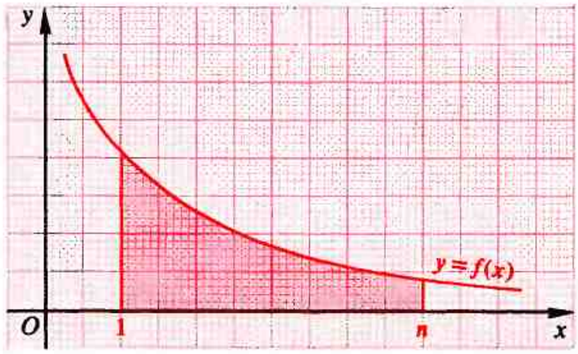
8. La suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ (figure ci-dessous) ne converge pas vers 0.



9. La suite de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$ converge vers 0.

10. Si (u_n) domine (n^2), la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est de limite nulle.

11. S_n désignant l'aire du domaine hachuré (figure ci-dessous), la suite (S_n) converge vers 0.



12. La suite $\left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \ldots, 1, \frac{1}{n}, \ldots\right)$ converge vers 0 et 1.

Applications

Dans les exercices **1** *à* **20**, *on demande d'étudier le comportement à l'infini de la suite* (u_n).

1. *a*) $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. *b*) $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.

2. a) $u_n=(1{,}01)^n$. b) $u_n=n(n+3)$.

3. a) $u_n=\dfrac{1}{25\sqrt{n}}$. b) $u_n=(0{,}997)^n$.

4. a) $u_n=\dfrac{1}{2\sqrt{n}+3}$. b) $u_n=1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5. a) $u_n=\dfrac{(-1)^n}{3n^2}$. b) $u_n=7\times 5^{-n}$.

6. a) $u_n=\dfrac{n\sin n}{n^2+1}$. b) $u_n=\dfrac{-10}{\sqrt{n}}$.

7. a) $u_n=\dfrac{2n}{n^2+1}$. b) $u_n=2^{n+3}\times 7^{-n}$.

8. a) $u_n=\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{n}+\sqrt{3}}$. b) $u_n=n+3\sqrt{n}$.

9. a) $u_n=6+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. b) $u_n=\dfrac{\cos\dfrac{2n\pi}{5}}{n^6}$.

10. a) $u_n=\dfrac{5}{n^3+3}$. b) $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}$.

11. a) $u_n=\dfrac{n^2+2}{n}$. b) $u_n=\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{3}}{\sqrt{n}}$.

12. a) $u_n=-5-\dfrac{1}{n^3}$. b) $u_n=n^3+5$.

13. a) $u_n=-10^{-20}n^2$. b) $u_n=(-7)^{-n+1}$.

14. a) $u_n=\dfrac{(-1)^{3n+1}}{5n^5}$. b) $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n}}$.

15. a) $u_n=\dfrac{n+3}{\sqrt{n}}$. b) $u_n=\dfrac{1}{(1{,}1)^n+0{,}1}$.

16. a) $u_n=-3n^2-2$. b) $u_n=\dfrac{-2}{3n^2+5}$.

17. a) $u_n=-8-(\sqrt{2})^n$. b) $u_n=\dfrac{5}{4\sqrt{n}+3}$.

18. a) $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+4}}$. b) $u_n=\dfrac{-3}{2^n+4}$.

19. a) $u_n=\sqrt{2n+3}$. b) $u_n=5^{n-1}+3^{n-2}$.

20. a) $u_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. b) $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2-5}}{\sqrt{n^3+2n^2+3}}$.

Exercices

• Comportement à l'infini

21. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général :

$$u_n=n^2-5n.$$

Montrer que, pour tout $n\geqslant 6$: $u_n\geqslant n$.
En déduire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

22. En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que la suite de terme général $u_n=n^2-kn$ $(k\in\mathbb{R})$ diverge vers $+\infty$.
(On pourra envisager deux cas suivant le signe du réel k.)

23. Montrer que la suite $(n-\sqrt{n})$ domine la suite $(\sqrt{n})$. En déduire qu'elle diverge vers $+\infty$.
(On pourra écrire $n-\sqrt{n}=\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)$.)

24. *1°* Vérifier que $3^n-2^n\geqslant\left(\dfrac{3}{2}\right)^n(2^n-1)$.

2° Montrer que la suite $(3^n-2^n)_{n\geqslant 0}$ domine la suite $\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\right)_{n\geqslant 0}$.

3° En déduire que $(3^n-2^n)_{n\geqslant 0}$ diverge vers $+\infty$.

25. On considère la suite de terme général :

$$u_n=\frac{3n^3+2n^2+3}{n+4}.$$

1° Vérifier que, pour $n\geqslant 4$, $n+4\leqslant 2n$.

2° Montrer que (u_n) domine la suite (n^2) et que (u_n) diverge vers $+\infty$.

26. Montrer que la suite (u_n) de terme général :

$$u_n=\frac{5n^3+2n-1}{2n^2-n}$$

est bien définie et qu'elle domine la suite (n).
En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

27. On pose $u_n=\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}$.

1° Montrer que u_n peut s'écrire sous la forme :

$$u_n=\frac{2}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+1}}.$$

2° Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

Dans les exercices **28** *à* **31**, *on s'inspirera de l'exercice précédent pour montrer que la suite* (u_n) *converge vers* 0.

28. $u_n=\sqrt{n^2-4}-n$.

29. $u_n = \sqrt{2n^2+n+1} - \sqrt{2n^2+n+3}$.

30. $u_n = \sqrt{4n^2+5} - 2n$.

31. $u_n = \sqrt{n^4+4n^2} - \sqrt{n^4+6n^2}$.

Dans les exercices **32** *à* **37**, *étudier le comportement à l'infini de* (u_n).

32. *a*) $u_n = \dfrac{1}{3^{2n+1}-9^n}$.   *b*) $u_n = \dfrac{3n+8}{5n-1}$.

33. *a*) $u_n = \dfrac{-2n^2+1}{n^2}$.   *b*) $u_n = 3^{2n} \times 2^{-3n}$.

34. *a*) $u_n = \dfrac{2n^2+5n}{3n-1}$.   *b*) $u_n = \dfrac{2\sqrt{n}-1}{n+\sqrt{n}}$.

35. $u_n = \dfrac{n+5}{n\sqrt{n}}$ (on cherchera une majoration de la forme $n+5 \leqslant kn$, $k>0$).

36. $u_n = \dfrac{5n-1}{3n^2-n}$ (on cherchera une minoration de la forme $3n^2-n > kn^2$, $k>0$).

37. $u_n = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{n}}{n+(-1)^n}$.

38. On se propose de montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}}$ n'est dominée par aucune suite de l'échelle de référence en 0.

1° Soit k un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un nombre fini d'entiers n tels que :

$$\frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{k}{\sqrt{n}}.$$

2° Conclure en utilisant le « rangement » des suites de l'échelle de convergence en 0 (cf. page 251).

39. Étudier la limite de la suite (u_n) définie par : $u_1 = 0{,}1$, $u_2 = 0{,}11$, $u_3 = 0{,}111$,

$$u_n = \underbrace{0{,}11\ldots1}_{\substack{n \text{ décimales} \\ \text{égales à } 1.}}$$

40. Soit x un réel positif. On pose, pour $n \geqslant 0$, $u_n = x^{2n}$.
Étudier le comportement à l'infini de la suite (u_n) et de la suite (S_n), avec :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \ .$$

41. Soit (u_n) et (v_n) les suites de terme général :

$$u_n = \frac{n^2}{(1{,}2)^n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{(1{,}1)^n}.$$

1° On se propose de montrer que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. On pose $\omega_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

a) Montrer que (ω_n) est décroissante à partir d'un certain rang que l'on précisera.

b) Déterminer à la calculatrice un rang p tel que $\omega_p \leqslant 1$. (On ne craindra pas de tester des nombres suffisamment grands.)

c) Conclure.

2° Préciser le comportement à l'infini de la suite (u_n).

42. Où est l'erreur?

On pose $1 + \dfrac{4}{3} + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{4}{3}\right)^n + \ldots = \alpha$.

Alors $\dfrac{4}{3}\alpha = \dfrac{4}{3} + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n+1} + \ldots = \alpha - 1$,
d'où $\alpha = -3$.

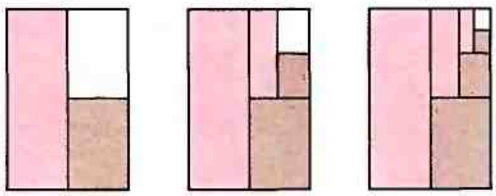
Or manifestement α *est plus grand que* 1...
On examinera si les écritures ci-dessus sont légitimes...

• Quelques situations

Les exercices qui suivent font intervenir le comportement à l'infini des suites dans des situations d'origines diverses (géométrie, graphisme, calculatrice, équation, paradoxe, numérique, etc.).

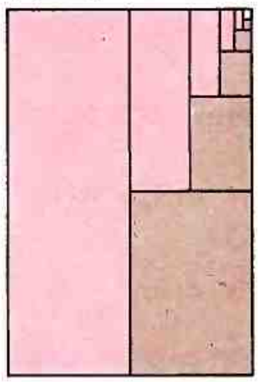
43. On considère le processus de coloriage suivant :

Étape 1   Étape 2   Étape 3



On note r_n l'aire du domaine colorié en rouge à la n-ième étape et g_n l'aire du domaine colorié en gris à la n-ième étape.
Montrer que la suite $\left(\dfrac{r_n}{g_n}\right)$ est convergente de limite $\dfrac{2}{3}$, quelles que soient les dimensions du rectangle.

Étape 5
(après grossissement)



44. *1°* Entrer un nombre positif dans la calculatrice, puis frapper plusieurs fois sur la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$.

Peut-on faire une conjecture sur la suite des nombres ainsi affichés? (Effectuer plusieurs manipulations en changeant le nombre initial.)

2° On désigne par a le nombre positif entré dans la calculatrice. Montrer que la suite des nombres affichés est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}. \end{cases}$$

3° On suppose $a > 1$[1]. Donner une représentation graphique de la suite (u_n) et montrer que $u_n > 1$ pour tout entier n. Étudier la monotonie de (u_n).

Établir que $0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

Utiliser le procédé de multiplications en cascade pour démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

45. Représenter graphiquement la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \ , \ 0 < a < 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}. \end{cases}$$

1° Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que

$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{|u_n - 1|}{1+a} \ .$$

2° En déduire l'inégalité : $|u_n - 1| < \dfrac{1}{(1+a)^n}(1-a)$.

3° Conclure sur le comportement à l'infini de (u_n).

46. Soit la suite (u_n) à termes positifs définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 1$ et pour $n \geq 2$ par :

$$n^2 u_n^2 - (n-1)^2 u_{n-1}^2 = n.$$

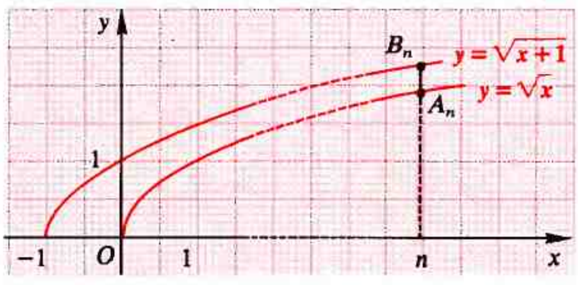
1° On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = n^2 u_n^2.$$

Déterminer v_n en fonction de n.

2° En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

47. Soit la suite (u_n) où u_n désigne la longueur du segment $[A_n, B_n]$ (voir figure ci-dessous).



[1] Pour $0 < a < 1$ voir exercice 45.

1° Peut-on faire une conjecture sur le comportement à l'infini de la suite u_n?

2° Expliciter u_n en fonction de n.

Montrer que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. En déduire que (u_n) est dominée par la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ et conclure.

*Les exercices **48** et **49** proposent l'étude de nombres rationnels à partir de leur développement décimal (on sait qu'un tel développement est périodique à partir d'un certain rang).*

48. On considère le développement décimal $2{,}135\,\underline{135}\ldots$ d'un nombre rationnel r.

1° Vérifier que r peut être envisagé comme étant la limite de la suite (r_n) définie par :

$$r_n = 2 + \frac{135}{10^3} + \frac{135}{10^6} + \ldots + \frac{135}{10^{3n}} \ .$$

2° Déterminer la limite de la suite (r_n). En déduire une écriture fractionnaire du rationnel r.

49. Le rationnel r a pour développement :

$$1{,}592\,\underline{592}\ldots$$

Pour obtenir une écriture fractionnaire de r, on procède de la façon suivante :

- $1\,000\, r = 1\,592{,}592\,\underline{592}\ldots$
  $r = 1{,}592\,\underline{592}\ldots$

- On fait la « différence des développements » et on obtient :

$$999r = 1\,591 \ , \quad \text{soit} \quad r = \frac{1\,591}{999} = \frac{43}{27} \ .$$

Le but de l'exercice est de justifier cette façon de procéder.

1° On pose $r_n = 1 + \dfrac{592}{10^3} + \dfrac{592}{10^6} + \ldots + \dfrac{592}{10^{3n}}$.

Dans ce cas, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = r$ (cf. exercice **48**).

Montrer que : $10^3 r_n = 1\,591 + r_n - \dfrac{592}{10^{3n}}$.

2° En déduire que :

$$\frac{1\,591}{999} - r_n = \frac{592}{999} \times \frac{1}{10^{3n}}.$$

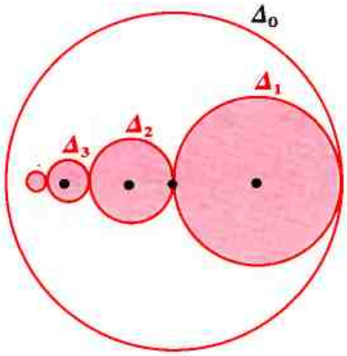
Prouver alors que $r = \dfrac{1\,591}{999}$.

3° **Applications :** Donner une écriture fractionnaire de

- $r_1 = 4{,}384\,615\,\underline{384\,615}\ldots$
- $r_2 = 1{,}314\,\underline{151\,415}\ldots$

50. On construit une suite de disques tangents $(\Delta_n)_{n\geqslant 1}$ suivant le principe de la figure ci-dessous :

- le disque Δ_0 est de rayon R,
- le disque Δ_n a pour rayon la moitié du rayon de Δ_{n-1} $(n \geqslant 1)$.



1° Montrer que tous les disques Δ_n sont intérieurs au disque Δ_0.

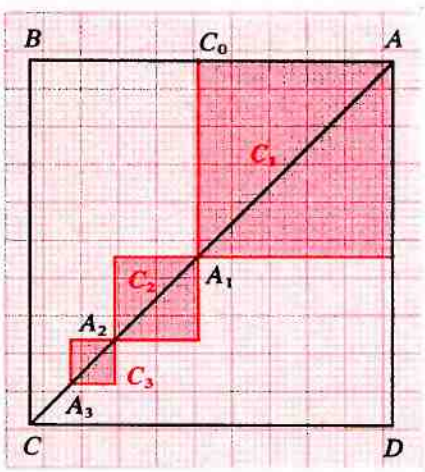
2° On désigne par $\mathcal{A}_n$ l'aire du domaine obtenu comme réunion des disques $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ ($\mathcal{A}_4$ est schématisée sur la figure).
Montrer que la suite $(\mathcal{A}_n)$ a pour limite le tiers de l'aire du disque Δ_0.

51. Le carré C_0 de côté a étant donné, on considère la suite de carrés $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, construits comme l'indique la figure ci-dessous avec comme relations de distance :

$$AA_1 = \frac{13}{24}\,AC \ ;$$

$$A_1A_2 = \frac{13}{24} \times AA_1 \dots$$

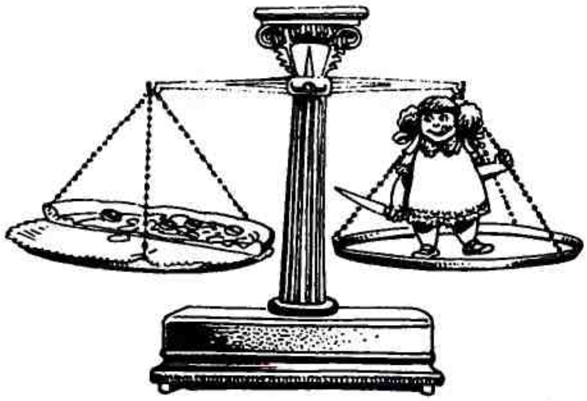
$$\dots\ A_nA_{n+1} = \frac{13}{24}\,A_{n-1}A_n \dots$$



1° Les carrés sont-ils tous intérieurs au carré C_0? Sinon, préciser quel est le premier carré non contenu dans C_0.

2° Déterminer le « plus petit » carré de sommet A (noté $AB'C'D'$ avec B' sur (AB), C' sur (AC), D' sur (AD)) qui contient tous les carrés C_n.

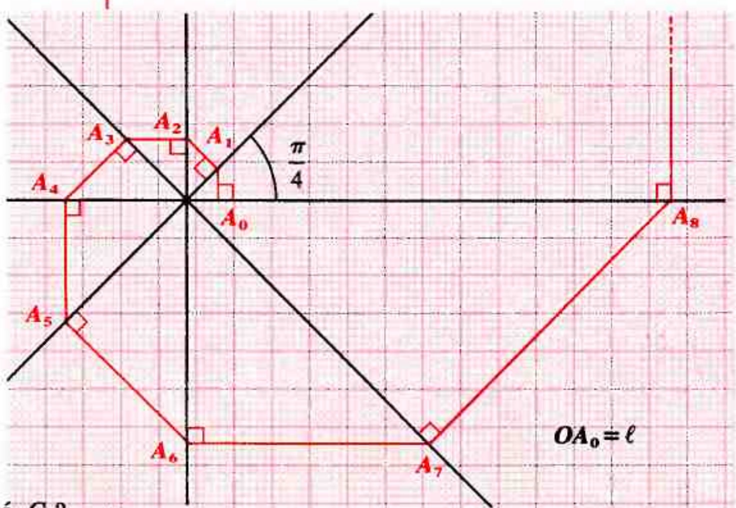
52. A la pizzeria



Monsieur et Madame Dupont visitent Rome avec leur fille Claudette. A midi, ils déjeunent tous trois dans une pizzeria où ils commandent une « pizza marinera-cappricciosa » (spécialité de la maison). Quand ladite pizza arrive, Claudette qui est très gourmande en prend la moitié. La mère prend la moitié du reste; le père, la moitié de ce qui reste alors. Puis Claudette en reprend, en pensant toujours à laisser la moitié du reste à ses parents qui, tour à tour en font autant, puis Claudette à nouveau, etc. jusqu'à la dernière miette.
La pizza servie pesait 700 grammes, combien chacun des trois convives en a-t-il mangé en fin de compte?

Note : Cette situation est bien évidemment imaginaire (cf. les problèmes de « temps » identiques à ceux des paradoxes de Zénon).

53. La figure ci-après, indique le principe de construction de la suite de points (A_n).



1° Exprimer la longueur A_nA_{n+1} en fonction de la longueur $A_{n-1}A_n$.

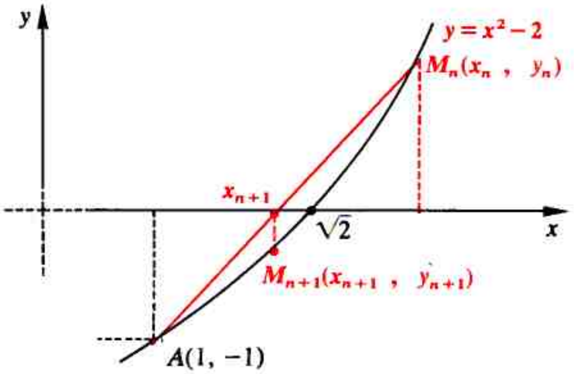
2° On considère la suite (L_n), où L_n désigne la longueur de la ligne polygonale $A_0A_1 \ldots A_n$.
Donner l'expression de L_n en fonction de n et l.
Étudier le comportement à l'infini de la suite (L_n)?

3° Quelles sont les abscisses des points A_{8n}?

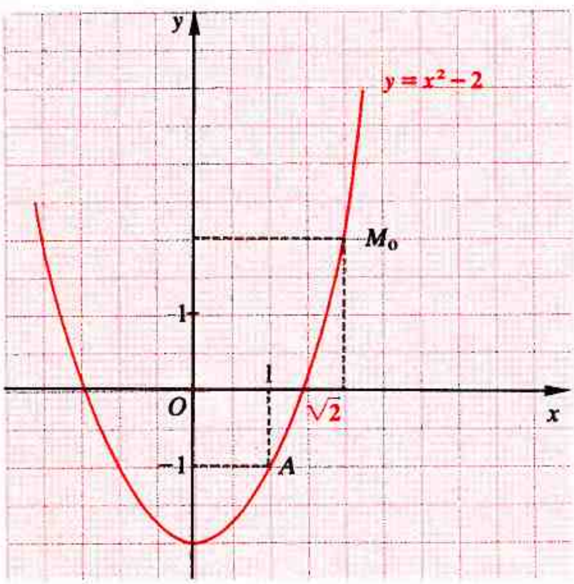
54. Pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$, on utilise l'**algorithme** défini ci-dessous (analogue à celui utilisé pour l'approximation du nombre d'or) à partir de la courbe représentative de la fonction :

$$x \longmapsto x^2 - 2.$$

La suite de points (M_n) est initialisée au point M_0 de coordonnées $(2, 2)$.



1° Faire un maximum de conjectures sur la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ (position par rapport à $\sqrt{2}$, monotonie des suites (x_{2n}), (x_{2n+1}), etc.



2° Montrer que la suite (x_n) vérifie :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + 2}{x_n + 1} \end{cases}$$

puis établir les résultats suivants :

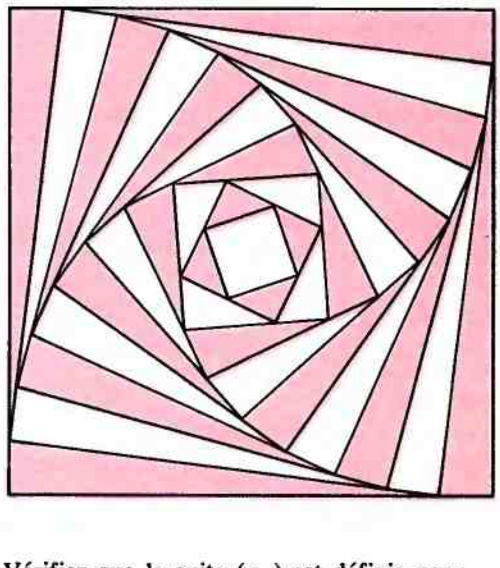
- $x_n > 1$ pour tout n ;
- $x_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-x_n)}{x_n+1}$.

3° Contrôler les conjectures émises en *1°* et montrer que :

- $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2 - x_n^2}{x_n + 1}$;
- $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} |\sqrt{2} - x_n|$;
- $|x_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^n |\sqrt{2} - x_0|$.

4° En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \sqrt{2}$.
Utilisant $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, estimer la précision obtenue par les termes x_n.

55. A partir d'un carré C_0 de côté 6 cm, on construit les carrés $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n \ldots$: les sommets du carré C_n sont construits sur les côtés du précédent C_{n-1}, à 1 cm des sommets. On désigne par a_n la longueur du côté du carré C_n.



1° Vérifier que la suite (a_n) est définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 6 \\ a_n = \sqrt{1 + (a_{n-1} - 1)^2}. \end{cases}$$

2° Montrer que la suite (a_n) est décroissante et minorée strictement par 1.

3° On se propose de tester la conjecture suggérée par la figure ci-dessus, à savoir que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$.

a) Établir la relation $a_n - 1 = \dfrac{(a_{n-1}-1)^2}{a_n + 1}$.

b) En déduire que $0 \leqslant a_n - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}(a_{n-1}-1)^2$.

c) Déterminer (à la calculatrice) un rang N à partir duquel $a_n \leqslant 2$. En déduire que, pour $n \geqslant N+1$, $0 \leqslant a_n - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}(a_{n-1}-1)$, puis que $0 \leqslant a_{n-1} \leqslant \dfrac{5}{2^n}$.

d) Conclure.

56. Achille et la tortue (Encore Zénon)
Zénon imagina le paradoxe suivant mettant en scène Achille et une tortue :

« Achille veut rattraper une tortue située à 100 m devant lui en courant 10 fois plus vite que la tortue.

Lorsqu'Achille a rejoint la position T_0 où se trouvait la tortue, cette dernière aura avancé de 10 m (position T_1).

De même lorsqu'Achille rejoint la position T_1 qu'occupait la tortue, celle-ci a atteint une position T_2, etc.
De ce fait, Achille sera toujours en retard sur la tortue et donc ne rejoindra jamais cette dernière... »
En s'inspirant du procédé développé à propos du « paradoxe de la flèche » (cf. page 261), expliquer ce paradoxe.
(On déterminera en particulier la distance parcourue par Achille lorsqu'il rejoint la tortue.)

57. *1°* Soit x un réel tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$.
On pose $\alpha_k = 1 + 2^k x - (1+x)^k$ (k entier).
Établir que $\alpha_{k+1} - \alpha_k = x\left(2^k - (1+x)^k\right)$.
Montrer que la suite $k \longmapsto \alpha_k$ est croissante positive. En déduire que $\mathbf{(1+x)^k \leqslant 1 + 2^k x}$ (1).

2° Soit k un entier fixé et (ω_n) la suite de terme général $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^k$.

En utilisant la relation (1), montrer que quel que soit le réel $\lambda > 1$, il existe un rang à partir duquel $\omega_n < \lambda$.

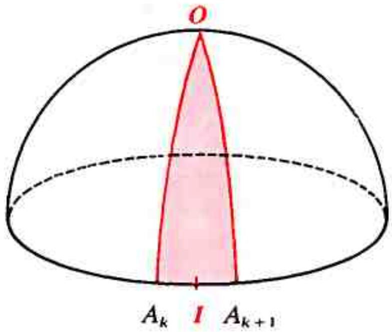
3° Soit a, b deux réels tels que $1 < b < a$ et k un entier. On pose $u_n = \dfrac{a^n}{n^k} \times \dfrac{1}{b^n}$.

Montrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang $\left(\text{calculer } \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

En déduire qu'il existe un rang à partir duquel :
$$\frac{a^n}{n^k} > b^n.$$

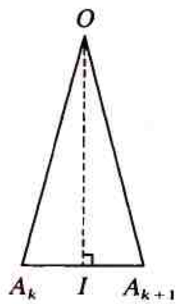
4° **Applications :** Étudier le comportement à l'infini des suites :
$$n \longmapsto \frac{3^n}{n^4}\ ;\quad n \longmapsto \frac{(1{,}2)^n}{n^{12}}\ ;\quad n \longmapsto \frac{n^5}{(1{,}01)^n}.$$

58. Où il faut se méfier de certaines approximations...
Pour évaluer l'aire de la demi-sphère de rayon R, on divise le grand cercle en n arcs de même longueur $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, ..., $\overset{\frown}{A_nA_1}$.



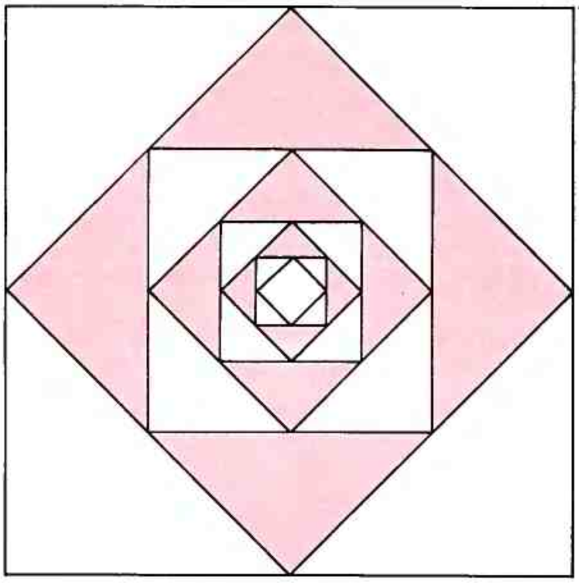
1° Déterminer la longueur de l'arc A_kA_{k+1} et de l'arc $\overset{\frown}{OI}$, où I est le milieu de l'arc A_kA_{k+1}.

2° L'aire de la demi-sphère est égale à la somme des aires de n « triangles sphériques » tels que OA_kA_{k+1}.
On assimile ce triangle sphérique à un triangle isocèle.
Montrer que l'aire de ce triangle isocèle est $\dfrac{\pi^2 R^2}{2n}$.



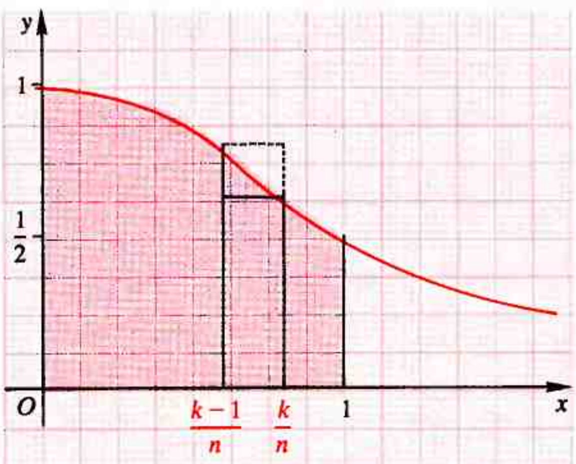
3° Quelle approximation de l'aire de la sphère obtient-on ainsi? Comparer avec la formule exacte! Où se situe « l'erreur »?

59. Un ensemble « infini » de carrés emboîtés
Que vaut chacune des aires des domaines en rouge et en blanc (voir figure, page 269, en haut)?
(On suppose le procédé poursuivi indéfiniment.)



Problèmes

60. La courbe ci-dessous est la courbe représentative de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$. On se propose d'obtenir un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine rosé $\mathcal{D}$.



On découpe $[0, 1]$ en n segments de même longueur. On détermine alors n rectangles « intérieurs » à $\mathcal{D}$ et n rectangles « extérieurs » à $\mathcal{D}$. L'aire totale des rectangles intérieurs est notée u_n, celle des rectangles extérieurs est notée v_n. Ainsi $u_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant v_n$.

1° Montrer que l'aire du k-ième rectangle intérieur est $\dfrac{n}{k^2+n^2}$. En déduire que :

$$u_n = n\left[\frac{1}{1^2+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\dots+\frac{1}{n^2+n^2}\right].$$

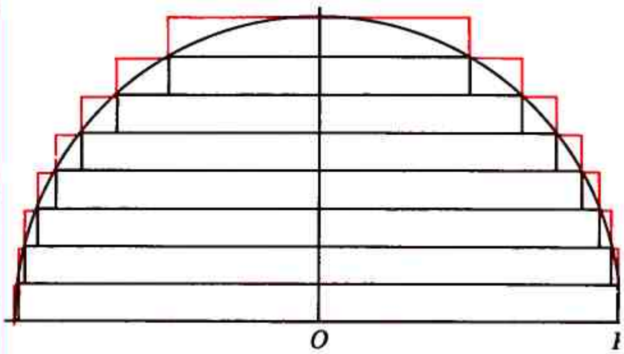
2° Montrer que $v_n = u_n + \dfrac{2n-1}{2n^2}$. Prouver que la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

3° Compléter le tableau ci-contre :

n	u_n	v_n
1		
2		
3		
4		
5		

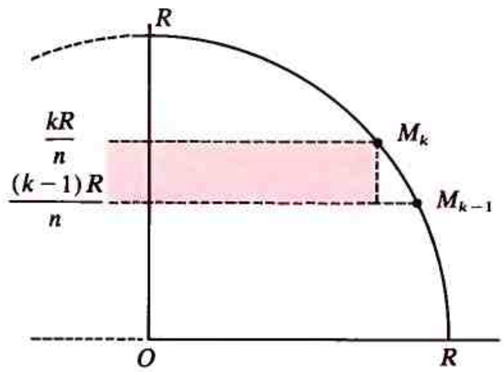
61. Volume de la sphère

L'objet de ce problème est de déterminer le volume V d'une sphère de rayon R. (On commence par calculer le volume de la demi-sphère.) Le principe est identique à celui utilisé, page 255, pour le volume du phare : on divise le segment $[O, R]$ en n segments de même longueur $\dfrac{R}{n}$.



On est alors conduit à considérer n cylindres extérieurs et $n-1$ cylindres intérieurs. On désigne par u_n le volume total des cylindres intérieurs et par v_n celui des cylindres extérieurs.

Le volume V vérifie alors : $u_n \leqslant \dfrac{V}{2} \leqslant v_n$.



1° Montrer que le volume du k-ième cylindre intérieur est $(n^2-k^2)\dfrac{\pi R^3}{n^3}$.

2° Montrer que :

$$u_n=\frac{\pi R^3}{n^3}\left[(n^2-1^2)+(n^2-2^2)+\ldots+\left(n^2-(n-1)^2\right)\right]$$

et que :

$$v_n=\frac{\pi R^3}{n^3}\left[(n^2-0^2)+(n^2-1^2)+(n^2-2^2)+\ldots+\left(n^2-(n-1)^2\right)\right].$$

3° En utilisant l'égalité :

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

montrer que :

$$u_n=\pi R^3\,\frac{4n^2-3n-1}{6n^2}\quad\text{et}\quad v_n=\pi R^3\,\frac{4n^2+3n-1}{6n^2}.$$

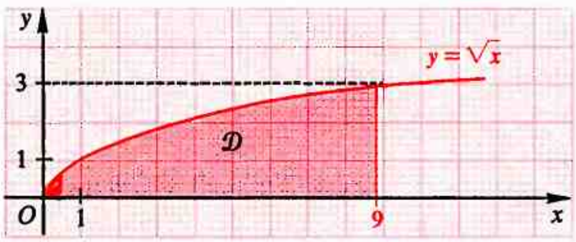
4° Montrer que les suites :

$$\left(\frac{4n^2-3n-1}{6n^2}\right)\quad\text{et}\quad\left(\frac{4n^2+3n-1}{6n^2}\right)$$

convergent vers $\frac{2}{3}$. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

5° Conclure pour la valeur de V.

62. On se propose d'évaluer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ représenté sur la figure ci-dessous.

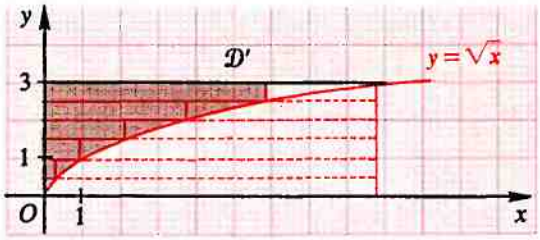


A — On adopte la méthode du découpage vertical. Montrer que l'on obtient l'encadrement suivant de l'aire $\mathcal{A}$:

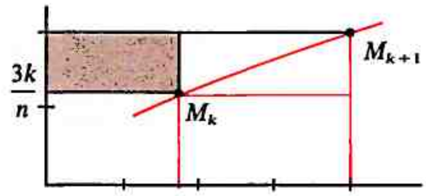
$$\frac{27}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1})<\mathcal{A}<\frac{27}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}).$$

Devant l'aspect peu agréable du résultat obtenu, on envisage alors une autre stratégie...

B — « Découpage horizontal »
On effectue un découpage du segment $[0, 3]$ en n segments de même longueur $\frac{3}{n}$ afin d'obtenir un encadrement de l'aire $\mathcal{A}'$ du domaine grisé $\mathcal{D}'$ (figure ci-après).
On note u_n la somme des aires des $n-1$ rectangles contenus dans $\mathcal{D}'$ et par v_n la somme des aires des n rectangles dont la réunion contient $\mathcal{D}'$. Ainsi $u_n \leqslant \mathcal{A}' \leqslant v_n$.



1° D'après la figure ci-dessous, déterminer l'abscisse du point M_k. En déduire que l'aire du k-ième rectangle contenu dans $\mathcal{D}'$ est $\dfrac{27k^2}{n^3}$.



2° Montrer que : $u_n=\dfrac{27}{n^3}[1^2+2^2+\ldots+(n-1^2)]$

et que : $v_n=\dfrac{27}{n^3}[1^2+2^2+\ldots+n^2]$.

3° En utilisant l'égalité :

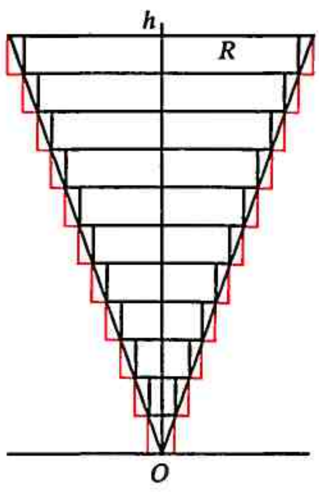
$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

montrer que :

$$u_n=\frac{18n^2-27n+9}{2n^2}\quad\text{et}\quad v_n=\frac{18n^2+27n+6}{2n^2}.$$

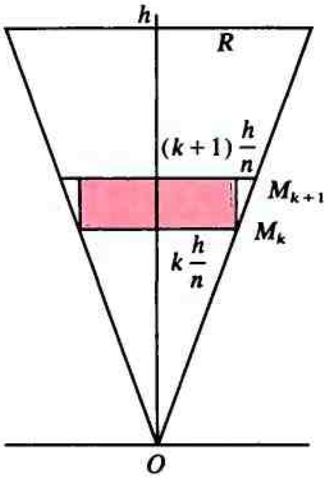
4° Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergent vers 9. En déduire la valeur de $\mathcal{A}'$ puis celle de $\mathcal{A}$.

63. Volume d'un cône de révolution



Le but de ce problème est de déterminer le volume V d'un cône de révolution de hauteur h et dont la base circulaire a pour rayon R. Pour cela, on divise le segment $[0, h]$ en n segments de même longueur $\frac{h}{n}$.

On détermine alors n cylindres extérieurs et n cylindres intérieurs. On désigne par u_n le volume total des cylindres intérieurs et par v_n le volume total des cylindres extérieurs.



Le volume V vérifie alors $u_n \leqslant V \leqslant v_n$.

1° Montrer que le volume du k-ième cylindre intérieur est : $\dfrac{\pi R^2 h k^2}{n^3}$.

2° Montrer que : $u_n = \dfrac{h\pi R^2}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right]$

et que : $v_n = \dfrac{h\pi R^2}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+n^2\right]$.

3° Montrer que : $u_n = h\pi R^2\,\dfrac{2n^2-3n+1}{6n^2}$

et que : $v_n = h\pi R^2\,\dfrac{2n^2+3n+1}{6n^2}$.

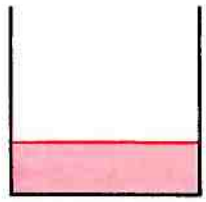
4° Montrer que les suites :

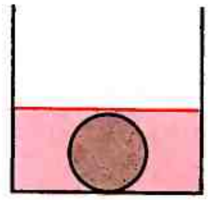
$$\left(\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}\right)$$

convergent vers $\frac{1}{3}$. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

5° Conclure pour la valeur de V.

64. Le cylindre a pour base un disque de rayon 1 dm et contient du liquide sur une hauteur de 0,5 dm.
On plonge dans ce cylindre une bille de diamètre d.





Le but du problème est de déterminer le diamètre d pour lequel le niveau du liquide est tangent à la bille.

1° Montrer que d est solution de :

$$\begin{cases} 0<d<2 \\ d^3-6d+3=0 \end{cases} \quad (I)$$

2° Représenter graphiquement dans le même repère les fonctions $x \longmapsto x^3$ et $x \longmapsto 6x-3$ sur l'intervalle $[0, 2]$.

En déduire que (I) admet une solution unique d et que ce réel d vérifie $0<d<1$.

3° Montrer que (I) est équivalent à : $\begin{cases} 0<d<2 \\ d=\dfrac{3}{6-d^2}. \end{cases}$

En déduire que d est l'abscisse du point d'intersection de la droite $y=x$ et de la courbe représentative de :

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{3}{6-x^2}.$$

4° Montrer que f est croissante et que :

pour tout réel $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

5° Représenter graphiquement la fonction f. (On prendra 10 cm pour unité et on calculera les images de 0; 0,1; 0,2; ...; 0,9; 1.)

6° Dans cette partie, on construit une suite pour obtenir des approximations de d.

a) On pose $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer sur le comportement de la suite (u_n)?

b) Vérifier que : pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

c) En tenant compte du fait que $u_{n+1}=f(u_n)$ et $d=f(d)$, montrer que, pour tout entier n :

$$|u_{n+1}-d| = |u_n-d|\,\frac{|u_n+d|\,f(u_n)f(d)}{3}.$$

d) Montrer que pour tout entier n :

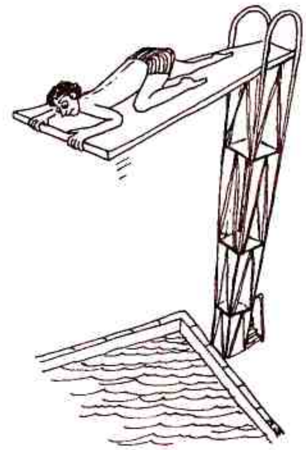
$$|u_{n+1}-d| \leqslant \frac{6}{25}\,|u_n-d|.$$

En déduire que : $|u_n-d| \leqslant \left(\dfrac{6}{25}\right)^n |u_0-d|$.

e) Montrer que la suite (u_n) converge vers d.
Avec la calculatrice, calculer les premiers termes de la suite (u_n). A partir de quel rang cette suite se stabilise-t-elle sur la calculatrice?
En utilisant la majoration obtenue au *d*), préciser le rang à partir duquel $|u_n-d|<10^{-7}$.

7

limite et



Intentions

• Ce chapitre a pour objectif essentiel **l'introduction de la notion de dérivée et des techniques de calculs** qui s'y rattachent (dérivées des fonctions usuelles — y compris les fonctions circulaires — et opérations sur les fonctions dérivables).

• Le point de départ reste la notion de **dérivation en un point** dont trois aspects — au moins — sont inséparables :

. l'aspect **géométrique**, qui conduit dans le domaine graphique à la notion de **tangente;**

. l'aspect **numérique**, qui met en jeu l'approximation d'une fonction numérique au voisinage d'un point par une fonction affine : **développement limité d'ordre 1;**

. l'aspect **cinématique** qui facilite la compréhension des aspects précédents par l'intervention de notions sensibles, relativement naturelles, liées notamment au concept de **vitesse instantanée.**
La prise en compte de ces trois points de vue est maintenue tout au long de ce chapitre aussi bien dans les activités de type préparatoire que dans les exercices d'application.

• En ce qui concerne la **notion de limite en zéro d'une fonction numérique**, il faut signaler que :

1. ce sont les problèmes de dérivation en un point qui motivent son introduction;

2. la démarche adoptée est tout à fait analogue à celle mise en place pour les **suites numériques** (l'idée de base restant la **comparaison** de fonctions);

3. les préoccupations liées à cette notion seront volontairement limitées : son étude — pour elle-même — en effet, ne constitue pas un des objectifs du programme...

dérivation

« C'est presque toujours par vanité qu'on montre ses limites. »
André GIDE

« Les quelques notions sur les limites qui figurent au programme fournissent un langage commode pour introduire la notion de dérivée. Elles ne constituent pas un objectif en elles-mêmes; *il n'y a pas lieu de s'attarder à leur étude.* »
Les commentaires du programme.

Plan du Chapitre

I. Introduction

Les activités qui suivent proposent des situations propices à l'intervention — sur un même sujet — des divers points de vue (graphique, numérique et cinématique[1]) **relatifs à la dérivation d'une fonction en un point.** L'essentiel est de poser, sous plusieurs aspects, les problèmes qui conduisent à l'introduction de cette notion, avec en arrière plan... celle de limite.
Ce **concept de limite** est, **pour l'instant,** à considérer dans le sens que lui donne le mathématicien Serge LANG[2] (in *« A First Course of Calculus »*)
« We consider functions $f(h)$ defined for all sufficiently small values of h except that $h \neq 0$.

We write $\lim_{h \to 0} f(h) = l$ to mean that $f(h)$ **approaches l as h approaches 0.** »

(**Note :** signalons — dès à présent — que dans ce genre de problèmes, il est d'usage — et commode — de désigner par h la variable réelle.)

1. Vitesse instantanée

a. Les problèmes abordés

La notion de **vitesse instantanée** d'un mobile est une notion familière : n'importe quel radar surmonté d'uniformes de gendarmerie et judicieusement positionné constitue un exemple particulièrement connu de détermination de vitesse instantanée...
Le point de vue adopté ici est « légèrement » différent : **à partir de la loi qui décrit la distance parcourue par un mobile en fonction du temps,** il s'agit :

- de **calculer sa vitesse** à un instant donné,
- d'**interpréter géométriquement** le résultat obtenu,
- d'explorer quelques conséquences **numériques.**

b. La chute libre

La Physique décrit la chute libre d'un corps[3] sans vitesse initiale par la loi[4] $S(t) = \frac{1}{2} g t^2$, **où :**

. t désigne le temps exprimé en secondes,

. g, l'accélération de la pesanteur (comme $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, la loi sera exprimée dans la suite par $S(t) = 5t^2$),

. $S(t)$, la distance (en mètres) parcourue à l'instant t depuis la position initiale.

---

(1) Cf. intentions.

(2) Serge LANG : mathématicien contemporain. Professeur à Yale University. Auteurs de nombreux ouvrages de mathématique (recherche). Renommée internationale.
Signe particulier : s'intéresse efficacement à l'Enseignement des Mathématiques aux divers niveaux élémentaires.

(3) Dans des conditions raisonnables (cf. chapitre 2, page 72).

(4) La notation S est habituelle dans cette situation.

c. Vitesse de l'instant t_0

Nous savons calculer la vitesse moyenne v d'un mobile entre deux instants t_1 et t_2 : il s'agit du rapport $\dfrac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$ (distance parcourue entre t_1 et t_2, divisée par l'intervalle de temps considéré).

Activité 1

Soit h un réel strictement positif.

1° Calculer la vitesse moyenne d'un corps lâché sans vitesse initiale entre les instants t_0 et $t_0 + h$ (rappel : $S(t) = 5t^2$).

2° Même question avec l'intervalle de temps $[t_0 - h\ ,\ t_0]$.

3° **« La vitesse instantanée à l'instant t_0 est $10\, t_0$ m/s ».** Expliquer cette affirmation.

4° **Application :** un corps est lâché sans vitesse initiale d'une altitude de 25 mètres. Quelle est en km/h sa vitesse d'impact au sol?

d. Le point de vue graphique

Considérons la courbe représentative $\mathcal{T}$ de la fonction $t \longmapsto 5t^2$ au « voisinage » d'un point de la courbe d'abscisse t_0 (en effectuant un grossissement).

On désigne par :

- M_0 le point de la courbe d'abscisse t_0,
- M_h le point de la courbe d'abscisse $t_0 + h$ (h est cette fois un réel quelconque).

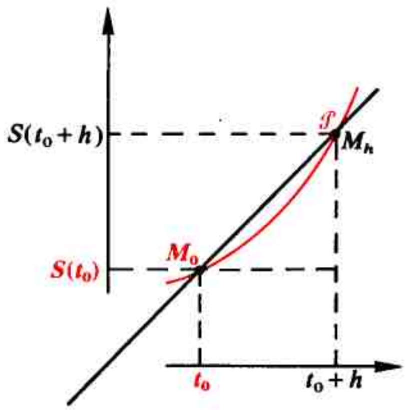


Figure 1

Activité 2

1° Calculer le coefficient directeur de la droite (M_0M_h).
Quelle relation peut-on établir avec les résultats de l'activité 1?

2° On considère la droite Δ passant par M_0 et de pente $10t_0$.

a) Faire une représentation graphique de $\mathcal{T}$ et de Δ « autour de M_0 » lorsque $t_0 = \dfrac{1}{4}$, $t_0 = 1$, $t_0 = 2$ (choisir un repère **orthogonal** adapté).

b) Contrôler par un calcul algébrique ce que suggèrent les figures précédentes; à savoir :

que $\mathcal{T} \cap \Delta = \{M_0\}$.

mais également, que, parmi les droites $\mathcal{D}$ passant par M_0 (et non parallèles à (Oy)), la droite Δ est la seule à « recouper » la courbe $\mathcal{T}$ en M_0.

Commentaires

L'interprétation graphique ci-dessus suggère que, lorsque h tend vers 0, le point M_h se rapproche de M_0 et la droite (M_0M_h) tend à se positionner sur la droite Δ.
Cette droite Δ qui joue ainsi un rôle privilégié pour le point M_0 de la courbe $\mathcal{T}$ sera naturellement désignée comme **« tangente »** à la courbe $\mathcal{T}$ en M_0.

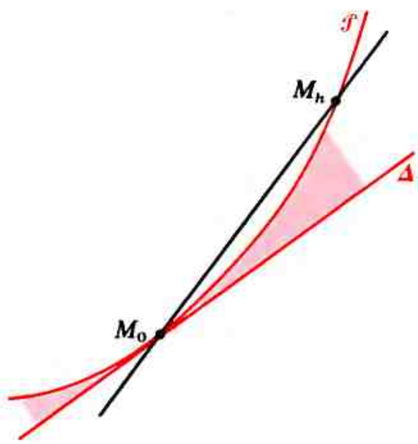


Figure 2

e. Le point de vue numérique

Activité 3

A un instant donné t_0 la vitesse du corps en chute libre est mesurée par 24 m/s. Il s'agit de calculer la distance parcourue $d(h)$ pendant l'intervalle de temps h qui suit (exprimé en secondes).

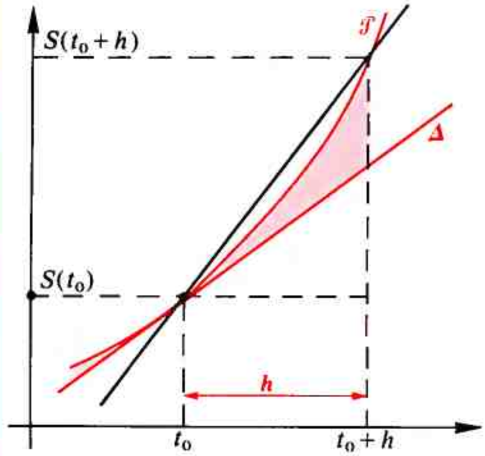
1° **On prend $h=1$**. Calculer t_0, $S(t_0)$, $S(t_0+1)$, puis la distance $d(h)$.

2° Reprendre les mêmes calculs pour $h=\frac{1}{10}$.

3° Montrer que $S(t_0+h)=S(t_0)+24h+5h^2$ et retrouver les résultats précédents.

4° Quelle erreur commet-on en estimant $d(h)$ à $24h$ lorsque $h=1$? $h=\frac{1}{10}$? $h=\frac{1}{100}$? Interpréter cette erreur sur la figure 3.
Pour quelles valeurs de h cette erreur est-elle inférieure à 10 cm?

Figure 3



Commentaires

De façon plus générale, en désignant par v la vitesse à l'instant t_0, on a : $\boldsymbol{S(t_0+h)=S(t_0)+vh+5h^2}$.
Cette relation montre que pour **h suffisamment petit** $h \longmapsto S(t_0)+vh$ est une **fonction affine** qui fournit une **approximation** convenable de la fonction $h \longmapsto S(t_0+h)$.
Cet aspect numérique est à l'origine de l'activité qui suit.

2. Approximation de $\frac{1}{1+h}$ pour h suffisament petit

Nous avons vu (chapitre 4) que pour $|h| \leqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1+h}$ pouvait être approximé par $1-h$, avec une erreur inférieure à $2h^2$.

De façon plus précise : $\boldsymbol{\frac{1}{1+h}=1-h+\frac{h^2}{1+h}}$.

Activité 4

1° Représenter graphiquement au voisinage de 0 les fonctions

$$f : x \longmapsto \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto 1-x\,.$$

2° Pour $h \neq 0$, on pose $t(h)=\frac{g(h)-g(0)}{h}$.

a) Calculer $t(h)$ et en donner une interprétation graphique.

b) Quel réel l approche $t(h)$ lorsque h approche 0?

c) Montrer que $|t(h)-l| \leqslant 2|h|$ pour

$$h \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad h \neq 0.$$

d) Comment choisir h de façon que

$|t(h)-l|<10^{-2}$? $|t(h)-l|<10^{-6}$?

Commentaires

La fonction $t : h \longmapsto \frac{g(h)-g(0)}{h}$ s'appelle **taux d'accroissement** de g en 0. De même (activités précédentes), la fonction $h \longmapsto \frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h}$ est le **taux d'accroissement** de S en t_0.

3. Remarque générale

Les exemples précédents mettent en valeur des écritures de la forme :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+ah+h\varphi(h) \ ,$$

où il apparaît que $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$. Ainsi :

$$S(t_0+h)=S(t_0)+vh+h\times 5h \quad \text{et} \quad g(h)=g(0)-h+h\times\frac{h}{1+h}.$$

L'introduction du **taux d'accroissement** $t : h \longmapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

et l'égalité $t(h)=a+\varphi(h)$ $(h\neq 0)$ ont permis — suivant les activités — diverses **interprétations.** Par exemple :

- le réel a peut apparaître comme la vitesse instantanée mais aussi comme le coefficient directeur de la « tangente »;
- la fonction $h \longmapsto f(x_0)+ah$ peut être considérée comme une fonction affine réalisant une approximation particulièrement « bonne » de la fonction $h \longmapsto f(x_0+h)$, mais aussi comme fournissant l'équation de la « tangente ».

Cependant ces interprétations restent assujetties à la notion de limite....

4. Sur la notion de limite

La recherche de la vitesse instantanée d'un mobile à un instant donné est significative à tout point de vue — historique et mathématique — des problèmes que peut poser la notion de limite. Reprenons à cet égard les données du § 1, à savoir celles concernant la chute libre d'un corps, dont la loi est décrite par $S(t)=5t^2$, et intéressons-nous à **nouveau,** au problème de détermination de la vitesse instantanée à l'instant $t_0=1$.
Notons Δt le réel désigné par h dans les activités correspondantes $(h>0)$ et par ΔS l'accroissement de la fonction S qui en résulte $\Delta S=S(1+h)-S(1)$. Le rapport $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ représente alors la vitesse moyenne entre les instants 1 et $1+\Delta t$ et est égal (cf. page 276) à $\boldsymbol{\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=10+5\Delta t}$.

Pouvons-nous **légitimement** utiliser cette formule pour calculer la vitesse instantanée?

Activité 5 : « Du débat historique à l'aspect mathématique »[1]

Puisque la réponse devrait être une quantité finie, nous aimerions nous débarrasser du terme « infinitésimal », $5\Delta t$ et obtenir la réponse, 10 m par seconde, pour la vitesse instantanée.
L'argument de Newton était de trouver d'abord, comme nous l'avons fait, $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=10+5\Delta t$ et ensuite de poser l'accroissement égal à zéro, gardant 10 comme réponse exacte.

[1] D'après « L'univers Mathématique » Philip J. Davis et Reuben Hersch traduit et adapté par L. Chambadal, Édition Gauthier-Villars.

Mais, écrit l'évêque George Berkeley[1], *il semblerait que ce raisonnement n'est ni juste ni concluant. Après tout, Δt est soit égal à zéro, soit différent de zéro. Si Δt n'est pas nul, alors $10+5\Delta t$ n'est pas la même chose que 10. Si Δt est nul, alors l'accroissement de distance ΔS est aussi zéro, et la fraction $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ n'est pas $10+5\Delta t$ mais une expression dénuée de sens,* 0/0.

La logique de Berkeley était sans réplique; néanmoins...

En choisissant Δt suffisamment petit, nous pouvons faire prendre à $\Delta S/\Delta t$ des valeurs aussi proches que l'on veut de la valeur 10 et ainsi, par définition, la vitesse à l'instant $t=1$ est exactement[2] 10.

Cette approche réussit en évitant toute tentative directe de poser Δt égal à zéro dans la fraction $\Delta S/\Delta t$. Nous évitons ainsi les pièges logiques exposés par l'évêque Berkeley. Nous devons toutefois payer un prix.

La quantité intuitivement claire et physiquement mesurable, la vitesse instantanée, devient sujette à la notion étonnamment subtile de « limite »...

II. Notion de limite

Il s'agit donc de **préciser le sens** d'une écriture telle que $\lim\limits_{h\to 0} f(h)=l$, c'est-à-dire d'obtenir une **formulation mathématique** de la phrase « $f(h)$ approche du réel l quand h approche de 0 ».

1. Les idées directives

Elles sont analogues à celles qui ont guidé notre démarche dans l'étude du comportement à l'infini des suites numériques, à savoir :

- pour les fonctions de limite nulle en zéro :

1. mise en place de fonctions de référence,
2. critère de domination,

- pour les fonctions f de limite l en zéro; leur étude sera ramenée au cas précédent par l'introduction de la fonction $x \longmapsto f(x)-l$.

Remarque

De même que l'étude du comportement à l'infini d'une suite suppose que cette suite est définie à partir d'un certain rang[3], l'étude d'une fonction au voisinage de 0 ne peut avoir lieu que sous certaines conditions. Aussi — comme le suggèrent les divers exemples du paragraphe introductif — nous n'aborderons **les problèmes de limite en zéro** d'une fonction numérique que **lorsque l'ensemble de définition de la fonction contient l'une au moins des parties suivantes de $\mathbb{R}$:**

- un intervalle **ouvert** du type $]0, a[$,
- un intervalle **ouvert** du type $]-a, 0[$,
- la réunion de ces deux intervalles $]-a, 0[\cup]0, a[$ (ou encore l'intervalle $]-a, a[$ privé de 0).

(Dans chacun de ces cas, a désigne un réel strictement positif.)

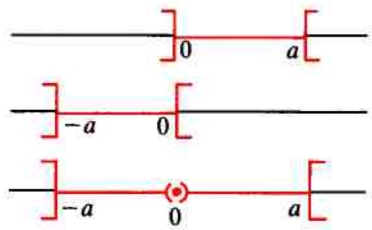


Figure 4

---

[1] *L'Analyste,* la critique brillante et dévastatrice par Berkeley de la méthode infinitésimale, parut en 1734. Le livre était adressé à « un mathématicien incroyant », qu'on suppose généralement avoir été un ami de **Newton,** l'astronome Edmund Halley.

[2] Cette méthode est due au mathématicien allemand Weierstrass (1815-1897). Il est à l'origine de la formalisation rigoureuse de la notion de limite (entre autres...).

[3] Cf. la définition adoptée chapitre 5.

2. Limite en zéro d'une fonction numérique

a. Les fonctions de référence

Les activités du paragraphe I ont permis de dégager une **propriété commune** pour les fonctions $h \longmapsto \sqrt{|h|}$, $h \longmapsto h$, $h \longmapsto h^2$, plus généralement, $h \longmapsto h^n$ (n entier supérieur à 1).
En effet, désignons par $f : h \longmapsto f(h)$ l'une de ces fonctions. Alors, **un nombre réel strictement positif étant arbitrairement choisi — aussi petit que soit ce nombre — il est possible de trouver un intervalle J centré en 0 tel que, pour tout h de J, la quantité $|f(h)|$ (distance de l'image de h à 0) reste inférieure au réel choisi.**
On décrit également cette propriété de façon plus concise par la phrase **« on peut rendre $|f(h)|$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que le réel h soit suffisamment petit »**, mais aussi — en revenant à un langage plus direct — par **« la fonction f tend vers 0 quand h tend vers 0 »** ou encore **« la fonction f admet la limite 0 en 0 »**.
Ce résultat — résumé ci-dessous — et la définition qui l'accompagne jouent un rôle essentiel par la suite.

Les fonctions $h \longmapsto \sqrt{|h|}$ et $h \longmapsto h^n$ ($n = 1, 2, 3...$) admettent *la limite nulle en* 0. Elles constituent la famille de *fonctions de référence en* 0.

Notations

1. Connaissant[1] la vocation particulière de la lettre grecque ε dans ces situations où interviennent des « infiniment petits », nous désignerons par ε une fonction de référence en 0 (lorsqu'il n'apparaîtra pas utile de préciser).

2. Deux notations sont admises pour la phrase « la fonction f admet la limite nulle en 0 » :

$\lim\limits_{0} f = 0$ (lecture : « limite de f en zéro égale zéro »);

$\lim\limits_{h \to 0} f(h) = 0$ (lecture : « limite de $f(h)$ quand h tend vers zéro, égale zéro »).

Exercices

1. Soit φ_1 la fonction définie par :

$$\varphi_1(h) = 50\sqrt{|h|}.$$

Proposer plusieurs intervalles $]-a, +a[$ sur lesquels $0 \leqslant \varphi_1(h) \leqslant 10^{-4}$, puis :

$$0 \leqslant \varphi_1(h) \leqslant 10^{-50} \ ?$$

2. Reprendre les questions précédentes avec la fonction φ_2 définie par $\varphi_2(h) = 50h^2$:

a) par un calcul direct,

b) en exploitant les résultats de l'exercice 1 et l'inégalité $0 \leqslant h^2 \leqslant \sqrt{h}$.

3. Soit ε une fonction de référence en 0 et α un réel fixé strictement positif. D'après ce qui précède, on peut trouver un intervalle $]-a, +a[$ sur lequel $|\varepsilon(h)| \leqslant \alpha$.

• Trouver un intervalle (de la même forme) sur lequel $|-50\varepsilon(h)| \leqslant \alpha$.

• Même question en remplaçant -50 par un réel k quelconque.

Remarques

1. Il découle de la définition le résultat suivant (précisé par les exercices ci-dessus) : « si $f(h)$ peut être rendu aussi petit que voulu, il en est de même de $kf(h)$ (k réel) ». Ainsi, **pour toute fonction ε de référence en 0 et pour tout réel k, $\lim\limits_{h \to 0} k\varepsilon(h) = 0$.**

[1] Au moins, depuis l'étude du comportement à l'infini des suites numériques (cf. chapitre 6).

2. Certains problèmes de détermination de limite en zéro pourront être facilités (voir plus loin) par la mise en œuvre des inégalités :

$$|h^3| \leqslant |h^2| \leqslant |h| \leqslant \sqrt{|h|} \leqslant 1$$

pour tout réel h de l'intervalle $[-1, +1]$ et plus généralement $|h^n| \leqslant |h^{n-1}|$ dès lors que n est un entier supérieur[1] à 2.

b. Fonction de limite l en zéro

Soit f une fonction et l un réel. En se référant à la signification courante[2] du mot « voisin », il est clair que l'expression « $f(h)$ est voisin de l lorsque h est voisin de 0 » équivaut à « $f(h)-l$ est voisin de 0 lorsque h est voisin de 0 ».
Ceci dit, supposons qu'on ait établi que, pour **tout h de $\mathcal{D}_f$** suffisamment petit, $|f(h)-l| \leqslant \lambda\,\varepsilon(h)$ (λ réel positif, ε fonction de référence en 0). Alors, on est en mesure de rendre le nombre $f(h)-l$ aussi proche de 0 qu'on le désire (du fait que l'on sait résoudre favorablement ce problème pour $\lambda\varepsilon(h)$).
Lorsque la condition énoncée ci-dessus sera satisfaite, on dira que **la fonction f admet la limite l en 0.**

Commentaires

Avant de libeller un tel critère, il est important d'en souligner deux aspects :

- **le type d'inégalités cherchées** : il s'agit d'inégalités telles que $|f(h)-\ell| \leqslant 3\sqrt{|h|}$, $|f(h)-\ell| \leqslant 50h^2$, etc.;
- **les conditions sur la variable h** : ces inégalités doivent être vérifiées pour les éléments h d'un intervalle centré en 0, qui appartiennent à **l'ensemble de définition de f** (sans quoi, il est exclu de pouvoir considérer $f(h)$).

Soit f une fonction et l un réel.
Lorsqu'une inégalité de la forme $|f(h)-l| \leqslant k\varepsilon(h)$ ($k>0$; ε fonction de référence en 0) est vérifiée par tous les éléments h appartenant à la fois à $\mathcal{D}_f$ et à un intervalle centré en 0, on dit que *f admet la limite l* en 0.

On note, dans ce cas $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = l$ ou $\lim\limits_{0} f = l$.

Remarques

1. On montre et nous admettrons ici que, lorsqu'une fonction admet une limite en zéro, cette **limite est unique** (on se gardera de croire cependant que toute fonction admet une limite en zéro : voir exemples, pages 283-284).

2. Le critère ci-dessus est une condition **suffisante** pour pouvoir affirmer qu'une fonction f admet la limite l en 0. Il permettra cependant (dans cet ouvrage) le traitement des problèmes de limites qui nous intéressent. Nous le désignerons dans la suite par **« critère de domination »** lorsque nous voudrons y faire référence.

c. Exemples

- **La conjecture**

Lorsqu'on est amené à chercher une limite (éventuelle) en zéro d'une fonction, il faut d'abord essayer de se faire une idée de cette limite. Le point de vue de LANG (cf. page 274),

---

[1] Ceci peut être interprété comme suit : « pour h fixé dans $[-1, 1]$ la suite $(|h^n|)$ est décroissante, majorée par $\sqrt{|h|}$ ».

[2] Cf. page 274, la « définition » de S. LANG.

« regarder vers quelle valeur $f(h)$ s'approche lorsque h approche 0 », s'applique en général de façon pertinente :

. **soit directement,** comme, par exemple, pour les fonctions $u : h \longmapsto \frac{1}{2} - 3h$, $v : h \longmapsto \frac{-3}{1-h^2}$ et $w : h \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2-5h}}$, où l'on pourra **conjecturer** que $\lim\limits_{h \to 0} u(h) = \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{h \to 0} v(h) = -3$ et $\lim\limits_{h \to 0} w(h) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

. **soit après transformation d'écritures,** comme, par exemple, pour les fonctions $j : h \longmapsto \frac{h^2-h}{2h}$, $k : h \longmapsto \dfrac{h}{\dfrac{2}{1+h} - 2}$ et $l : h \longmapsto \frac{|h|}{h}$ et, plus généralement, pour la plupart des **taux d'accroissement** d'une fonction en un point.

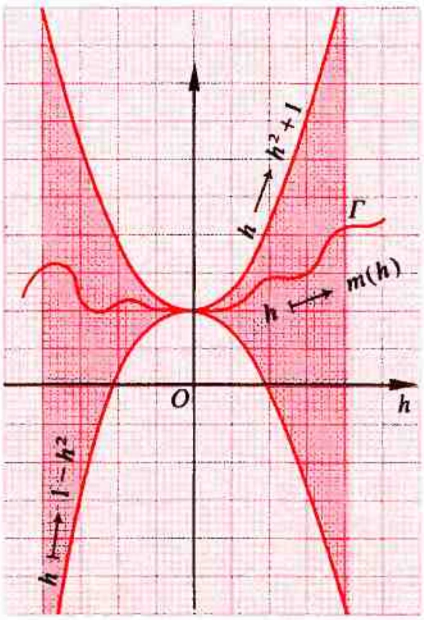
Pour les fonctions j, k, l, on lève l'ambiguïté apparente « zéro sur zéro », en écrivant que, pour $h \neq 0$, $j(h) = \frac{h-1}{2}$, $k(h) = \frac{h(h+1)}{2-2(1+h)} = \frac{h+1}{-2}$ et $l(h) = \begin{cases} 1 & \text{pour } h > 0 \\ -1 & \text{pour } h < 0. \end{cases}$

Il est alors possible de conjecturer que $\lim\limits_{h \to 0} j(h) = -\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{h \to 0} k(h) = -\frac{1}{2}$ et que l n'a pas de limite en zéro.

Activité 6

On considère les fonctions suivantes :

- $u : h \longmapsto -5h^4 + 2h + \frac{1}{100}$;
- $v : h \longmapsto \frac{2+h}{1+h^2}$;
- $w : h \longmapsto \sqrt{3 - \frac{h^2}{2}}$;
- $j : h \longmapsto \dfrac{2h+1}{h - \frac{1}{100}}$;



- $k : h \longmapsto \frac{(2+5h)^2-4}{3h}$;
- $l : h \longmapsto \frac{\sqrt{h}}{h}$;
- m et n sont définies graphiquement (figures 5 et 6);
- $p : h \longmapsto \sqrt{(2+h) - \sqrt{5}}$.

◄ **Figure 5 : la fonction m est représentée graphiquement par la courbe Γ.**

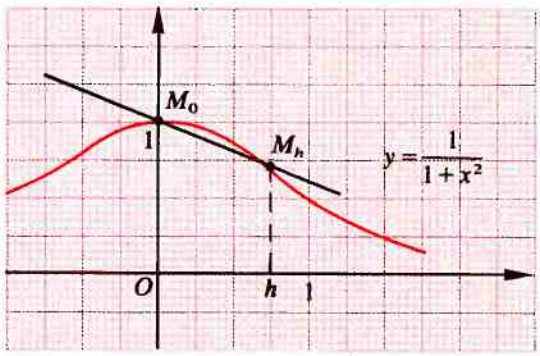


Figure 6 : $n(h)$ est le coefficient directeur de la droite (M_0M_h), avec $h \neq 0$.

*Pour chacune de ces fonctions, **faire une conjecture** sur son comportement en* 0 *(limite éventuelle) et préciser si cette conjecture peut être effectuée directement ou après transformation d'écritures.* (*N. B. : Réponses en bas de page* 282.)

• **Le contrôle de la conjecture**

1. Lorsqu'on a conjecturé que $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = l$, on calcule (ou on estime), en premier lieu $f(h) - l$.

Quelques exemples :

$u(h) - \dfrac{1}{100} = -5h^4 + 2h$; $w(h) - \sqrt{3} = \sqrt{3 - \dfrac{h^2}{2}} - \sqrt{3}$; $j(h) + 100 = \dfrac{102h}{h - \dfrac{1}{100}}$ (tous calculs faits);

$$-h^2 \leqslant m(h) - 1 \leqslant h^2.$$

2. On cherche ensuite à établir une inégalité du type $|f(h) - l| \leqslant k\varepsilon(h)$. *Trois points sont à souligner* :

1 Le rôle des inégalités :

$$\begin{cases} |a+b| \leqslant |a| + |b| \\ |a-b| \leqslant |a| + |b| \end{cases}$$

et de l'équivalence $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha \iff |x| \leqslant \alpha$ (α étant un réel strictement positif).

2 Lorsque $f(h) - l$ se présente sous la forme $hB(h)$ ou $h^2B(h)$, ..., on essaie de majorer la fonction $|B|$ au voisinage de 0.

3 Il ne faut pas craindre de prendre $|h|$ « petit ».

Illustrons avec les calculs précédents[1] :

• $\left|u(h) - \dfrac{1}{100}\right| = |-5h^4 + 2h| \leqslant 5h^4 + 2|h| = |h|(2 + 5|h|^3)$; en supposant $|h| < 1$ 3, $B(h) = 2 + 5|h|^3 \leqslant 7$ 2; ainsi $\left|u(h) - \dfrac{1}{100}\right| \leqslant 7|h|$ **pour** $|h| \leqslant 1$.

• $|w(h) - \sqrt{3}| = \left|\sqrt{3 - \dfrac{h^2}{2}} - \sqrt{3}\right| = \dfrac{|-h^2/2|}{\sqrt{3 - \dfrac{h^2}{2}} + \sqrt{3}} = h^2 B(h)$ 2, avec :

$$B(h) = \frac{1}{2\left(\sqrt{3 - \dfrac{h^2}{2}} + \sqrt{3}\right)}$$

que l'on va donc essayer de majorer. Comme $\sqrt{3 - \dfrac{h^2}{2}} + \sqrt{3} \geqslant \sqrt{3}$, on a $0 \leqslant B(h) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$;

d'où $|w(h) - \sqrt{3}| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{3}} h^2$.

[1] Les numéros encerclés renvoient à l'utilisation des points 1, 2 ou 3.

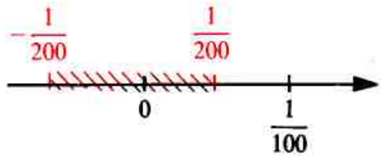
Réponses : $\lim\limits_{0} u = \dfrac{1}{100}$ (direct) ; $\lim\limits_{0} v = 2$ (direct) ; $\lim\limits_{0} w = \sqrt{3}$ (direct) ; $\lim\limits_{0} j = -10$ (direct) ; $\lim\limits_{0} k = \dfrac{20}{3}$ $\left(\text{transformation : } k(h) = \dfrac{20h + 25h^2}{3h} = \dfrac{20}{3} + \dfrac{25}{3}h \text{ pour } h \neq 0\right)$; $l(h) = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ pour $h \neq 0$: pas de limite; $\lim\limits_{0} m = 1$ $(1 - h^2 \leqslant m(h) \leqslant 1 + h^2)$; $\lim\limits_{0} n = 0$ (graphique) ; p : piège, car $2 - \sqrt{5} < 0$: la fonction p n'est pas définie au voisinage de 0 (cf. page 278).

• $|j(h)+100| = |h| \times \dfrac{102}{\left|h-\dfrac{1}{100}\right|}$;

on majore $B(h)=\dfrac{102}{\left|h-\dfrac{1}{100}\right|}$ (2) et donc on minore $\left|h-\dfrac{1}{100}\right|$. Pour cela on prendra $|h|$ assez petit (3), par exemple : $|h| \leqslant \dfrac{1}{200}$ (cf. schéma).

On a alors $d\left(h, \dfrac{1}{100}\right) \geqslant \dfrac{1}{200}$.

Ainsi **pour** $|h| \leqslant \dfrac{1}{200}$, $\quad |j(h)+100| \leqslant 20\,400\,|h|$.



• $-h^2 \leqslant m(h)-1 \leqslant h^2$. De façon immédiate, (1),

$$|m(h)-1| \leqslant h^2 \quad \textbf{pour tout } h \textbf{ réel.}$$

Commentaires

1. L'importance des **techniques de « majoration-minoration »** est évidente. On pourra donc mettre en œuvre tous les points de vue développés sur ce sujet dans le chapitre IV.

2. Les exemples précédents demandent une certaine « technicité ». En général, les problèmes de recherche de limite que nous serons conduits à aborder, porteront sur des majorations plus faciles à obtenir...

Exercices[1]

4. Contrôler la conjecture $\lim\limits_{h \to 0} v(h)=2$ (aucune difficulté).

5. Même exercice pour la fonction h.

6. Expliciter la fonction n et établir le résultat conjecturé : $\lim\limits_{h \to 0} n(h)=0$.

3. Fonctions sans limite : exemples

Nous avons rencontré deux exemples de fonctions pour lesquelles on a pu conjecturer qu'elles n'avaient pas de limite réelle en zéro :

$$f : h \longmapsto \frac{|h|}{h} \; ; \quad g : h \longmapsto \frac{1}{\sqrt{h}}$$

(notons que ces deux fonctions ne sont pas définies en 0).

• $f(h)=\dfrac{|h|}{h}$. Il est clair que $f(h)=\begin{cases} 1 & \text{si } h>0 \\ -1 & \text{si } h<0. \end{cases}$

La représentation graphique de f suffit largement :

. pour montrer que f n'a pas de limite en zéro,

. pour comprendre le sens des expressions suivantes[2] « f a une limite à **droite** en zéro égale à 1 » et « f a une limite à **gauche** en zéro égale à -1 ».

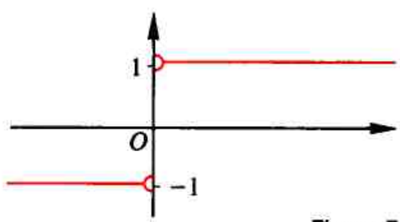


Figure 7

---

[1] Portent sur les exemples introduits page précédente et non traités à savoir les fonctions v, k et n.

[2] Dont le sens sera précisé dans les classes ultérieures.

• $g(h)=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$. Le phénomène en zéro est ici de nature différente. L'on pressent que pour h « infiniment petit », $g(h)$ est « infiniment grand ».

En s'inspirant de ce qui a été mis en œuvre pour les **suites numériques,** on étudie la fonction $h \longmapsto \dfrac{1}{g(h)}$: l'inégalité $0 \leqslant \dfrac{1}{g(h)} \leqslant \sqrt{h}$, montre que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{g(h)} = 0$.

Comme g est une fonction positive, on traduira cette situation de la même façon que pour les suites[1], à savoir :

« **g tend vers $+\infty$ quand h tend vers 0** »

que l'on notera[2] $\lim\limits_{h \to 0} g(h) = +\infty$.

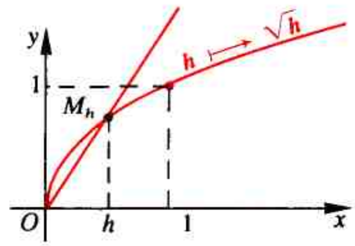


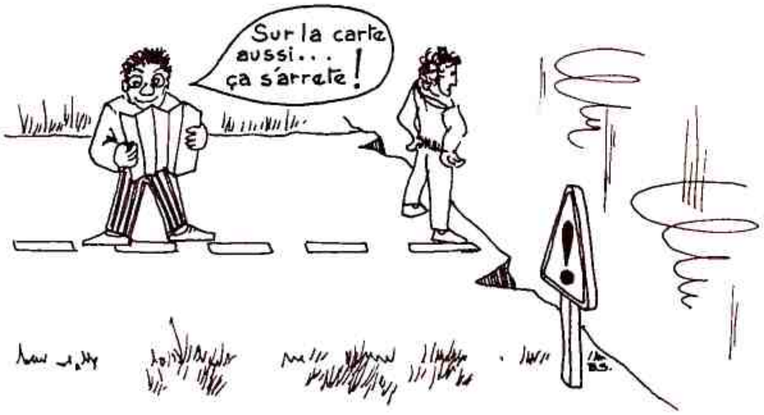
Figure 8

Remarque

Le réel $g(h)$ écrit sous la forme $\dfrac{h}{\sqrt{h}}$ apparaît comme le **coefficient directeur** de la sécante (OM_h) à la courbe représentative de la fonction racine (fig. 8).

On devine que la « position limite » de cette sécante lorsque h tend vers 0 est l'axe (Oy) (qu'il est possible de considérer comme une droite de pente « infinie »).

A propos de limite et d'infini :



« La terre a des limites mais la bêtise humaine est infinie. »

G. FLAUBERT

III. Dérivation en un point

1. Préliminaires

Disposant maintenant d'éléments consistants sur la notion de limite en zéro d'une fonction numérique, nous pouvons étudier de façon plus précise certaines questions soulevées dans le paragraphe introductif et que nous résumerons brièvement :

1. Les problèmes de vitesse instantanée en Cinématique, ainsi que les problèmes de **tangente** à une courbe, ont conduit à s'interroger **sur la limite en 0** de la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$: **taux d'accroissement de la fonction f au point x_0.**

---

[1] Avec les mêmes abus de langage et de notation.

[2] Certaines constructions de courbes représentatives font appel à cette notion (cf. chapitres 8 et 9).

2. Les problèmes d'approximation affine d'une fonction en un point — qu'ils soient d'origine graphique ou numérique — ont privilégié les écritures de la forme :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+ah+h\varphi(h)\ ,$$

en soulignant tout le bénéfice que l'on pouvait tirer d'une réponse positive à la question : « la fonction φ est-elle de limite nulle en zéro? »

Ces deux points de vue se rejoignent ci-après dans le « théorème fondamental » de la dérivation en un point[1] d'où découlent les définitions de base : **nombre dérivé, développement limité d'ordre 1.**

2. Le théorème fondamental de la dérivation en un point

a. Le théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.
Les énoncés suivants sont équivalents :

1. Pour tout h tel que x_0+h appartienne à I, on peut écrire :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+ah+h\varphi(h),\qquad \text{avec}\qquad \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0.$$

2. $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)=a$ **(le taux d'accroissement de f au point x_0 admet a pour limite en zéro).**

Démonstration :

Soit a un réel quelconque (pour l'instant). Considérons la fonction φ définie par :

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-a\\ \varphi(0)=0\end{array}\right.\qquad \text{lorsque}\quad x_0+h\quad \text{appartient à } I \text{ et}\quad h\neq 0.$$

On a alors, pour tout h tel que x_0+h appartienne à I (y compris $h=0$) :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+ah+h\varphi(h).$$

La définition de la limite en zéro d'une fonction permet d'écrire l'équivalence :

$$\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0 \iff \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a$$

ce qui établit le théorème.

b. Définitions

Pour exprimer qu'une fonction satisfait les conditions 1. ou 2. du théorème fondamental, on dit que *f est dérivable au point x_0*. De plus, le nombre réel a est appelé nombre dérivé de f au point x_0.
L'écriture $f(x_0+h)=f(x_0)+ah+h\varphi(h)$ est appelée *développement limité à l'ordre 1 de f au point x_0*.

[1] Mettant fin ainsi à une attente insoutenable...

Le théorème fondamental propose deux moyens d'attaque du problème. « La fonction f est-elle dérivable en x_0? Si oui, quel est son nombre dérivé? »
Avant d'aborder quelques exemples, soulignons le rôle que joue l'**unicité de la limite** dans la propriété 1. Dès que l'on rencontre une écriture $f(x_0+h)=\alpha+\beta h+h\varphi(h)$, **avec** $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$, **pour** x_0+h **appartenant à** I, on peut conclure que :

1° $\alpha=f(x_0)$.

2° f **est dérivable en** x_0 **et** β **est** ***le*** **nombre dérivé de** f **en** x_0.

Exercices

7. Soit f la fonction $x \longmapsto -2(x+1)^2$ et $x_0=0{,}2$. Montrer que : $f(0{,}2+h)$ est un polynôme du second degré en h que l'on calculera. En déduire que f est dérivable en $0{,}2$ et préciser son nombre dérivé en ce point.

8. Soit f la fonction $x \longmapsto x+\dfrac{1}{x}$ et $x_0=1$. Montrer que $f(1+h)=2+\dfrac{h^2}{1+h}$. Établir que, pour $|h|\leqslant\frac{1}{2}$, $\left|\dfrac{h}{1+h}\right|\leqslant 2|h|$. Conclure sur la dérivabilité de f au point $x_0=1$.

c. *Exemples*(*)

Exemple 1 : Fonction constante sur $\mathbb{R}$

La fonction f étant constante, on a quels que soient les réels x_0 et h : $f(x_0+h)=f(x_0)$, ce que l'on va écrire[1] : $f(x_0+h)=f(x_0)+0\times h+h\times 0$ $\big($ici $\varphi(h)=0$ pour tout réel $h\big)$.

Conclusion

Une fonction constante sur $\mathbb{R}$ admet 0 pour nombre dérivé en tout point de $\mathbb{R}$.

Exemple 2 : Fonction identique sur $\mathbb{R}$, $x \longmapsto x$

Quels que soient x_0 et h, $f(x_0+h)=x_0+h$ ou encore $f(x_0+h)=x_0+1\times h+h\times 0$.

Conclusion

La fonction $x \longmapsto x$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et pour tout x_0 de $\mathbb{R}$ le nombre dérivé en x_0 est 1.

Exemple 3 : Fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto x^3$

• Soit $f : x \longmapsto x^2$; comme $f(x_0+h)=(x_0+h)^2=x_0^2+2x_0\times h+h\times h$ (φ : $h\longmapsto h$ est bien de limite nulle), **$x \longmapsto x^2$ admet en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ le nombre dérivé $2x_0$.**

• Soit $f : x \longmapsto x^3$. Calculons $f(x_0+h)$:

$$f(x_0+h)=(x_0+h)^3=x_0^3+3x_0^2h+3h^2x_0+h^3.$$

Nous écrirons $f(x_0+h)=x_0^3+3x_0^2\times h+h\varphi(h)$, avec : $\varphi(h)=3hx_0+h^2$ $\big($car l'on se doute que $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$ $\big)$. Dans l'intervalle $[-1, 1]$, on a $|h^2|\leqslant|h|$, d'où :

$$|\varphi(h)|=|3hx_0+h^2|\leqslant|3hx_0|+|h^2|\leqslant 3\,|h|\times|x_0|+|h|$$
$$|\varphi(h)|\leqslant(3\,|x_0|+1)\times|h|.$$

Effectivement $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$.

Ainsi, **la fonction $x \longmapsto x^3$ admet en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ le nombre dérivé $3x_0^2$.**

(*) Ces exemples concernent les fonctions usuelles. Ils seront résumés dans le tableau récapitulatif, page 302.

(1) Il ne faut pas craindre de faire apparaître des zéros...

Exercices

9. Étudier la dérivabilité en x_0 des fonctions :

$x \longmapsto -5x$; $x \longmapsto \frac{1}{3}x^2$ et $x \longmapsto -\frac{x^3}{3}$.

Quelle remarque peut-on faire sur les nombres dérivés obtenus?

10. Soit f la fonction $x \longmapsto x - x^2$. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0.
On note a, b et c les nombres dérivés respectifs en x_0, des fonctions $x \longmapsto x - x^2$, $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x^2$.
Vérifier que $a = b - c$.

Exemple 4 : Fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$

Nous avons déjà vu. (cf. chapitre 4, mais aussi activité **4** de ce chapitre) que :

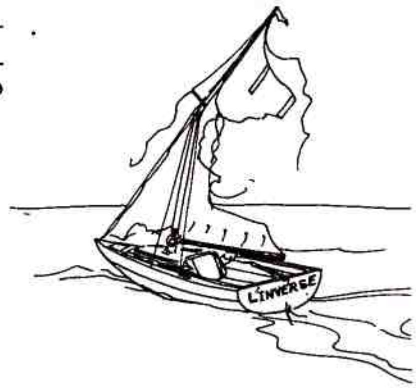
$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{1+h} = 1 - h + \dfrac{h^2}{1+h} & \text{pour } h \neq -1 \\ \left|\dfrac{1}{1+h}\right| \leqslant 2 & \text{pour } h \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] \end{cases}$$

d'où l'on déduit $\frac{1}{1+h} = 1 - h + h\varphi(h)$, avec $|\varphi(h)| \leqslant 2|h|$ pour $h \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et donc $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

Ceci montre que la **fonction inverse est dérivable au point 1 et que son nombre dérivé en ce point est égal à -1.**

Étudions la dérivabilité en un point $x_0 \neq 0$. On a :

$$f(x_0 + h) = \frac{1}{x_0 + h} = \frac{1}{x_0} \times \frac{1}{1 + \dfrac{h}{x_0}}.$$



En utilisant les relations (1), il vient :

$$\frac{1}{1+\dfrac{h}{x_0}} = 1 - \frac{h}{x_0} + \frac{\left(\dfrac{h}{x_0}\right)^2}{1+\dfrac{h}{x_0}}.$$

$$\frac{1}{1+\dfrac{h}{x_0}} \leqslant 2 \quad \text{pour} \quad \left|\frac{h}{x_0}\right| \leqslant \frac{1}{2} \quad (\text{donc pour } |h| \leqslant 2|x_0|).$$

Ainsi $f(x_0 + h) = \frac{1}{x_0} - \frac{h}{x_0^2} + h \times \frac{h}{x_0^3} \times \frac{1}{1+\frac{h}{x_0}}$. Posons $\varphi(h) = \frac{h}{x_0^3} \times \frac{1}{1+\frac{h}{x_0}}$.

Il est clair que pour $|h| \leqslant 2|x_0|$, $|\varphi(h)| \leqslant \frac{2|h|}{|x_0|^3}$ et donc que $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

En résumé, $\boldsymbol{f(x_0 + h) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2} \times h + h\varphi(h)}$, avec $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

Conclusion

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point de son ensemble de définition. Son nombre dérivé en x_0 est $\frac{-1}{x_0^2}$.

Exemple 5 : Fonction racine $x \longmapsto \sqrt{x}$

Nous avons vu dans le chapitre 4, comment il était possible d'obtenir une approximation affine de la fonction $h \longmapsto \sqrt{1+h}$ au voisinage de zéro :

$$0 \leqslant 1+\frac{h}{2}-\sqrt{1+h} \leqslant \frac{h^2}{2} \quad \text{pour} \quad h \geqslant -1.$$

On peut donc écrire, pour $h \geqslant -1$,

$$\sqrt{1+h}=1+\frac{h}{2}+h\varphi(h) \text{ , avec } |\varphi(h)| \leqslant \frac{|h|}{2} .$$

ce qui montre que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ **est dérivable au point 1, avec pour nombre dérivé $\frac{1}{2}$.**

• Soit x_0 un réel **strictement** positif. On a :

$$\sqrt{x_0+h}=\sqrt{x_0}\left(\sqrt{1+\frac{h}{x_0}}\right)=\sqrt{x_0}\left(1+\frac{h}{2x_0}+\frac{h}{x_0}\varphi\left(\frac{h}{x_0}\right)\right) ,$$

soit finalement :

$$\sqrt{x_0+h}=\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}h+\frac{h}{\sqrt{x_0}}\varphi\left(\frac{h}{x_0}\right) .$$

• Supposons $\frac{h}{x_0} \geqslant -1$ (ou encore $-x_0 \leqslant h$) , on a alors $\left|\varphi\left(\frac{h}{x_0}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{h}{x_0}\right|$. En notant ψ la fonction $h \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x_0}}\varphi\left(\frac{h}{x_0}\right)$, $|\psi(h)| \leqslant \frac{|h|}{2x_0\sqrt{x_0}}$ dès que $-x_0 \leqslant h$.

• Ainsi : $\sqrt{x_0+h}=\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}h+h\psi(h)$, **avec** $\lim\limits_{h \to 0} \psi(h)=0.$

Conclusion

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout point x_0 strictement positif et son nombre dérivé en x_0 est le réel $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Remarque

Nous avons vu (cf. page 284) que le taux d'accroissement en 0 de la fonction racine $h \longmapsto \frac{1}{\sqrt{h}}$ n'avait pas de limite réelle en zéro.

La fonction racine n'est donc pas dérivable en zéro.

d. Commentaire général

Les exemples d'étude de dérivation en un point qui viennent d'être développés procèdent de la **recherche d'un développement limité.** Les raisons essentielles en sont les suivantes :

• **la nature des fonctions étudiées :** il est clair que pour une fonction puissance (plus généralement pour une fonction polynôme) il est possible de calculer $f(x_0+h)$ qui apparaît ainsi comme un **polynôme en h.** Il n'y a alors aucune difficulté à « faire apparaître » la fonction φ cherchée;

• **l'approximation par des polynômes :** lorsque l'on dispose d'une telle approximation au voisinage d'un point $\left(\text{comme pour } \frac{1}{1+x} \text{ ou } \sqrt{1+x} \text{ au voisinage de } 0\right)$, c'est **l'estimation de l'erreur** qui conduit au développement limité;

• les transformations d'écritures : ce sont elles qui ont permis de **ramener** l'étude de la dérivabilité en un point x_0 quelconque à celle de la dérivabilité en un point particulier; c'est le cas pour les fonctions inverse et racine — mais aussi comme on le verra dans le paragraphe 5 — pour les fonctions circulaires.

En dehors de ces cas particulièrement favorables notamment l'approximation polynomiale et hormis l'application des résultats portant sur « les opérations et fonctions dérivables » (cf. paragraphe IV, il sera en général nécessaire de recourir à l'étude du taux d'accroissement et donc à une recherche de limite.

Exercices

11. Soit V et A les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ qui, à tout réel $R>0$, associent le volume et l'aire de la sphère de rayon R.
Montrer que la fonction V admet au point R un nombre dérivé égal à $A(R)$.

12. Soit f la fonction $x \longmapsto 1/x^2$.

On pose $t(h)=\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ $(h \neq 0)$.

1° Montrer que $t(h)=\dfrac{-2-h}{(1+h)^2}$.

2° Montrer que f est dérivable au point 1 et préciser son nombre dérivé (on admettra que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2-h}{(1+h)^2}=-2$).

3. Tangente à une courbe

a. Définition

Compte tenu des observations faites dans les paragraphes précédents, on adopte la définition suivante :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, x_0 un point de I où f est dérivable et a le nombre dérivé de f au point x_0.
On appelle *tangente à la courbe représentative de f au point $M_0(x_0, f(x_0))$* la droite *passant par le point M_0* et de *coefficient directeur égal à a*.

Dans ces conditions, la **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M_0(x_0, f(x_0))$ a donc pour **équations :**

$$y - f(x_0) = a(x - x_0).$$

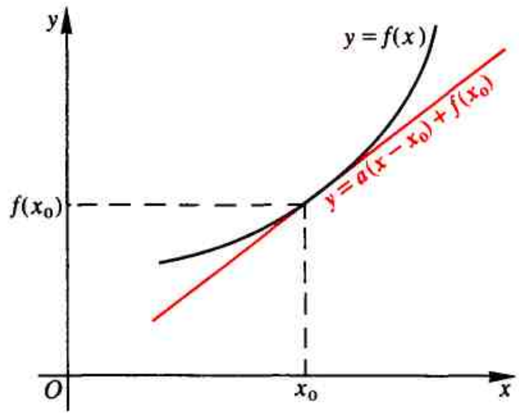


Figure 9 ►

Exercices

13. Dans chacun des cas suivants, écrire l'équation de la tangente en M à la courbe $\mathcal{C}$:

a) $\mathcal{C} : y=\dfrac{1}{x}$, $M\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$;

b) $\mathcal{C} : y=\sqrt{x}$; $M(4, 2)$;

c) $\mathcal{C} : y=x^3$; $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{8}\right)$.

14. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $x \longmapsto x^3$.

1° Écrire l'équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

2° Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Δ et de $\mathcal{C}$.

15. On désigne Δ la tangente en un point M de la parabole d'équation $y = x^2$.

Montrer que Δ rencontre (Ox) au milieu I de $[O, m]$, où m est le projeté orthogonal de M sur (Ox).

16. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$. Montrer qu'il existe deux points A et B de $\mathcal{P}$ dont les tangentes à $\mathcal{P}$ passent par le point $\Omega(2, 1)$.
Illustrer par une représentation graphique.

b. Application affine tangente ; approximation

La définition précédente conduit à désigner par **application affine tangente** la fonction $x \longmapsto f(x_0) + a(x - x_0)$. Cette fonction permet d'obtenir des valeurs approchées de f au voisinage du point x_0.

Exemples

1. Valeur approchée de $(3{,}98)^3$.
On introduit $f : x \longmapsto x^3$; $x_0 = 4$ et $h = -0{,}02$. On a donc à estimer $f(x_0 + h)$. Les résultats sur la dérivation de $x \longmapsto x^3$ permettent d'écrire :

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + 3x_0^2 h \;;$$

soit : $(3{,}98)^3 \approx 64 - 3 \times 16 \times 0{,}02 = \mathbf{63{,}04}$ (au lieu de 63,044 792 que donne la calculatrice).

2. Soit n un entier non nul et h un réel. Lorsque h/n est suffisamment petit, on pourra utiliser comme valeur approchée de $\sqrt{n^2 + h}$ le réel $n + \dfrac{h}{2n}$. Cela résulte du développement limité en x_0 de la fonction racine. Ainsi :

$$\sqrt{16{,}2} \approx 4 + \frac{0{,}2}{8} = 4{,}025 \quad \text{(valeur machine : } 4{,}024\,922\,3\ldots)$$

$$\sqrt{630} = \sqrt{25^2 + 5} \approx 25{,}1 \quad \text{(valeur machine : } 25{,}099\,8\ldots)$$

Exercices

17. Donner des valeurs approchées des réels $(-51{,}3)^3$, $\sqrt{80{,}8}$ et $\sqrt{1 + (0{,}2)^2}$.
(Comparer avec les résultats fournis par la calculatrice.)

18. Comparer les approximations affines tangentes au voisinage du point 1, des fonctions $x \longmapsto 3x^2$ et $x \longmapsto 2x^3 + 1$.
Interpréter géométriquement.

IV. Dérivation sur un intervalle

1. Fonction dérivable sur un intervalle. Fonction dérivée

a. Définition

On dit qu'une fonction f est *dérivable sur un intervalle I*, lorsqu'elle est dérivable en tout point de cet intervalle.
La fonction de I dans $\mathbb{R}$, qui à tout réel x de I associe alors le nombre dérivé de f en x, est appelée *dérivée* de f et notée f'.

Ainsi, par exemple (cf. paragraphe précédent) :

- une fonction constante sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$;
- la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$, est dérivable sur $\mathbb{R}^*$; sa dérivée est la fonction :

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R}^* &\longmapsto R \\ x &\longmapsto -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

- la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, sa dérivée est la fonction :

$$\begin{aligned} f' :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

b. Notations

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et x_0 un élément de I. Compte tenu de la définition précédente, le nombre dérivé de f au point x_0 est l'image de x_0 par la dérivée f' de f. On le note donc $f'(x_0)$.

Avec cette notation du nombre dérivé, la **tangente** à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M_0(x_0, f(x_0))$ a donc pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

- Il faut signaler, à propos de la dérivée, un abus de notation et de langage usuel tel que : « la dérivée de x^2 est $2x$ » ou encore « la dérivée de $\sqrt{x}$ est $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ».

De tels abus ne sont pas dangereux dès lors qu'on entend par là :

« la dérivée de la fonction $x \longmapsto x^2$ est la fonction $x \longmapsto 2x$ »

« la dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ».

2. Opérations sur les fonctions dérivables

Il s'agit dans ce paragraphe d'établir certaines **règles de calcul** relatives à la somme, au produit, au quotient... de fonctions dérivables. Ces règles de calcul évitent, en général, de recourir à la définition du nombre dérivé et donc de procéder à une recherche de limite qui peut s'avérer délicate.

Dans ce qui suit nous désignons par **u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.**

Les développements limités à l'ordre 1 des fonctions u et v au point x_0 de I seront notés par :

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + u'(x_0)\,h + h\varphi_1(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \varphi_1(h) = 0$$

$$v(x_0 + h) = v(x_0) + v'(x_0)\,h + h\varphi_2(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \varphi_2(h) = 0.$$

a. Somme et produit

On a donc, d'une part :

$$(u+v)(x_0+h)=(u+v)(x_0)+\big(u'(x_0)+v'(x_0)\big)h+h\varphi(h),$$

avec $\varphi(h)=\varphi_1(h)+\varphi_2(h)$;
d'autre part :

$$(uv)(x_0+h)=(uv)(x_0)+\big(u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0)\big)h+h\Phi(h)$$

où $\Phi(h)=u(x_0)\varphi_2(h)+v(x_0)\varphi_1(h)+h\varphi_1(h)\varphi_2(h)$.

Ceci étant, examinons sur un exemple, le comportement des fonctions φ et Φ au voisinage de 0 :

Activité 7

Soit u, v les fonctions $u : x \longmapsto x^2$ et $v : x \longmapsto x^3$.

1° Utiliser les résultats obtenus page 285, exemple 3, pour calculer $\varphi(h)$ et $\Phi(h)$.

2° Montrer que pour $|h| \leqslant 1$:

$$|\varphi(h)| \leqslant |3x_0+2| \times |h|$$

et $|\Phi(h)| \leqslant |h| \times [1+5|x_0|+10|x_0^2|+10|x_0^3|]$.

En déduire que $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$ et $\lim\limits_{h\to 0}\Phi(h)=0$.

3° Montrer que les fonctions $u+v$ et uv sont dérivables et que $(u+v)'=u'+v'$,

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Dans le cas général, par un procédé analogue à celui utilisé dans cette activité, on parvient à établir que les fonctions φ et Φ admettent la limite 0 en 0.

Ainsi :

$$(u+v)(x_0+h)=(u+v)(x_0)+\big(u'(x_0)+v'(x_0)\big)h+h\varphi(h)\ ,\quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0\ ;$$

$$(uv)(x_0+h)=(uv)(x_0)+\big(u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0)\big)h+h\Phi(h)\ ,\quad \text{avec} \quad \lim_{h\to 0}\Phi(h)=0.$$

Ceci montre, que les fonctions $u+v$ et uv sont dérivables en x_0 et que :

$$(u+v)'(x_0)=u'(x_0)+v'(x_0)\ ,$$

$$(uv)'(x_0)=u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0).$$

Le point x_0 étant quelconque dans I, on peut énoncer le théorème :

Théorème 1

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I. Alors les fonctions $u+v$ et uv sont dérivables sur I et :

$$(u+v)'=u'+v' \qquad (uv)'=u'v+uv'.$$

Exemples

1. La fonction $f : x \longmapsto x^2+\dfrac{1}{x}$ est la somme des fonctions $u : x \longmapsto x^2$ et $v : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Les fonctions u et v étant dérivables sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, avec $u'(x)=2x$ et $v'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$, il en est de même de la fonction f et, **pour tout x de $\mathbb{R}^*$**, $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}$.

2. Soit f la fonction $x \longmapsto x\sqrt{x}$. Cette fonction est le produit des fonctions $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \sqrt{x}$ respectivement dérivables sur $\mathbb{R}$ et sur $]0, +\infty[$, avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Elle est donc dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle :

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{soit} \quad f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

3. Soit u une fonction dérivable sur I et a un nombre réel. Considérons la fonction :

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto au(x). \end{aligned}$$

Cette fonction peut être considérée comme le produit de la fonction u par la fonction constante $v : x \longmapsto a$. On sait que v est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $v'(x) = 0$. Ainsi la fonction au est dérivable sur I et, pour tout x de I, $(au)'(x) = au'(x)$ autrement dit : **pour a réel, $(au)' = au'$.**

4. Dans le théorème ci-dessus, lorsque l'on choisit $v = u$, on obtient :

$$(u^2)' = u'u + uu' = 2u'u.$$

- De même, avec $v = u^2$:

$$(u^3)' = (uu^2)' = u'u^2 + u(2u'u) = 3u'u^2.$$

- Puis $(u^4)' = (uu^3)' = u'u^3 + u(3u'u^2) = 4u'u^3$.

Arrêtons là... Nous admettrons qu'il est possible d'établir de proche en proche que :

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 2, \quad (u^n)' = nu'u^{n-1}.$$

En particulier, lorsque $u(x) = x$, on obtient les dérivées des fonctions puissances $x \longmapsto x^n$, à savoir :
La fonction $x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; sa dérivée est la fonction $x \longmapsto nx^{n-1}$ pour $n \geqslant 2$.

5. Soit P une fonction polynôme : $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$.

La fonction P est la somme de fonctions dérivables :

$x \longmapsto a_0$ de dérivée nulle;

$x \longmapsto a_1x$ de dérivée $x \longmapsto a_1$;

$x \longmapsto a_2x^2$ de dérivée $x \longmapsto 2a_2x$;

$x \longmapsto a_nx^n$ de dérivée $x \longmapsto na_nx^{n-1}$.

Ainsi P est dérivable et $P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}$.

Résumons ces derniers résultats, corollaires du théorème précédent :

Théorème 2

- **Soit u une fonction dérivable sur I; la fonction u^n $(n \geqslant 2)$ est dérivable sur I et :**

$$(u^n)' = nu'u^{n-1}.$$

- **Toute fonction polynôme $x \longmapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; sa dérivée est la fonction :**

$$x \longmapsto a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}.$$

Remarque

On notera que la dérivée d'un polynôme de degré n est un polynôme de degré $n-1$.

Exercices

19. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f : x \longmapsto 4x^4 - 2x^3 + x - 11$;

$g : x \longmapsto (x^3 - x)(x - 9)$;

$h : x \longmapsto (x+1)\sqrt{x}$.

20. Même exercice avec :

$f_1 : x \longmapsto (1+x^2)^6$;

$f_2 : x \longmapsto x(x+1)(x+2)$;

$f_3 : x \longmapsto (1+4x)^3(4-x)^2$.

21. Soit $n \geqslant 2$ et f la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$.
Calculer la dérivée de la fonction f en considérant que $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^n$.

22. Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. En remarquant que f est égale à la fonction :

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x}\,\frac{1}{x} , \end{aligned}$$

calculer la dérivée de f.

b. Quotient de fonctions derivables

Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème 3

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I. On suppose en outre que, pour tout réel x de I, $v(x) \neq 0$.
Alors :

1° la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$;

2° la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

En dehors du fait (admis) que les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I, ces résultats peuvent s'expliquer aisément.
En effet, nous avons d'après le théorème 1 :

$$\left(\frac{1}{v}\, v\right)' = \left(\frac{1}{v}\right)' v + \frac{1}{v}\, v' .$$

Or la fonction $\frac{1}{v}\, v$ n'est autre que la fonction $x \longmapsto 1$ de **dérivée nulle.**

Ainsi : $\left(\frac{1}{v}\right)' v + \frac{1}{v}\, v' = 0$, d'où l'on tire $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$.

En considérant le quotient $\frac{u}{v}$ comme le produit $u\,\frac{1}{v}$ et en utilisant toujours le théorème 1, il vient :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u\,\frac{1}{v}\right)' = u'\,\frac{1}{v} + u\,\left(\frac{1}{v}\right)' = u'\,\frac{1}{v} + u\left(\frac{-v'}{v^2}\right) ,$$

d'où $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemples[1]

1. Soit n un entier naturel non nul. D'après ce qui précède, la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ avec pour dérivée la fonction $x \longmapsto -\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$, où u désigne $x \longmapsto x^n$. Comme la dérivée de u est la fonction $x \longmapsto nx^{n-1}$, il vient $f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}$, soit $f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$.

2. Soit f la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$. Cette fonction est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}$.

- Nous soulignerons le premier résultat issu de ces exemples — vu son usage fréquent :

Théorème 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$.

Exercices

23. Déterminer les intervalles sur lesquels chacune des fonctions f suivantes est dérivable et donner l'expression de $f'(x)$:

a) $x \longmapsto \frac{-3}{x}$; *b)* $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$;

c) $x \longmapsto \frac{1}{x+1}$; *d)* $x \longmapsto \frac{2x+1}{2x-1}$.

24. Même exercice avec les fonctions :

a) $x \longmapsto \frac{1}{x^4-1}$; *b)* $x \longrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}}$;

c) $x \longmapsto \frac{x^2}{x^2+1}$; *d)* $x \longmapsto \frac{x-1}{x(x+1)}$.

25. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la fonction $x \longmapsto x^n$ est définie et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et que sa dérivée est la fonction :

$$x \longmapsto nx^{n-1}.$$

26. Soit u, v des fonctions dérivables sur I telles que $u(x) \neq 0$, $v(x) \neq 0$ pour tout x de I. On pose :

$$f = uv \quad \text{et} \quad g = \frac{u}{v}.$$

Montrer que :

$$\frac{f'}{f} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} \; ; \quad \frac{g'}{g} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}.$$

c. Composée d'une fonction affine par une fonction dérivable

Des fonctions telles que :

$$f : x \longmapsto (2x-1)^3 \; ; \; g : x \longmapsto \frac{1}{2x+3} \; ; \; h : x \longmapsto \sqrt{3x-7}$$

peuvent être considérées comme composées d'une fonction affine $x \longmapsto ax+b$ par une fonction de référence, ainsi :

- $f(x) = u(ax+b)$, avec $u : x \longmapsto x^3$ et $ax+b = 2x-1$;
- $g(x) = u(ax+b)$, avec $u : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $ax+b = 2x+3$;
- $h(x) = u(ax+b)$, avec $u : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $ax+b = 3x-7$.

[1] A relier avec les exercices 21 et 22 ci-dessus.

(*) Le résultat général concernant la dérivation des fonctions composées $x \longmapsto f(u(x))$ sera abordé dans les classes de Terminales.

Le résultat qui suit permet d'obtenir rapidement la dérivée de telles fonctions à partir des dérivées des fonctions u et $x \longmapsto ax+b$.

Théorème 5

Soit $x \longmapsto ax+b$ une fonction affine et x_0 un réel.
Si la fonction u est dérivable au point $y_0 = ax_0 + b$, la fonction $f : x \longmapsto u(ax+b)$ est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = au'(ax_0+b)$.

Nous admettrons ce théorème[1].

Note : Attention à la notation $u'(ax_0+b)$ qui désigne la **valeur prise** par la fonction u' au point ax_0+b.

Exemples

1. Soit $f : x \longmapsto (2x-1)^3$. Les fonctions $x \longmapsto 2x-1$ et $u : x \longmapsto x^3$ étant dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $f : x \longmapsto u(2x-1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 2u'(2x-1) = 2 \times 3(2x-1)^2 = 6(2x-1)^2.$$

2. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2x+3}$. La fonction inverse est dérivable en tout point sauf en 0. La fonction f est donc dérivable en tout point $x \neq -\dfrac{3}{2}$ et $f'(x) = 2 \times \dfrac{-1}{(2x+3)^2} = \dfrac{-2}{(2x+3)^2}$.

3. Soit $f : x \longmapsto \sqrt{3x-7}$. La fonction racine étant dérivable sur $]0, +\infty[$, f est dérivable sur l'intervalle $\left]\dfrac{7}{3}, +\infty\right[$ (ensemble des réels x tels que $3x-7>0$) et $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-7}}$.

Exercices

27. Étudier la dérivabilité de la fonction f (exemple 2) d'une autre manière.

28. Déterminer les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont dérivables puis exprimer leur dérivée :

a) $x \longmapsto (5-3x)^4$;

b) $x \longmapsto \sqrt{5x-4}$;

c) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x+1}$.

---

[1] Conformément au programme. On peut cependant donner une idée de la démonstration. Posons $y_0 = ax_0 + b$ pour $x_0 \in I$:

- $f(x_0+h) = u(a(x_0+h)+b) = u(y_0+ah)$ et $f(x_0) = u(y_0)$;
- u dérivable en y_0 : $u(y_0+H) = u(y_0) + u'(y_0)H + H\varphi(H)$ avec $\lim\limits_{H \to 0} \varphi(H) = 0$.

En remplaçant H par ah, il vient :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + au'(ax_0+b)\,h + h(a\varphi(ah)).$$

On conçoit que $\lim\limits_{h \to 0} a\varphi(ah) = 0$, d'où le résultat annoncé.

V. Dérivabilité des fonctions circulaires

1. Exposé du problème

Il s'agit d'étudier la **dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$**. Nous ferons deux remarques :

1° L'égalité $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ montre que la fonction cosinus est la composée de la fonction sinus et d'une fonction affine. Nous pourrons donc, à l'aide du théorème 5, statuer sur la dérivabilité de la fonction cosinus à partir de celle de la fonction sinus.

2° La relation trigonométrique $\sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0$ fait apparaître que, dès que l'on connaîtra un développement limité à l'ordre 1 **en 0** pour chacune des fonctions cosinus et sinus (ou — ce qui revient au même — les nombres dérivés de ces fonctions à l'origine), il sera possible d'obtenir un développement limité à l'ordre 1 de la fonction sinus au **point x_0**.

2. Dérivabilité à l'origine des fonctions circulaires

Le tableau ci-contre donne trois formulations équivalentes, relatives au comportement des fonctions circulaires à l'origine : en termes de développement limité, de nombre dérivé et de limite.

Fonction	Développement limité en 0	Nombre dérivé en 0	Limite
sinus	$\sin h = h + h\varphi(h)$ $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$	1	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
cosinus	$\cos h = 1 + h\psi(h)$ $\lim\limits_{h \to 0} \psi(h) = 0$	0	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Note

C'est un **encadrement** des fonctions circulaires au voisinage de 0 qui permet d'élaborer un tel tableau. De façon plus précise, on démontre que sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$|\cos x - 1| \leqslant \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad |\sin x - x| \leqslant \frac{|x^3|}{2}.$$

Ces résultats sont admis[1]. On trouvera cependant dans le paragraphe « Compléments » (sous forme d'activités) un **procédé d'encadrement** des fonctions circulaires, basé sur le **calcul d'aires** qui conduit aux inégalités ci-dessus.

Remarque

Il a pu être effectué en classe de Seconde[2], lors du tracé des courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus, un certain nombre de conjectures que nous pourrions — maintenant — reformuler ainsi :

- « La droite d'équation $y = 1$ est tangente à la courbe représentative de la fonction cosinus au point A de coordonnées $(0, 1)$ ».
- « La droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe représentative de la fonction sinus à l'origine ».

Les valeurs obtenues pour les nombres dérivés à l'origine justifient ces résultats.

---

[1] Conformément au programme.

[2] Cf. pages 478-479.

Exercices

29. On écrit $\sin x = x + x\varphi(x)$.
Montrer que, pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\varphi(x)| \leq \frac{x^2}{2}$.

30. De même, en écrivant $\cos x = 1 + x\Psi(x)$, montrer que, pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
$$|\Psi(x)| \leq \frac{|x|}{2}.$$

3. Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus en un point x_0

a. La fonction sinus

Nous avons $\sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0$, avec $\sin h = h + h\varphi(h)$ et :
$$\cos h = 1 + h\Psi(h)\ ;$$
il vient :
$$\sin(x_0 + h) = \sin x_0\big(1 + h\Psi(h)\big) + \big(h + h\varphi(h)\big)\cos x_0$$
$$\sin(x_0 + h) = \sin x_0 + (\cos x_0)\,h + h\big(\sin x_0 \Psi(h) + \cos x_0 \varphi(h)\big).$$

Considérons la fonction $\phi(h) = \sin x_0 \Psi(h) + \cos x_0 \varphi(h)$.
Il découle des exercices ci-dessus (n^{os} **29** et **30**) que :
$$|\phi(h)| \leq |\sin x_0| \frac{|h|}{2} + |\cos x_0| \frac{h^2}{2} \leq \frac{|h|}{2} + \frac{h^2}{2}.$$
$$|\phi(h)| \leq |h|$$
pour h suffisamment petit (pour $|h| \leq 1$, par exemple, puisque, dans ces conditions $|h^2| \leq |h|$) et donc $\lim\limits_{h \to 0} \phi(h) = 0$.

Finalement : $\sin(x_0 + h) = \sin x_0 + (\cos x_0)\,h + h\phi(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \phi(h) = 0$. La fonction sinus est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}$ et son nombre dérivé en x_0 est $\cos x_0$.
On peut donc énoncer le théorème suivant :

La fonction *sinus* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa *dérivée est la fonction cosinus*.

Exercices

31. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction sinus aux points d'abscisse $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.

32. En quels points $x \longmapsto \frac{1}{\sin x}$ est-elle dérivable?
Exprimer alors le nombre dérivé.

b. La fonction cosinus

Pour tout réel x, on peut écrire $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. En notant u la fonction affine $x \longmapsto \frac{\pi}{2} - x$, on a $\cos x = \sin\big(u(x)\big)$. D'après le théorème 5 (page 315), la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et — comme $u'(x) = -1$ — sa dérivée est la fonction :
$$x \longmapsto (-1) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Ainsi :

La fonction *cosinus* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa *dérivée est la fonction* $-$*sinus* $(x \longmapsto -\sin x)$.

Exercices

33. Retrouver le résultat ci-dessus en utilisant :
- la formule trigonométrique :
$$\cos(x_0+h)=\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h;$$
- les développements limités de sinus et cosinus au point 0.

34. Soit u et v les fonctions définies par :
$$u(x)=\cos^2 x\ ,\quad v(x)=\sin^2 x\ .$$
Montrer que u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que :
$$u'(x)=-\sin 2x\ ,\quad v'(x)=\sin 2x\ .$$

35. Soit a et b deux réels.
Montrer que les fonctions :
$f : x \longmapsto \cos(ax+b)$ et $g : x \longmapsto \sin(ax+b)$
sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée.

36. Soit $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$.
Étudier la dérivabilité de la fonction f et exprimer $f'(x)$.

c. Complément : la fonction tangente

La fonction $\tan : x \longmapsto \tan(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ privé des points $\dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.
En un point x de cet ensemble, on peut appliquer le théorème de dérivation des quotients :
$$(\tan)'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\ ,$$
ce que l'on peut encore écrire :

$$(\tan)'(x)=1+\tan^2 x\ .$$

VI. Compléments

1. Préliminaires

L'objectif du premier thème de ce paragraphe est de souligner et de préciser le rôle des fonctions polynômes dans les problèmes concernant la dérivation d'une fonction en un point. De façon plus précise, il s'agit d'explorer une situation où la **comparaison de la fonction à une fonction polynôme ne peut être effectuée de façon directe** (comme pour les fonctions puissances : $(x_0+h)^2=x_0^2+2x_0h+h^2$ par exemple) **ou au moyen d'une transformation d'écriture** (comme pour les fonctions inverse ou racine : $\dfrac{1}{1+h}=1-h+h\varphi(h)$, où $\varphi(h)=\dfrac{h}{1+h}$ peut être facilement encadrée, par exemple); cette situation concerne les fonctions sinus et cosinus;
Quant au second sujet « enveloppes » (basé sur une « technique » accessible à tout un chacun : pliage d'une feuille de papier...), il propose des activités riches de manipulations sur les dérivées et tangentes. De plus, il fait découvrir un nouvel aspect de construction de courbes planes, et donc de relation de dépendance entre deux variables.

2. Sinus et cosinus : encadrement polynomial au voisinage de 0

Activité 8 : calculs d'aires

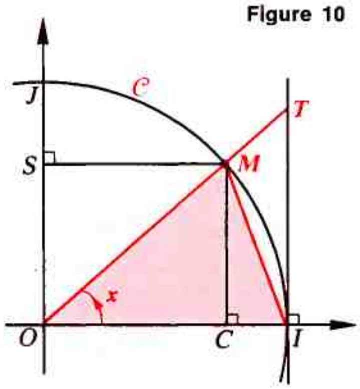
Soit x **un réel de l'intervalle** $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, M le point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ tel que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ soit de mesure x.
(Les éléments géométriques utilisés par la suite sont décrits figure 10.)

1° Exprimer en fonction de x les aires des triangles OIM, OIT et du secteur angulaire IOM.

2° En déduire que pour $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$:

$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$, puis que $\boldsymbol{x \cos x \leqslant \sin x \leqslant x}$.

Figure 10



Activité 9

1° En utilisant la formule trigonométrique $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$, montrer que, pour x dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad x - \frac{x^3}{2} \leqslant \sin x \leqslant x.$$

2° Utiliser les propriétés de parité des fonctions mises en jeu pour établir les majorations suivantes :

pour tout réel x de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$|\cos x - 1| \leqslant \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad |\sin x - x| \leqslant \left|\frac{x^3}{2}\right|.$$

3. Enveloppes

Activité 10 : « Parabole et tangentes »

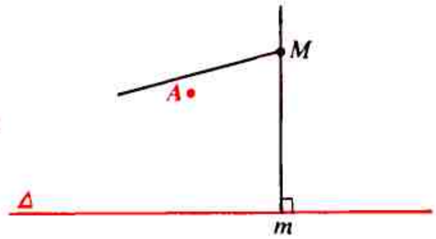
Soit Δ une droite et A un point non situé sur Δ.

1° Montrer que l'ensemble des points M du plan équidistants de A et de Δ ($MA = Mm$ sur la figure 11) est une parabole $\mathcal{P}$ (on pourra choisir un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $(Ox) = \Delta$ et $(Oy) = (OA)$). Préciser le sommet, l'axe de la parabole et la tangente au sommet.

2° Montrer que la tangente en un point M de la parabole $\mathcal{P}$ est médiatrice du segment $[A, m]$.

3° A tout point m de Δ on fait correspondre la médiatrice $\mathcal{D}_m$ de $[A, m]$. Montrer que la famille de droites $\mathcal{D}_m$ (m variant sur Δ) est la famille de toutes les tangentes à $\mathcal{P}$.
(La parabole $\mathcal{P}$ s'appelle la **parabole de foyer A et de directrice Δ**.)

Figure 11



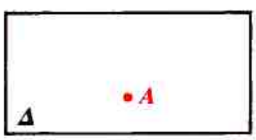
Activité 11 : « Enveloppe »[1]

(D'après un article de M. Gardner : « *origami* ».)

1re partie

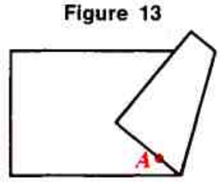
1° Marquer sur une feuille de papier rectangulaire un point A a égale distance des bords de la feuille et à 4 cm du bord Δ (figure 12).

Figure 12



2° Effectuer alors plusieurs pliages amenant le bord Δ sur le point A (figure 13), en traçant à chaque fois la ligne de pliage (figure 14).

Figure 13



[1] Se munir d'une feuille de papier... (à lettres par exemple).

3° Quelle courbe semble se dessiner sur la feuille?

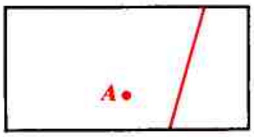


Figure 14

2ᵉ partie

« On a ainsi l'illusion frappante d'une parabole. »

M. GARDNER

Justifier l'affirmation de Gardner[1].

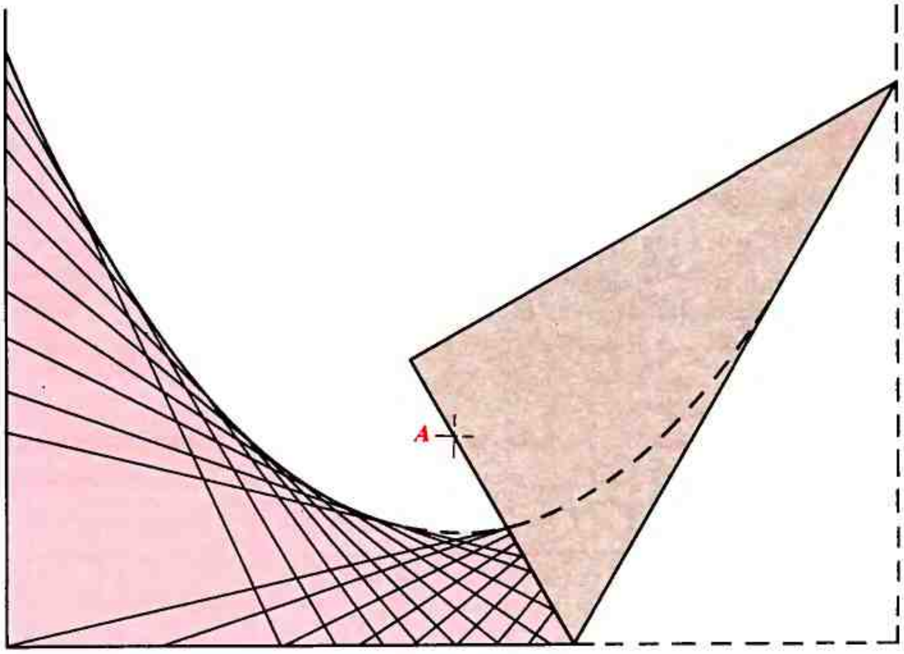


Figure 15

Commentaires

Cet exemple montre qu'une courbe n'est pas nécessairement obtenue « point par point »; elle peut également être définie — dans certaines conditions — par une famille de droites qui devient alors la famille des tangentes. On dit que la courbe est **l'enveloppe de cette famille de droites.**

L'exemple le plus célèbre et le plus familier d'enveloppe est la courbe **« as de carreau »** ou encore **astroïde :**

1. Dans un repère orthonormé (O, I, J), on trace divers segments $[A, B]$ ayant tous la propriété suivante :

$A \in (OI)$, $B \in (OJ)$ et $AB = OI = OJ$.

Quelques tracés effectués dans le premier quadrant ($x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$) conduisent à la figure 16.

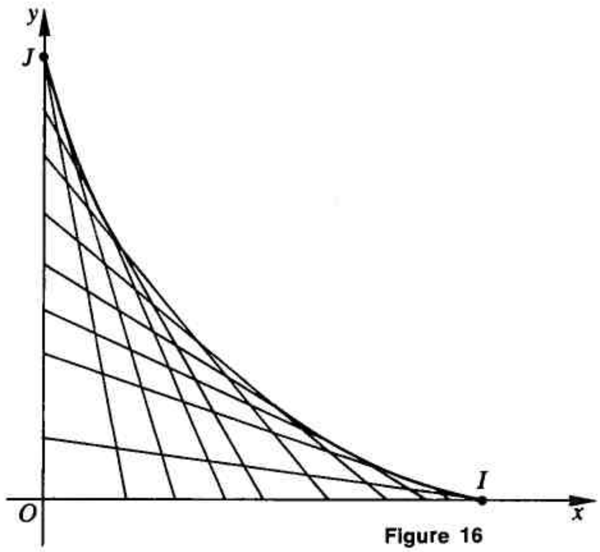


Figure 16

[1] On pourra utiliser les liens étroits entre la symétrie orthogonale et la notion de médiatrice et se souvenir que dans les « petites classes » c'est par **pliage** que s'introduit la symétrie orthogonale....

2. Si l'on multiplie les tracés on obtient alors la figure 17.

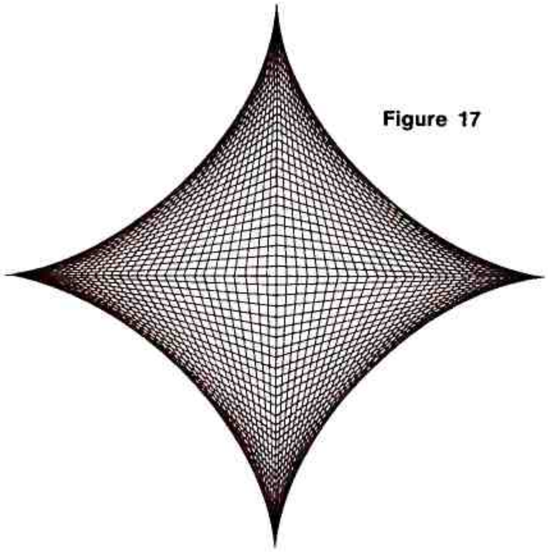
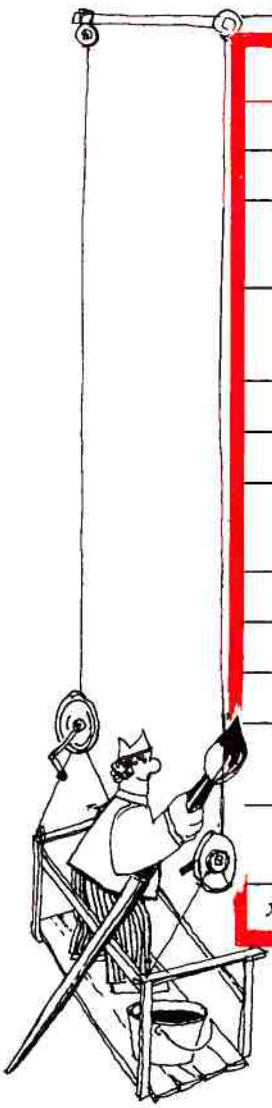


Figure 17

VII. Tableau récapitulatif

Il concerne :

- les dérivées des fonctions usuelles,
- les résultats sur « opérations et fonctions dérivables » (les dérivées de u et v sont notées u' et v').



Fonction	Dérivée	Commentaires	
$x \longmapsto k$	$x \longmapsto 0$	k constante	sur $\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$n \geqslant 1$	
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$	$x \longmapsto \dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$n \geqslant 1$	sur $\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		sur $]0, +\infty[$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto \cos x$		sur $\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto -\sin x$		
$x \longmapsto \tan x$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$		sur $\mathcal{D}_{\tan}$
$u + v$	$u' + v'$		
au	au'	a constante	
uv	$u'v + uv'$		
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$		
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$		
$x \longmapsto u(ax + b)$	$x \longmapsto au'(ax + b)$	a, b constantes	

EXERCICES

Vrai-Faux

1. $\lim\limits_{h \to 0} h \cos h = 0.$

2. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h^2}{|h|} = 2.$

3. $\lim\limits_{h \to 0} (\sqrt{2h-1})^2 = -1.$

4. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0.$

5. La fonction $x \longmapsto x^3$ admet 1 pour nombre dérivé au point 0.

6. La fonction $f : x \longmapsto 1 - 2x + 3x^2$ admet -2 pour nombre dérivé au point 0.

7. Deux fonctions distinctes ont des dérivées distinctes.

8. La dérivée d'une fonction positive est une fonction positive.

9. La fonction $x \longmapsto x^{-1}$ a pour dérivée $x \longmapsto x^{-2}$.

10. La fonction $x \longmapsto \dfrac{(1+x)\sqrt{x}}{x}$ est dérivable en tout point de son ensemble de définition.

11. La fonction $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ admet n pour nombre dérivé au point 1.

12. La fonction $x \longmapsto \sin x \cos x$ a pour dérivée $x \longmapsto \cos x(-\sin x)$.

13. La fonction $x \longmapsto \sin(2x+1)$ a pour dérivée $x \longmapsto \cos(2x+1)$.

14. La fonction $x \longmapsto (2x+1)^5$ a pour dérivée $x \longmapsto 5(2x+1)^4$.

15. Lorsque deux fonctions dérivables f et g vérifient, en un point x_0 :

$$f(x_0) = g(x_0) \quad \text{et} \quad f'(x_0) = g'(x_0),$$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont même tangente au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

16. La courbe d'équation $y = -1 + 7x + x^2$ admet pour tangente en $A(0, -1)$ la droite d'équation $y = -1 + 7x$.

17. $h \longmapsto 4 + 3h + 4h^2$ est le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $x \longmapsto x^2$ au point 2.

Applications

1. Conjecturer les limites en zéro des fonctions suivantes :

a) $h \longmapsto 3\left(\dfrac{1}{2} - h\right) - h^2$; *b*) $h \longmapsto \dfrac{1-h}{2+h^2}$;

c) $h \longmapsto \dfrac{1}{1+\sqrt{|h|}}$; *d*) $h \longmapsto \sqrt{(1-h)^3}$;

e) $h \longmapsto \sin h - \cos h$; *f*) $h \longmapsto \dfrac{h}{\sqrt{h} - h}$;

g) $h \longmapsto \left(h^2 + \dfrac{2}{1-h}\right)^{-1}$; *h*) $h \longmapsto \dfrac{3\cos h - 1}{2\sin h + 1}$.

2. Déterminer pour chacune des fonctions suivantes un nombre k tel que :

$$|f(x)| < k|x| \quad \text{pour} \quad |x| < 1.$$

En déduire dans chaque cas la limite en zéro de la fonction :

a) $f_1 : x \longmapsto 2x^2 + 3x$;

b) $f_2 : x \longmapsto -x^3 + 4x^2 + x$;

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{x}{x+2}$;

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{7x^2}{3x+5}$.

Dans chacun des exercices **3** *et* **4**.

1° Déterminer l'ensemble de définition de la fonction donnée.

2° Conjecturer la limite au point 0 *de cette fonction puis vérifier cette conjecture.*

3. *a*) $h \longmapsto h^2 \sin \dfrac{1}{h}$; *b*) $h \longmapsto \dfrac{2h}{3+\cos h}$.

4. *a*) $h \longmapsto \dfrac{(1-h)^3 - 1}{h}$; *b*) $h \longmapsto \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{h}}$.

5. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $f(-1+h)$ et en déduire le nombre dérivé au point -1 :

a) $x \longmapsto (x-1)^3$; *b*) $x \longmapsto (x^2-1)^2$;

c) $x \longmapsto (1+x)(2-x)$; *d*) $x \longmapsto |x^3|$.

6. Donner sans calcul les nombres dérivés en zéro des fonctions polynomiales suivantes :

a) $x \longmapsto 3+2x-4x^3$; b) $x \longmapsto 2-x^2$;

c) $x \longmapsto -x-\frac{x^2}{2}+x^3$; d) $x \longmapsto (x^2+x)^2$.

(On considérera que l'on dispose d'un développement limité à l'ordre 1 en zéro.)

Pour les exercices 7 *et* 8, *donner, sans calculer de dérivées, les équations des tangentes au point d'abscisse* $x_0=0$ *pour les courbes d'équations suivantes :*

7. a) $y=2+x+x^{1987}$; b) $y=2x+3x^{22}$;

c) $y=3+\frac{x^3}{3}$; d) $y=-3-2x+5x^3$.

8. a) $y=-2x+x^4-1$; b) $y=1-x^3+\frac{x}{2}-x^2$;

c) $y=(1-x)(2-x)$; d) $y=x^3$.

Dans les exercices 9 *à* 13, *déterminer le ou les intervalles de* $\mathbb{R}$ *sur le(s)quel(s) les fonctions f suivantes sont dérivables et expliciter* $f'(x)$.

9. a) $x \longmapsto 4x^2-3x+1$;

b) $x \longmapsto -2x^3+\frac{5}{2}x^2-x+4$;

c) $x \longmapsto 2x-4+\frac{3}{x}$; d) $x \longmapsto \sqrt{2x+5}$.

10. a) $x \longmapsto \frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2+\sqrt{2}x-7$;

b) $x \longmapsto 2x+7+\frac{1}{x}$;

c) $x \longmapsto \sqrt{3}x-1+\sqrt{x}$;

d) $x \longmapsto \sqrt{3-2x}$;

e) $x \longmapsto (4-3x)^2$;

f) $x \longmapsto 8x+\sqrt{x}+\frac{1}{x+1}$.

11. a) $x \longmapsto (2x+3)(3x-7)$;

b) $x \longmapsto (5x-4)\left(1-\frac{x}{2}\right)$;

c) $x \longmapsto \sqrt{x}(3-4x)$;

d) $x \longmapsto \frac{2x+1}{3x-1}$; e) $x \longmapsto \frac{3x-7}{2-5x}$.

12. a) $x \longmapsto \frac{2x^2-5x+3}{2x-3}$; b) $x \longmapsto \frac{2x+1}{x^2-4}$;

c) $x \longmapsto \sin\frac{x}{2}+\cos 2x$;

d) $x \longmapsto x+\sin^2 x-\cos x$.

13. a) $x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x+1}}$; b) $x \longmapsto \sin x \cos 2x$;

c) $x \longmapsto \frac{1}{x^2+x-2}$; d) $x \longmapsto \frac{3\cos x-1}{2\sin x+1}$.

14. Calculer les nombres dérivés de f en -1 et 2 et donner les équations des tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points correspondants pour :

a) $f(x)=3x^2-x$; b) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}$.

15. Même exercice avec :

a) $f(x)=\sqrt{x+2}$; b) $f(x)=\frac{x+3}{x+2}$.

16. Retrouver la dérivée de $\frac{u}{v}$ en écrivant $\frac{u}{v}\times v=u$ pour des fonctions u et v de dérivées u' et v'.

17. Donner dans chaque cas plusieurs fonctions dont la dérivée soit la fonction donnée :

a) $f_1 : x \longmapsto 2x$; b) $f_2 : x \longmapsto x^2+1$;

c) $f_3 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$; d) $f_4 : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$.

Exercices

• Limites en zéro

Dans les exercices 18 *et* 19 :

1° *déterminer l'ensemble de définition de la fonction donnée,*

2° *conjecturer la limite au point* 0 *de cette fonction puis vérifier cette conjecture.*

18. $h \longmapsto \frac{(2-h)^2-4}{\sqrt{h}}$; $h \longmapsto \frac{\sqrt{1+h^2}-1}{h}$.

19. $h \longmapsto \frac{1}{1-\frac{h}{h^2-h}}$; $h \longmapsto \frac{h}{\sqrt{1+h}-1}$.

20. On désigne par $P(x)$ le polynôme de degré 4 suivant : $x^4+2x^3-3x^2+3x-7$.

Le réel a étant fixé et n un entier inférieur ou égal à 4 :

1° Montrer que $h \longmapsto |(a+h)^n-a^n|$ est majorée pour $|h|<1$, par une fonction de la forme $h \longmapsto nk|h|$, où k est un nombre dépendant de a.

2° En déduire que $|P(a+h)-P(a)|$ admet un majorant de la forme $k|h|$ dans les mêmes conditions. Conclure pour la limite en zéro de $h \longmapsto P(a+h)$.

21. Dans chacun des cas suivants, on déterminera un nombre a et un nombre k tels que : $|f(x)|<k|x|^n$, ou $|f(x)|<k\sqrt{|x|}$, $(n\in\mathbb{N}^*)$, pour $|x|<a$ et on en déduira la limite en zéro de la fonction considérée :

a) $f_1 : x \longmapsto 10^{-4}x^3-2x^2$;

b) $f_2 : x \longmapsto x-2\sqrt{x}$;

c) $f_3 : x \longmapsto 0{,}07x^2-\dfrac{x^4}{7}$; *d*) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{3x^2}{4x-1}$.

• Fonction dérivée

Dans les exercices **22** *à* **31**, *on déterminera dans chaque cas l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée.*

22. *a*) $x \longmapsto -1-x+(1-x)(3-x)$;

b) $x \longmapsto x-\sqrt{1-x}$;

c) $x \longmapsto x^3(1+\sqrt{x})$; *d*) $x \longmapsto \sin\left(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

23. *a*) $x \longmapsto 2x^3-x^2\sqrt{x}$; *b*) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$;

c) $x \longmapsto (3x+2)^2+2$; *d*) $x \longmapsto 3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

24. *a*) $f_1 : t \longmapsto \cos\left(3t-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

b) $f_2 : t \longmapsto 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{t}{2}\right)$;

c) $f_3 : t \longmapsto \tan\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)+\tan 2t$;

d) $f_4 : t \longmapsto \sin 2t\cos 3t$.

25. *a*) $x \longmapsto \dfrac{1}{3x-1}$; *b*) $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1}{3x-1}}$;

c) $x \longmapsto (3x-1)^5$; *d*) $x \longmapsto 3\sin(3x-1)-1$.

26. *a*) $x \longmapsto \left(0{,}5-\dfrac{x}{10}\right)^2$;

b) $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{x}+2\right)(\sqrt{x}+1)$;

c) $x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x^2-2x+7}$; *d*) $x \longmapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

27. *a*) $x \longmapsto (x-1)^2(3-x)^3$; *b*) $x \longmapsto \dfrac{(x-1)^2}{(3-x)^2}$;

c) $x \longmapsto \sqrt{x-1}\sqrt{3-x}$; *d*) $x \longmapsto \dfrac{1+2\sin 2x}{\cos x}$.

28. *a*) $f : x \longmapsto \left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)(x+\sqrt{x})$;

b) $g : x \longmapsto (\sin x+\cos x)^2$;

c) $h : x \longmapsto \dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$;

d) $i : x \longmapsto (1-2x)^5(1-3x)^4$.

29. *a*) $f_1 : x \longmapsto (x-1)^4(x+1)^4$;

b) $f_2 : x \longmapsto 4x^2\sqrt{x}$;

c) $f_3 : x \longmapsto (2x+3)^3(1-3x)^5$;

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{(2x+3)^3}{(1-3x)^5}$;

e) $f_5 : x \longmapsto \left(\dfrac{x+3}{1-x}\right)^3$;

f) $f_6 : x \longmapsto (2x+3)\sqrt{2x+3}$.

30. *a*) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+2\sqrt{3x-5}}$; *b*) $x \longmapsto \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x+1}$;

c) $x \longmapsto \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x-2)}$; *d*) $x \longmapsto (1-x)^{-5}$.

31. *a*) $x \longmapsto (x^2+x+1)^2$; *b*) $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1}{3-5x}}$;

c) $x \longmapsto (3-2x)^{-3}$; *d*) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$.

32. Montrer que les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{3x-1}$ et $x \longmapsto \dfrac{x}{x-\dfrac{1}{3}}$ ont même dérivée sans calculer leurs dérivées.

33. On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{2x^2-x+4}{x+1}.$$

1° Dériver f.

2° *a*) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}.$$

b) Dériver f en utilisant cette dernière écriture. Comparer avec le résultat obtenu en *1°*.

34. On convient d'écrire :

$$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \quad (\text{puisque } (\sqrt{x})^2=x).$$

Montrer que la formule « $x \longmapsto x^n$ a pour dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$ » s'applique pour $n=\dfrac{1}{2}$.

35. Les fonctions u, v, w étant dérivables sur un intervalle I, calculer la dérivée du produit $p=uvw$.

En déduire une expression simple de $\dfrac{p'}{p}$.

Application : Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto x^2\sin x\cos x$;

b) $x \longmapsto (x-1)(x-2)(x-3)$;

c) $x \longmapsto x^3(x+1)^2(x+3)^2$.

36. Soit f un trinôme $x \longmapsto ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$ admettant deux racines **distinctes** x_1 et x_2.

1° Montrer que $f'(x_1)$ et $f'(x_2)$ ne sont pas nuls.

2° Montrer que $\dfrac{x_1}{f'(x_1)}+\dfrac{x_2}{f'(x_2)}=\dfrac{1}{a}$.

37. *1°* Soit $f(x)$ le trinôme $4x^2+12x+5$.
Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x+1)-f(x-1)=2f'(x).$$

Illustrer cette propriété par un schéma.

2° Démontrer que pour tout trinôme $f(x)$, pour tout réel x_0 et pour tout réel h, on a :

$$f(x_0+h)-f(x_0-h)=2hf'(x_0).$$

Énoncer la propriété géométrique correspondante concernant la courbe représentative de f.

38. Soit f une fonction dérivable sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ tel que pour tout x de D, $-x$ appartient à D.
Montrer que si f est paire (respectivement impaire), alors f' est impaire (respectivement paire).
(On étudiera la dérivée de $x \longmapsto f(-x)$.)

39. Montrer que si une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est périodique, de période T, dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa fonction dérivée est également périodique de période T.

40. Soit P un polynôme et a un nombre réel.

1° Montrer que s'il existe un polynôme Q tel que, pour tout réel x, $P(x)=(x-a)^2Q(x)$ (c'est-à-dire $P(x)$ est factorisable par $(x-a)^2$), alors $P'(a)=0$.

2° Réciproquement, si le polynôme P vérifie :

$$P(a)=P'(a)=0 \ ,$$

montrer que $P(x)$ est factorisable par $(x-a)^2$.

Application : Montrer que $x^4-2x^3-7x^2+20x-12$ est factorisable par $(x-2)^2$.
Factoriser ensuite $P(x)$ complètement.

41. Soit P un polynôme de degré 3 admettant trois racines **distinctes** x_1, x_2 et x_3.

1° Contrôler à l'aide du résultat de l'exercice précédent que P' ne s'annule ni en x_1, ni en x_2, ni en x_3.

2° Montrer que : $\dfrac{x_1}{P'(x_1)}+\dfrac{x_2}{P'(x_2)}+\dfrac{x_3}{P'(x_3)}=0.$

42. On se propose d'étudier le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n=\sqrt{n^2+n}-n$.

1° Montrer qu'on peut écrire : $u_n=n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1\right)$.

2° En utilisant le développement limité d'ordre 1 de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ au point 1, montrer que l'on a : $u_n=\dfrac{1}{2}+v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$.

3° Déterminer le comportement à l'infini de la suite (u_n).

•Dérivées successives

Dans les exercices suivants, on note f'' la dérivée de la fonction f', lorsqu'elle existe, appelée encore « dérivée seconde » de f, puis de proche en proche f''' la dérivée de f'' ou « dérivée troisième » de f, etc.

43. Déterminer la dérivée d'ordre 4 du polynôme suivant :

$$x \longmapsto 7x^4-12x^3+\frac{x^2}{3}-13x+87.$$

44. Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :

a) $x \longmapsto \sin x$; *b*) $x \longmapsto \cos 2x$.

45. *1°* Calculer les dérivées d'ordre 4 des fonctions :

$$f_1 : x \longmapsto \frac{1}{1+x} \ ; \quad f_2 : x \longmapsto \frac{1}{x-1}.$$

En déduire la dérivée d'ordre 4 de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x}{1-x^2}$ après avoir mis $f(x)$ sous la forme :

$$\frac{a}{1+x}+\frac{b}{x-1}.$$

2° Faire les calculs pour l'ordre 5 et généraliser pour l'ordre n.

46. *1°* Montrer qu'un polynôme $P(x)$ de degré 2 peut s'écrire :

$$P(x)=P(0)+xP'(0)+\frac{x^2}{2}P''(0).$$

2° Montrer qu'un polynôme $Q(x)$ de degré 3 peut s'écrire :

$$Q(x)=Q(0)+xQ'(0)+\frac{x^2}{2}Q''(0)+\frac{x^3}{6}Q'''(0).$$

47. On note f'' la dérivée de f'.
Si f est un polynôme de degré $n (n\geqslant 3)$ et si les polynômes f, f', f'' s'annulent en a, montrer que $f(x)$ est factorisable par $(x-a)^3$.

48. *1°* Calculer la dérivée de la fonction f_5 définie par :

$$f_5(x)=1+x+\frac{x^2}{1\times 2}+\frac{x^3}{1\times 2\times 3}+\frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{x^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}.$$

Calculer $f_5'(x)$.

2° On pose $P_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$ « $n!$ » désignant le produit des n premiers entiers non nuls :

$$1\times 2\times 3\times \ldots \times (n-1)\times n \quad \text{et} \quad 0!=1 \ .$$

Montrer que $P_n'=P_{n-1}$, avec $n\geqslant 1$.

3° On pose $f_n=P_0+P_1+P_2+\ldots+P_{n-1}+P_n$.
Montrer que $f_n=f_{n-1}+P_n$ puis que $f_n'=f_{n-1}$.

• Sur les tangentes

49. On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=f(x)$. Donner, sans calculer la dérivée de f, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

a) $f(x)=\frac{1}{2}-4x+x^2-x^3+\frac{x^5}{5}$;

b) $f(x)=\left(\frac{1}{2}-x\right)(1-2x)(3-x)$;

c) $f(x)=2x-\left(1+\frac{x}{3}\right)^2$; *d*) $f(x)=(2-x)^3$.

50. Peut-on employer le même procédé que dans l'exercice précédent pour :

a) $f(x)=1+x+x\sqrt{|x|}$; *b*) $f(x)=1+x+\sqrt{1+x}$;

c) $f(x)=1+x+\sqrt{x}$; *d*) $f(x)=1+x+\frac{1}{1+x}$;

e) $f(x)=x\sqrt{|x|}$.

51. Déterminer les réels a, b et c tels que la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ passe par les points $A(3, 0)$ et $B(-5, 0)$ et que la tangente en A ait pour coefficient directeur -3.

52. Déterminer les réels a, b, c et d tels que la courbe d'équation $y=ax^3+bx^2+cx+d$ passe par l'origine du repère, le point $A(1, 1)$ et admette en ces deux points une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

53. Soit f la fonction $x \longmapsto x^3-3x^2+2$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique. Déterminer les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à la droite d'équation $y=9x+4$.

54. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y=2x^2+x+1$ dans un repère orthonormé et A le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse nulle.
Déterminer le point de $\mathcal{P}$ en lequel la tangente est orthogonale à la tangente en A.

55. Trouver les points de la représentation graphique de la fonction $f :\ \longmapsto 5x^2-6x+5$, pour lesquels la tangente passe par l'origine du repère.

56. Même exercice avec :

a) $f(x)=3x^3+14x^2+3x+8$;

b) $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$.

57. Démontrer que les tangentes aux points d'intersection des paraboles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $y=x^2$ et $y=-\frac{1}{3}x^2+1$, dans un repère orthonormé, sont orthogonales.

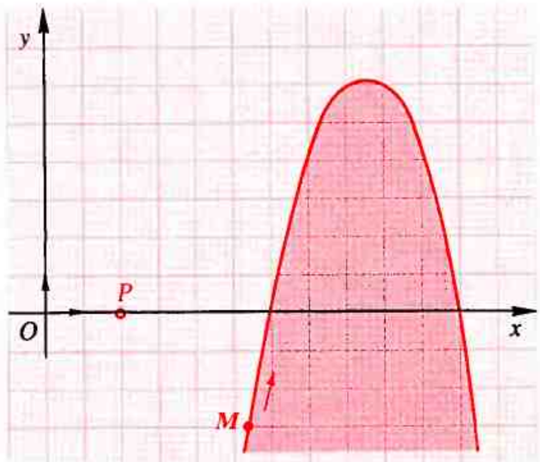
58. Montrer que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=-x^4+2x^2+x$ au point $A(-1, 0)$ est aussi tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en un autre point que l'on précisera.

59. On désigne par M et N les points de même abscisse x_0 appartenant respectivement aux courbes d'équation $y=x^3+6x^2+x+1$ et $y=3x^2+25x+10$. Déterminer x_0 pour que les tangentes en M et N à ces courbes soient parallèles.

60. Trouver l'équation de la droite tangente à la fois aux paraboles d'équation $y=x^2$ et $y=x^2-2x+3$. Faire une représentation graphique des deux paraboles et de la tangente commune sur un même dessin.

61. Déterminer la (ou les) tangente(s) commune(s) aux courbes d'équations $y=x^2$ et $y=\frac{1}{x}$.

62. Un mobile M décrit la parabole d'équation $y=-x^2+17x-66$ dans le sens des « x croissants ». Un observateur est placé en $P(2, 0)$.
Déterminer les valeurs de l'abscisse de M pour lesquelles M est « visible » depuis P.



63. Déterminer les tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=f(x)$ issues du point $A(x_0, y_0)$ dans les cas suivants :

a) $f(x)=3x^2-4x+2$, $A(-1, -3)$;

b) $f(x)=\frac{3x-5}{x-2}$, $A(0, 3)$.

64. Déterminer la plus petite valeur de m telle que, pour tout $x>0$, $mx-1+\frac{1}{x}>0$.

65. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ et A le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse x_0.
Montrer que l'équation de $\mathcal{P}$ s'écrit :

$$y=ax_0^2+bx_0+c+(2ax_0+b)(x-x_0)+a(x-x_0)^2.$$

En déduire alors qu'une droite Δ passant par A, de coefficient directeur m, coupe $\mathcal{P}$ en deux points confondus si et seulement si Δ est tangente en A à $\mathcal{P}$.

Application

1° Trouver les équations des tangentes issues du point $A(1, -1)$ à la parabole d'équation $y=x^2+x+1$.

2° Trouver l'équation de la tangente commune aux paraboles d'équations :

$$y=x^2-2x+5 \quad \text{et} \quad y=x^2-x+3$$

et donner les coordonnées des points de contact.

66. On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=x^3$.

1° a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point M d'abscisse a.

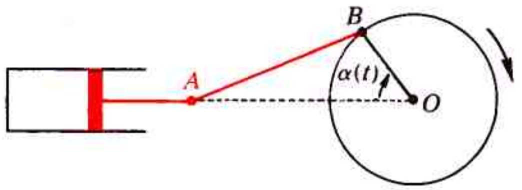
b) Quelles sont les coordonnées du point M' où T recoupe $\mathcal{C}$?

2° Le 1° permet d'associer à chaque point M de $\mathcal{C}$ un point M' de $\mathcal{C}$. Montrer qu'à trois points alignés de $\mathcal{C}$ sont associés trois points alignés.

Problèmes

67. (D'après « *Problem Book for First year calculus* » G. W. BLUMAN. Springer.

On considère le mécanisme décrit dans la figure ci-dessous ($OA=2$ dm , $AB=6$ dm).



La roue motrice tourne dans le sens indirect à la vitesse de 4 tours par seconde (ou encore 8π radians par seconde).
A l'instant t, on note $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})=\alpha(t)$; ainsi $\alpha'(t)=8\pi$. La distance OA est notée $x(t)$; les conditions physiques nous conduisent à admettre que la fonction $t \longmapsto x(t)$ est dérivable.

1° En appliquant la relation de Pythagore généralisée dans le triangle OAB, montrer que :

$$x^2(t)-4x(t)\cos\alpha(t)-32=0.$$

2° On rappelle que la vitesse du piston à l'instant t est $x'(t)$.
Montrer que :

$$x'(t)[2\cos\alpha(t)-x(t)]=16\pi x(t)\sin\alpha(t).$$

3° Déterminer la vitesse du piston lorsque :

$$\alpha(t)=0 \ , \quad \alpha(t)=\frac{\pi}{2} \ , \quad \alpha(t)=\pi.$$

68. Soit :

- f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{pour } x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

- g la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$.

1° Vérifier que $f=g$.

2° Donner le développement limité à l'ordre 1 la fonction g en 0.

3° En déduire que :

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\varphi(x) \ , \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\varphi(x)=0.$$

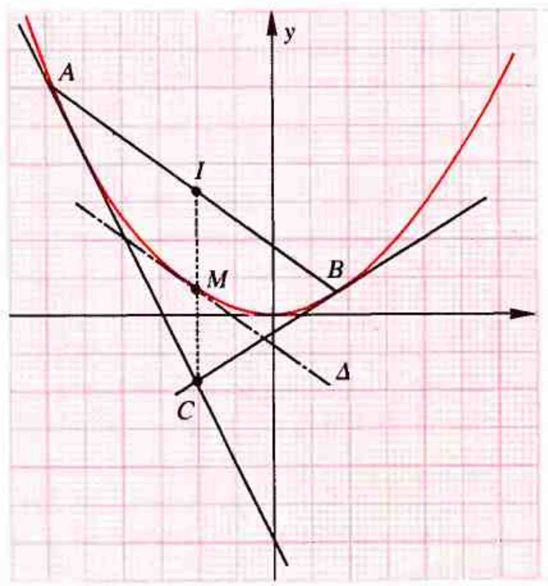
4° a) Montrer que :

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^2}{16}\leqslant\sqrt{1+x}\leqslant 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^2}{16}.$$

b) En déduire une valeur approchée des nombres suivants et indiquer la précision :

$$\sqrt{1{,}04} \ , \ \sqrt{1{,}007} \ , \ \sqrt{0{,}998} \ , \ \sqrt{0{,}9992} \ .$$
$$\sqrt{4{,}0008} \ , \ \sqrt{9{,}0027} \ , \ \sqrt{15{,}992} \ , \ \sqrt{63{,}9996} \ .$$

69. **Avec la parabole**
Soit la fonction $f : x \longmapsto kx^2$ et $\mathcal{T}$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par A et B deux points (distincts) de $\mathcal{T}$ d'abscisses respectives a et b, et par I le milieu de $[A, B]$.



1° Montrer que pour tout couple (a, b) de réels, on a :

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2° Déterminer le point M de $\mathcal{T}$ en lequel la tangente Δ est parallèle à (AB).

3° Écrire les équations des tangentes D et D' aux points A et B de $\mathcal{T}$.
Montrer que le point C commun à D et D' a même abscisse que I et que M est milieu de $[I, C]$.

4° Déduire de ce qui précède la construction de points et de tangentes à une parabole connaissant deux tangentes et leurs points de contact.

70. Avec l'hyperbole

On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{a}{x}$, où a est un réel strictement positif donné. On désigne par $\mathcal{H}_a$ l'hyperbole représentant cette fonction dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans la suite de ce problème, M_0 désigne un point de $\mathcal{H}_a$ d'abscisse x_0, où x_0 est un réel quelconque non nul.

1° *a*) Donner une équation de la tangente Δ à $\mathcal{H}_a$ au point M_0.

b) Δ coupe les droites (Ox) et (Oy) en H et K. Montrer que M_0 est le milieu du segment $[H, K]$.

c) En déduire deux procédés géométriques simples pour construire la tangente à $\mathcal{H}_a$ en M_0.

2° Soit P un point de coordonnées (α, β). On se propose de trouver, suivant la position du point P dans le plan $\mathcal{P}$, le nombre de tangentes qu'on peut mener de ce point à l'hyperbole $\mathcal{H}_a$.

a) Écrire que la tangente Δ en $M_0(x_0, f(x_0))$ à $\mathcal{H}_a$ passe par le point P (on obtient ainsi une équation du second degré d'inconnue x_0).

b) Déterminer la relation que doivent vérifier les coordonnées du point P pour que l'équation précédente admette des solutions. Interpréter géométriquement ce résultat.

3° Peut-on mener deux tangentes orthogonales à l'hyperbole $\mathcal{H}_a$? Justifier votre réponse.

71. On considère les fonctions f_n et g_n définies, pour n entier supérieur ou égal à 2 par :

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \ ;$$
$$g_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}.$$

1° Montrer que, pour tout réel x :

$$f'_n(x) = g_n(x).$$

En déduire une autre expression de $g_n(x)$.

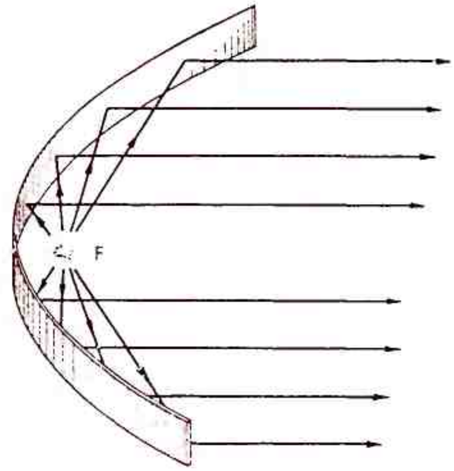
2° On considère les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ définies respectivement par $u_n = f_n\left(\frac{1}{2}\right)$ et $v_n = g_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

Étudier le comportement à l'infini de ces deux suites.

72. Phares, fours solaires et autres miroirs paraboliques

A — L'objet du problème

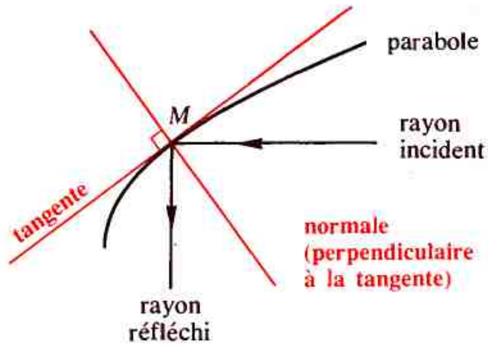
Il s'agit de justifier les affirmations suivantes :
« Si l'on courbe en arc de parabole une étroite bande de métal parfaitement poli, les rayons d'une source lumineuse ponctuelle située au foyer deviennent parallèles à l'axe après s'être réfléchis sur la bande de métal (figure ci-après). Inversement, si un faisceau de rayons parallèle à l'axe de la parabole tombe sur notre bande de métal, les rayons réfléchis se rassembleront en son foyer. »



B — Éléments pour la solution

1° **Parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$.**
Rappelons (cf. activité **10**, *page* 300) *qu'étant donné une droite* $\mathcal{D}$ et un point F non situé sur $\mathcal{D}$, l'ensemble des points M à égale distance de F et de $\mathcal{D}$ est une parabole (appelée parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$). La tangente en M à cette parabole est alors la médiatrice de $[F, m]$ où m est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

2° **Le principe de réflexion.**
Il est décrit par la figure ci-dessous : « le rayon incident et le rayon réfléchi sont symétriques par rapport à la normale ».



C — Applications

On raconte qu'Archimède aurait incendié les bateaux romains de Marcellus, assiégeant Syracuse à l'aide de miroirs disposés en parabole. Expliquer le procédé qui a pu être utilisé.
Citer d'autres applications actuelles.

(D'après « *Courbes remarquables* ». A. MARKOUCHEVITCH. Éditions MIR. Mouscou.)

8 Applications de

« ... Je dérive; quelle force m'entraîne? »
François MAURIAC
Le nœud de vipères

Intentions

Le contenu de ce chapitre repose entièrement sur le principe de Lagrange[1] (admis mais exploré dans le paragraphe introductif) qui permet de **transférer** l'étude (souvent difficile) des variations d'une fonction à celle (en général plus facile) du signe de sa fonction dérivée.
Cet outil fondamental, issu du concept de dérivée, permet alors d'approfondir, avec un point de vue nouveau, l'étude de quelques grands problèmes de l'analyse :

• Optimisation. Il s'agit de la **recherche de maximum ou de minimum** d'une fonction, que nous illustrons dans les domaines les plus divers (cinématique, physique, géométrie, statistiques, économie, etc.).

• Résolution d'équations. Les deux aspects, **qualitatif** (existence d'une solution) et **quantitatif** (détermination de valeurs approchées) peuvent être abordés grâce au **principe de localisation.** Les exemples étudiés, à l'intérieur du chapitre, insistent plus particulièrement sur :
— la **construction de certains algorithmes**[2] de résolution approchée tels que : dichotomie, balayage, méthode des sécantes, ...;
— le **rôle** particulièrement important des **outils de calcul** tels que micro-ordinateur ou calculatrice programmable.

• Comparaison et approximation de fonctions. L'application du principe de Lagrange à une fonction auxiliaire (la différence, le plus souvent) fournit une **méthode** dont on pourra apprécier **l'efficacité** sur quelques exemples (comme la comparaison de divers trajets sur la surface terrestre).
Il est clair que le traitement de tels problèmes nécessite l'étude et la représentation graphique de fonctions. Par rapport aux techniques mises en place dans les chapitres précédents, c'est essentiellement l'**exploitation des résultats sur la dérivation** et l'étude de quelques **exemples de branche infinie** qui vont permettre de préciser certaines propriétés (du point de vue graphique notamment).

[1] LAGRANGE Joseph-Louis (1736-1813) : c'est à l'âge de 19 ans seulement qu'il mit au point sa « méthode de variation » restée connue sous le nom que lui a attribué Euler : « calcul des variations ».

[2] Des compléments sur ce sujet seront apportés dans le chapitre 9 notamment par la méthode de Newton.

la dérivation

« La tangente a plus de puissance que la sécante. »

Victor HUGO
Tas de pierres

Plan du Chapitre

I. Introduction

Les activités de ce paragraphe visent à cerner les **relations** qui peuvent exister **entre les variations d'une fonction dérivable et le signe de sa dérivée.** Ces relations — que décrivent les théorèmes 1 et 2 de ce chapitre — jouent un rôle fondamental dans toute la suite : elles sont explorées ici sous les **divers points de vue** présentés dans le chapitre précédent à propos de la notion de dérivée (numérique, « limite », graphique, cinématique, ...).

0. Bizarre...

Activité 1

Pour chacune des fonctions suivantes, dresser un tableau analogue à celui présenté ci-dessous :

x	
variations de f	
signe de f'	

a) $x \longmapsto -3x^3$; b) $x \longmapsto x^2-1$;
c) $x \longmapsto -2\sin x$; d) $x \longmapsto \sqrt{x-2}$;
e) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$.

Dégager à partir de ces exemples, une loi qui semble lier les variations de ces fonctions et le signe de leur dérivée.

1. De la monotonie au signe de la dérivée

Activité 2

Soit α un réel positif, $\mathcal{D}$ l'une des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$]-\alpha, 0[\ ,\quad]0, \alpha[\ ,\quad]-\alpha, 0[\cup]0, \alpha[\ ,$$

et f une fonction définie et positive sur $\mathcal{D}$.

On suppose que f admet une limite l en zéro :

$$f(h)=l+\varphi(h)\ ;\quad \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0\ .$$

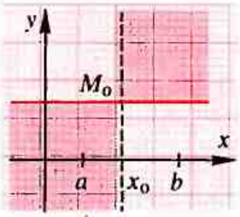
Montrer que l est positif ou nul (on se placera sous l'hypothèse suivante : il existe $k>0$ tel que $|\varphi(h)|\leqslant k\sqrt{|h|}$, pour $h\neq 0$.

Nous admettrons que ce résultat est général : **la limite en zéro d'une fonction positive ou nulle est un réel positif ou nul.**

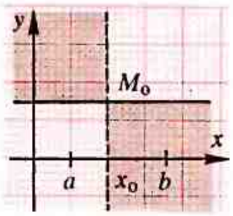
Activité 3

Soit f une fonction **dérivable** sur $[a, b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
On désigne par M_0 (respectivement M_h) le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_0, avec $a\leqslant x_0\leqslant b$ (respectivement x_0+h , avec $a\leqslant x_0+h\leqslant b$ et $h\neq 0$).

La figure 1 définit les domaines S^+ et S^- du plan qui seront utilisés au *2°*.



Le domaine S^+



Le domaine S^-

Figure 1

1° Préciser l'ensemble de définition de la fonction :

$$t : h \longmapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

(fonction taux d'accroissement en x_0).

2° On demande d'établir — dans l'ordre — les résultats proposés dans la colonne de gauche (aspect numérique) et de contrôler qu'effectivement ceux de la colonne de droite correspondent à l'interprétation graphique que l'on peut en donner.

	Aspect numérique	Interprétation graphique
	HYPOTHÈSE 1 : f croissante	
RÉSULTATS	t est positive	Les droites (M_0M_h) sont contenues dans S^+.
RÉSULTATS	$f'(x_0) \geqslant 0$	La tangente en M_0 est contenue dans S^+.
	HYPOTHÈSE 2 : f décroissante	
RÉSULTATS	t est négative	Les droites (M_0M_h) sont contenues dans S^-.
RÉSULTATS	$f'(x_0) \leqslant 0$	La tangente en M_0 est contenues dans S^-.

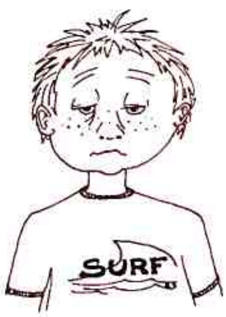
3° En déduire que :

si f est croissante, sa dérivée est positive;
si f est décroissante, sa dérivée est négative.

2. Du signe de la dérivée à la monotonie

Nos préoccupations — maintenant — concernent les propriétés réciproques de celles qui viennent d'être obtenues. Ainsi, il s'agit — par exemple — d'examiner le problème suivant : « **une fonction dérivable sur un intervalle, à dérivée positive est-elle une fonction croissante?** ». Avant toute chose...

Activité 4



Le raisonnement suivant est faux[1]. Expliquer pourquoi.

« Soit f une fonction dérivable sur un intervalle et dont la dérivée est positive. Alors f est croissante. Sinon, f serait décroissante et d'après ce qui précède, sa dérivée serait négative. »

[1] Bien que le résultat obtenu soit vrai...

Le point de vue graphique permet de comprendre l'influence du signe de la dérivée d'une fonction sur ses variations.

En effet, dire qu'une fonction f est croissante sur I, revient à dire que, pour a et b quelconques dans I la sécante (AB) à la courbe (cf. figure 2) est à **coefficient directeur** $\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ **positif.**

De même l'interprétation de la condition « $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x de I » peut être obtenue en terme graphique par : « **en tout point de la courbe représentative, la tangente admet un coefficient directeur positif** ».

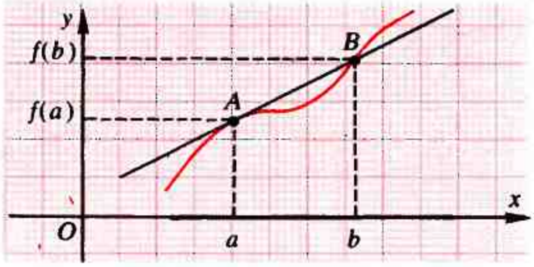


Figure 2

Il est donc clair que si nous arrivons à relier les coefficients directeurs des **sécantes à la courbe** aux coefficients directeurs des **tangentes,** nous pourrons sûrement conclure sur le problème posé.

Activité 5

Dans chacun des cas ci-dessous, il s'agit :

1° de justifier la dérivabilité de f sur I et de calculer $f'(x)$;

2° d'exprimer en fonction de a et b, le coefficient directeur m de la sécante (AB), où A et B sont les points $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ (a et b étant quelconques dans I avec $a<b$);

3° de montrer que l'équation $f'(x)=m$ admet une solution (au moins) dans $]a, b[$;

4° d'interpréter, au moyen d'une représentation graphique, les résultats obtenus.

a) $f(x)=2x^2$, $I=[0, 1]$;

b) $f(x)=-\frac{1}{x}$, $I=[-5, -3]$;

c) $f(x)=x^3-3$, $I=[-1, 1]$;

d) $f(x)=\sqrt{x}$, $I=]0, +\infty[$.

Il ressort de cette activité une propriété des fonctions dérivables sur un intervalle I, que nous exprimerons de deux façons :

- **graphiquement,** pour toute sécante (AB) à la courbe, on peut trouver une tangente qui lui est parallèle (figure 3);
- **numériquement,** quels que soient a et b dans I, avec $a<b$ il existe un réel x_0, $a<x_0<b$, tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0).$$

Il en découle que si f' **est positive sur** I, **alors la fonction** f **est croissante sur** I.

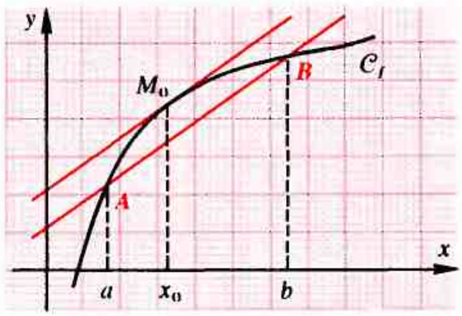


Figure 3

Commentaires

1. Le résultat qui vient d'être décrit porte le nom de **théorème de Rolle.** Il n'est nullement question dans cet ouvrage de prendre appui sur ce théorème pour établir les applications essentielles de la dérivation : sa « découverte » sur quelques exemples précis suffit largement pour comprendre quelles raisons nous conduiront à admettre les théorèmes 1 et 2 du paragraphe suivant.

2. Si l'aspect graphique est particulièrement sensible (on peut imaginer le déplacement d'une règle, toujours parallèle à la sécante à (AB), jusqu'à ce qu'elle coïncide avec une tangente). L'aspect cinématique peut paraître moins immédiat (?). Il signifie, par exemple, qu'un mobile qui effectue un trajet à une **vitesse moyenne de 100 km/h,** atteint nécessairement au cours de ce trajet la **vitesse instantanée 100 km/h.**

II. Variation d'une fonction et recherche d'extremum

1. Monotonie et signe de la dérivée

Les théorèmes suivants[1] établissent des liens entre la monotonie d'une fonction sur un intervalle et le signe de sa dérivée (cf. les activités précédentes).

a. Théorème 1: principe de Lagrange

Soit f une fonction *dérivable* sur un *intervalle* I.

(1) f est *croissante* sur I si et seulement si sa *dérivée est positive* sur I (pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$).

(2) f est *décroissante* sur I si et seulement si sa *dérivée est négative* sur I (pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$).

(3) f est *constante* sur I si et seulement si sa *dérivée est nulle* sur I (pour tout x de I, $f'(x) = 0$).

Remarques

1. Les résultats (2) et (3) découlent de celui énoncé en (1) (cf. exercice 1 ci-dessous).

2. Ces résultats ne sont plus applicables dès que l'on considère des parties de $\mathbb{R}$ autres que des intervalles :

Exemple 1 : La fonction H définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\begin{cases} H(x)=1 & \text{pour } x>0 \\ H(x)=-1 & \text{pour } x<0 \end{cases}$ est dérivable en tout point $x_0 \neq 0$ et $H'(x_0)=0$. Elle n'est pas cependant constante sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 2 : La fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}^*$ et $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} < 0$.
Or cette fonction n'est manifestement pas décroissante « sur $\mathbb{R}^*$ ».

3. Il est tout à fait légitime de s'interroger sur un amendement éventuel de tels résultats, relativement aux fonctions strictement monotones. Avant d'aborder cet aspect un peu plus délicat (théorème 2), il est souhaitable de mémoriser le dialogue suivant :

QUESTION : « Une fonction dérivable et **strictement croissante** sur un intervalle admet-elle une dérivée à valeurs **strictement positives**? ».

RÉPONSE : « Non. Cf. exercices 3 et 4 ci-dessous. »

Exercices

1. En supposant admis le résultat (1), établir les résultats (2) et (3) (introduire la fonction $-f$).

2. Montrer que la fonction $x \longmapsto x^3 - x$ est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$.

3. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dérivable. Pour tout réel x, a-t-on $f'(x) > 0$?

4. Donner un exemple de fonction strictement décroissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée s'annule au moins en un point.

[1] que nous admettrons.

b. Théorème 2 (stricte monotonie)

Soit f une fonction *dérivable* sur un intervalle I.

- **Si f' est *strictement positive* sur I, $\boxed{\textit{sauf}}$ en un nombre *fini* de points où elle *s'annule*, alors f est *strictement croissante* sur I.**
- **Si f' est *strictement négative* sur I, *sauf* en un nombre *fini* de points où elle *s'annule*, alors f est *strictement décroissante* sur I.**

Ce théorème est également admis.

Exemples

1. La fonction $f : x \longmapsto x^5$ admet pour dérivée la fonction $x \longmapsto 5x^4$ qui prend des valeurs strictement positives sauf en 0 (un seul point donc) : la fonction f est strictement croissante.

2. La fonction f représentée figure 4 est strictement croissante sur $[1,11]$; sa dérivée est nulle aux points d'abscisses 2, 4, 6, 8 et 10 (points où la tangente à la courbe est parallèle à (Ox)).

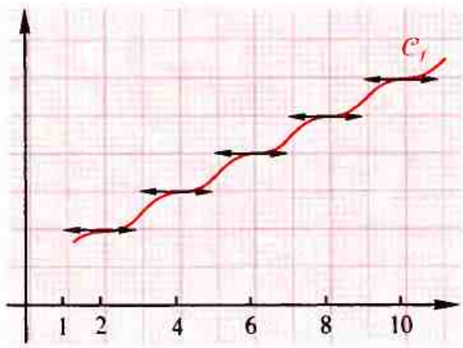


Figure 4

3. Étudions la monotonie de la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : [-10\pi, 10\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + \sin x. \end{aligned}$$

Cette fonction est dérivable et $f'(x) = 1 + \cos x$. Comme, pour tout x, $-1 \leqslant \cos x$, on a $f'(x) \geqslant 0$. De plus l'**équation** $f'(x) = 0$ n'admet qu'un nombre fini de solutions dans $[-10\pi, 10\pi]$, à savoir les nombres :

$$-9\pi, \quad -7\pi, \quad -5\pi, \quad -3\pi, \quad -\pi, \quad \pi, \quad \ldots, \quad 9\pi.$$

Cette fonction est donc strictement croissante sur $[-10\pi, 10\pi]$.

Exercices

5. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que la fonction $x \longmapsto x^{2n+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

6. Étudier la monotonie sur $[-10\pi, 10\pi]$ des fonctions : $f : x \longmapsto x + \cos x$ et $g : x \longmapsto x - \sin x$.

Remarque

On notera que ce théorème sur la stricte monotonie ne donne que des conditions suffisantes (cf. remarque 3, page 315).

2. Etude du sens de variation d'une fonction

Il est naturel d'attendre que les théorèmes précédents constituent un outil efficace dans le traitement du problème : « **Déterminer les intervalles de monotonie d'une fonction dérivable.** » Ce point de vue est développé au moyen d'exemples.

a. L'idée générale

Pour étudier les variations d'une fonction dérivable à partir du signe de sa dérivée, on détermine les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction dérivée ne prend que : soit des valeurs positives, soit des valeurs négatives. Autrement dit, **on détermine les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction dérivée garde un signe constant.**

b. Exemple 1

Variations de $f : x \longmapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 12$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3).$$

Les résultats concernant les variations de f sont présentés sour la forme du **tableau** habituel où, de plus, se trouvent consignés :

- le signe de la fonction f';
- les valeurs de f pour les zéros de la dérivée[1].

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-1	↘	-15	↗	

c. Exemple 2

Variations de $f : x \longmapsto x - 2 + \frac{1}{x}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (comme somme de fonctions dérivables) et, pour tout réel x, non nul, on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}.$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-4	↘	‖	↘	0	↗	

Il n'y a aucune difficulté à étudier le signe de $f'(x)$. On déduit les variations de la fonction.

Commentaires

1. Dans l'exemple 2, la fonction f' est strictement négative sur l'ensemble $]-1, 1[- \{0\}$. Il ne faut pas pour autant en conclure que la fonction f est strictement décroissante sur $]-1, 1[- \{0\}$...

2. Il est clair que lorsqu'on désire utiliser les théorèmes précédents pour étudier les variations d'une fonction dérivable, il convient d'**exprimer $f'(x)$ sous une forme qui permette de déterminer aisément son signe** (forme factorisée par exemple).

3. L'étude du signe de la dérivée n'est pas le seul outil qui conduit à déterminer le sens de variation d'une fonction. En user, par exemple, lorsque la fonction est la composée de deux fonctions reconnues monotones est pour le moins maladroit...

Exercices

Étudier les variations des fonctions ci-après (exercices **7** *à* **12***).*

7. $x \longmapsto \frac{2x-1}{x+2}$;

8. $x \longmapsto x^2 - 5x + 4$;

9. $x \longmapsto \sqrt{2x-3}$;

10. $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$;

11. $x \longmapsto 2x - 3 + \frac{2}{x-1}$;

12. $x \longmapsto x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

13. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Retrouver, avec le signe de la dérivée, les variations du trinôme. (On distinguera $a > 0$ et $a < 0$.)

[1] Zéros de la dérivée = réels pour lesquels la dérivée s'annule.

3. Extremum. Problèmes d'optimisation

a. Notion d'extremum local

Nous avons défini, dans le chapitre 4, la notion d'extrémum d'une fonction sur un **intervalle I précisé à l'avance** (cf. page 175).
Ainsi, par exemple, **sur l'intervalle $I=[a, b]$** (*figure* 5), la fonction f admet un maximum en v et un minimum en u. Les points u_0 et v_0, bien que ne correspondant pas à un extremum de f sur $[a, b]$, jouent cependant un rôle particulier. Ainsi, au voisinage de u_0, on a $f(x) \geqslant f(u_0)$; de façon plus précise, il existe un **intervalle ouvert contenant u_0** sur lequel f admet un minimum en u_0. Nous traduirons une telle situation en disant que f admet sur I un minimum local au point u_0.

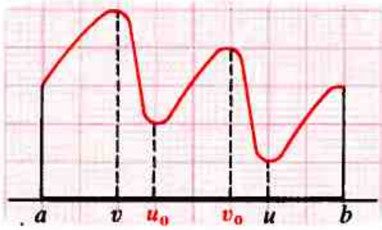


Figure 5

Remarque

Dans ces conditions, la fonction f admet sur I un minimum local au point a. En effet, on peut trouver un intervalle ouvert J contenant a tel que pour tout x de cet intervalle **et de I,** on ait $f(x) \geqslant f(a)$.
De façon plus générale nous adoptons la définition suivante :

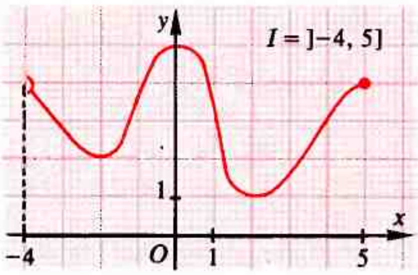
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.
On dit que $f(x_0)$ est un *minimum local* (respectivement *maximum local*) de la fonction f sur I lorsqu'il existe un intervalle *ouvert* J contenant x_0 tel que : pour tout x *commun*, à I et J, $f(x_0) \leqslant f(x)$ (respectivement $f(x_0) \geqslant f(x)$).

Note : Lorsqu'une fonction admet un extrémum sur tout l'intervalle I, on le distingue des autres extrémums locaux éventuels par l'expression **extrémum absolu** sur I.

Exercices

Pour chacune des fonctions représentées graphiquement sur les figures 6 à 8, déterminer (s'ils existent) les extrémums locaux et les extrémums absolus (exercices **14** *à* **16***).*

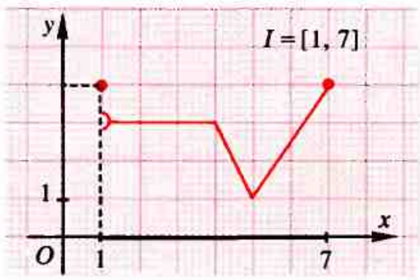
14.



$I=]-4, 5]$.

Figure 6

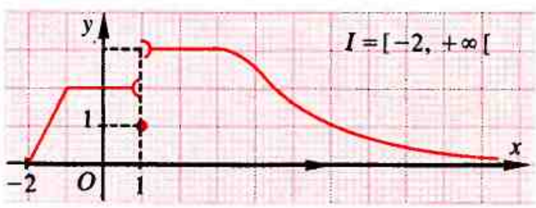
15.



$I=[1, 7]$.

Figure 7

16.



$I=[-2, +\infty[$.

Figure 8

b. Lien avec la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle. Supposons que l'on puisse extraire de son tableau de variation l'un des deux schémas suivants :

x	a	x_0	b
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

Schéma 1 $(a<x_0<b)$

x	a	x_0	b
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

Schéma 2 $(a<x_0<b)$

Il est clair que :

- **schéma 1 :** $f(x_0)$ est un minimum local,
- **schéma 2 :** $f(x_0)$ est un maximum local.

L'examen de la ligne du signe de f' montre que f' s'annule en x_0 avec **changement de signe.** Un tel résultat est général, comme le décrit le théorème suivant que nous admettrons :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle *ouvert* I et x_0 un réel de I. Si la dérivée f' *s'annule en x_0 en changeant de signe,* alors $f(x_0)$ est un *extrémum local* de f sur I.

Lorsque l'on souhaite déterminer les extrémums locaux d'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert — en dehors de la technique suggérée par la figure 9 — le théorème suivant (également admis) permet d'effectuer une **première sélection.**

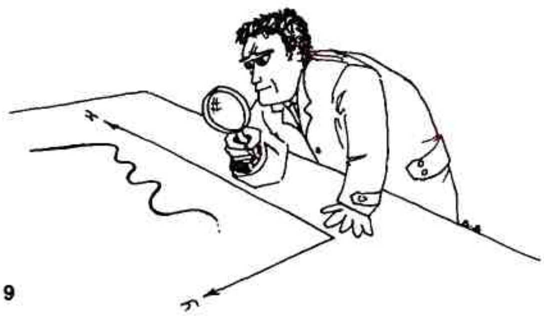


Figure 9

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle *ouvert* I. *Si* f admet un *extrémum local* en un point x_0 de I, *alors* $f'(x_0)=0$.

Du point de vue graphique, cela signifie que si un point de la courbe $\mathcal{C}_f$ correspond à un extrémum local, **nécessairement** la tangente en ce point est « horizontale »[1].

Attention : La réciproque de ce théorème est fausse[2] (cf. exercice **17** ci-dessous).

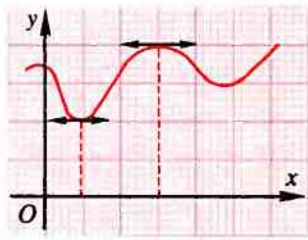


Figure 10

Exercice

17. Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3$. Vérifier qu'elle n'admet pas d'extrémum local, mais que sa dérivée possède un zéro.

---

[1] De façon usuelle, on désigne par « tangente horizontale » une tangente parallèle à (Ox). L'examen sommaire de la figure 10 — le livre étant maintenu dans une position verticale — doit suffire à se convaincre du bien fondé de cet abus de langage.

[2] Cela justifie — a posteriori — l'expression « première sélection »

Commentaires

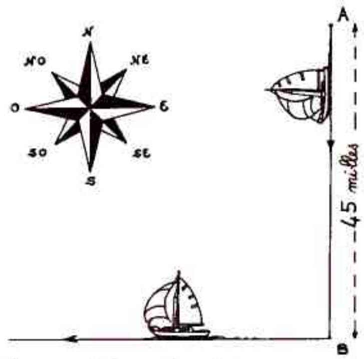
1. Les résultats précédents ne s'appliquent que sur un intervalle **ouvert.** Le traitement d'un problème d'extrémums sur un intervalle $[a, b]$ (par exemple) nécessite donc une **étude supplémentaire** concernant les points a et b.

2. En pratique, pour les fonctions usuelles, l'**élaboration d'un tableau de variations** suffit à déterminer les extrémums locaux d'une fonction donnée.
Cependant, certains problèmes (problèmes d'**optimisation**) ne visent qu'à déterminer — sous certaines conditions — le(s) maximum(s) ou minimum(s) d'une fonction. Comme l'illustrent les exemples qui suivent, c'est la mise en œuvre de ces deux théorèmes qui constitue l'outil essentiel.

c. Problèmes d'optimisation : exemples

Exemple 1 : Les bateaux

A 0 heure, le bateau A est situé à 45 milles au nord du bateau B. Le bateau A se dirige vers le Sud à la vitesse de 9 milles/heure et le bateau B se dirige vers l'Ouest à la vitesse de 12 milles/heure. Quelle distance minimum sépare les bateaux durant leur mouvement?



Désignons par A_0 et B_0 les positions des bateaux A et B à 0 heure, par $A(t)$ et $B(t)$ leurs positions à l'instant t et par $d(t)$ la distance séparant les deux bateaux : $d(t)=A(t)B(t)$.

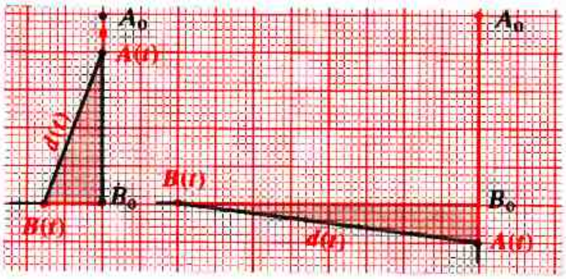


Figure 11

Quelques soient les positions des bateaux nous avons :

$$d(t)=\sqrt{B_0B(t)^2+B_0A(t)^2}\ ,$$

avec $\quad B_0B(t)=12t \quad$ et $\quad B_0A(t)=|45-9t|$.

Ainsi : $\quad$ **$d(t)=\sqrt{(12t)^2+(45-9t)^2}$.**

Comme, pour tout t, $d(t)\geqslant 0$, les fonctions $t \longmapsto d(t)$ et $t \longmapsto d(t)^2$ ont les mêmes variations (et donc les mêmes extrémums).
Or, il est manifestement plus « rusé » d'étudier les variations de la fonction :

$$f : t \longmapsto d(t)^2=(12t)^2+(45-9t)^2.$$

Nous avons $f'(t)=90(5t-9)$ (tous calculs faits). On en déduit les variations de f (tableau ci-contre), d'où il ressort que f admet un minimum absolu atteint lorsque $t_0=1{,}8$.
Le calcul de $f(t_0)$ donne : $f(t_0)=36^2$. Ainsi, **la distance minimum séparant les bateaux est de 36 milles.**

t	0		1,8		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Remarques

1. Le calcul de $d(t)$ sous-entend en fait que la portion de la surface terrestre considérée est assimilée à un plan, ce qui est légitime ici, étant donné les valeurs numériques proposées.

2. Le cas général (cf. exercice **18** ci-dessous) permet de mieux cerner certains calculs.

3. On ne peut se contenter de calculer le zéro de f' : **il est absolument indispensable d'étudier les variations de f**[1].

Exercice

18. Reprendre l'exercice précédent[2] en supposant que les vitesses des bateaux A et B sont respectivement v_A et v_B et que la distance A_0B_0 est égale à d.

La réponse est : $d\sqrt{\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{v_A}{v_B}\right)^2}}$.

[1] Voir à ce sujet « Problème de ficelle » dans le paragraphe « Compléments ».
[2] Avec les restrictions exprimées dans la remarque 1.

Exemple 2

(D'après « *A First Course in Calculus* ». S. LANG. Addison Wesley Publishing Compagny.)

L'intensité de l'éclairement en un point est proportionnel à la puissance de la source lumineuse et inversement proportionnel au carré de la distance à la source lumineuse. On considère deux sources lumineuses, l'une deux fois plus puissante que l'autre et disposées en A et B avec $AB = \ell$. En quel point du segment $]A, B[$ l'intensité est-elle minimum? (On suppose que les intensités s'ajoutent.)

• Supposons — pour fixer les idées — que la source lumineuse la plus puissante soit située en A et désignons par x $(0<x<l)$ la distance d'un point M du segment $]A, B[$ au point A. On a donc $AM = x$ et $BM = l - x$. Les données assurent l'existence d'une constante $k>0$ telle que :

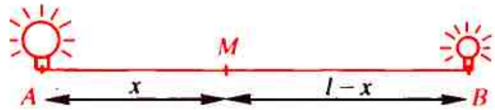


Figure 12

$$\left.\begin{aligned} i_B(M) &= \frac{k}{MB^2} \\ i_A(M) &= \frac{2k}{MA^2} \end{aligned}\right\}$$ (intensités en M des sources lumineuses situées en B et A, celle en A étant 2 fois plus puissante).

La règle d'addition des intensités conduit donc à rechercher sur $]0, l[$ le minimum de :

$$x \longmapsto \frac{2k}{x^2} + \frac{k}{(l-x)^2}$$

ou encore (car $k>0$) **le minimum sur $]0, l[$ de la fonction $f : x \longmapsto \frac{2}{x^2} + \frac{1}{(l-x)^2}$.**

• La fonction f est dérivable sur $]0, l[$ et $f'(x) = \frac{-4}{x^3} + \frac{2}{(l-x)^3}$, soit (par exemple) :

$$f'(x) = \frac{4}{(l-x)^3}\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{l-x}{x}\right)^3\right).$$

La fonction f' a donc le même signe sur $]0, l[$ que $\varphi : x \longmapsto \frac{1}{2} - \left(\frac{l}{x} - 1\right)^3$ (puisque $l - x > 0$).

a) **L'équation $\varphi(x) = 0$** admet une seule solution $x_0 = \frac{l\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}}$ qui appartient à $]0, l[$.

b) Le **signe de φ** peut s'étudier au moyen de ses variations en mettant en jeu la composition des fonctions :

. $x \longmapsto \frac{l}{x} - 1$ est décroissante (au sens strict) sur $]0, l[$;

. $x \longmapsto \left(\frac{l}{x} - 1\right)^3$ est décroissante (au sens strict) sur $]0, l[$ (on compose avec la fonction croissante (au sens strict) sur $\mathbb{R}$: $x \longmapsto x^3$);

. la fonction $x \longmapsto -\left(\frac{l}{x} - 1\right)^3$ est donc strictement croissante sur $]0, l[$ de même que φ.

On en déduit le signe de f' et les variations de f : la fonction f admet un minimum en x_0 sur l'intervalle $]0, l[$.

x	0		x_0		l
φ	‖	↗	0	↗	‖
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖	↘	$f(x_0)$	↗	‖

• **Conclusion : Le point d'intensité minimum est situé à la distance $\frac{l\sqrt[3]{2}}{1+\sqrt[3]{2}}$ de la source la plus puissante.**

(Approximativement[1] : $AM_0 \approx 0{,}56l$
$BM_0 \approx 0{,}44l$).

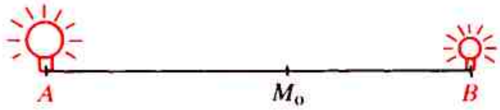


Figure 13

[1] Il est « normal » que le point d'intensité minimum soit plus près de B que de A.

III. Etude de fonctions

1. Les branches infinies

L'étude, en classe de Seconde[1] des **fonctions de référence** $x \longmapsto ax+b$, $x \longmapsto ax^2$, $x \longmapsto ax^3$, $x \longmapsto a\sqrt{x}$ et $x \longmapsto \dfrac{a}{x}$, ainsi que les représentations graphiques des **fonctions trinômes :** $x \longmapsto ax^2+bx+c$ (paraboles) et des **fonctions homographiques :** $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (hyperboles) (chapitres 2 et 3) ont conduit à s'intéresser au problème des branches infinies de la courbe représentative d'une fonction numérique.
Disons — dans une première approche — qu'un branche infinie peut être caractérisée par le fait qu'**une des deux quantités** $|x|$ **ou** $|f(x)|$ (au moins) **devient infiniment grande.**
Les exemples qui suivent ne peuvent prétendre à une étude générale ou systématique de ces situations[2] : ils visent plutôt à dégager quelques **procédés** et **méthodes** qui permettront d'examiner — si besoin est — le comportement de la plupart des fonctions étudiées dans le cadre de cet ouvrage.

a. Les idées générales

Elles sont analogues à celles mises en place pour l'étude du comportement à l'infini des **suites numériques** et de la **limite d'une fonction en zéro :** essentiellement, comparaison avec des fonctions dont le comportement est « connu ». Soulignons cependant, dès à présent certains aspects **spécifiques** des fonctions numériques :

- Au niveau problèmes : les fonctions homographiques $\left(\text{par exemple } x \longmapsto \dfrac{2x}{x-3}\right)$ montrent que l'étude de ce comportement n'est pas nécessairement limité aux grandes valeurs de $|x|$: elle peut également intervenir pour un point à distance finie[3] (ici le « point » 3).
- Au niveau méthodes : il est clair que les procédés qui ont permis d'accéder au tracé de la courbe représentative d'une fonction à partir de celle d'une fonction de référence vont pouvoir s'investir dans la résolution de tels problèmes. A cet égard, le rôle du **changement de repère** — et donc du **changement de variable** — est essentiel.

b. Les résultats de base

Ils concernent les fonctions de référence et ont été pour la plupart explorés en Seconde.

- Limites à l'infini

1. Les fonctions $x \longmapsto \alpha x+\beta$ **($\alpha \neq 0$)**, $x \longmapsto ax^2$, $x \longmapsto ax^3$ **et** $x \longmapsto a\sqrt{x}$ **($a \neq 0$)** ***tendent vers l'infini à l'infini.***

2. Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{a}{\alpha x+\beta}$ **($\alpha \neq 0$)**, $x \longmapsto \dfrac{a}{x^2}$, $x \longmapsto \dfrac{a}{x^3}$ **et** $x \longmapsto \dfrac{a}{\sqrt{x}}$ ***tendent vers zéro à l'infini.***

[1] Livre de Seconde, chapitre 13.
[2] Cette étude est par ailleurs en dehors du programme...
[3] Point à distance finie : nombre réel ordinaire; indique que l'on s'intéresse au comportement de la fonction au voisinage d'un réel x_0 et non à son comportement pour les grandes valeurs de x.

Remarques

1. Pour les fonctions citées en **1**, suivant que l'on s'intéresse au comportement de la fonction en « $+\infty$ » ou en « $-\infty$ », **c'est l'examen du signe de f** qui conduit à préciser (par exemple) si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Ainsi, il est clair que $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^2) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-\sqrt{x}) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2) = +\infty$.

2. Il est indispensable d'associer à ces résultats l'allure de la courbe représentative de ces fonctions pour les grandes valeurs de x.
A ce sujet, la notion d'asymptote qui à été fréquemment utilisée à propos des hyperboles, se généralise pour les fonctions citées en **2.**

Exemples :

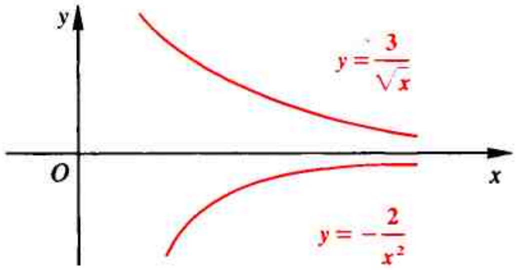


Figure 14

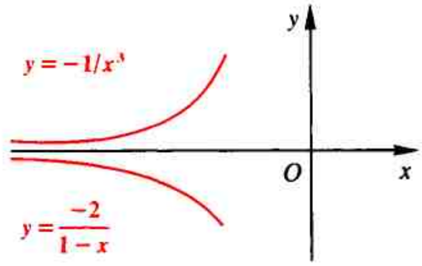


Figure 15

La droite (Ox) est asymptote à la courbe représentative des fonctions :

- $x \longmapsto \frac{3}{\sqrt{x}}$; $x \longmapsto \frac{-2}{x^2}$ (figure 14);
- $x \longmapsto \frac{-1}{x^3}$; $x \longmapsto \frac{-2}{1-x}$ (figure 15).

Exercices

19. Justifier (figures 14 et 15 ci-dessus) les positions relatives de chaque courbe et de la droite (Ox).

20. La figure ci-contre donne l'allure des courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour les grandes valeurs de x.

Identifier parmi les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ celle représentant chacune des fonctions.

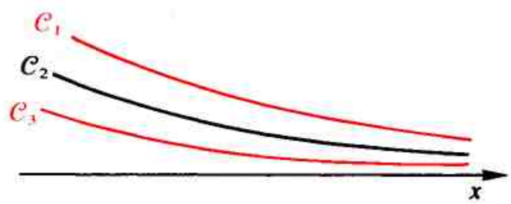


Figure 16

• Limite infinie à l'origine

Les fonctions :

$$x \longmapsto \frac{a}{x}, \quad x \longmapsto \frac{a}{x^2}, \quad x \longmapsto \frac{a}{x^3} \quad \text{et} \quad x \longmapsto \frac{a}{\sqrt{x}}$$

sont de limite infinie en zéro.

De façon comparable à la situation précédente, on dit que **la droite (Oy) est asymptote à la courbe représentative de f** (f désignant une des fonctions ci-dessus).
Cependant, comme l'illustre la figure 17 on est amené à étudier séparément le comportement de f au voisinage de 0 suivant que la variable est strictement positive ou strictement négative. On écrira donc

(figure 17) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$ (pour décrire un tel comportement[1]).

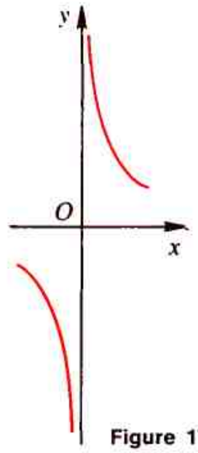


Figure 17

Exercices

21. Quelles sont les limites des fonctions suivantes :

$$x \longmapsto -\frac{4}{x}, \quad x \longmapsto -\frac{1}{x^2},$$
$$x \longmapsto -\frac{2}{x^3}, \quad x \longmapsto \sqrt{-x},$$

lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives?

22. La figure ci-contre donne l'allure des courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$, $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour des valeurs de x positives et proches de 0.
Identifier parmi les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ celle représentant chacune des fonctions.

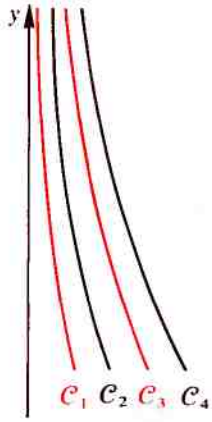


Figure 18

c. Méthode de comparaison : exemples

• Étude de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x}$ au voisinage de 0.

Pour $x>0$, on a $0<\sin x<x$ (cf. chapitre 7), d'où $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\sin x}$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, il est clair que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{\sin x} = +\infty$.

La relation $f(-x) = -f(x)$ montre que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{\sin x} = -\infty$.

• Étude de $f : x \longmapsto 3x + \dfrac{4}{x}$ à l'origine et à l'infini.

La fonction étant impaire, on étudie le comportement de f pour les valeurs positives de x.
Comme $f(x) \geqslant 3x$ (pour $x>0$), on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. De même, l'inégalité $f(x) \geqslant 4/x$ (dans les mêmes conditions) montre que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$.

---
[1] On utilise aussi les notations $\lim\limits_{0^+} f$ et $\lim\limits_{0^-} f$.

On en déduit — puisque f est impaire — que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$.

• **Étude de $f : x \longmapsto 4 - \dfrac{5}{x^2+1}$ à l'infini.**

On peut se douter que $f(x)$ approche le nombre 4 pour de grandes valeurs de x. Étudions alors $|f(x)-4|$: $|f(x)-4| = \dfrac{5}{x^2+1} \leqslant \dfrac{5}{x^2}$ (puisque $x^2+1 \geqslant x^2$).

On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)-4| = 0$, ce que l'on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$.

Pour des raisons de parité évidentes : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$.

Remarques

1. Les exemples précédents font admettre, de façon plus ou moins implicite, que les règles de comparaison mises en œuvre lors de l'étude du comportement des suites à l'infini ou des fonctions numériques au voisinage de 0, peuvent être adaptées à l'étude des **branches infinies.**

2. On aura pu remarquer la simplicité des majorations ou minorations effectuées dans chacun des exemples précédents. Cela n'a rien de fortuit : conformémemt au programme, nous nous limiterons dans les exercices et problèmes à venir à ce type de comparaison.

d. Méthode du changement de variable

Elle est basée sur la propriété suivante que l'on admettra facilement : **« étudier le comportement de la fonction $x \longmapsto f(x)$ au voisinage de x_0 revient à étudier le comportement de $h \longmapsto f(x_0+h)$ au voisinage de 0 ».** Cela résulte du **changement de variable** $x = x_0 + h$.

• **Étude de $f : x \longmapsto \dfrac{-3}{(2x+1)^2}$ au voisinage de $x_0 = -\dfrac{1}{2}$.**

Effectuons le **changement de variable** $x = -\dfrac{1}{2} + h$.

On a alors $\dfrac{-3}{(2x+1)^2} = \dfrac{-3}{4h^2}$. Comme $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \left(\dfrac{-3}{4h^2}\right) = -\infty$, il vient $\lim\limits_{\substack{x \to -1/2 \\ x>-1/2}} f(x) = -\infty$. Pour des raisons analogues, on a $\lim\limits_{\substack{x \to -1/2 \\ x<-1/2}} f(x) = -\infty$.

• **Étude de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-x_0} + B(x)$, où B est bornée au voisinage de x_0 $(a \neq 0)$.**

Dire que B est bornée au voisinage de x_0, revient à dire qu'il existe un intervalle $[x_0-\alpha\ ,\ x_0+\alpha]$ sur lequel $|B(x)| \leqslant M$ (M réel positif). On obtient alors (en écrivant $-M \leqslant B(x) \leqslant M$) :

$$-M + \frac{1}{x-x_0} \leqslant f(x) \leqslant M + \frac{1}{x-x_0}.$$

D'où, avec le changement de variable $x = x_0 + h$:

$$-M + \frac{1}{h} \leqslant f(x_0+h) \leqslant M + \frac{1}{h}\ ,$$

à condition que $|h| \leqslant \alpha$.

. Supposons $h>0$; alors pour h suffisamment petit nous pouvons **minorer** $-M + \dfrac{1}{h}$ par $\dfrac{1/2}{h}$ $\left(\text{on pourra vérifier que l'inégalité } \dfrac{1/2}{h} \leqslant -M + \dfrac{1}{h} \text{ est vraie pour } 0 < h \leqslant \dfrac{1}{2M}\right)$.

Il en découle que, sous les mêmes conditions, $\frac{1/2}{h} \leqslant f(x_0+h)$ et donc que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} f(x_0+h) = +\infty$.

. Pour $h<0$, on établit de même une **majoration** $f(x_0+h) < \frac{1}{2h}$, avec $|h|$ suffisamment petit, d'où il résulte $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} f(x_0+h) = -\infty$.

Remarques

1. On retiendra du deuxième exemple l'idée générale suivante : **soit φ une fonction pouvant s'écrire au voisinage de 0 sous la forme $\varphi(h) = \Omega(h) + B(h)$ $(h \neq 0)$ où :**

- **Ω est une des fonctions** $h \longmapsto \frac{a}{h}$, $h \longmapsto \frac{a}{h^2}$, $h \longmapsto \frac{a}{h^3}$, $h \longmapsto \frac{a}{\sqrt{h}}$;
- **B est une fonction bornée.**

Alors **φ admet la même limite infinie en zéro que Ω.** Ceci généralise l'étude précédente de :

$$h \longmapsto \frac{1}{h} + B(h).$$

2. Le changement de variable $x = x_0 + h$ permet de transférer l'étude du comportement d'une fonction f en x_0, à celui de $h \longmapsto f(x_0+h)$ en 0 (cf. ci-dessus). Il s'adapte donc à l'étude de fonctions pouvant s'écrire :

$$\left.\begin{array}{l} x \longmapsto \dfrac{a}{(x-x_0)^n} + B(x) \\ x \longmapsto \dfrac{a}{\sqrt{x-x_0}} + B(x) \end{array}\right\} \begin{array}{l} n \in \{1; 2; 3\} \\ B \text{ étant une fonction bornée au voisinage de } x_0. \end{array}$$

2. Exemples de cubiques[(*)]

- **La fonction $f : x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 2$.**

— En tant que fonction polynôme, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2),$$

ce qui conduit au tableau de variations ci-contre :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

— En ce qui concerne les branches infinies, la transformation d'écriture :

$$x^3 - 3x^2 + 2 = x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$$

laisse supposer que $f(x)$ a le même comportement que x^3 pour les grandes valeurs de x et donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Ceci peut être contrôlé au moyen de majorations et de minorations :

. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 = x^2(x-3) + 2 \geqslant x^2 + 2$ **pour** $x \geqslant 4$ (par exemple), d'où $f(x) \geqslant x^2$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(*) Cubique : courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 3.

. On a $f(x) \leqslant x^3$ dès que $2-3x^2 \leqslant 0$, ce qui se produit — par exemple — pour $|x| \geqslant 2$. Ainsi, comme $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$, il vient $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

— Le calcul des racines de l'équation $f(x)=0$ (solutions : 1, $\alpha = 1-\sqrt{3}$, $\beta = 1+\sqrt{3}$) permet de préciser le tracé de la courbe $\mathcal{C}_f$ (figure 19), où il semble raisonnable de conjecturer que le point $\Omega(1, 0)$ est **centre de symétrie** de la courbe représentative (cf. exercices **22** et **23** ci-dessous).

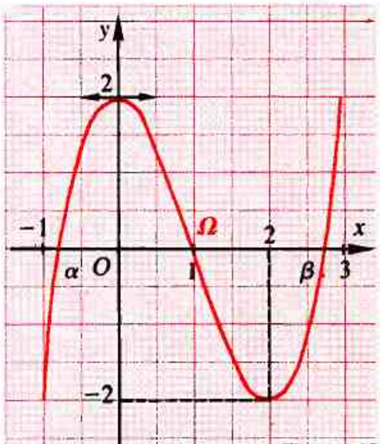


Figure 19

Exercices

22. Écrire l'équation de $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ et en déduire que Ω est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

23. Retrouver le résultat précédent par le calcul de $f(2-x)$ (on pourra faire référence au théorème, page 109 du chapitre 3).

• **La fonction $f : x \longmapsto x^3+2x+3$.**

— Cette fonction définie, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 3x^2+2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

— L'étude des branches infinies procède de la même idée que précédemment :

. pour $x \geqslant 0$, $f(x) = x^3+2x+3 \geqslant x^3$, d'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

. on a $f(x) \leqslant x^3$ lorsque $2x+3 \leqslant 0$, c'est-à-dire, lorsque $x \leqslant -\dfrac{3}{2}$. Il en découle $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

— Cette étude est complétée par le calcul de quelques valeurs de la fonction et de la dérivée, ce qui permet de préciser quelques points de la courbe (notamment les points d'intersection avec les axes de coordonnées) et leurs tangentes.

— Il n'y a ici aucune difficulté à contrôler que le point $\Omega(0, 3)$ est centre de symétrie de la courbe puisque, manifestement, la fonction $x \longmapsto f(x)-3$ est impaire.

Commentaire

On trouvera en exercices de fin de chapitre d'autres exemples de **cubiques** et une étude générale concernant :

• l'existence d'un **centre de symétrie Ω**,

• les **positions relatives** de la **courbe** et de la **tangente** au point Ω (voir aussi exercice **24** ci-dessous).

Exercice

24. Soit f la fonction

$$x \longmapsto x^3+2x+3$$

(cf. dernier exemple). En remarquant que :

$$x \longmapsto 3+2x+x^3$$

constitue le développement limité de f en 0, contrôler les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de la tangente en Ω que suggèrent la figure 20.

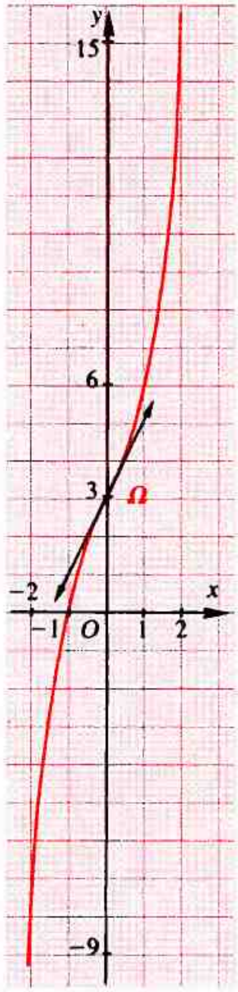


Figure 20

3. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{x-1}$

1° Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ et ne semble pas, à priori, se signaler à notre attention par une propriété de parité, ou de périodicité.

2° Elle est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$, avec

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Il n'y a aucune difficulté à obtenir les variations de f à l'aide du signe de la dérivée (qui est celui de $x(x-2)$). Ces variations, ainsi que les extrémums locaux, sont consignés dans le tableau ci-contre.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	‖	$\searrow$	4	$\nearrow$	

3° Adjoignons à ce tableau, un tableau de valeurs de la fonction f, éventuellement accompagné du coefficient directeur de la tangente correspondant.

x	-3	-1	$\frac{1}{2}$	3	5
$f(x)$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{25}{4}$
$f'(x)$	$\frac{3}{4}$		-3	$\frac{3}{4}$	

4° Étude des branches infinies.

- **Au point 1.** En posant $x=1+h$, il vient :

$$\frac{x^2}{x-1}=\frac{1+2h+h^2}{h}=\frac{1}{h}+2+h.$$

La fonction $\Omega : h \longmapsto \dfrac{1}{h}$ est de limite infinie en zéro, et la fonction $B : h \longmapsto 2+h$ est bornée au voisinage de 0 (par exemple $|B(h)| \leqslant 3$ pour $|h| \leqslant 1$). On en déduit donc que :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x)=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x)=-\infty.$$

- **Pour les grandes valeurs de x.**

Écrivons $f(x)$ sous la forme : $f(x)=\dfrac{x^2-1+1}{x-1}$, d'où $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$. Il apparaît alors que pour les grandes valeurs de $|x|$, $f(x)$ est « proche » de $x+1$ (puisque $\dfrac{1}{x-1}$ est de limite nulle à l'infini).

On en déduit donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$.

Il est cependant possible de préciser — au moins **graphiquement** — le comportement de f pour les grandes valeurs de x.

Soit Δ la droite d'équation $y=x+1$. Pour x appartenant à $\mathcal{D}_f$, désignons par H le point de Δ et par M le point de $\mathcal{C}_f$, les points d'abscisse x.

On a : $\overrightarrow{HM}=(f(x)-(x+1))\vec{j}$,

soit $\overrightarrow{HM}=\dfrac{1}{x-1}\vec{j}.$

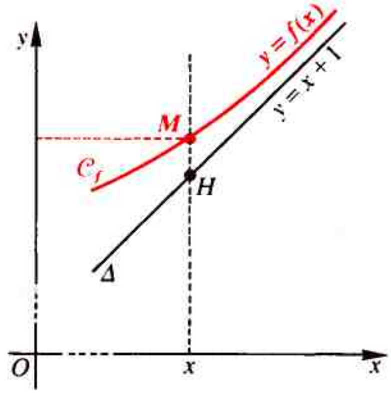


Figure 21 ▶

Cette relation montre que :

- D'une part la distance HM tend vers 0 lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$.
- D'autre part, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de Δ pour les grandes valeurs positives de x (et au-dessous pour les grandes valeurs négatives).

Les figures 21 et 22 donnent l'interprétation graphique d'un tel comportement que l'on décrit, de façon attendue, en disant que **la droite Δ est une droite asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.**

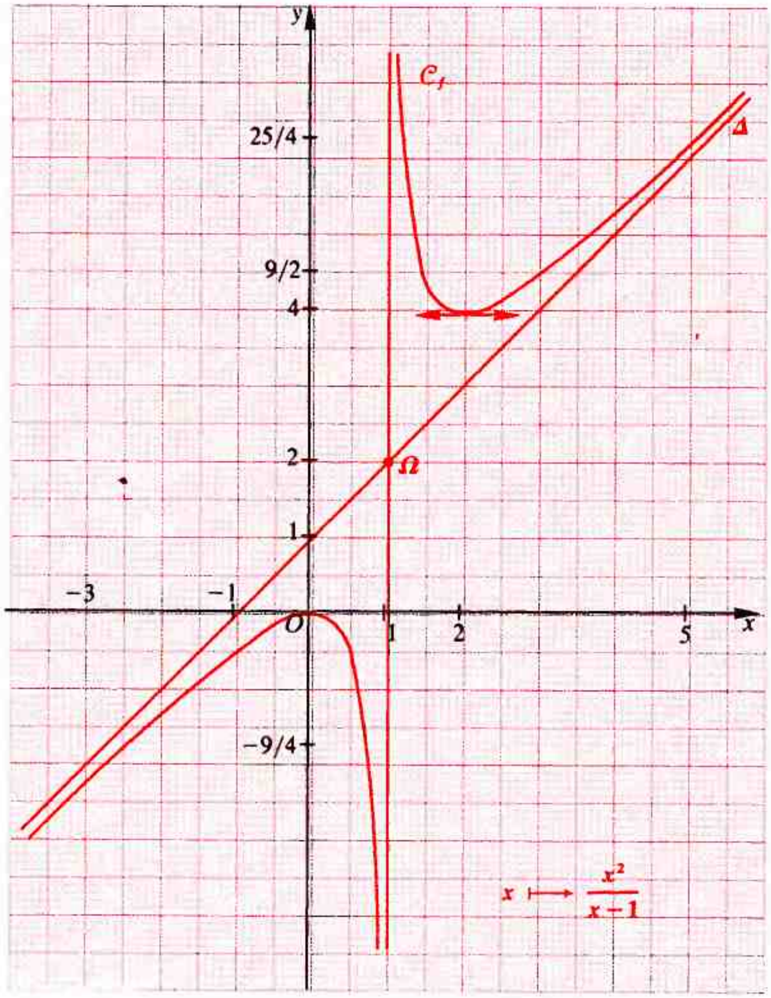


Figure 22

Remarques

1. De façon plus générale, lorsqu'une fonction f admet une écriture de la forme $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$, où $\lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$ $\left(\text{ou encore } \lim_{x \to -\infty} \varepsilon(x) = 0\right)$, on dit que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est **asymptote**[1] à la courbe représentative de f.

2. L'étude du signe de $\varepsilon(x)$ permet de fixer les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de Δ… lorsque cela est possible. (Il n'est en effet pas du tout exclu qu'une courbe « oscille » de part et d'autre de son asymptote (figure 23, par exemple).)

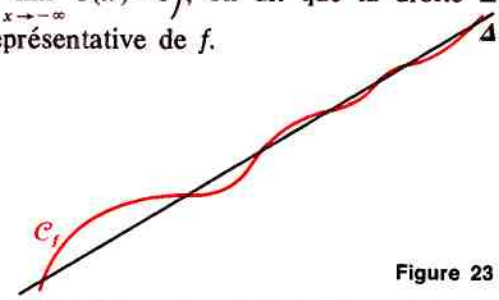


Figure 23

[1] On dit parfois « asymptote oblique » dans le but de faire la distinction avec une asymptote « horizontale » ou « verticale ».

3. Le tracé de $\mathcal{C}_f$ (figure 22) accompagné de celui de Δ laisse entrevoir un centre de symétrie : le point $\Omega(1, 2)$.
Le contrôle de cette propriété (soit par changement de repère, soit à l'aide d'une relation fonctionnelle) est laissé à titre d'exercice.

4. La fonction $f : x \longmapsto x - \sin x$

• **Ensemble de définition :** cette fonction est **définie sur $\mathbb{R}$.**

• **Ensemble d'étude et propriétés géométriques.** La fonction f est impaire : $f(-x) = -f(x)$. Le calcul[1] de $f(x+2\pi)$ conduit à $f(x+2\pi) = f(x) + 2\pi$. L'interprétation géométrique de ce résultat est la suivante : le point $M(x, y)$ est un point de $\mathcal{C}_f$, si et seulement si $M'(x+2\pi\,,\ y+2\pi)$ est également un point de $\mathcal{C}_f$. Autrement dit, la courbe $\mathcal{C}_f$ est globalement invariante par la translation de vecteur $2\pi\vec{i} + 2\pi\vec{j}$ mais également de vecteur $2(2\pi\vec{i} + 2\pi\vec{j})$, $-(2\pi\vec{i} + 2\pi\vec{j})$, plus généralement $n(2\pi\vec{i} + 2\pi\vec{j})$, où $n \in \mathbb{Z}$.

En résumé : On étudiera la courbe sur l'intervalle $[0, \pi]$, puis on complètera le tracé obtenu par :

— une symétrie de centre O,

— les translations de vecteurs $2n\pi(\vec{i} + \vec{j})$ $(n \in \mathbb{Z})$.

• **Dérivabilité :** la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 1 - \cos x$.

• **Variations :** elles découlent de façon immédiate de l'étude du signe de f'.

x	0		π
$f'(x)$	0	$+$	2
$f(x)$	0	$\nearrow$	π

• **Représentation graphique.**
Les figures 24, 25 et 26, concernent les représentations graphiques de f sur $[0, \pi]$, puis sur $[-\pi, +\pi]$ et enfin sur $\mathbb{R}$ en entier.

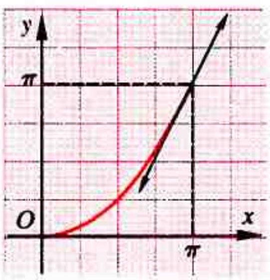


Figure 24 ▶

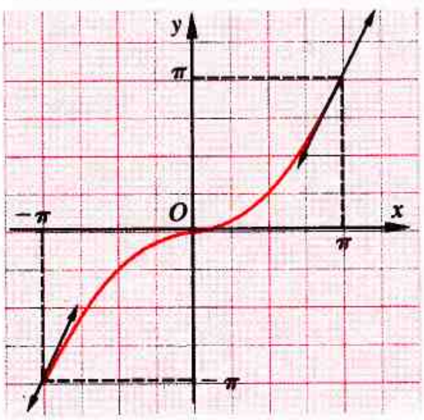


Figure 25

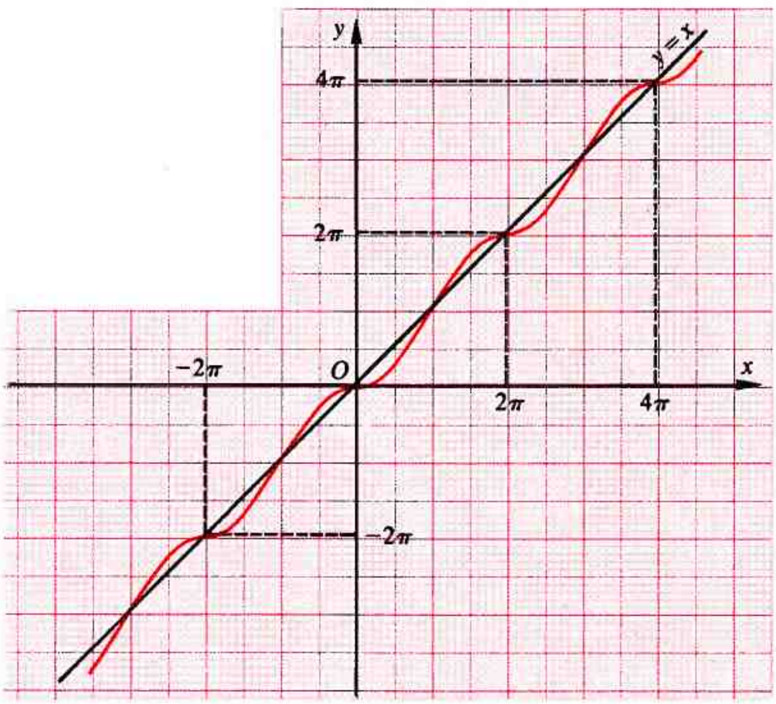


Figure 26

(1) Ce test de calcul n'est pas naïf : puisque $\sin(x+2\pi) = \sin x$, il est normal d'examiner le calcul de $f(x+2\pi)$.

• **Précision du comportement à l'infini.**
La courbe $\mathcal{C}_f$ semble « serpenter » de façon régulière de part et d'autre de la droite $y = x$. L'activité qui suit précise ce que sous-entend une telle formulation.

Activité 6

1° Montrer que, sur $\mathbb{R}$, $x-1 \leqslant f(x) \leqslant x+1$ et interpréter graphiquement cet encadrement.

2° Résoudre les équations :

$$f(x)=x-1 \quad \text{et} \quad f(x)=x+1.$$

Donner l'équation des tangentes aux points dont les abscisses sont solutions de ces équations.

3° Traduire sur le graphique les résultats obtenus.

Remarque générale sur l'étude d'une fonction

Le plan suivant — qui se dégage des exemples précédents — pourra être adopté pour organiser l'étude d'une fonction :

• ensemble de définition;

• ensemble d'étude - propriétés géométriques;

• dérivée - variations;

• comportement aux bornes (éventuellement);

• représentation graphique (avec quelques points et tangentes remarquables);

• contrôle de certaines propriétés suggérées par la figure (éléments de symétrie par exemple).

Notes : L'utilisation du **futur** dans la phrase précédente (« pourra ») découle des considérations suivantes :
En général, l'étude d'une fonction et le tracé de sa courbe représentative ne sont pas gratuits : ils sont nécessités par la résolution d'un problème précis. Il est clair, alors que, suivant la nature de ce problème, tous les éléments du plan d'étude ci-dessus ne sont pas à mettre en jeu de façon systématique. (La résolution d'équations numériques — par exemple — constitue une bonne illustration de ce point de vue.)

IV. Bijection et équation

1. Préliminaires

La notion de bijection a été définie dans le chapitre 3 (paragraphe II, page 99). Rappelons que[1] :

On dit qu'une fonction f réalise une *bijection* de l'intervalle I sur l'intervalle J pour exprimer que :

• f est définie sur I et, pour tout réel x de I, $f(x)$ appartient à J;

• pour tout réel k de J, l'*équation* $f(x)=k$ (où x est l'inconnue) admet une unique solution dans I.

[1] On se reportera au chapitre 3 pour des compléments sur cette notion (exemples, point de vue graphique, etc.).

Considérons alors une fonction définie et strictement croissante sur $I=[a, b]$ et étudions le problème suivant[1] : **« la fonction f réalise-t-elle une bijection entre $[a, b]$ et l'intervalle $J=[f(a), f(b)]$? ».**
L'activité qui suit propose l'examen de quelques cas :

Activité 7

1° Vérifier que la fonction représentée graphiquement figure 27 est définie et strictement croissante sur $[a, b]$. Réalise-t-elle une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$?

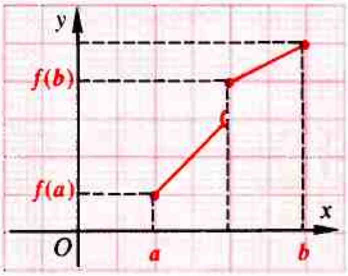


Figure 27

2° Soit f une fonction strictement croissante sur $[a, b]$.

a) Montrer que pour tout réel x de $[a, b]$, $f(x)$ est un élément de $[f(a), f(b)]$.

b) Soit k un réel de $[f(a), f(b)]$. Montrer que l'équation $f(x)=k$ ne peut admettre plus d'une solution dans $[a, b]$.

Commentaire

Cette activité permet de cerner « ce qu'il manque » à une fonction strictement croissante sur $[a, b]$ pour réaliser une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.

2. Les résultats essentiels

a. Le théorème

Nous admettrons le théorème suivant :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$.

- **Si, pour tout réel x de $]a, b[$, on a $f'(x)>0$, alors f réalise une *bijection strictement croissante* de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.**
- **Si, pour tout réel x de $]a, b[$, on a $f'(x)<0$, alors f réalise une *bijection strictement décroissante* de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.**

Exemple

Soit f la fonction de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x-\sin x$.
La **fonction f est dérivable sur $[0, 2\pi]$** et $f'(x)=1-\cos x$.
Sur $[0, 2\pi]$, $f'(x)\geqslant 0$ (car $\cos x \leqslant 1$) et l'égalité $f'(x)=0$ ne se produit que pour $x=0$ et $x=2\pi$.
Ainsi, **pour tout réel x de $]0, 2\pi[$, on a $f'(x)>0$:**
la fonction f est donc une bijection strictement croissante[2] de $[0, 2\pi]$ sur $[0, 2\pi]$ (car $f(0)=0$ et $f(2\pi)=2\pi$).

Remarque

Ce théorème ne donne que des conditions **suffisantes** permettant d'affirmer qu'une fonction strictement monotone réalise une bijection entre deux intervalles (voir exercices **27** à **29** ci-après).

[1] Le problème se poserait de la même façon pour une fonction strictement décroissante.
[2] L'étude et la représentation graphique de cette fonction ont été proposées dans le paragraphe III, page 330.

Exercices

25. Examiner si chacune des fonctions suivantes réalise (ou non) une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J :

a) $f(x)=x^2-4x+3$; $I=[2, 4]$ et $J=[-1, 3]$;

b) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x}$; $I=[-1, 2]$ et $J=\left[-1, \dfrac{7}{2}\right]$.

26. Reprendre l'exercice **25** avec :

a) $f(x)=x^3-3x+1$; $I=[-3, 0]$ et $J=[-17, 1]$;

b) $f(x)=\dfrac{3x+5}{2x+1}$; $I=[0, 3]$ et $J=[2, 5)$.

27. Donner — graphiquement — un exemple de bijection strictement croissante de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ qui ne soit pas dérivable au point $\frac{1}{2}$.

28. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$.

Montrer que f réalise une bijection strictement croissante de $[0, 4]$ sur $[0, 2]$. Cette fonction est-elle dérivable sur $[0, 4]$?

29. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3$.

Montrer que g réalise une bijection strictement croissante de $[-1, 1]$ sur $[-1, 1]$. Vérifier que g est dérivable sur $[-1, 1]$. A-t-on $g'(x)>0$ sur $]-1, 1[$?

b. Applications

Au niveau de cet ouvrage, deux thèmes sont à retenir :

• **La construction de fonctions « nouvelles ».** En effet dès que l'on dispose d'une bijection f entre deux intervalles I et J, il est possible de considérer une autre fonction de J dans I, à savoir la **bijection réciproque**[1] **de** f. En dehors de quelques exemples abordés dans les exercices de fin de chapitre, nous n'envisagerons pas de développements sur ce sujet[2].

• **La résolution de certaines équations.** Mis à part quelques cas particuliers (où, par exemple, l'on peut se ramener à resoudre une équation du 1er ou 2e degré (cf. chapitre 2)), le calcul **exact** des solutions d'une équation du type $f(x)=0$ s'avère le plus souvent impossible.
Le théorème précédent, en plus d'assurer — sous certaines conditions — **l'existence de solutions** à une telle équation, permet de les **localiser**, puis d'en obtenir des **valeurs approchées.**

3. Exemples de résolution approchée d'une équation

a. Le principe de localisation

Il s'agit de la propriété suivante dont la démonstration (évidente) découle de la définition même d'une bijection :

• **Soit f une *bijection strictement monotone* de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$).**

• **Si $f(a)$ *et* $f(b)$ *sont de signes contraires*[3], alors *l'équation* $f(x)=0$ admet une solution et une seule dans l'intervalle ouvert $]a, b[$.**

Ce résultat peut alors être mis en œuvre dans deux directions :

• existence et localisation des solutions de $f(x)=0$,

• approximation de ces solutions.

(1) Cf. chapitre 3, page 100.
(2) Conformément au programme.
(3) « $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires » peut être traduit de façon équivalente par « $f(a)\times f(b)<0$ ».

b. Existence et localisation des solutions

Dès que l'on peut extraire du tableau de variations d'une fonction f **dérivable** un schéma tel que :

x	a		b
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\alpha<0$	$\nearrow$	$\beta>0$

ou

x	a		b
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\alpha>0$	$\searrow$	$\beta<0$

avec $(\alpha=f(a)$ $\beta=f(b))$,

on est assuré, qu'il existe un réel x_0 et un seul de $]a, b[$ tel que $f(x_0)=0$.

Exemple

Soit l'équation $\mathbf{x^3-9x^2+24x-17=0}$.

Cette équation n'admettant pas à première vue, de racine évidente, étudions la fonction :

$f: \ x \longmapsto x^3-9x^2+24x-17$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$f'(x)=3x^2-18x+24$
$\quad =3(x-2)(x-4)$.

x	$-\infty$		1		2		4		5		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0	$-$	0		$+$		
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	
				I		*II*		*III*			

Le tableau de variations de f montre que l'équation $f(x)=0$ admet trois solutions α, β et γ telles que $\mathbf{1<\alpha<2}$, $\mathbf{2<\beta<4}$ et $\mathbf{4<\gamma<5}$ (schémas I, II et III).

Nous dirons alors que nous avons **localisé** et **séparé** les racines de l'équation :

- **localisé :** pour chaque racine, nous avons déterminé un intervalle de la forme $]a, b[$ la contenant,
- **séparé :** chacun de ces intervalles ne contient **qu'une** racine.

Remarque

Sur les intervalles comme $[4, +\infty[$, on se ramène au cas précédemment décrit par le calcul de certaines valeurs[1].

c. Approximation des solutions

Pour obtenir — par exemple — une valeur approchée (à une précision donnée) de la solution γ de l'équation précédente, on peut procéder ainsi :

1° On calcule l'image par f d'un réel x_0 de $]4, 5[$.
D'après le principe de localisation :

- si $f(x_0)<0$ alors $\gamma \in]x_0, 5[$,
- si $f(x_0)>0$ alors $\gamma \in]4, x_0[$[2].

x	4	x_0	5
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$f(x_0)$? $\nearrow$	3

[1] Le choix de ces réels est lié au comportement de f pour les grandes valeurs de x (voir paragraphe IV).
[2] Si $f(x_0)=0$, alors $\gamma=x_0$ et c'est fini (ne rêvons pas, une telle éventualité n'échoit pas très souvent).

2° On **itère** ce processus avec un réel x_1 de l'intervalle obtenu, puis x_2, etc.
Sur le choix des réels
Il est possible de le systématiser :

1° A chaque étape, on choisit le **milieu de l'intervalle** précédemment obtenu : ce procédé porte le nom de **dichotomie.**

Exemple : $f(4,5)=-0,125$ d'où $4,5<\gamma<5$
puis $f(4,75)=1,109..$ d'où $4,5<\gamma<4,75$
etc.

2° On peut également effectuer un **balayage** de l'intervalle avec un **pas** h fixé à l'avance.

Exemple : avec le **pas** $h=0,1$, on calculera les valeurs de f aux points $4,1$, $4,2$, etc. , jusqu'à $4,9$.
Comme $f(4,5)=-0,125$ et $f(4,6)=0,296$, on a $4,5<\gamma<4,6$, soit une **valeur approchée de γ à 0,1 près.**
Si l'on veut une valeur approchée à 0,01 près, on effectuera le balayage de $]4,5;4,6[$ avec le pas $h=0,01$ (on trouve $4,53<\gamma<4,54$).

Remarques

1. Il n'est pas interdit de mêler les deux procédés ou de tenir compte des résultats obtenus : par exemple, avec $f(4,5)=-0,125$ et $f(5)=3$, il paraît raisonnable d'envisager que γ est plus près de 4,5 que de 5 et donc de tester[1] $f(4,6)$.

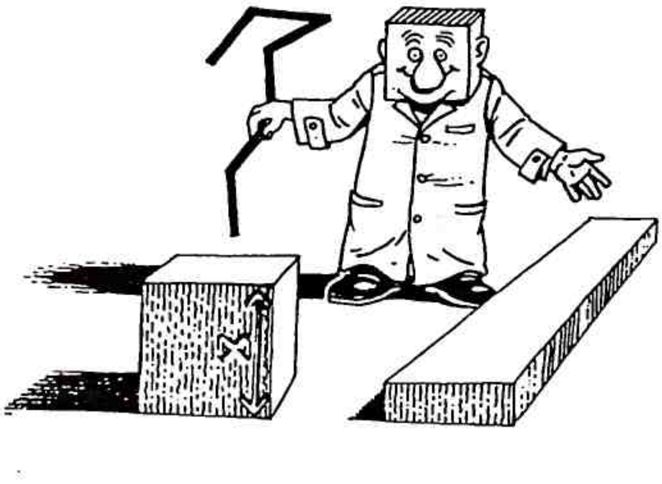
2. Il est clair que de telles recherches nécessitent une manipulation importante de la calculatrice : on trouvera en compléments (§ VI), **algorithmes** et **programmes** adaptés à ce genre de situations.

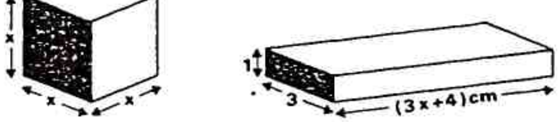
3. Pour être complet, signalons que le problème de résolution approchée d'une équation sera repris dans le chapitre 9 par la **méthode de Newton.**
Illustrons ces divers points de vue par la résolution complète d'un exercice.

d. *"Même volume"*

(D'après *« Jeux et Stratégies »*, n° 5.)

Ce cube a x cm d'arête. Ce parallélépipède rectangle a comme dimensions : 1 cm, 3 cm et $(3x+4)$ cm. Trouvez la valeur de x pour que ces deux éléments aient le même volume?





[1] Cela réserve parfois des surprises...

• **Mise en équation du problème.** De façon claire, il s'agit de calculer — s'il existe — un réel x strictement positif tel que $x^3=3(3x+4)$, autrement dit de : **résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation $x^3-9x-12=0$.**

• **Recherche d'une solution évidente :** sans succès.

• **Existence et localisation des solutions.** Nous étudions la fonction $f: x \longmapsto x^3-9x-12$. Cette fonction est dérivable, avec $f'(x)=3(x^2-3)$, d'où l'on déduit les variations de f. Il est alors certain qu'une racine (positive) éventuelle de l'équation $f(x)=0$ ne peut être située que dans l'intervalle $]\sqrt{3},+\infty[$.

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-12	$\searrow$	$-6(\sqrt{3}+2)$	$\nearrow$	

Le calcul de f sur des valeurs entières (par exemple) conduit à retenir les résultats : $f(3)=-12$ et $f(4)=16$.

Ainsi, l'équation $x^3-9x-12=0$ admet une solution positive unique, localisée dans l'intervalle $]3,4[$.

• **Approximation de la solution** (désignée par α).

— Vu les valeurs de f aux bornes de l'intervalle, -12 et 16, on commence par « dégrossir » avec la **dichotomie :** $f(3{,}5)=-0{,}625$; d'où l'on déduit $3{,}5<\alpha<4$.

— Le résultat obtenu pour $f(3{,}5)$ étant relativement proche de 0, on **teste** $f(3{,}6)$. Comme $f(3{,}6)=2{,}256$, on obtient $3{,}5<\alpha<3{,}6$.

— Le **balayage au pas** $h=\dfrac{1}{100}$ (voir programme, page 340) conduit à $3{,}52<\alpha<3{,}53$.

• **Réponse au problème :** on a donc $\alpha\approx 3{,}52$ à 0,01 près par défaut. Ceci est tout à fait acceptable : l'erreur relative n'excède pas en effet 0,3 %.

Conclusion : La réponse est 3,52 à 0,01 près par défaut.

V. Comparaison et encadrement de fonctions

1. Premier exemple : inégalité de Bernoulli

Montrer que pour tout réel x positif et pour tout entier $n\geqslant 1$, $x^n-1\geqslant n(x-1)$ (inégalité de Bernoulli).

Introduisons la fonction φ définie par $\varphi(x)=x^n-1-n(x-1)$. Il s'agit de montrer que cette fonction est positive sur $[0,+\infty[$. Étudions pour cela ses variations : φ est dérivable (en tant que fonction polynôme) et $\varphi'(x)=nx^{n-1}-n$ ou encore $\varphi'(x)=n(x^{n-1}-1)$... à condition que[1] $n\geqslant 2$.

Pour $0\leqslant x<1$, on a $x^{n-1}<1$ et pour $x>1$, $x^{n-1}>1$. On en déduit le tableau de variations de φ sur $[0,+\infty[$ complété par la valeur au point 1.
Il en découle que 0 est le minimum de φ sur $[0,+\infty[$ et donc que : $\varphi(x)\geqslant 0$ sur $[0,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$n-1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, **pour tout x positif, $x^n-1\geqslant n(x-1)$.** (Il est même possible de préciser que l'inégalité est stricte pour tout réel x différent de 1 (lorsque $n\geqslant 2$).)

[1] Le cas $n=1$ est une banalité.

2. Deuxième exemple

On considère deux points A et B de la surface terrestre situés sur une même parallèle.
Envisageons deux trajets pour aller de A en B :

- *l'un suivant le parallèle,*
- *l'autre suivant le «grand cercle» passant par A et B, c'est-à-dire le cercle découpé sur la sphère par le plan (O, A, B).*

Il s'agit de comparer la longueur de ces deux trajets.

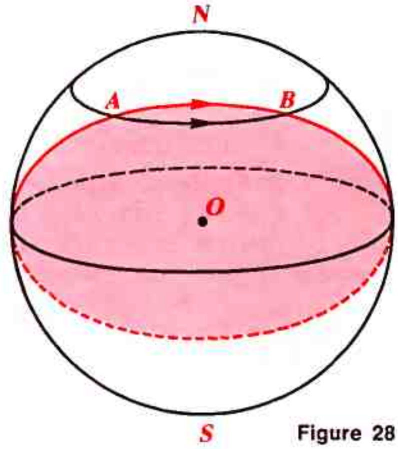


Figure 28

Mathématisation
La surface terrestre est assimilée à une sphère de rayon R. Le parallèle est alors un cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon r $(r<R)$ tracé sur la sphère et contenu dans un plan parallèle au plan équatorial.

On désigne par θ et φ les réels de l'intervalle $[0, \pi]$ qui mesurent respectivement les angles géométriques $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AOB}$.
Enfin, on note l la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ suivant le parallèle et L la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ suivant le grand cercle.

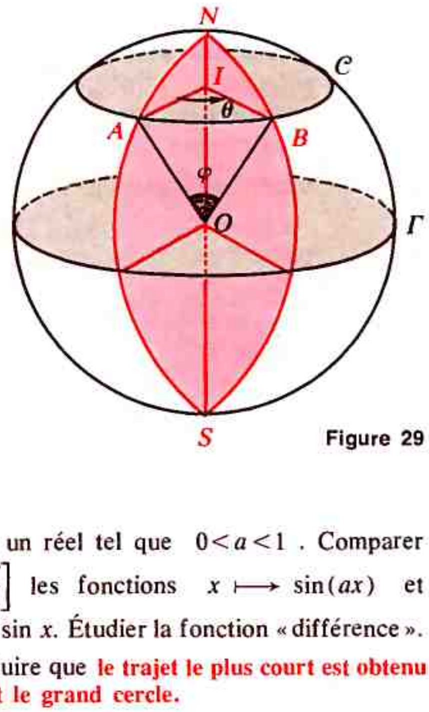


Figure 29

Activité 8

1° Établir les résultats suivants :

(1) $AB = 2r\sin\frac{\theta}{2} = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$;

(2) $\frac{r}{R}\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\varphi}{2}$;

(3) $l = \theta r$; (4) $L = \varphi R$.

2° Montrer que l et L sont rangés dans le même ordre que $\frac{r}{R}\times\frac{\theta}{2}$ et $\frac{\varphi}{2}$, puis, que $\sin\left(\frac{r}{R}\times\frac{\theta}{2}\right)$ et $\frac{r}{R}\sin\frac{\theta}{2}$.

3° Soit a un réel tel que $0<a<1$. Comparer sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ les fonctions $x \longmapsto \sin(ax)$ et $x \longmapsto a\sin x$. Étudier la fonction «différence».

4° En déduire que **le trajet le plus court est obtenu en suivant le grand cercle.**

Commentaires

1. Ce dernier résultat est beaucoup plus général : sur la sphère, de **tous** les trajets allant de A vers B, **c'est celui qui suit le grand cercle qui est le plus court**[1].

2. (Sur l'aspect technique.) Soulignons les deux étapes qui permettent de comparer les réels l et L :

- tout d'abord, en considérant leurs images par une fonction monotone sur un intervalle précis (question 2°);
- puis, en mettant en œuvre l'inégalité $a\sin x \leqslant \sin(ax)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

---

[1] Voir volume de Géométrie.

3. Un point de méthode

Indépendamment de son origine (numérique, graphique...), le problème général abordé dans ces divers exemples est celui de la **comparaison sur un intervalle donné, de deux fonctions f et g.** En dehors des techniques développées dans le chapitre 4, nous pouvons envisager la résolution de ce problème par la **méthode** suivante :

1° Introduction d'une fonction auxiliaire $\varphi = f - g$ (ou bien sûr, $\varphi = g - f$).

2° Étude du **signe de φ** par l'intermédiaire de ses variations sur l'intervalle considéré : l'outil essentiel étant alors les résultats sur la **dérivation** (le deuxième exemple montrant comment peuvent se greffer, simultanément, sur une même situation, ces techniques diverses).

VI. Compléments

1. Optimisation : un problème de ficelle

(D'après *« Éléments of Calculs and Analytic Geometry »* George B. THOMAS JR. Addison. Wesley Publishing Company.)

« Une ficelle de longueur ℓ est coupée en deux morceaux; avec l'un d'eux on forme un cercle et avec l'autre un carré (figure 30). A quel endroit doit-on couper la ficelle pour que la somme des aires des domaines obtenus soit maximum? »

Choisissons pour inconnue le côté x du carré et désignons par $\mathcal{A}(x)$ la somme des aires du disque et du carré obtenus. Si l'on convient que la ficelle doit être **effectivement** coupée, on a alors : $0 < x < \frac{l}{4}$.

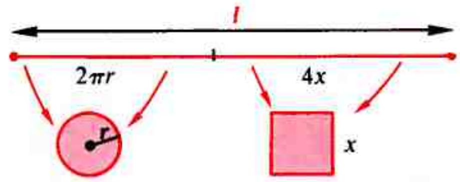


Figure 30

Activité 9

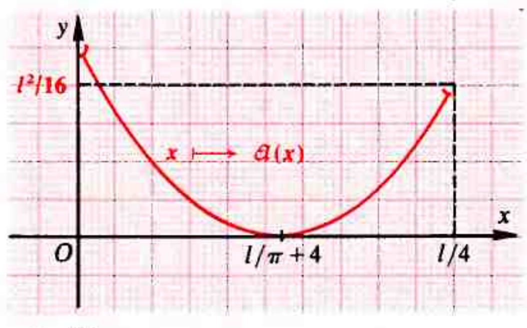
1° Exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de l et de x.

2° Étudier les variations de $\mathcal{A}$ sur $\left]0, \frac{l}{4}\right[$.

3° Conclusion?

La représentation graphique de $\mathcal{A}$ sur $\left]0, \frac{l}{4}\right[$ (figure 31) permet d'expliquer un certain nombre de résultats, notamment que $\mathcal{A}$ admet un minimum en $x_0 = \frac{l}{\pi + 4}$ $\left(\text{qui correspond à une aire de } \frac{1}{4\pi + 16} \times l^2\right)$ mais **n'admet pas de maximum sur $\left]0, \frac{l}{4}\right[$.**

Figure 31



Par contre, si l'on admet que $\mathcal{A}$ puisse être définie sur $\left[0, \frac{l}{4}\right]$, (ce qui revient à considérer que l'on peut former le carré seul ou le cercle seul), l'aire est maximum lorsque $x = 0$... autrement dit, lorsque l'on consacre **toute** la ficelle à la formation du cercle.

Commentaires

1. Cet exercice est significatif des risques que l'on encourt, lorsque dans la recherche de maximum(s) ou de minimum(s) d'une fonction, on se limite à la recherche des zéros de la dérivée... sans préciser les variations.

2. Signalons — à titre d'information — qu'avec une ficelle de longueur donnée ℓ, de toutes les surfaces que l'on peut envisager de former avec cette ficelle, c'est le disque de périmètre ℓ qui possède une aire maximum.

2. Résolution d'équations : l'aspect algorithmique

Les deux programmes qui suivent (langage BASIC) sont relatifs à la résolution **approchée** d'équations :

- par la méthode de dichotomie (programme 1),
- par l'utilisation d'un balayage (programme 2).

Ils sont proposés avec les fonctions rencontrées dans le paragraphe III, à savoir :

$$x \longmapsto x^3 - 9x^2 + 24x - 17 \quad \text{et} \quad x \longmapsto x^3 - 9x - 12,$$

mais sont adaptables à n'importe quelle fonction (cf. les sous-programmes sur fond couleur) pour laquelle **on est assuré de l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$.**

a. Dichotomie

PROGRAMME	COMMENTAIRES
10 CLS	Nettoyage écran
20 INPUT "VALEUR DE a:", A	Entrée de a
30 INPUT "VALEUR DE b:", B	Entrée de b
40 M = (A + B)/2	$m = \frac{a+b}{2}$
50 X = A : GOSUB 1000 : YA = Y	$YA = f(a)$ — Les calculs sont effectués dans le sous-programme lignes 1 000 à 1 020.
60 X = M: GOSUB 1000 : YM = Y	$YM = f(m)$
70 IF YA*YM < 0 THEN B = M ELSE A = M	Si $f(a)$ et $f(m)$ sont de signe contraire alors $x_0 \in]a, m[$ sinon $x_0 \in [m, b]$.
80 IF (YM < > 0) OR (ABS (A − B) > 0.00001) THEN GO TO 40	Si $(YM \neq 0)$ ou $\|a - b\| > 10^{-5}$ alors on recommence
90 PRINT M	Impression du résultat.
100 END	Fin.
1000 REM Fonction étudiée	Sous-programme, calculant $f(x)$ ligne 1010
1010 Y = X*X*X − 9*X*X + 24*X − 17	$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 17$
1020 RETURN	

Exemple

Valeur approchée à 10^{-4} près de la racine de l'équation $x^3 - 9x^2 + 24x - 17 = 0$, comprise entre 2 et 4 (cf. page 329) : 3,347 30.

Notes

1. On peut (ligne 80) modifier la précision exigée.

2. Le changement de fonction s'opère ligne 1010, sous condition que la fonction admette une racine unique dans l'intervalle $]a, b[$ (a, b étant à préciser en début de programme (lignes 20 et 30)).

b. Balayage

PROGRAMME	COMMENTAIRES	
10 CLS	Nettoyage écran	
20 PAS = 1	Valeur initiale du « pas » pour le balayage	
30 INPUT "Valeur de départ a:", A	Valeur de départ pour le balayage	
40 FOR I = 1 TO 7		Boucle permettant 7 balayages avec comme pas 1, 10^{-1}, 10^{-2}, ... 10^{-6}.
50 X = A GOSUB 1000: Y1 = Y	$Y_1 = f(a)$ les calculs sont effectués dans le sous-programme	
60 X = A + PAS : GOSUB 1000: Y2 = Y	$Y_2 = f(a + PAS)$ lignes 1000 à 1020	
70 IF Y1*Y2 > 0 THEN A = A + PAS : GOTO 30	Si $f(a)$ et $f(a + \text{PAS})$ sont de même signe, alors on recommence en augmentant a du « pas », sinon on passe à la ligne 80.	
80 PAS = PAS/10	On divise le « pas » par 10	
80 PRINT A	Impression de a	
100 NEXT I		
110 END	Fin.	
1000 REM Fonction étudiée	Sous-programme calculant $f(x)$	
1010 Y = X*X*X − 9*X − 12	$y = x^3 - 9x - 12$	
1020 RETURN		

Notes

1. Tout ce que correspond à la boucle est en grisé.

2. Le changement du pas initial est à effectuer ligne 20, si nécessaire.

3. Le changement de fonction s'effectue ligne 1010.

4. La ligne 40 permet de modifier la précision demandée.

c. Commentaire général

Dans l'élaboration de ces programmes, l'économie d'instructions n'est pas le souci majeur, il s'agit d'avantage :

1° de dégager clairement l'**algorithme** auquel il est fait appel : c'est le rôle joué en particulier par les commentaires,

2° d'assurer le fonctionnement d'un tel programme sur la plupart des micro-ordinateurs et des calculatrices programmables (en BASIC)[1].

En résumé — et cette fois sans commentaires — :

```
10 CLS
20 INPUT "VALEUR DE a: ",A
30 INPUT "VALEUR DE b: ",B
40 M=(A+B)/2
50 X=A:GOSUB 1000:YA=Y
60 X=M:GOSUB 1000:YM=Y
70 IF (YM< >0) OR (YA*YM<0)
   THEN B=M ELSE A=M
80 IF ABS(A-B)<.00001
   THEN GOTO 40
90 PRINT M
100 END
1000 ' **********************
1010 Y=X*X*X-9*X*X+24*X-17
1020 RETURN
```


```
10 CLS
20 PAS=1
30 INPUT "VALEUR DE DEPART a: ",A
40 FOR I= 1 TO 7
50 X=A:GOSUB 1000:Y1=Y
60 X=A+PAS:GOSUB 1000:Y2=Y
70 IF Y1*Y2>0 THEN A=A+PAS:GOTO 50
80 PAS =PAS/10
90 PRINT A
100 NEXT I
110 END
1000 '**************
1010 Y=X*X*X-9*X-12
1020 RETURN
```

[1] Il faut alors supprimer la ligne 10 de nettoyage d'écran.

EXERCICES

Vrai-Faux

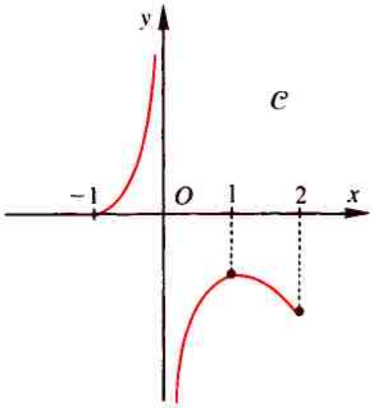
1. $x \longmapsto 2x - \cos x$ est monotone sur $\mathbb{R}$.

2. $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

3. $x \longmapsto \sqrt{1-x}$ est décroissante sur $]-\infty, 1]$.

4. Pour tout réel $a > 1$, la fonction inverse définit une bijection de $\left[\dfrac{1}{a}, a\right]$ sur lui-même.

Dans les Vrai-Faux **5** *et* **6**, *$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f sur $[-1, 2]$.*



5. Le signe de $f'(x)$ est donné par le tableau :

x	-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

6. Le signe de $f'(x)$ est donné par le tableau :

x	-1		0		2
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	

Dans les Vrai-Faux **7** *à* **11**, *f désigne une fonction dérivable sur $I = [a, b]$ $(a < b)$.*

7. Si f' est positive sur I alors f est positive sur I.

8. Lorsque f' est négative sur I et $f(a) = 0$, f est négative sur I.

9. Lorsque f admet un extrémum local en x_0, on a :
$$f'(x_0) = 0.$$

10. Si f' s'annule en x_0 alors f admet un extrémum local en x_0.

11. Si $f(a) < f(b)$, f' est positive sur I.

12. $x \longmapsto \sin x$ est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.

13. $x \longmapsto \cos x$ est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1]$.

14. $x \longmapsto \sqrt{x^2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

15. L'équation $x^3 + x + 1 = 0$ admet une solution unique sur $[-1, 0]$.

16. L'équation $\cos x = x$ admet une solution unique sur l'intervalle $]0, \pi[$.

17. L'équation $\sin x = 2x$ admet une solution unique sur l'intervalle $]0, \pi[$.

Applications

Dans tous les exercices, le repère est (sauf précision) orthonormé.

1. Une fonction f vérifie les propriétés suivantes :

a) f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) < 0$ pour tout x appartenant à :
$$]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[.$$

c) $f'(x) > 0$ pour tout x appartenant à $]-3, 1[$.

d) $f'(-3) = f'(1) = 0$, $f(-3) = -1$ et $f(1) = 2$.

Donner son tableau de variations.

Dans les exercices **2** *à* **5**, *étudier les variations de chacune des fonctions sur l'intervalle I indiqué.*

2. a) $x \longmapsto \sqrt{2-x}$, $I =]-\infty, 2]$;

b) $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3} - x$, $I = [-2, 2]$.

3. a) $x \longmapsto x^2 + \dfrac{2}{x}$, $I =]0, +\infty[$;

b) $x \longmapsto 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $I = \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

4. a) $x \longmapsto x^2(x-1)^3$, $I = [-2, 2]$;

b) $x \longmapsto \dfrac{2x^2+4x-1}{x^2+1}$, $I = [-3, 3]$.

5. a) $x \longmapsto \sin 2x$, $I = [0, \pi]$;

b) $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + 1$, $I = \mathbb{R}$.

Dans les exercices **6** *à* **9**, *donner le tableau de variations des fonctions suivantes :*

6. a) $x \longmapsto x^3 - 6x + 10$; b) $x \longmapsto -\dfrac{x^3}{3} - x + 4$.

7. a) $x \longmapsto \dfrac{2x^2+5x+2}{x^2+x+1}$; b) $x \longmapsto \dfrac{2x^2+4x+3}{(x+1)^2}$.

8. a) $x \longmapsto \dfrac{x^2+2x+9}{x^2-4}$; b) $x \longmapsto \dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-2x-4}$.

9. En étudiant les variations de la fonction

$$x \longmapsto x + \frac{1}{x}$$

sur $]0, +\infty[$, montrer que, pour tout x de $]0, +\infty[$: $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$, l'égalité ayant lieu si et seulement si $x = 1$.

10. Soit f la fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$.
Étudier les variations de la fonction f^2 sur l'intervalle $]1, +\infty[$, puis les variations de f sur $]1, +\infty[$ et $]-\infty, -1[$.

Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives (exercice **11** *à* **19**).

11. $x \longmapsto 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$.

12. $x \longmapsto x^3 - 9x + 2$.

13. $x \longmapsto x^3 - 3x^2$.

14. $x \longmapsto -\dfrac{x^3}{4} + x^2 - 5x$.

15. $x \longmapsto (x-1)(2-x)(x-3)$.

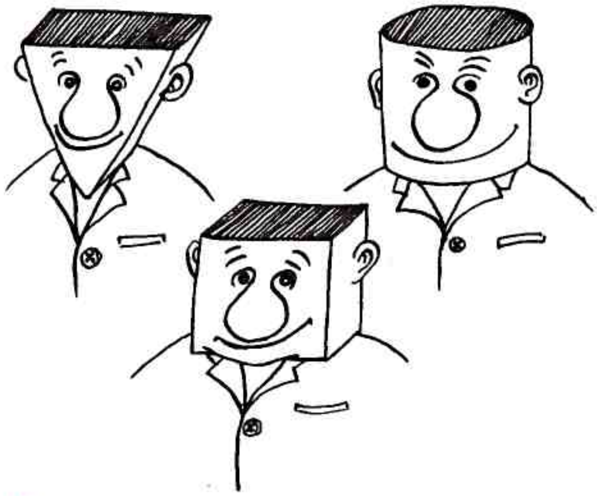
16. $x \longmapsto \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + \dfrac{5}{2}$.

17. $x \longmapsto -\dfrac{x^4}{2} + 2x^2 + 1$.

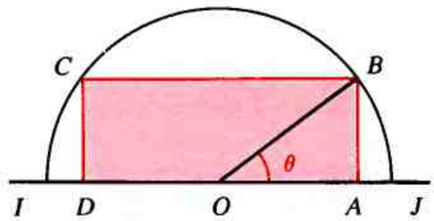
18. $x \longmapsto x^5 - x^3 - 2x$.

19. $x \longmapsto x + 1 - \dfrac{1}{x}$.

20. Le retour des boîtes
Reprendre la résolution des exercices **83, 84** et **92** du chapitre 4 (pages 179 et 180) avec les méthodes relevant de la dérivation.



21. Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un demi-cercle de diamètre $[I, J]$ ($IJ = 2$).
Déterminer le rectangle d'aire maximum en prenant comme inconnue θ.



22. Statistique
On considère la série statistique à caractère quantitatif :

- les valeurs du caractère sont les réels $x_1, x_2, \dots, x_k$;
- les effectifs correspondants sont notés $n_1, n_2, \dots, n_k$, avec $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Soit f la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{N}\left(n_1(x-x_1)^2 + \dots + n_k(x-x_k)^2\right).$$

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
A quelles caractéristiques de la série statistique correspond le minimum obtenu et le réel où ce minimum est atteint?

23. *a*) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto x^3+2x$ est une bijection de $I=[0, 3]$ sur $J=[0, 33]$.

b) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto x^3-2x$ n'est pas une bijection de $I=[0, 3]$ sur $J=[0, 21]$.

Dans les exercices **24** *et* **25**, *démontrer que chacune des fonctions suivantes est une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera.*

24. *a*) $f(x)=3x^3-5x+1$, $I=[1, 3]$;

b) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$, $I=[3, 6]$;

c) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$, $I=[0, \pi]$.

25. *a*) $f(x)=x-\sin x$, $I=[0, 5\pi]$;

b) $f(x)=x-\tan x$, $I=\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$;

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$, $I=[1, 4]$.

26. Quelle est la plus grande valeur de $f(x)$ dans chacun des cas suivants?

a) $f(x)=-x^3+x^2$ pour $x\in[0, +\infty[$;

b) $f(x)=-x^3+x^2-x+1$ pour $x\in[0,2]$;

c) $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ pour $x\in[-\infty, 0[$.

27. Montrer que l'équation $x^3-\dfrac{x^2}{3}+2x-1=0$ a une racine unique.

28. Montrer que l'équation $f(x)=x^3-3x+1$ admet trois racines dont l'une appartient à l'intervalle $[1, 2]$.

29. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :

$$2x^3-3x^2-36x+1=0.$$

Localiser chacune de ces solutions entre deux entiers consécutifs.

30. Même exercice avec l'équation :

$$x^4+4x^3-8x^2+2=0.$$

Exercices

• Étude de fonctions et représentation graphique

31. Montrer que les fonctions données ont un tableau de variation dont l'aspect est le suivant :

a) $x \longmapsto x^2-4x$;

b) $x \longmapsto 7x^2-28x+3$;

c) $x \longmapsto 3x^4-8x^3+5$;

d) $x \longmapsto -\dfrac{9}{2x^2}+\dfrac{6}{x^3}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗

32. Déterminer les réels a, b, c pour que la fonction :

$$f : x \longmapsto a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x-1},$$

s'annule en $x=2$, admette un extrémum en ce point et prenne la valeur $1/6$ en $x=3$.
Établir le tableau des variations de f.

33. Pour quelles valeurs du réel a la fonction $x \longmapsto ax+\sin x$ est-elle :

a) une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$?

b) une fonction monotone sur $\mathbb{R}$?

Dans les exercices **34** *à* **36**, *on demande d'étudier la fonction f sur* $[0, \pi]$, *puis sur* $\mathbb{R}$.

34. $f(x)=\cos x-\cos^2 x$.

35. $f(x)=\dfrac{1}{\cos x+2}$.

36. $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

37. Représenter la fonction :

$$f : x \longmapsto \sqrt{4-x}+\sqrt{x+4}.$$

38. Étudier et représenter graphiquement la fonction :

$$f : x \longmapsto 3x^5-5x^3.$$

On étudiera plus particulièrement la tangente à l'origine et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

39. Représenter la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\cos x}{2+\cos x}$.

40. Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto (x^2-3x+1)^2$. Comparer f à la fonction $g : x \longmapsto x^2-3x+1$.
Résoudre et discuter l'équation $f(x)\leqslant\lambda$, λ réel donné.

41. Soit f la fonction : $\begin{aligned}[0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \cos 2t+\cos t.\end{aligned}$

Étudier les variations de f. Donner les zéros de f. Construire la représentation graphique de f.

Pour les exercices **42** *à* **46**, *étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes. (On précisera les branches infinies.)*

42. $x \longmapsto 1-\dfrac{3}{(x+2)^2}$.

43. $x \longmapsto 2+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

44. $x \longmapsto -5+\frac{x}{3x^2+2}$. **45.** $x \longmapsto -x+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

46. $x \longmapsto \frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}$.

47. Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{1-x}{x^2}.$$

1° Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2° Calculer la dérivée de f et en déduire les variations de la fonction.

3° Démontrer les inégalités suivantes :

a) $f(x)>-\frac{1}{x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$;

b) $f(x)>\frac{1}{2x^2}$ pour tout x de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$;

c) $f(x)<-\frac{2}{x}$ pour tout x de $]-\infty, -1[$.

En déduire le comportement de f en $+\infty$, $-\infty$ et au voisinage de 0.

4° Tracer les représentations graphiques de f, de :

$$x \longmapsto -\frac{1}{x} \quad \text{et de} \quad x \longmapsto -\frac{2}{x}$$

pour $x<0$, dans un même repère.

48. La fonction f est définie par :

$$f(x)=\frac{x^2}{8}-\frac{2}{x}.$$

1° Étudier les variations de f.

2° Démontrer les inégalités :

a) $-\frac{2}{x}<f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$;

b) $f(x)<-\frac{1}{x}$ pour $x \in]0, 2[$.

En déduire le comportement de f au voisinage 0.

3° On note C_f la courbe représentative de f et C_g celle de la fonction $x \longmapsto \frac{x^2}{8}$. Étudier la position relative de C_f et C_g.

Déterminer la limite de $f-g$ en $+\infty$ et $-\infty$.

4° Tracer, dans un même repère, C_f, C_g, la courbe représentative de $x \longmapsto -\frac{2}{x}$ pour $x<0$ et celle de $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ pour $x>0$.

49. On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{x}{(x+1)^2}$.

1° Étudier les variations de f.

2° Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$,

$$0<f(x)<\frac{1}{x}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

3° Montrer que pour tout x de $]-\infty, -2[$, $\frac{4}{x}<f(x)<0$.

En déduire $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

4° Étudier le comportement de f au voisinage de -1.

5° Tracer dans un même repère les représentations graphiques de f, de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ pour $x>0$ et de $x \longmapsto \frac{4}{x}$ pour $x<0$.

50. On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^2+x-5}{x-2}$.

1° Étudier les variations de la fonction f.

2° Déterminer le réel a tel que $f(x)$ puisse s'écrire sous la forme $f(x)=x+3+\frac{a}{x-2}$.

Préciser le rôle de la droite Δ d'équation $y=x+3$ et sa position par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f.

3° Étudier le comportement de f au voisinage de 2. Montrer que pour tout $x>2$, $f(x)>\frac{1}{x-2}$ et que, pour tout $x<2$, $f(x)<\frac{5x-9}{x-2}$.

4° Représenter graphiquement dans un même repère, f, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x-2}$ pour $x>2$ et la fonction $x \longmapsto \frac{5x-9}{x-2}$ pour $x<2$.

51. Soit f la fonction $x \longmapsto \frac{2x^2+x+2}{x^2+1}$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.

1° Montrer que $f(x)=2+\frac{x}{x^2+1}$.

2° Étudier les variations de f.

3° Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $|f(x)-2|<\frac{1}{|x|}$.

En déduire les limites de f à l'infini et la nature des branches infinies de $\mathcal{C}$.

4° Tracer $\mathcal{C}$.

52. Soit f la fonction $x \longmapsto \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

1° Montrer qu'il existe un couple de réels (a, b) tel que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)=a+\frac{b}{(x+1)^2}$.

2° En déduire les variations de f et les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

3° Tracer la représentation graphique de f. (On précisera la nature des branches infinies.)

53. Soit f la fonction $x \longmapsto x+\sin^2 x$ et Γ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1° Montrer que pour tout réel x, on a $x \leqslant f(x) \leqslant x+1$ et $f(x+\pi)=f(x)+\pi$.
Qu'en déduit-on pour le comportement de f à l'infini?
Comment trace-t-on Γ à partir de la représentation de f sur $[0, \pi]$?

2° Établir le tableau des variations de f sur $[0, \pi]$. Déterminer les points d'abscisses x_0 de $[0, \pi]$ en lesquels Γ est tangente aux droites d'équations $y=x$ et $y=x+1$.

3° Étudier sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ la position de Γ par rapport à sa tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.

On posera $x=\frac{\pi}{4}+h$ et on montrera que :

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}+h+\frac{1}{2}\sin 2h.$$

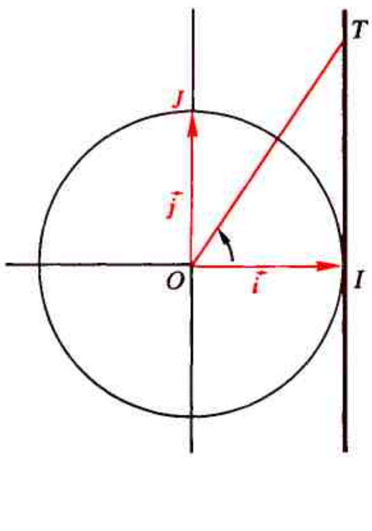
4° Tracer la représentation de f sur $[0, \pi]$, puis la courbe Γ.

54. Fonction tangente

A. *Étude de la limite de la fonction tangente en* $\frac{\pi}{2}$

1° *Point de vue graphique*

Montrer en utilisant la figure que $\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ x<\pi/2}} \tan x=+\infty$.



2° *Point de vue numérique*

a) Étudier le signe de $\varphi(x)=\tan x-\dfrac{1}{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en déduire que pour $x \in\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\dfrac{1}{2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \leqslant \tan x$.

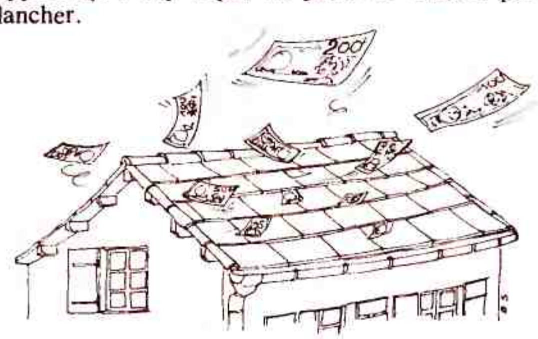
b) En déduire que $\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ x<\pi/2}} \tan x=+\infty$.

B. Représenter graphiquement la fonction tangente sur $]-\pi, \pi[$.

• Optimisation

55. Déterminer les coordonnées des points de la courbe d'équation $y=x^2-1$ qui sont le plus près de l'origine.

56. Une maison a une base carrée et a un volume habitable parallélépipédique de 768 m³. Le coefficient de perte de chaleur par unité de surface est trois fois plus élevé pour le plafond que pour les murs. On suppose qu'il n'y a pas de perte de chaleur par le plancher.

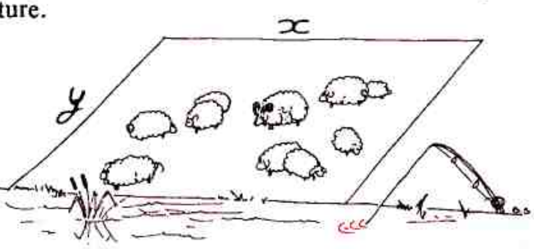


Quelles doivent être les dimensions de la maison pour que la perte de chaleur soit minimale? Est-ce raisonnable?

57. Un camion doit faire un trajet de 150 km.
Sa consommation de gasoil est de $\left(6+\frac{v^2}{300}\right)$ litres par heure où v désigne sa vitesse en km/h.
Le prix du gasoil est de 3,5 F le litre et on paie le chauffeur 62 F par heure.
Quelle doit être la vitesse du camion pour que le prix de revient de la course soit minimum? Quel est alors ce prix de revient.

58. La tangente en $M(x, y)$ avec $x>0$ et $y>0$ de la parabole d'équation $y=1-x^2$ coupe (Ox) en A et (Oy) en B.
Déterminer M pour que l'aire du triangle OAB soit minimale.

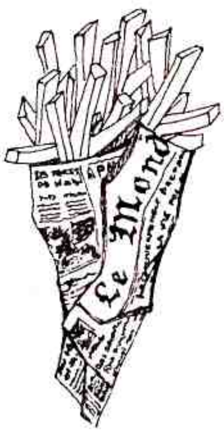
59. Une personne désire clôturer un terrain rectangulaire de 450 m^2 dont un côté s'appuie sur le bord rectiligne d'une rivière, ce côté ne nécessitant pas de clôture.

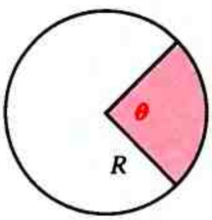


Déterminer les dimensions x et y du terrain pour que la longueur de la clôture soit minimale.

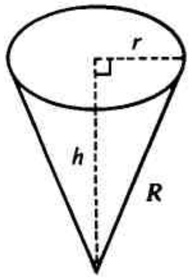
60. Déterminer les coordonnées des points de la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$ qui sont le plus près de $A\ (6, 0)$.

61. *Le cornet à frites (bis)*
Dans un disque de rayon R on découpe un secteur circulaire de θ radians. On fabrique avec le secteur restant un cône.





1° On désigne par h la hauteur du cône.
Vérifier que $0 < h < R$.
Exprimer le volume V du cône en fonction de h.



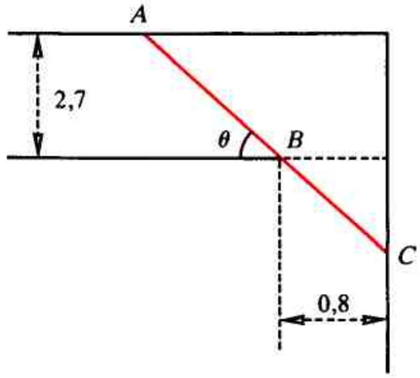
2° Étudier les variations de la fonction

$$\begin{aligned}]0, R[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto V(h). \end{aligned}$$

Pour quelle valeur de h le volume est-il maximum?

3° Déterminer la valeur de θ pour laquelle le volume du cône est maximum.

62. Un couloir a une largeur de 2,70 m.
Au bout du couloir, il y a une porte de 0,80 m.
Le problème est de trouver la longueur maximale d'une poutre posée horizontalement et que l'on veut faire passer par la porte.



1° Calculer AB et BC en fonction de θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.
En déduire la longueur $l(\theta)$ du segment $[AC]$.

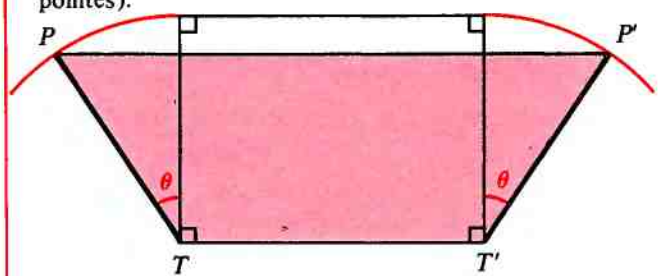
2° Montrer que $l(\theta)$ est minimum pour une valeur de $\tan\theta$ que l'on déterminera. Préciser une valeur approchée de θ.

3° Calculer la longueur minimale de la poutre.

63. Polygone de sustentation

On prétend que, dans la position debout, on est d'autant plus stable que la surface délimitée au sol par les pieds est grande. On se propose donc de déterminer (dans ces conditions) la position de stabilité maximum.

Les pieds sont assimilés à des segments $[T, P]$ et $[T', P']$ (T et T' désignent les talons et P et P' les pointes).



Les talons restant fixes, on fait pivoter la pointe des pieds de façon symétrique. On suppose que :

$$TT' = 40 \text{ cm} \quad \text{et} \quad TP = T'P' = 25 \text{ cm}.$$

1° Montrer que l'aire de $TT'P'P$ est :

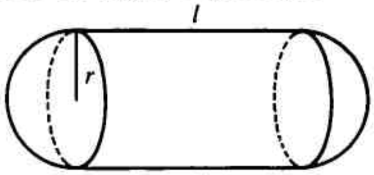
$$\mathcal{A}(\theta) = 1\,000 \cos\theta + 625 \sin 2\theta$$

avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2° Pour quelle valeur de θ l'aire est-elle maximum?

64. On veut fabriquer une citerne de 144 m^3 de volume, constituée d'un cylindre de longueur l et de deux hémisphères de rayon r pour les extrémités.

Le prix de revient du m² des hémisphères est le double de celui du m² de la partie cylindrique.



1° Après avoir donné l'expression du volume de la citerne, calculer l en fonction de r.

2° Exprimer le coût de fabrication de la citerne en fonction de r.

3° Déterminer r pour que le coût soit minimum. Quelle est alors la valeur de l?

• Bijections et équations

Dans les exercices **65** *à* **67**, *montrer que l'équation donnée admet une racine unique α et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.*

65. $x^3+3x-7=0$.

66. $x^3+x^2-7=0$.

67. $x^2+\sqrt{x}-3=0$.

68. On considère la fonction :

$$x \longmapsto f(x)=\frac{x^4}{16}+\frac{x^2}{2}+x-1.$$

1° Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution x_0 appartenant à $]-8{,}48; -8{,}47[$.

2° En déduire le tableau des variations de f et sa représentation graphique.

69. Racine *n*-ième
On désigne par n un entier fixé ($n \geqslant 2$) et par f la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto x^n. \end{aligned}$$

1° Prouver que, pour tout réel a ($a>0$), f réalise une bijection de $[0, a]$ sur $[0, a^n]$.

2° Établir que, pour $x>1$, on a $f(x)>x$. En déduire que tout réel y positif appartient à un intervalle de la forme $[0, a^n]$ (avec $a>0$ et dépendant de y).

3° Montrer que pour tout réel y positif, il existe un réel positif unique x tel que $x^n=y$ (ce réel x est appelé **racine *n*-ième de *y***).

4° Résoudre et discuter l'équation d'inconnue x :

$$\begin{cases} x^n=y \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

où y est un réel quelconque (faire intervenir la parité de l'entier n).

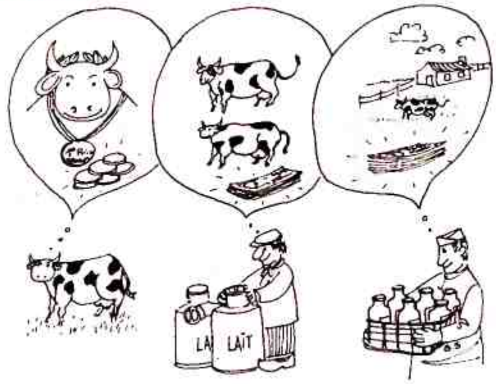
Les exercices **70** *et* **71** *sont extraits de* « Mathématiques. Activités en Première. Bulletin inter-IREM. 1986 ».

70. Encore les boîtes
Une boîte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle a un volume de 1 m³. On sait de plus que :

- la longueur de la base dépasse la largeur de 20 cm,
- la hauteur dépasse la largeur de la base de 10 cm.

Quelles sont les dimensions de la boîte?

71. Commerce



Le prix de vente d'un article est le double du prix de revient. D'autre part :

- le fabricant réalise un bénéfice de x % sur le prix de revient,
- le grossiste réalise un bénéfice de $2x$ % sur **son** prix d'achat,
- le détaillant réalise un bénéfice de $3x$ % sur **son** prix d'achat.

Calculer le taux x.
(**Note** : Le détaillant achète au grossiste qui lui-même achète au fabricant.)

72. Deux zéros pour une dérivée
On considère un polynôme $P(x)$ de degré 3 admettant trois racines distinctes notées, dans l'ordre x_1, x_2, x_3.

1° Donner la forme factorisée de $P(x)$ sachant que a est le coefficient de x^3. En déduire une expression de $P'(x)$.

2° Calculer $P'(x_1)$, $P'(x_2)$, $P'(x_3)$.
En déduire que $P'(x_1)$, $P'(x_3)$, sont de même signe et que $P'(x_2)$ a le signe contraire.

3° Montrer que $P'(x)$ s'annule en un point de $]x_1, x_2[$.
En déduire que $P'(x)$ s'annule pour 2 valeurs distinctes a_1, a_2 (dans l'ordre).

4° Donner, pour $a>0$, un tableau de variation de P.

• Comparaison de fonctions

73. Étudier les variations de la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3-3x+5 \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Montrer que le point $\Omega(0{,}5)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$. Quelle est

l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en Ω? Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette droite.
Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2; 2]$ et préciser les tangentes aux extrémités.

74. On considère la fonction :

$$f : x \longmapsto -10x + 6x^2 - x^3.$$

1° Construire sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

2° Construire la tangente Δ à $\mathcal{C}_f$, au point I d'abscisse 2.
Soit $y = g(x)$ son équation.

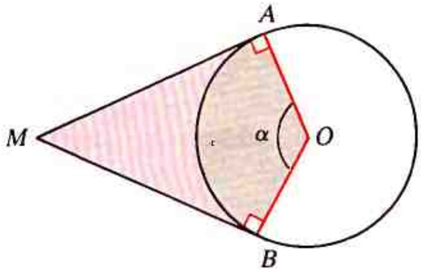
3° Étudier sur $\mathbb{R}$ la position relative de $\mathcal{C}_f$ et Δ en montrant que $f(x) - g(x)$ est le cube d'un binôme.

4° Reprendre l'étude ci-dessus en effectuant un changement d'origine du repère (I étant la nouvelle origine).

75. On désigne par f la fonction

$$\begin{aligned} \left]0, \frac{\pi}{2}\right[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tan x - 2x. \end{aligned}$$

1° Étudier les variations de la fonction f et résoudre l'équation $f(x) = 0$ (on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près).



2° Comparer les aires des deux domaines (en rosé et en grisé sur la figure ci-dessus).
On supposera :

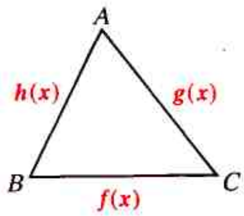
$$0 < \alpha < \pi.$$

76. Tracer sur un même graphique les représentations des fonctions :

$f : x \longmapsto x^2 - 1;$

$g : x \longmapsto x^2 + x + 1;$

$h : x \longmapsto 2x + 1.$



1° Montrer que pour $x > 1$, on peut construire un triangle ABC dont les longueurs des côtés sont $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$.

2° Montrer que l'angle $\widehat{B}$ est indépendant du réel x.
Le triangle ABC peut-il être isocèle?
Calculer en fonction de x le rayon $r(x)$ du cercle circonscrit à ABC. Quel est son minimum?

77. Soit les fonctions :

$$f : x \longmapsto x^3 - 3x, \; g : x \longmapsto x - \frac{4}{x}$$

et leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}g$ dans un repère orthonormé.

1° Résoudre le système $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x). \end{cases}$
En déduire que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en deux points A et B en lesquels elles admettent même tangente ($\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont « tangentes » en A et B).

2° Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ par rapport à ces tangentes.

3° Étudier la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ et montrer que Δ est asymptote à $\mathcal{C}_g$.

4° Établir les tableaux de variation de f et g puis tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Les exercices **78** *à* **80** *concernent la position relative d'une courbe et de ses tangentes.*

78. Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et de dérivée seconde positive sur I.
Montrer que la courbe représentative de f est **au-dessus** d'une quelconque de ses tangentes.
Indication : Soit x_0 un élément de I et $y = l(x)$ l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $M(x_0, f(x_0))$.
Étudier les variations de la fonction :

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - l(x). \end{aligned}$$

79. Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et telle que $f'' \leqslant 0$ sur I.
Montrer que la courbe représentative de f sur I est en dessous de l'une quelconque de ses tangentes (utiliser le résultat de l'exercice précédent, via l'introduction de la fonction $-f$).

80. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

1° Étudier ses variations et donner une représentation graphique.

2° Dresser un tableau de signes pour f'' (on note α l'unique réel de $]0, +\infty[$ tel que $f''(\alpha) = 0$ et I le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α).

3° Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes sur chacun des intervalles $[0, \alpha[$ et $]\alpha, +\infty[$.

4° Montrer qu'au voisinage du point I la fonction f admet une représentation graphique analogue à celle proposée sur la figure ci-dessous.
(**Note :** Un tel point est appelé **point d'inflexion.**)

Tangente en I à $\mathcal{C}_f$

Problèmes

81. Les rouleaux des PTT.

On peut lire dans l'ouvrage de Lucien CHAMBADAL *«Calcul pratique»* (Éditions Hachette), au paragraphe consacré au cylindre de révolution (page 286) l'information suivante :

«Les rouleaux cylindriques acceptés par les PTT sont tels que

$$17 \leqslant 2d + D \leqslant 104$$

où d désigne le diamètre et D la longueur (unité : le cm).»

On envisage de déterminer le **volume maximum** des cylindres acceptés par les PTT.
Par commodité, on notera x le diamètre du cercle de base et y la hauteur du cylindre (appelés respectivement d et D ci-dessus).

1° Montrer que le problème revient à déterminer le maximum de $\frac{\pi}{4} x^2 y$ sur le domaine $\mathcal{D}$ défini par :

$$\begin{cases} x > 0,\ y > 0 \\ 17 \leqslant 2x + y \leqslant 104. \end{cases}$$

2° *a*) Soit m un réel strictement positif fixé.
Montrer que lorsque x et y sont liés par $y = mx$, le maximum du volume est $\frac{\pi}{4} m \left(\frac{104}{m+2}\right)^3$.

b) Étudier les variations de la fonction :

$$m \longmapsto \frac{\pi}{4} m \left(\frac{104}{m+2}\right)^3$$

sur $]0, +\infty[$ et déterminer son maximum.

c) En déduire le volume maximum des cylindres considérés et vérifier qu'il est atteint lorsque la hauteur est égale au diamètre.

82. Soit un polynôme de degré 3 :

$$P : x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

et Γ sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Montrer qu'il existe un seul couple de réels (x_0, p) tel que, pour tout réel x :

$$P(x) - P(x_0) = a(x - x_0)^3 + p(x - x_0).$$

En déduire que Γ a un centre de symétrie Ω.

2° Donner, sans effectuer de calcul de dérivée, l'équation de la tangente Δ, à Γ, en Ω. Étudier la position de Γ par rapport à Δ suivant le signe du réel a.

3° Si $ap \geqslant 0$, quels sont les tableaux de variation possibles pour le polynôme P?
Si $ap < 0$, montrer que P admet deux extremums et donner les tableaux de variations possibles.

4° *Application :* Déterminer a, b, c, d de façon que P admette en -1 un maximum égal à 5 et en 3 un minimum égal à 1.
Tracer Γ.

83. Soit f la fonction $x \longmapsto x^2$. A tout réel $x_0 \geqslant 0$, on associe l'aire $S(x_0)$ du domaine rosé.

1° Montrer que pour tout réel h appartenant à $]-x_0 ; +\infty[$, on a :

$$hx_0^2 \leqslant S(x_0 + h) - S(x_0) \leqslant h(x_0 + h)^2.$$

(On étudiera deux cas suivant que $h > 0$ ou $h < 0$.)

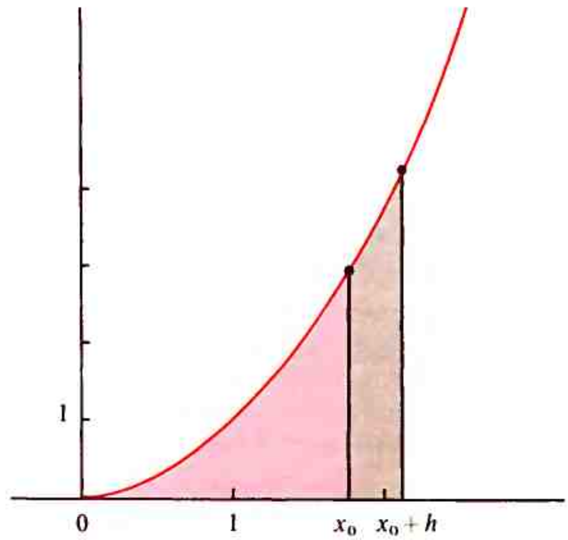
2° En déduire que pour tout h de $]-x_0, +\infty[$:

$$0 \leqslant S(x_0 + h) - S(x_0) - hx_0^2 \leqslant h^3 + 2h^2 x_0.$$

3° Montrer que la fonction :

$$\begin{aligned} [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto S(x) \end{aligned}$$

est dérivable de dérivée f.



4° Calculer la dérivée de $x \longmapsto S(x) - \frac{x^3}{3}$ sur $[0, +\infty[$.
Que peut-on conclure? En déduire l'expression de $S(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$.

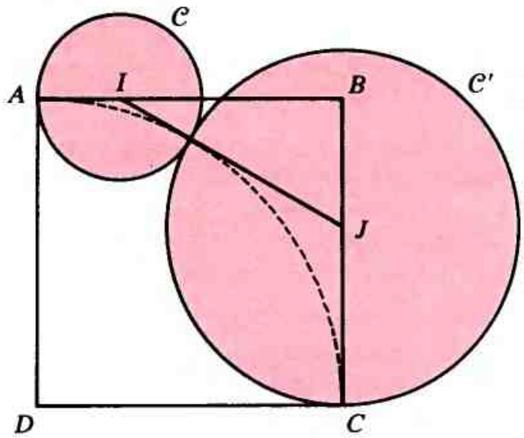
84. Le carré $ABCD$ étant donné, on construit deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tangents entre eux et centrés l'un sur $[A, B]$ en I, l'autre sur $[B, C]$ en J.

On suppose $AB = 1$ et $AI = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. On se propose de déterminer x pour que S, aire totale des deux disques rosés soit minimum (voir figure, page 350).

1° On pose $CJ = y$. Exprimer y en fonction de x.

2° Exprimer en fonction de x l'aire S. On notera $S = f(x)$.

3° Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous la forme d'une fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$.



4° Montrer que $P(x)$ s'annule une seule fois sur $[0, 1]$. On notera α la valeur correspondante.

5° Rechercher des valeurs approchées de α :

a) à 10^{-2} près; *b*) à 10^{-6} près.
Peut-on faire une conjecture sur α d'après les décimales trouvées?
6° Montrer que $\alpha = \sqrt{2} - 1$ et vérifier que l'on a alors $x = y$.

7° Calculer $f(\alpha)$ et faire une figure correspondant à la solution.

85. Comparaison de $\sin x$, $\tan x$ et x.

On rappelle que pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\sin x < x < \tan x.$$

1° On pose $f_1(x) = \tan x - x$ et $f_2(x) = x - \sin x$, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Montrer que f_1 et f_2 sont positives, strictement croissantes et que $f_1 > f_2$. On montrera pour cela que $f_1 - f_2$ est strictement croissante en utilisant le signe de $f_1' - f_2'$ (on utilisera le signe de

$$(1 - \cos x)[1 + \cos x\,(1 - \cos x)]).$$

2° *a*) Déterminer à 10^{-2} près les solutions α_1 et α_2 de :

$$f_1(x) = 10^{-3} \quad \text{et} \quad f_2(x) = 10^{-3}.$$

b) Calculer de façon approchée les solutions de l'inéquation :

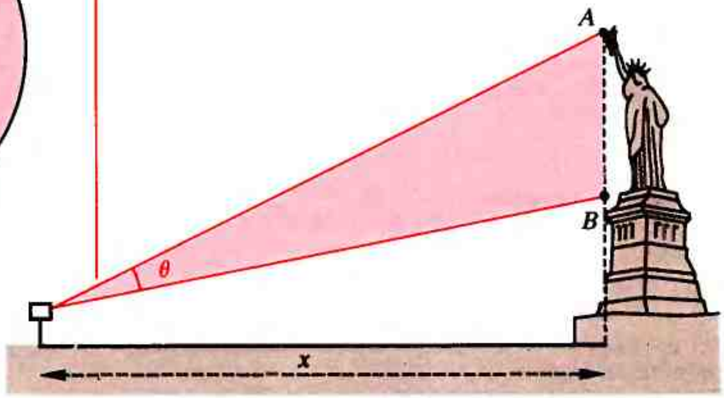
$$\tan x - \sin x \leqslant 10^{-3}.$$

3° Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{f_1(x)}{x}$, qui exprime l'erreur relative commise en remplaçant $\tan x$ par x dans un calcul, est croissante. Déterminer ses bornes sur $]0; 0{,}15]$.

4° Reprendre le 3° pour $\frac{f_2(x)}{x}$, erreur commise en remplaçant $\sin x$ par x pour x petit.

5° Représenter sur le même schéma les fonctions f_1 *et* f_2. (Unités : 1 m en abscisse, 100 m en ordonnée.) Interpréter graphiquement $\frac{f_1(x)}{x}$ et $\frac{f_2(x)}{x}$.

86. La statue de la Liberté



Le problème est de déterminer la distance x à laquelle on doit placer l'appareil photographique pour avoir une photo de la statue de la Liberté prise sous un angle θ maximum.

On admet que θ appartient à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Les données numériques sont les suivantes :
— l'appareil photo est à 1,5 m du sol,
— le piedestal a pour hauteur 45 m,
— la statue a également pour hauteur 45 m.

1° Vérifier que θ est maximum lorsque $\tan\theta$ est maximum.

2° Démontrer la formule :

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

3° Exprimer $\tan\theta$ en fonction de x.

4° Déterminer x pour que $\tan\theta$ soit maximum.

87. Encadrement des fonctions trigonométriques

1° Soit x un réel positif ou nul.
Établir successivement les inégalités suivantes :

a) $\sin x \leqslant x$;

b) $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x$;

c) $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x$;

d) $\cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

2° Déduire de ce qui précède que :

a) pour tout x réel positif ou nul :

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x;$$

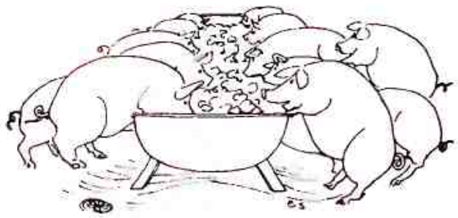
b) pour tout x réel :

$$1-\frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}.$$

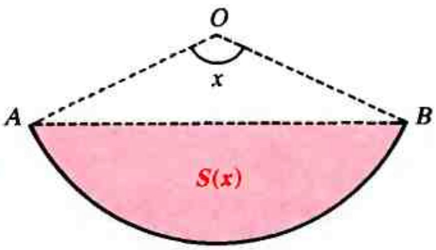
3° Application 1 : Donner un encadrement de $\sin 0{,}5$ et de $\cos 0{,}5$ à l'aide des inégalités précédentes.

4° Application 2 : Déterminer la limite de $\dfrac{x-\sin x}{1-\cos x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

88. L'auge



Une bande de métal rectangulaire a pour largeur l et pour longueur L $(L \geqslant l)$. On plie la largeur en arc de cercle de façon à obtenir une auge cylindrique.
Le but du problème est de déterminer pour quelle mesure x de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ $(0<x<2\pi)$ l'auge a une capacité maximale. (On notera que cette situation correspond à l'aire rosée maximale de la figure ci-dessous.)



1° Évaluation de l'aire
On note $S(x)$ l'aire du domaine rosé $(0<x<2\pi)$.

a) Montrer que $S(x)=\frac{1}{2}R^2(x-\sin x)$, où R désigne le rayon de la section.
(On aura soin d'envisager les trois cas suivants :

$$0<x<\pi \ ; \ x=\pi \ ; \ \pi<x<2\pi \text{ .)}$$

b) Exprimer R en fonction de x. En déduire que :

$$S(x)=\frac{l^2}{2}\left(\frac{x-\sin x}{x^2}\right).$$

2° Étude des variations de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{x-\sin x}{x^2} \text{ sur }]0, 2\pi[.$$

a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Préciser $f'(\pi)$ et vérifier que pour tout x de $]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$:

$$f'(x)=\frac{4\cos^2 \frac{x}{2}}{x^3}\left(\tan\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right).$$

c) Étudier le signe de $\tan\frac{x}{2}-\frac{x}{2}$ sur chacun des intervalles $]0, \pi[$ et $]\pi, 2\pi[$. En déduire le signe de f' et dresser le tableau des variations de f.

3° Conclusion : Quelle est la valeur de x pour laquelle l'auge a une contenance maximale? Exprimer ce volume en fonction de l et L. Comparer avec le volume obtenu en pliant le rectangle selon la longueur. Comparer avec les boîtes de conserve du commerce.

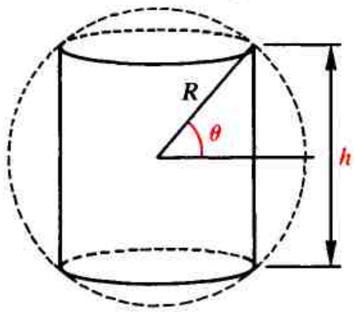
89. Cylindres inscrits dans une sphère

I - *1°* Déterminer sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ le maximum de

$$\sin\theta - \sin^3\theta.$$

2° Déterminer la forme du cylindre de plus grand volume inscrit dans une sphère de rayon R.

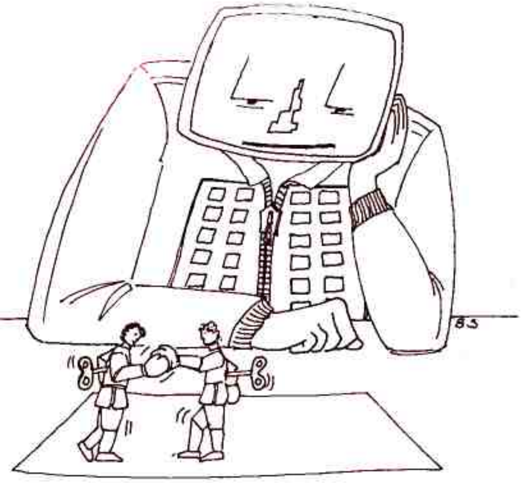
II - Déterminer la forme du cylindre de plus grande surface latérale inscrit dans la sphère de rayon R.



III - Déterminer une valeur approchée de l'angle θ tel que le cylindre inscrit dans la sphère ait une aire totale maximum. Quelle valeur remarquable a alors $\tan\theta$?

9

Quelques



« Faire de l'analyse, ce n'est pas faire du sport en spectateur... »

« Calculus : an applied approache ».
WONNACOTT T.H.
John Wiley and sons, 1977

Intentions

- Les deux **idées** essentielles qui gouvernent ce dernier chapitre concernent :

— **les problèmes** (d'origines diverses) qui suscitent l'intervention de l'analyse, et donc, celle des **méthodes de recherche** et de **résolution,**

— **le fonctionnement** sur une **même** situation des divers **concepts** introduits jusqu'à présent (qu'ils soient relatifs aux polynômes, aux suites, aux fonctions, aux courbes, etc.).

- Il en découle, pour ce chapitre, une organisation particulière que ce soit au niveau du **contenu** ou de la **structure :**

1. Les trois thèmes retenus

. **résolution approchée d'équations numériques,**

. **recherche de trajets de durée minimale,**

. **résolution graphique d'un problème de graduation,**

constituent un terrain privilégié de mise à l'épreuve des divers outils élaborés. Ils engendrent également des questions sur le choix des méthodes, sur la comparaison de leur performance, etc.

2. Ces thèmes sont proposés sous la forme **d'activités,** qui peuvent être conduites individuellement ou en groupe de travail (travaux pratiques en classe, par exemple). Elles sont le plus souvent soutenues par des **points de méthode** et des compléments **historiques.**

- Enfin ces divers points de vue se retrouvent, bien sûr, dans les exercices et problèmes de fin de chapitre...

problèmes de l'analyse

Plan du Chapitre

I. Résolution d'équations

1. Introduction

• Concernant la **résolution d'équations,** nous avons déjà souligné, que très souvent « on est réduit à chercher des valeurs approchées des racines, en subordonnant cette approximation aux besoins de la question » (Euler *« De la résolution des équations par approximation »*).

• Les quelques exemples développés jusqu'à présent (notamment dans les chapitres 6 et 8) permettent de dégager deux aspects sur ce sujet :
— **L'aspect qualitatif :** il concerne l'existence des racines d'une équation. De façon plus précise, le problème abordé est le suivant : « **L'équation $f(x)=0$ admet-elle des solutions?** » Au niveau de cet ouvrage le **principe de localisation** (cf. chapitre 8) demeure l'outil essentiel : c'est lui qui permet de s'assurer qu'effectivement **l'équation étudiée admet des solutions,** mais également de **localiser** et **séparer** ces solutions.
— **L'aspect quantitatif :** il met en jeu divers procédés qui permettent d'approcher une racine de l'équation $f(x)=0$. Ainsi en est-il par exemple de la **dichotomie,** de la méthode du **balayage,** de celle des **sécantes,** etc., que nous avons pu rencontrer jusqu'à présent. L'idée essentielle sur cette question est relativement simple et peut être résumée ainsi : **construire un algorithme d'approximation d'une racine par une suite numérique.**
Relativement à cet aspect quantitatif, nous nous intéressons dans ce paragraphe à **la méthode de Newton** (sur la base d'exemples) et ce pour les raisons suivantes :
• Les idées qui la gouvernent sont aisées à comprendre et peuvent être perçues, de plus, sous plusieurs points de vue : graphique et numérique.
• Son efficacité (en général) permet :
— d'une part d'expliquer la performance de certains procédés d'approximation déjà rencontrés (tel que l'algorithme de Babylone en Seconde),
— d'autre part, d'explorer les problèmes de **rapidité de convergence.**
• Cette méthode est également significative de la façon dont peuvent être mis en jeu, sur un même problème, les résultats de l'analyse développés en Première Scientifique, concernant les **suites** et les **fonctions** numériques.

2. La méthode de Newton

a. Newton : éléments pour une biographie

« Newton, voyant tomber la pomme conçut la matière et ses lois... »

Sully PRUDHOMME
Le Monde des âmes

« Le compas de Newton, mesurant l'univers lève enfin ce grand voile, et les cieux sont ouverts... »

Épître à Madame la Marquise du Châtelet
VOLTAIRE

• **Newton** (sir Isaac), mathématicien, physicien, astronome et philosophe britannique, né à Woolsthorpe (Lincolnshire) [1642-1727]. En dehors de ses travaux relatifs à l'astronomie et à la mécanique (notamment sur la gravitation universelle à laquelle semble définitivement attachée la célèbre anecdote de la « pomme »...), Newton est considéré avec Leibniz comme le fondateur du calcul différentiel et intégral. C'est dans son ouvrage *« Methodus fluxiorum et serierum infiniturum »* que Newton expose un procédé pour la **détermination approchée des racines d'une équation** — procédé qui sera amélioré par Raphson (1690) et Simpson (1740) pour donner la forme actuelle.

• « L'anecdote » (vue par GOTLIB, *Rubrique-à-brac*, Dargaud Éditeur. Paris).

Isaac Newton fait une promenade digestive dans la nature en fête.

Isaac Newton, héros involontaire d'une anecdote inénarrable dont il est loin de se douter des conséquences.

Isaac Newton conçoit sa célèbre théorie, dans des conditions bien pénibles, il faut bien le dire.

Isaac Newton se dit qu'il aurait mieux fait d'aller au cinéma au lieu de venir faire bêtement une promenade digestive dans la nature en fête. (Ce en quoi il a tort.)

b. Les idées générales

• Soit à résoudre l'équation $f(x)=0$. Nous supposerons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

. une solution α de l'équation $f(x)=0$ a été **localisée** (cf. chapitre 8);

. la fonction f est dérivable.

• L'idée intuitive qui gouverne la méthode de Newton peut être perçue sous deux aspects :

L'aspect graphique

Soit x_0 une valeur approchée de α. On remplace la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f par sa tangente T_0 au point $M_0(x_0, f(x_0))$. L'abscisse x_1 du point d'intersection de T_0 avec l'axe (Ox) est une nouvelle approximation du nombre α.

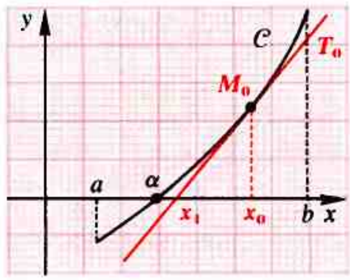


Figure 1

L'aspect numérique

Nous avons $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$. On résout l'équation en h,

$$f(x_0+h)=0\ ,$$

en négligeant le terme $h\varphi(h)$ vraisemblablement petit.

On obtient $f(x_0)+hf'(x_0)=0$, d'où $h=-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. On choisit alors $x_1=x_0+h$ comme nouvelle approximation de α.

L'algorithme va consister alors en l'**itération** de ce procédé.

Remarque

Il est clair que cet algorithme ne peut fonctionner que sous certaines conditions; par exemple, si la tangente T_0 est parallèle à (Ox) (ou ce qui revient au même si $f'(x_0)=0$), il devient impossible de déterminer x_1. Nous ne nous préoccuperons pas pour l'instant de telles contraintes.

c. Activités préliminaires

Activité 1 : « Lien graphique-numérique »

On reprend les hypothèses et données de la figure 1.

1° Donner l'équation de la tangente T_0 en M_0 à la courbe $\mathcal{C}$.

2° Vérifier que, si T_0 est sécante à (Ox), le point d'intersection a pour abscisse x_1 avec :

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Activité 2 : « un exemple d'Euler »[1]

Effectuer une lecture attentive du texte suivant[2] dû à Euler en le confrontant avec les idées générales exprimées précédemment, (en particulier celles relatives à l'aspect numérique).

De la résolution des Équations par approximation[3]

Lorsque les racines d'une équation ne sont pas rationnelles, soit qu'on puisse les exprimer par des quantités radicales, soit qu'on n'ait pas même cete ressource, comme il arrive à l'égard des équations qui passent le quatrième degré, on est réduit à chercher des valeurs approchées des racines, en subordonnant cette approximation aux besoins de la question. On a proposé différentes méthodes à cet effet; nous allons en détailler les principales.

Le premier moyen dont nous parlerons, suppose qu'on ait déterminé assez exactement la valeur d'une racine. Qu'on sache, par exemple, qu'une telle valeur surpasse 4, et qu'elle est plus petite que 5. Dans ce cas, si l'on suppose cette valeur $=4+h$, on est sûr que h exprime une fraction. Or si h est une fraction entre zéro et l'unité, le quarré de h, son cube, et en général toutes les puissances plus hautes de h, seront encore beaucoup plus petites à l'égard de l'unité, et d'après cela, puisqu'il ne s'agit que d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul. Quand donc on aura déterminé à peu près la fraction h, on connaîtra déjà plus exactement la racine $4+h$; on partira de là pour déterminer une nouvelle valeur encore plus exacte, et on continuera de la même manière jusqu'à ce qu'on ait obtenu l'approximation requise.

Nous éclaircirons cette méthode d'abord par un exemple facile, en cherchant par approximation la racine de l'équation :

$$x^2=20.$$

On voit ici que x est plus grand que 4 et plus petit que 5; en conséquence on fera :

$$x=4+h,$$

et on aura : $$x^2=16+8h+h^2=20;$$

mais comme h^2 est très petit on négligera ce terme et restera l'équation :

$$16+8h=20;\quad \text{d'où}\quad 8h=4;$$

on déduit de là : $$h=\frac{1}{2};\quad x=4+\frac{1}{2},$$

ce qui approche déjà beaucoup plus de la vérité. Si donc on suppose à présent :

$$x=4+\frac{1}{2}+h,$$

on est assuré que h signifie une fraction encore beaucoup plus petite qu'auparavant, et qu'on pourra négliger h^2 à bien plus forte raison.

On aura donc : $$x^2=20+\frac{1}{4}+9h=20,\quad \text{ou}\quad 9h=-\frac{1}{4},$$

et par conséquent : $$h=-\frac{1}{36};$$

donc : $$x=4+\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4+\frac{17}{36}.$$

Que si l'on voulait approcher encore davantage de la vraie valeur, on ferait :

$$x=4+\frac{17}{36}+h,$$

et on aurait : $$x^2=20+\frac{1}{1\,296}+\left(8+\frac{34}{36}\right)h=20;$$

ainsi : $$\left(8+\frac{34}{36}\right)h=-\frac{1}{1\,296},\quad 322h=\frac{-36}{1\,296}=-\frac{1}{36},$$

d'où : $$h=-\frac{1}{36\times 322}=-\frac{1}{11\,592}.$$

Donc : $$x=4+\frac{17}{36}-\frac{1}{11\,592}=4+\frac{5\,473}{11\,592},$$

valeur qui approche si fort de la vérité qu'on peut avec confiance regarder l'erreur comme nulle.

---

(1) D'après une Monographie de l'IREM d'Aix-Marseille. *Analyse I.*

(2) Par rapport au texte initial, seules les écritures ont été modifiées : x^2 à la place de xx, $4+\frac{17}{36}$ au lieu de $4\,\frac{17}{36}$, h à la place de p par exemple.

(3) Extrait des *« Éléments d'Algèbre »* Chapitre XVI.

d. Synthèse

Il ressort de ces activités, que l'itération du procédé tel qu'il a été présenté précédemment — et tel qu'il est utilisé dans le texte d'Euler — conduit à envisager **sous certaines conditions** la suite numérique définie par les relations :

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} - \dfrac{f(u_{n-1})}{f'(u_{n-1})} \\ u_0 = x_0 \text{ (à choisir)} \end{cases} \qquad \text{(Algorithme de Newton)}$$

3. Algorithme de Babylone et méthode de Newton

On se propose d'examiner le fonctionnement de la méthode de Newton dans le calcul approché de la racine carrée d'un réel positif.

Note

Les activités qui suivent concernent le calcul approché de $\sqrt{5}$. Il est clair qu'elles peuvent être adaptées pour un réel positif quelconque.

Activité 3 : « Construction de la suite »

Soit f la fonction $x \longmapsto x^2 - 5$.

1° Représenter graphiquement la fonction f et contrôler rapidement les résultats suivants :

- sur $]0, +\infty[$, f est strictement croissante, dérivable, à dérivée strictement positive;
- l'équation $f(x)=0$ admet une seule racine sur $]0, +\infty[$ (le réel $\alpha = \sqrt{5}$) que l'on peut localiser dans l'intervalle $]2, 3[$.

2° Montrer que l'algorithme de Newton initialisé en $x_0 \in]2, 3[$ conduit à la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1} + \dfrac{5}{u_{n-1}}\right). \end{cases}$$

Activité 4 : « Comportement - rapidité de convergence »

1. Soit $x_0 = 2{,}5$. Examiner le comportement de la suite (u_n) à la calculatrice en précisant en particulier à partir de quel rang l'affichage semble stabilisé.

2. On choisit x_0 tel que $\sqrt{5} < x_0 < 3$ (utilisation de la localisation précédente (activité 3)). Établir les résultats suivants :

- $u_n > 0$ pour tout n,
- $u_n - \sqrt{5} = \dfrac{1}{2u_{n-1}}(u_{n-1} - \sqrt{5})^2$;

  $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{2u_{n-1}}(5 - u_{n-1}^2)$ pour $n \geqslant 1$.

En déduire que la suite (u_n) est décroissante, minorée par $\sqrt{5}$, puis que :

$$0 < u_n - \sqrt{5} < \frac{1}{2\sqrt{5}}(u_{n-1} - \sqrt{5})^2 \quad (1)$$

3. Limite de (u_n). On pose $v_n = u_n - \sqrt{5}$. Après avoir contrôlé que $0 < v_n < 1$, montrer que $0 < v_n < \dfrac{1}{2\sqrt{5}} v_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. En déduire par un procédé de multiplications en cascade que $0 < v_n < \dfrac{1}{(2\sqrt{5})^n} v_0$. Conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{5}$.

4. Une estimation de la performance

a) En utilisant la relation (1) montrer que si un terme de la suite (u_n) fournit une valeur approchée de $\sqrt{5}$ avec 8 décimales exactes, le terme suivant est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ avec au moins $2 \times 8 = 16$ décimales exactes.
Plus généralement, montrer que l'on **double** le nombre de décimales exactes à chaque pas.

b) On pose $x_0 = 2{,}3$. Vérifier que x_0 est une valeur approchée à 10^{-1} près par excès à $\sqrt{5}$. Montrer que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-32} près!

On trouvera dans l'exercice **12** de fin de chapitre une estimation plus précise de la différence $u_n - \sqrt{5}$ pour un entier naturel n quelconque.

• **Première remarque sur la méthode de Newton**
La qualité de la performance que réalise la suite (u_n) pour l'approximation de $\sqrt{5}$ tient essentiellement à l'inégalité (1). Il n'y a aucune difficulté à saisir qu'une inégalité telle que :

$$|u_n - l| \leqslant k|u_{n-1} - l|^2 \quad \text{avec} \quad 0 < k < 1$$

conduit au même type de comportement :

si $|u_{n-1} - l| < 10^{-p}$ (p entier $\geqslant 1$), alors au rang suivant :

$$|u_n - l| < 10^{-2p},$$

le nombre de décimales exactes sur le réel l double à chaque pas (au moins).

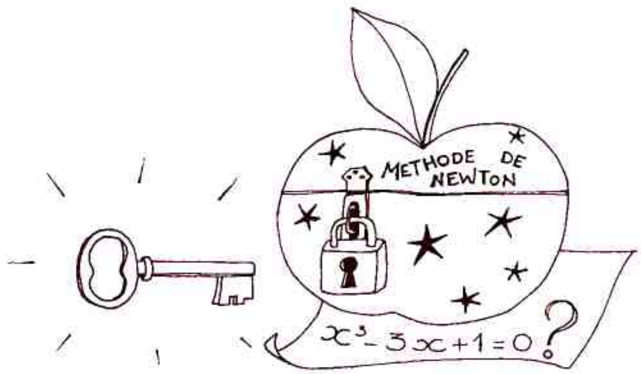
4. Une équation du 3ème degré

a. Le problème

On se propose de résoudre l'équation du 3e degré :

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Cette équation n'ayant pas de solution évidente (a priori), nous envisageons une résolution approchée.



b. Localisation et séparation des racines

Activité 5

Soit f la fonction $x \longmapsto x^3 - 3x + 1$.

1° Étudier les variations de cette fonction et tracer sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (unité 2 cm).

2° Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions α, β, γ. Localiser et séparer ces solutions dans des intervalles ouverts ayant pour extrémités des entiers consécutifs. Vérifier qu'il existe une unique solution dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. On la note $\boldsymbol{\alpha}$.

Cette première étape, où le principe de localisation tient le rôle essentiel, est un préliminaire indispensable à la poursuite de l'étude de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ que nous allons aborder par la méthode de Newton (pour le calcul approché de α).

c. Approximation de la racine α

Activité 6

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = \varphi(u_{n-1}) \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

1° Calculer u_1, u_2 et u_3.

2° Déduire des variations de φ que :

• (u_n) est une suite strictement croissante;

• pour tout n, $0 < u_n < \alpha$.

Nous ne pouvons, à ce stade, contrôler quelle approximation de α fournit le réel u_n ni même être assurés que la suite (u_n) converge vers ce réel 1,.
En **pratique,** le problème réel est d'obtenir une valeur approchée de α à une précision fixée à l'avance (par des contingences extérieures qu'il n'est pas utile de mentionner ici).
Sur ce sujet, muni de la **calculatrice** et du **principe de localisation** il est possible de mettre en œuvre une **technique** suffisante au traitement des problèmes considérés à ce niveau.

Activité 7 (problème résolu)[1]

On cherche une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

1. Le rôle de la calculatrice : Le calcul machine des premiers termes de la suite $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$, montre que, à partir du rang 2, les quatre premières décimales de u_n semblent se stabiliser :

$$u_n = 0{,}347\,2\ldots$$

C'est donc 0,3472 que nous **conjecturerons** comme valeur approchée de α à 10^{-4} près.

2. Le rôle du principe de localisation

Nous savons que dans l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ qui contient α, la fonction f est strictement décroissante et dérivable. On peut donc appliquer le principe de localisation :

- On sait que $0{,}347\,2 < \alpha$ (car par exemple : $0{,}347\,2 < u_2 < \alpha$ (activité 6)).
- Calculons alors $f(0{,}347\,2 + 10^{-4})$.

On a $f(0{,}347\,3) \approx -0{,}000\,009\,6$. Autrement dit, $f(0{,}347\,2 + 10^{-4}) < 0$ et donc, nécessairement :

$$\alpha < 0{,}347\,2 + 10^{-4}.$$

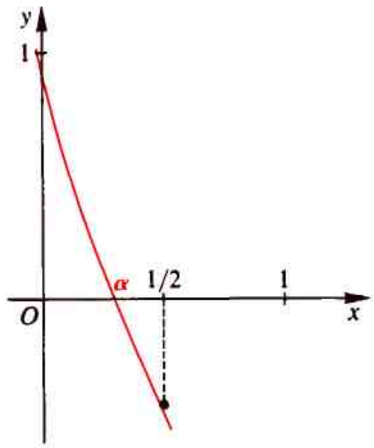


Figure 2

3. Conclusion

On obtient l'encadrement :

$$0{,}347\,2 < \alpha < 0{,}347\,2 + 10^{-4}$$

qui montre que **0,3472 est une valeur approchée** (par défaut) **de α à 10^{-4} près.**

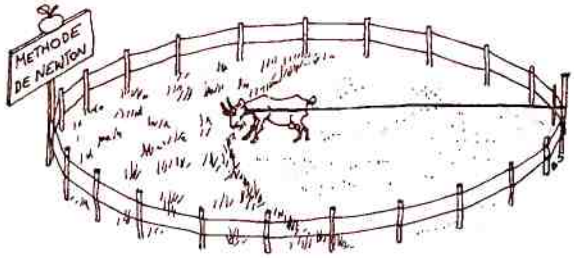
Remarque

Cette technique peut être utilisée chaque fois que le comportement de la suite (u_n) est difficile à déceler. Cependant, elle a ses limites, ne serait-ce que par le fait qu'elle utilise des calculs-machine où peuvent intervenir des problèmes de capacité, d'arrondis...

5. *Le problème de la chèvre*[*]

a. *Enoncé*

Une chèvre est reliée par une corde de longueur l à un pieu fixé en un point A de la circonférence d'un enclos circulaire $\mathcal{C}$, de centre O, d'herbe tendre et de rayon R.
Déterminer l en fonction de R pour que la chèvre puisse brouter au maximum la moitié de l'herbe de l'enclos.

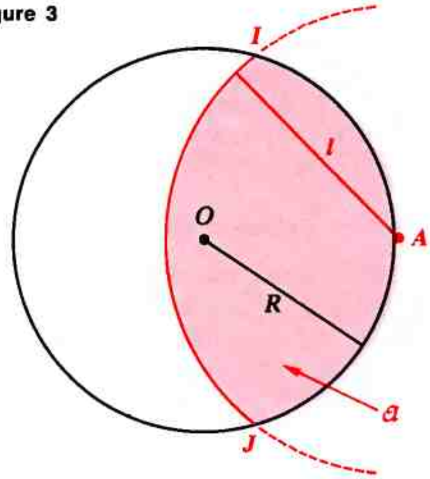


[1] L'activité consiste donc à examiner avec soin chacun des arguments développés.

[*] D'après le « *Petit Archimède* », n^{os} 45-46.

b. Mise en équation du problème

Figure 3



Il s'agit de déterminer l en fonction de R de façon que l'aire commune $\mathcal{A}$ aux disques de centre A et de rayon l et de centre O et de rayon R soit égale à $\frac{1}{2}\pi R^2$.

Des considérations géométriques évidentes montrent que $R < l < 2R$.

Activité 8

Soit φ la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IAJ}$, φ appartenant à $[0, \pi]$.

1° Calculer l'aire du secteur circulaire AIJ (figure 4).

2° Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{IOA}$. En déduire :

- l'expression de l en fonction de R et φ;
- l'aire du triangle OAI;
- l'aire du secteur circulaire OAI;
- l'aire du domaine représenté en grisé (figure 5).

3° Montrer que :

$$\mathcal{A} = R^2(\pi + \varphi \cos \varphi - \sin \varphi).$$

Figure 4

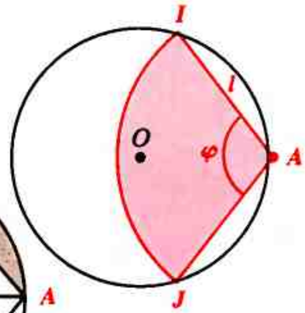
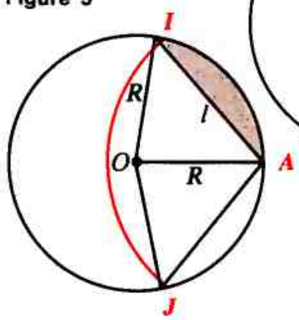


Figure 5



Nous sommes donc amenés à résoudre $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\pi R^2$ soit : $\begin{cases} \sin \varphi - \varphi \cos \varphi = \dfrac{\pi}{2} & 0 < \varphi < \pi \\ l = 2R \cos \dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$

c. Existence et localisation de la (des) solution (s)

Activité 9

Soit f la fonction de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \sin x - x \cos x - \frac{\pi}{2}.$$

1° Montrer que f réalise une bijection strictement croissante de $[0, \pi]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2° En déduire qu'il existe une solution et une seule φ_0 de l'équation $\sin \varphi - \varphi \cos \varphi = \frac{\pi}{2}$ dans l'intervalle $[0, \pi]$ et montrer que $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{2\pi}{3}$ (on justifiera les résultats décrits par la figure 6, page 361).

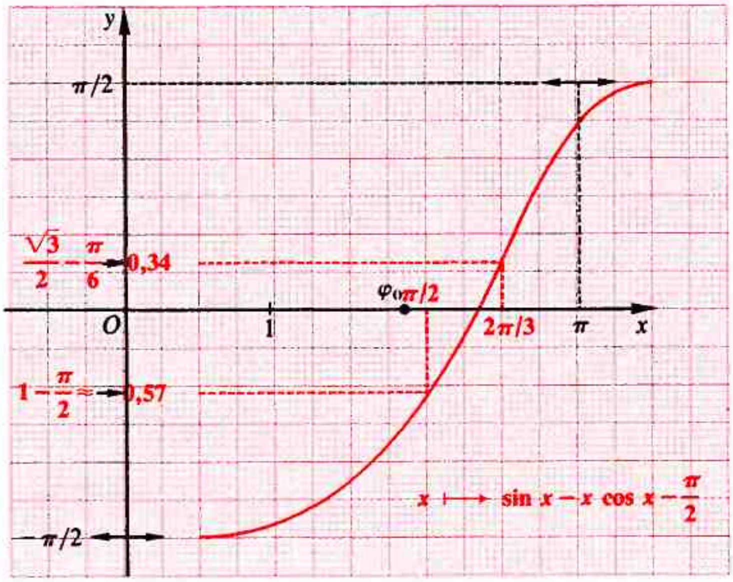


Figure 6

d. Approximation de la solution

On cherche à obtenir une valeur approchée de φ_0 à 10^{-3} près, par la méthode de Newton. On considère donc la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} - \dfrac{f(u_{n-1})}{f'(u_{n-1})} \\ u_0 = x_0 \left(\text{que nous choisirons dans } \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right].\right) \end{cases}$$

Une remarque s'impose : la complexité de la relation précédente :

$$« u_n = u_{n-1} - \frac{\sin u_{n-1} - u_{n-1}\cos u_{n-1} - \dfrac{\pi}{2}}{u_{n-1}\sin u_{n-1}} »$$

montre qu'il ne va pas être aisé d'effectuer un contrôle du comportement de la suite (u_n). En conséquence, nous ferons appel à la technique utilisée dans l'activité 7.

Activité 10

1° En utilisant le principe de la localisation, montrer que si pour un certain entier n :

$$f(u_n + 10^{-3}) > 0 \quad \text{et} \quad f(u_n - 10^{-3}) < 0 ,$$

alors u_n est une valeur approchée de φ_0 à 10^{-3} près.

2° A l'aide de la calculatrice et en initialisant par exemple à $\frac{2\pi}{3}$ $\left(u_0 = \frac{2\pi}{3}\right)$, obtenir une valeur approchée de φ_0 à 10^{-3} près.

(On pourra procéder ainsi :

a) laisser « défiler » à l'affichage les valeurs de (u_n) jusqu'à ce que la troisième décimale semble se stabiliser,

b) contrôler alors par les calculs indiqués dans la question 1, si la valeur obtenue convient.)

e. Approximation du rapport $\frac{l}{R}$

Le rapport $\frac{l}{R}$ qui répond à la question posée est tel que $\frac{l}{R} = 2\cos\frac{\varphi_0}{2}$. Il s'agit donc de déterminer, à partir d'une valeur approchée de φ_0, une valeur approchée de $\frac{l}{R}$ en mesurant la précision obtenue.

Activité 11

1° Soit x_0 un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que, pour $0 \leqslant x \leqslant x_0$;

$$0 \leqslant \cos x - \cos x_0 \leqslant x_0 - x.$$

(On pourra utiliser la fonction auxiliaire $g : x \longmapsto (x_0 - x) - (\cos x - \cos x_0)$.)

2° En déduire que $2\cos\frac{\varphi_0}{2}$ est une valeur approchée par excès de $\frac{l}{R}$ à 10^{-3} près.

Note : On trouve $\frac{l}{R} \approx 1{,}159$ à 10^{-3} près.

6. Commentaire général

Il s'agit de dégager les diverses étapes qui permettent la résolution approchée d'une équation numérique[1] $f(x) = 0$.

1re étape : Existence, localisation et séparation des racines

L'essentiel sur ce sujet a déjà été dit.
Soulignons cependant : les « bonnes » propriétés que cela suppose sur la fonction f (dérivabilité notamment) et le rôle de la représentation graphique.

2e étape : Choix d'un algorithme d'approximation

Nous supposerons toujours que le problème d'approximation est posé dans les termes suivants :
« Soit α une racine localisée et séparée de l'équation $f(x) = 0$. Trouver une valeur approchée de α avec une **précision donnée.** »

Le choix de l'algorithme est un problème difficile (l'algorithme utilisé sera toujours indiqué à ce niveau). Il semblerait naturel de privilégier des **algorithmes performants** (comme la méthode de Newton en général); cependant, la **dichotomie** par exemple, qui semble une méthode plus modeste n'est pas à négliger.
Elle peut intervenir lorsque la précision exigée n'est pas trop fine, mais également pour « dégrossir » une première approximation de α et donc permettre d'**initialiser** un algorithme plus puissant.

3e étape : Explicitation de la suite

Il n'est pas obligatoire de la définir par son **terme général** (sous forme explicite $u_n = \varphi(n)$ ou par récurrence $u_n = \varphi(u_{n-1})$).

Ainsi, par exemple, lorsque l'on utilise un **balayage** à pas successifs $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, etc. (cf. chapitre 8), il suffit d'expliciter les premiers termes jusqu'à obtention de la précision désirée.

[1] Mais aussi des inéquations $f(x) \geqslant 0$ ou $f(x) < 0$, etc.

4e étape : Contrôle de l'approximation

• Si l'on dispose d'un renseignement du type $|u_n - \alpha| \leqslant k\varepsilon_n$ $(k>0)$ où (ε_n) est une suite de référence en 0, il n'y a aucune difficulté à établir que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ (c'est la définition) et à prévoir le(s) terme(s) de la suite qui fourniront l'approximation souhaitée.

• Sinon, il sera possible de mettre en œuvre une technique semblable à celle utilisée dans les activités 7 et 10 qui s'appuie sur le **principe de localisation.**

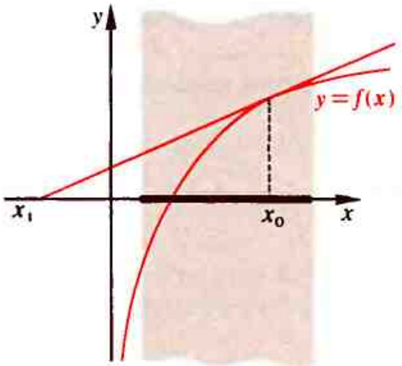
• Est-il besoin de souligner, à cette étape, le rôle prépondérant de la calculatrice (pour les besoins numériques, bien sûr, mais aussi pour les conjectures...)?

Remarques

1. La méthode de Newton substitue en fait à l'équation $f(x)=0$, une équation de la forme $\varphi(x)=x$ $\left(\text{avec} \quad \varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right)$ que l'on résout au moyen de la suite récurrente $u_n=\varphi(u_{n-1})$.

Réciproquement, toute équation de la forme $\varphi(x)=x$ peut être abordée par la méthode de Newton (voir exemple problème **13**).

2. Bien que non préoccupé — à ce niveau — par les conditions générales de validité de la méthode de Newton, on se gardera de croire que cette méthode fonctionne à chaque fois :



◀ **Figure 7 : Sortie d'intervalle.**

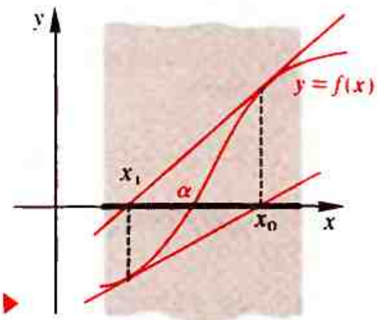


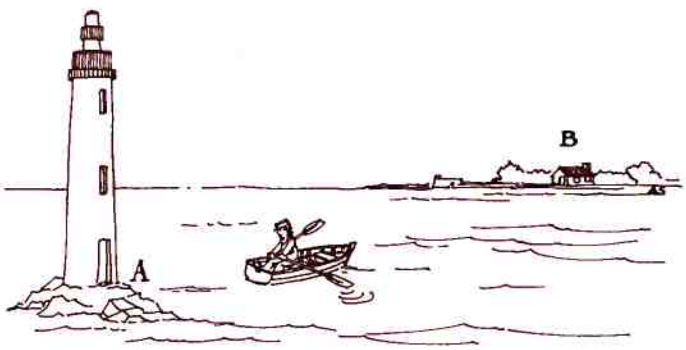
Figure 8 : Circuit fermé. ▶

II. Trajet de durée minimale

1. Exemple introductif

a. Un problème classique

Pour des raisons encore obscures, le gardien du phare (point A) doit rejoindre le **plus rapidement** possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h.



Où doit-il accoster pour que le temps de parcours soit minimum? (Les données complémentaires sont portées sur la figure 9.)

Note : La côte est supposée rectiligne (droite Δ).

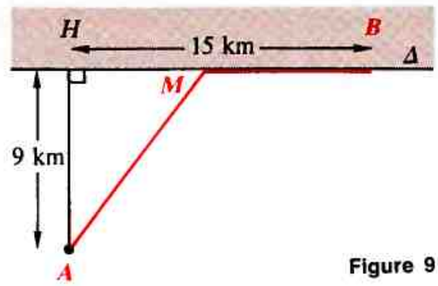


Figure 9

b. Mise en équation du problème

Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite Δ. Désignons par M le point d'accostage sur Δ. (Il est clair que pour minimiser le temps de parcours le point M doit être situé sur le segment $[H, B]$.)

Activité 12

On pose $x = HM$.

1° Calculer le temps du parcours en mer ($[A, M]$) puis le temps du parcours à terre ($[M, B]$).

2° Montrer que le problème revient à déterminer le minimum sur $[0,15]$ de la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{4}\sqrt{x^2+81} + \frac{1}{5}(15-x).$$

Pour aborder un tel problème par les méthodes de dérivation, on voit qu'il est nécessaire de disposer de renseignements sur la dérivée de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+81}$.
Des situations analogues conduisent à envisager de façon plus générale des fonctions de la forme $x \longmapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$.

2. Dérivabilité de $x \longmapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$

a. Le résultat

Soit u une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable en tout point x_0 tel que $u(x_0) > 0$ et $f'(x_0) = \dfrac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}$.

Deux considérations dictent la formulation qui vient d'être adoptée :

- **Faciliter l'utilisation de la formule de dérivation** obtenue (la fonction u ne se présente pas toujours a priori sous la forme $x \longmapsto ax^2+bx+c$, il faut songer à la forme canonique $x \longmapsto a(x-x_0)^2+k$ ou factorisée $x \longmapsto a(x-\alpha)(x-\beta)$ par exemple).
- **Préparer l'extension de ce résultat** à d'autres fonctions que celles du second degré (qui sera envisagée en classe de Terminale).

Démonstration :

Remarques préliminaires

Il résulte de l'étude du signe du trinôme que, si $u(x_0) > 0$, il existe un intervalle $]x_0-\alpha\ ,\ x_0+\alpha[$ $(\alpha > 0)$, sur lequel u ne prend que des valeurs strictement positives.

Rappelons, d'autre part (cf. chapitre 7) que si u est un polynôme du second degré, quels que soient x_0 et k :

$$u(x_0+h)=p+qh+rh^2$$

avec $P=u(x_0)$, $q=u'(x_0)$ (et $r=\dfrac{u''(x_0)}{2}$ si l'on veut préciser, mais cela ne sera pas utile).

Enfin, le rappel de la double inégalité (cf. chapitre 4) :

$$-\frac{1}{2}x^2<\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)<0 ,$$

valable pour $1+x\geqslant 0$, permet de se douter, de façon tout à fait judicieuse que l'on va être conduit à l'activité 13.

Activité 13 : « Développement limité en O de $\sqrt{p+qh+rh^2}$

1° Montrer que, pour $|h|$ suffisamment petit :

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}+\frac{r}{p}h\right)^2h^2<\sqrt{1+\frac{q}{p}h+\frac{r}{p}h^2}-\left(1+\frac{q}{2p}h\right)<\frac{1}{2}\frac{r}{p}h^2.$$

2° Montrer que la fonction :

$$h\longmapsto -\frac{1}{2}\left(\frac{q}{p}+\frac{r}{p}h\right)^2$$

est bornée au voisinage de 0. En déduire que :

$$\sqrt{p+qh+rh^2}=\sqrt{p}+\frac{q}{2\sqrt{p}}h+h\varphi(h) ,$$

avec $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0.$

En revenant aux notations initiales, on obtient :

$$\sqrt{u(x_0+h)}=\sqrt{u(x_0)}+\frac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}h+h\varphi(h);\quad \text{où}\quad \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$$

ce qui constitue un développement limité à l'ordre 1 de $x\longmapsto\sqrt{u(x)}$ au point x_0 et établit donc le résultat annoncé.

b. Exemples

1. La fonction $f : x\longmapsto\sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ ou encore $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

2. La fonction $f : x\longmapsto\sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Il est inutile d'étudier la dérivabilité en un point x_0 de $]-\infty, -1[$ ou de $]1, +\infty[$: la fonction f n'y est pas, en effet, définie.

En ce qui concerne la dérivabilité au point 1, on a, avec $h>0$:

$$\frac{f(1-h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{1-(1-h)^2}-0}{h}=\frac{\sqrt{2h-h^2}}{h}=\frac{h\sqrt{\frac{2}{h}+1}}{h}=\sqrt{\frac{2}{h}-1} .$$

Comme $\dfrac{2}{h}-1>\dfrac{1}{h}$ si $h<1$, on a $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}=+\infty$, ce qui montre que f n'est pas dérivable au point 1.

c. Retour à l'exemple introductif

Nous pouvons maintenant appliquer les techniques de dérivation à la recherche du minimum de la fonction

$$f : [0,15] \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{4}\sqrt{x^2+81}+\frac{1}{5}(15-x)$$

La fonction f est dérivable sur $[0, 15]$ et :

$$f'(x)=\frac{1}{4}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+81}}-\frac{1}{5}=\frac{5x-4\sqrt{x^2+81}}{20\sqrt{x^2+81}}.$$

Il en résulte que f' est du signe de :

$$5x-4\sqrt{x^2+81}=\frac{25x^2-16(x^2+81)}{5x+4\sqrt{x^2+81}}$$

(après multiplication par la quantité dite conjuguée).

Comme $5x+4\sqrt{x^2+81}$ est strictement positif et que

$$25x^2-16(x^2+81)=9(x^2-9\times 16)$$
$$=9(x-12)(x+12)\ ,$$

il n'y a aucune difficulté à dresser le tableau de variations de la fonction f, où il apparaît clairement qu'elle atteint son minimum au point $x=12$.

x	0		12		15
$9(x-12)(x+12)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘			↗	

Cela correspond à un temps de parcours minimum égal à :

$$\frac{1}{4}\sqrt{12^2+81}+\frac{1}{5}(15-12)\ ,$$

soit (tous calculs faits) à **4 h 21 min** (dont 3 h 45 min en mer et 36 min le long de la côte, à pied).

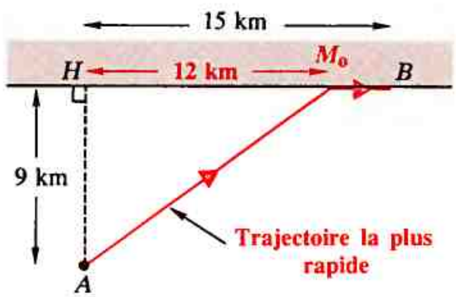


Figure 10

3. La loi de Descartes

a. Exposé du problème

La droite Δ divise un plan en deux parties (milieux).

Un point se déplace dans le milieu 1 à la vitesse v_1 et dans le milieu 2 à la vitesse v_2.

Quelle doit être la trajectoire du point pour aller aussi vite que possible du point A du milieu 1 au point B du milieu 2?

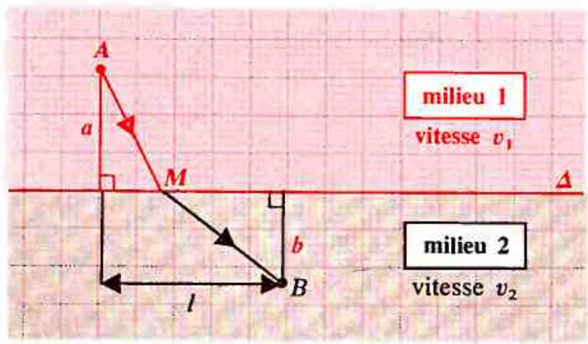


Figure 11

b. L'aspect analytique

Il est clair qu'aussi bien dans le milieu 1 que dans le milieu 2, la trajectoire du point doit être rectiligne, mais que la trajectoire représentée par le segment $[A, B]$ n'est pas, en général, le chemin « le plus rapide ».

Introduisons H et K les projetés orthogonaux de A et B sur Δ, et $(H, \vec{i}, \vec{j})$ le repère orthonormé défini figure 12. Il est possible de préciser les positions des points A, B et K par leurs coordonnées : nous noterons ainsi $A(0, a)$; $B(l, -b)$ et donc $K(l, 0)$.

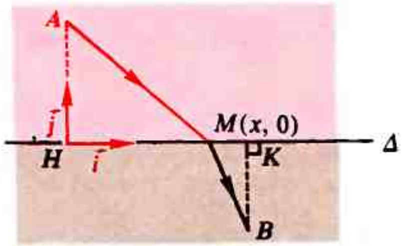


Figure 12

Activité 14

Soit M un point de Δ d'abscisse x ($\overrightarrow{HM} = x\vec{i}$).

1° Montrer que la durée du trajet AMB (segment $[A, M]$ suivi du segment $[M, B]$) est :

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{v_2}.$$

2° Montrer que t est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée t'.
Vérifier que $t'(0)$ et $t'(l)$ sont de signes contraires.

3° Démontrer que t' est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule qu'en un point x_0 de l'intervalle $]0, \ell[$.
(On pourra faire intervenir la dérivée de t'.)

4° En déduire que t présente un seul minimum x_0 caractérisé par :

$$\frac{1}{v_1} \times \frac{x_0}{\sqrt{a^2+x_0^2}} = \frac{1}{v_2} \times \frac{l-x_0}{\sqrt{b^2+(l-x_0)^2}} \quad (1)$$

Il existe donc une trajectoire AM_0B de durée minimum, le point M_0 étant situé entre H et K (ce que nous aurions pu montrer au moyen de considérations géométriques élémentaires).

c. La loi de Snellius-Descartes

Soit M un point de $[H, K]$ avec $HM = x$. Désignons par i_1 et i_2 la mesure $\left(\text{entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2}\right)$ de chacun des angles géométriques $\widehat{HAM}$ et $\widehat{KBM}$. On a :

$$\sin i_1 = \frac{HM}{AM} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

et

$$\sin i_2 = \frac{KM}{BM} = \frac{l-x}{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}.$$

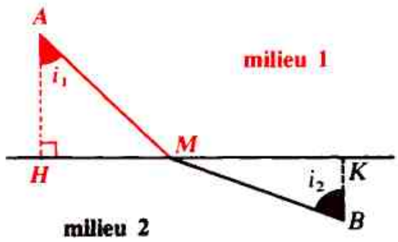


Figure 13

On peut donc exprimer la dérivée de t sur $[0, l]$ par : $t'(x) = \frac{\sin i_1}{v_1} - \frac{\sin i_2}{v_2}$.

Il en découle que la trajectoire de durée minimale est caractérisée par la relation :

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}.$$

Ce résultat est conforme à la loi de la **réfraction** (loi de Snellius-Descartes); d'après elle, la réfraction se fait de telle façon que le rayon lumineux choisit le « chemin le plus rapide » entre le point de l'un des milieux au point de l'autre.

Notes

1. Les égalités angulaires (évidentes) que décrit la figure 14 expliquent l'utilisation du mot **réfraction** (la normale en M_0 étant définie comme la perpendiculaire à Δ passant par M_0).

2. Il est fréquent d'utiliser en optique, les indices de réfraction pour chacun des milieux considérés. Notés n_1 (respectivement n_2) ils se définissent comme les rapports $n_1 = \frac{c}{v_1}$ $\left(\text{respectivement } n_2 = \frac{c}{v_2}\right)$, où c est la vitesse de la lumière.

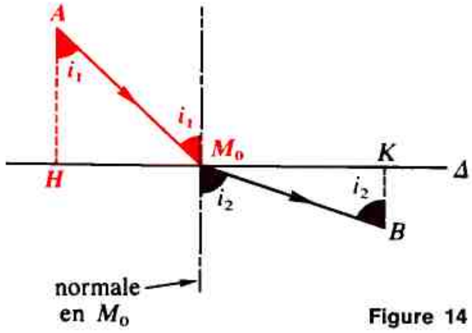


Figure 14

La loi de Snellius-Descartes s'énonce alors sous la forme : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

III. Une jauge pour une citerne

1. Le problème posé

Une citerne cylindrique est disposée comme l'indique le schéma ci-contre, les bases du cylindre étant verticales.

Il s'agit de **graduer** une jauge en indiquant sur une tige métallique le volume de liquide contenu en fonction du niveau atteint[1].

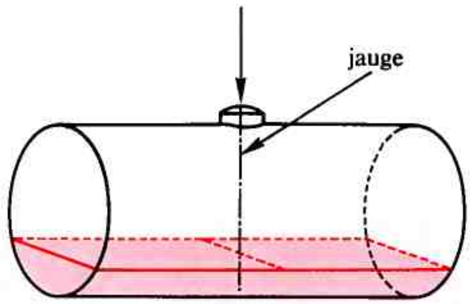
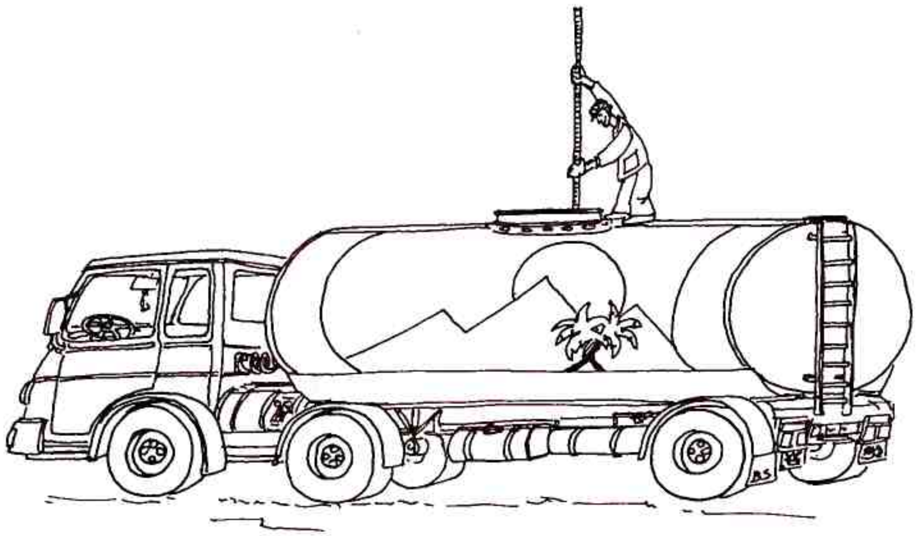


Figure 15



[1] On pourrait évidemment (mais avec quelques difficultés) graduer de façon expérimentale, en plaçant dans la cuve des quantités connues (100 litres, 200 litres... par exemple). Ceci ne sera considéré ici que comme une vérification.

Le principe retenu est celui de la **graduation en pourcentage** (cela signifie que, par exemple, lorsque le niveau du liquide est repéré à la graduation 25 % le volume qu'il occupe est égal à 25 % de la contenance de la citerne).

Les avantages d'une telle graduation sont évidents :

1. Son élaboration pour un cylindre de diamètre donné permet de fabriquer des jauges du même type pour des cylindres de diamètre quelconque : les jauges sont homothétiques l'une de l'autre dans le rapport des diamètres.

2. La connaissance du volume total du cylindre suffit, après lecture de la graduation, à déterminer le volume du liquide en présence. Vu le point 1, on choisit donc de traiter le problème lorsque les bases circulaires du cylindre sont de **rayon 1.**

2. Mathématisation du problème

Il est clair que le problème se ramène à graduer un diamètre $[A, B]$ d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 en fonction de l'aire $\mathcal{A}$ du secteur circulaire correspondant au volume occupé par le liquide dans le cylindre.

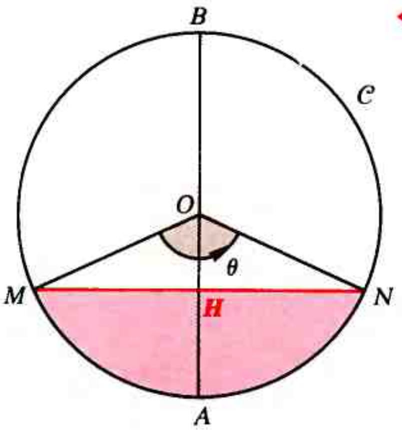


Figure 16

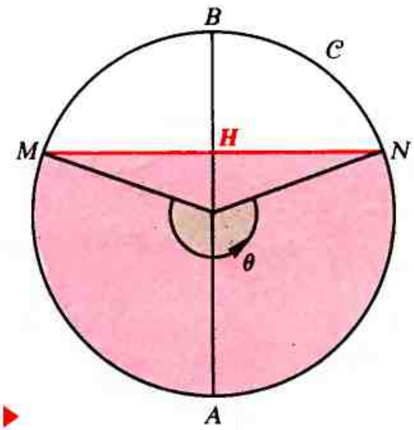


Figure 17

Introduction des paramètres

On suppose que le cercle $\mathcal{C}$ est orienté dans le sens trigonométrique.

On désigne alors par :

- θ la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}})$ qui appartient à l'intervalle $[0,2\pi]$;
- $\mathcal{A} = f(\theta)$ l'aire du secteur circulaire correspondant (représenté en rosé figures 16 et 17);
- $h = h(\theta)$ la longueur du segment $[A, H]$.

Il s'agit donc, dans un premier temps d'établir une correspondance entre l'aire $f(\theta)$ et la « hauteur » $h(\theta)$.

3. La correspondance aire-hauteur

Activité 15

1° Montrer que quelque soit θ de l'intervalle $[0, 2\pi]$, on a :

$$f(\theta) = \frac{1}{2}(\theta - \sin\theta)$$
$$h(\theta) = 1 - \cos\frac{\theta}{2}.$$

(On pourra distinguer les cas $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ et $\pi < \theta \leqslant 2\pi$.)

2° **Étude de** f

Montrer que f réalise une bijection strictement croissante de $[0, 2\pi]$ sur $[0, \pi]$.

Donner une représentation graphique[1] soignée de la fonction f.

3° **Étude de h**
Montrer que h réalise une bijection strictement croissante de $[0, 2\pi]$ sur $[0, 2]$ et donner une représentation graphique[2] (également soignée) de la fonction h.

4° **Correspondance aire-hauteur**
Montrer que l'application $h \circ f^{-1}$ est une bijection strictement croissante de $[0, \pi]$ dans $[0, 2]$.

Il est clair que ce dernier résultat n'a rien d'extravagant par rapport à l'attente que l'on pouvait en avoir du point de vue physique, à savoir que la fonction aire $\longmapsto$ hauteur est une bijection croissante (au sens strict) de $[0, \pi]$ sur $[0, 2]$.

C'est l'explicitation délicate au point de vue numérique de la fonction f^{-1} qui conduit à exploiter l'aspect graphique, facilité par la disposition qui suit.

Représentation[3] de $h \circ f^{-1}$: courbe Γ

Le principe est le suivant :

1. Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant orthonormé, l'aire $\mathcal{A}$ est placée en abscisse et la hauteur h en ordonnée ($0 \leqslant \mathcal{A} \leqslant \pi$ et $0 \leqslant h \leqslant 2$).

2. On représente la fonction f dans le **repère** $(O, -\vec{j}, \vec{i})$ (courbe $\mathcal{C}_f$) et la fonction h dans le **repère** $(O, -\vec{i}, \vec{j})$ (courbe $\mathcal{C}_h$).

3. Pour obtenir le point $M_0(\mathcal{A}_0, h_0)$ de la courbe représentative de la fonction $h \circ f^{-1}$, on suit le « chemin » indiqué par le schéma ci-dessous :

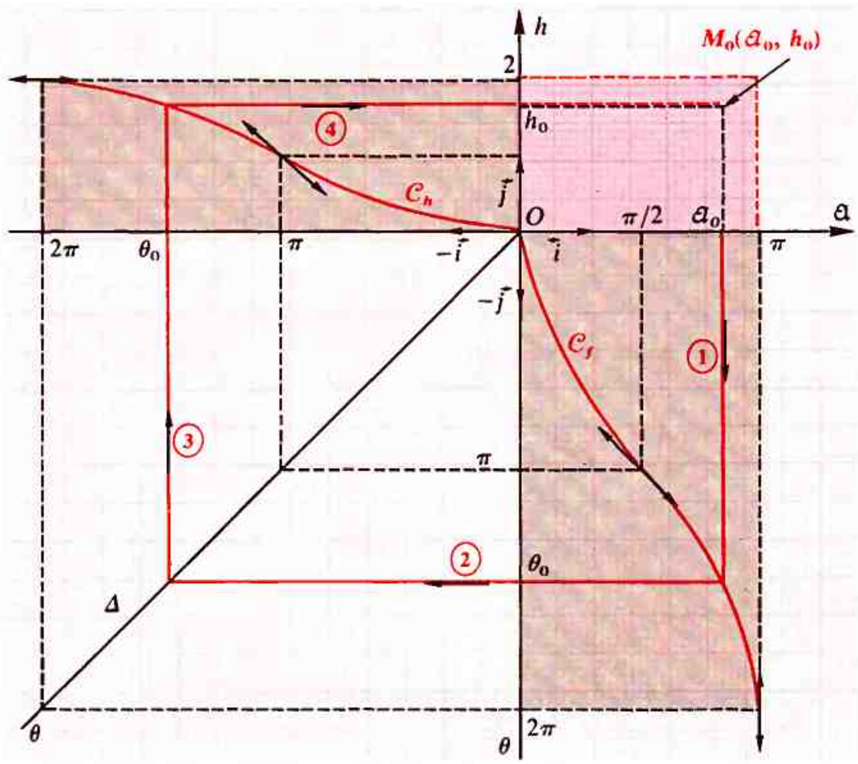


Figure 18

(1) et (2) On contrôlera ce que suggèrent les représentations graphiques obtenues, à savoir que dans chaque cas le point de la courbe d'abscisse π est un centre de symétrie.

(3) La méthode de représentation utilisée a été empruntée au *Petit Archimède* (notamment dans les numéros consacrés à la série « *Dessins mystérieux* »).

Au réel a_0 de $[0, \pi]$ on associe le réel θ_0 de $[0, 2\pi]$ au moyen de la courbe $\mathcal{C}_f$ (flèche 1).
Ce réel θ_0 est reporté sur l'axe (Ox) au moyen de la droite Δ d'équation $y = x$ (flèches 2 et 3).
On associe alors à θ_0 le réel h_0 par l'intermédiaire de la courbe $\mathcal{C}_h$ (flèche 4).
Il est possible d'obtenir ainsi une construction point par point de la courbe Γ (théoriquement).

4. Le point de vue graphique : graduation à partir de la courbe Γ

La courbe Γ représentée ci-dessous a été obtenue à l'aide d'un ordinateur.

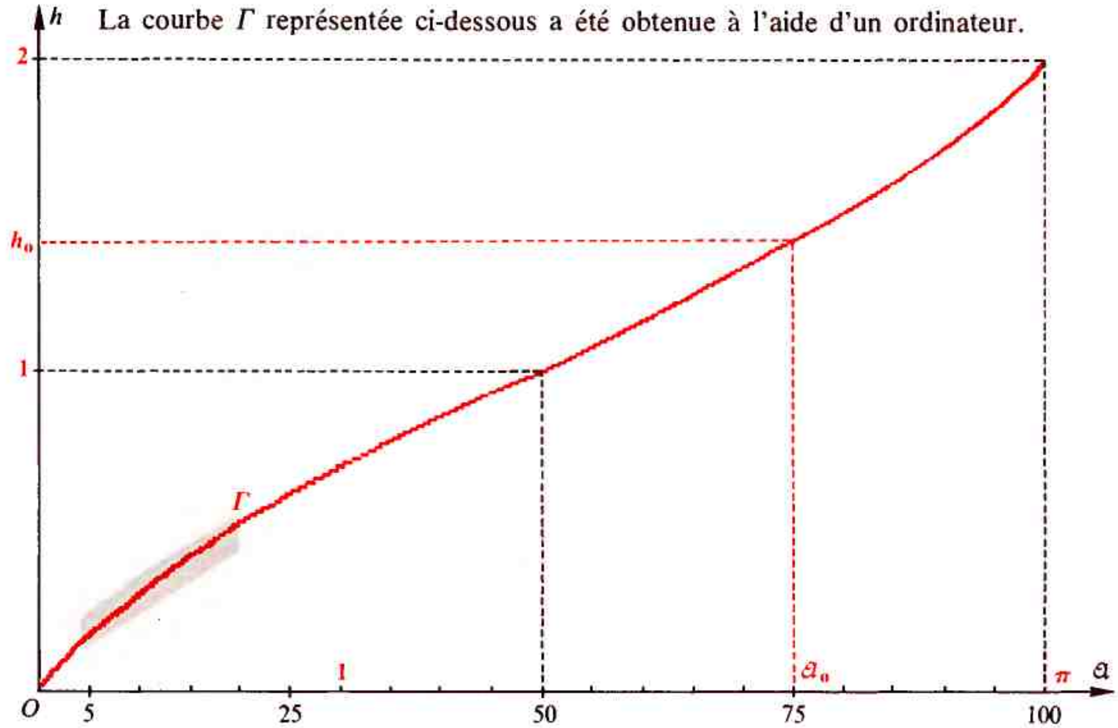


Figure 19

Il suffit alors de partager l'intervalle $[0, \pi]$ en 20 (par exemple) pour obtenir sur $[0, 2]$ la graduation de la jauge (de 5 % en 5 %) :
— la première indiquant un volume égal à 5 % du volume total V,
— la seconde 10 % de V,
— etc.
Les nombres 5, 10, 15, ..., 90, 95, 100 sont portés sur la jauge.

Activité 16

Vérifier à l'aide du graphique précédent, que si la citerne a pour diamètre 2 mètres, la hauteur du liquide correspondant à 75 % du volume est environ 1,4 m.

5. Le point de vue numérique : exemple

Le calcul machine (ordinateur ou calculatrice programmable) permet d'améliorer très nettement les résultats précédents pour lesquels la **précision graphique est indispensable.**

a. Deux problèmes

Supposons que l'on veuille par exemple placer sur la jauge la graduation 25 % correspondant au quart du volume.

On doit donc résoudre dans un premier temps l'équation $f(\theta)=\frac{\pi}{4}$, donc déterminer l'unique réel θ_0 tel que $\frac{1}{2}(\theta_0-\sin\theta_0)=\frac{\pi}{4}$, puis dans un second temps calculer la valeur de $h(\theta_0)$, à savoir $1-\cos\frac{\theta_0}{2}$.

On est donc amené :

1° à mettre en place un **algorithme de résolution approchée** de l'équation $\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta)=\frac{\pi}{4}$;

2° à **contrôler l'erreur commise** dans le calcul de $h(\theta_0)$ lorsque l'on remplace θ_0 par une valeur approchée θ.

b. Le contrôle de l'erreur

L'activité 17 se propose d'établir que **si θ est une valeur approchée de θ_0 à ε près, $1-\cos\frac{\theta}{2}$ est une valeur approchée de $1-\cos\frac{\theta_0}{2}$ à $\frac{\varepsilon}{2}$ près.**

Activité 17

1° **L'inégalité**[1] $|\cos b-\cos a|\leqslant|b-a|$

Soit a un réel fixé. On désigne par u et v les fonctions :

$$u : x \longmapsto (x-a)-(\cos x-\cos a)$$

$$v : x \longmapsto (\cos x-\cos a)+(x-a).$$

Étudier le signe des fonctions u et v et en déduire l'inégalité proposée.

2° Soit $h(\theta)=1-\cos\frac{\theta}{2}$. Montrer que :

$$|h(\theta)-h(\theta_0)|\leqslant\frac{1}{2}|\theta-\theta_0|.$$

c. Résolution approchée de $\frac{1}{2}(\theta-\sin\theta)=\frac{\pi}{4}$

L'étude et la représentation graphique de f permet de localiser la solution θ_0 dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Nous chercherons une **valeur approchée de θ_0 à 10^{-2} près.**

Activité 18

1° Montrer que θ_0 est la solution dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ de l'équation $\sin\theta=\theta-\frac{\pi}{2}$.

2° Donner une représentation graphique des fonctions $\theta\longmapsto\sin\theta$ et $\theta\longmapsto\theta-\frac{\pi}{2}$.

Quelle valeur « simple » de θ la représentation obtenue suggère-t-elle de tester?

3° En utilisant la méthode du balayage sur un intervalle et avec un pas convenablement choisi montrer que :

$$2{,}31<\theta_0<2{,}32.$$

[1] Cette inégalité généralise celle obtenue dans l'activité 11.

Remarque

Le changement de variable :

$$x = \theta - \frac{\pi}{2}$$

permet de substituer à la résolution de l'équation :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\theta - \sin\theta) = \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases} \quad \text{celle de} \quad \boxed{\begin{cases} \cos x = x \\ 0 < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}}$$

On trouvera (problème **20**) à partir d'une situation analogue, l'étude détaillée de la résolution approchée de cette dernière équation au moyen d'une suite récurrente.

d. Calcul de la hauteur

En calculant $h(2{,}31)$ nous sommes certains d'obtenir une valeur approchée de la hauteur cherchée à $\frac{1}{2}\,10^{-2}$ près (activité 17).

Le calcul machine montre que l'on peut retenir **$h = 0{,}60$ m à 10^{-2} près.**

e. Commentaire

Il est possible de généraliser l'étude précédente à un pourcentage de volume quelconque. Le tableau ci-dessous (obtenu à l'aide d'un ordinateur par la méthode de Newton — que nous ne détaillerons par ici —) fournit à 1 mm près la hauteur du liquide dans la citerne pour des volumes pris de 5 % en 5 % (diamètre de la cuve : toujours 2 mètres).

Hauteur h (en mètres)	Pourcentage du volume	Hauteur h (en mètres)	Pourcentage du volume
0.000	0.00	1.078	0.55
0.195	0.05	1.157	0.60
0.313	0.10	1.238	0.65
0.415	0.15	1.319	0.70
0.508	0.20	1.404	0.75
0.596	0.25	1.492	0.80
0.681	0.30	1.585	0.85
0.762	0.35	1.687	0.90
0.843	0.40	1.805	0.95
0.922	0.45	2.000	1.00
1.000	0.50		

6. Sur l'utilité d'un tel travail

L'examen de la courbe Γ (figure 19 et en rappel, page 374, figure 20) conduit à s'interroger sur la pertinence du travail qui vient d'être effectué.

En effet, la courbe Γ semble apparemment assez proche de la droite Δ d'équation $h = \frac{2}{\pi}\,a$.

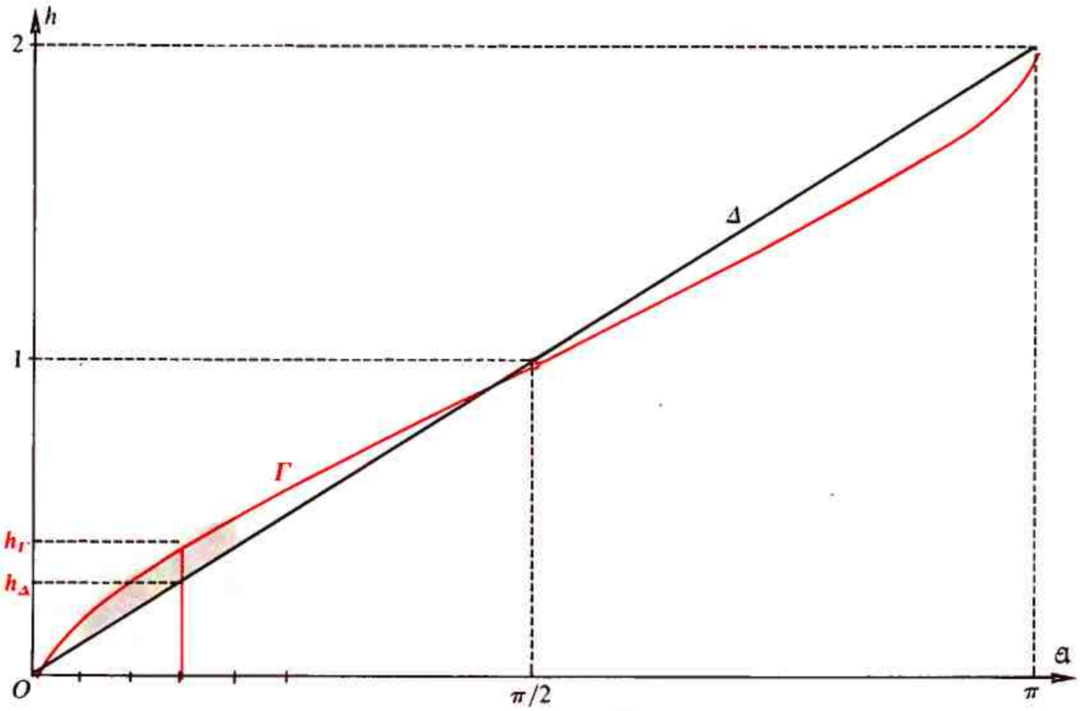


Figure 20

Construire la graduation de la jauge à partir de la droite Δ — en lieu et place de Γ — est immédiat : la graduation est en effet **régulière.**

Pour juger l'utilité de l'étude qui vient d'être faite, il est indispensable d'apprécier l'erreur que l'on commettrait en remplaçant la graduation obtenue dans le tableau précédent par cette graduation régulière.

La comparaison sera effectuée pour 5 %, 10 %, 15 % et 20 % du volume, autrement dit sur un intervalle où graphiquement l'erreur semble la plus manifeste.

Activité 19

On désigne par h_Γ la hauteur obtenue par l'utilisation de la courbe Γ (cf. tableau page précédente) et par h_Δ celle qui correspondrait à la droite Δ. Compléter le tableau ci-contre :

Pourcentage en volume	5 %	10 %	15 %	20 %
Hauteur h_Γ	0,195	0,313	0,415	0,508
Hauteur h_Δ				
Erreur $e = h_\Gamma - h_\Delta$				
Erreur en pourcentage $\frac{e}{h_\Gamma} \times 100$				

On voit que pour 15 % du volume, l'erreur serait d'environ 28 %... ce qui est loin d'être négligeable.

En **conclusion,** l'utilisation d'une jauge régulièrement graduée n'est pas sérieusement envisageable.

7. Commentaire général

a. Sur le problème proprement dit

• Un autre point de vue — et c'est celui des Poids et Mesures — réside dans la détermination du volume à partir de la hauteur du liquide mesurée.

Il revient à exprimer l'aire $\mathcal{A}$ $\left(\mathcal{A} = f(\theta) = \frac{1}{2}(\theta - \sin\theta) \right)$ en fonction de la hauteur $h \left(h = h(\theta) = 1 - \cos\frac{\theta}{2} \right)$ autrement dit à utiliser la fonction $f \circ h^{-1}$ de $[0, 2]$ dans $[0, \pi]$ (au lieu de $h \circ f^{-1}$ comme précédemment).

L'aspect technique s'en trouve facilité; en effet, la résolution de l'équation $1 - \cos\frac{\theta}{2} = h$ (h donnée dans $[0, 2]$; θ inconnue dans $[0, \pi]$) est directement effectuée par la calculatrice : en mode radian, pour $x \in [-1, 1]$, la séquence x $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{COS}}$ détermine le seul réel de $[0, \pi]$ dont le cosinis est égal à x.

La programmation — également aisée — de la fonction f permet d'élaborer alors une **table de correspondance.**

• Signalons que, dans la réalité, les parois verticales de la cuve sont légèrement bombées, ce qui modifie — de façon relativement minime — les résultats obtenus.

b. Sur les méthodes utilisées

Deux points sont à dégager :

• L'utilisation de courbes représentatives

Elle illustre dans le thème de la « jauge » une méthode plus générale, celle de **l'exploitation d'un graphique.** Cette méthode, déjà mise en œuvre à plusieurs reprises (par exemple pour comparer deux fonctions, pour améliorer la localisation d'une racine, etc.) nécessite — et ceci peut être considéré comme un pléonasme — du **soin dans les activités de tracé.** Et donc, lorsqu'il s'agit de la courbe représentative d'une fonction, elle exige une étude « fine » de ses propriétés...

• Le contrôle de l'erreur dans les problèmes d'approximation

Comme on a pu s'en rendre compte, cet aspect est particulièrement délicat. Les quelques **techniques** que nous avons esquissées[1] :

— obtention d'une inégalité $|u_n - \alpha| < k \cdot \varepsilon_n$ (où (ε_n) est une suite de référence en 0);
— utilisation du principe de localisation (cf. activités 7 et 10);

suffisent largement au niveau de cet ouvrage.

• Un point cependant est à souligner : l'approximation d'une « quantité » utilise souvent une fonction intermédiaire. En clair : nous voulons approximer $f(\theta_0)$, f étant une fonction « connue », en disposant de valeurs approchées θ de θ_0 (cf. activités 11 et 17). S'il est naturel de considérer les nombres $f(\theta)$, il est néanmoins indispensable **d'effectuer un contrôle de l'erreur** $|f(\theta) - f(\theta_0)|$.

[1] Voir commentaire pages 362 et 363, pour plus de détails.

EXERCICES

1. Élevé au cube

Est-il vrai que :

$(999\,999\,999)^3 = 999\,999\,999\,700\,000\,000\,029\,999\,999\,999$?

2. Partie entière

Il s'agit de déterminer la partie entière du nombre :

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9\,999}} + \frac{1}{\sqrt{10\,000}}.$$

1° Établir l'inégalité suivante valable pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

2° En déduire que :

$$2(\sqrt{10\,001} - 1) \leqslant A \leqslant 2\sqrt{10\,000} - 1.$$

3° Conclure.

3. Minimum

On se propose d'étudier le minimum de :

$$\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right),$$

où a et b sont des réels strictement positifs. On pose $x = \frac{a}{b}$.

1° Montrer que :

$$\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) = f(x),$$

avec $f(x) = \sqrt{1+x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

2° A l'aide de la dérivation, déterminer le minimum de f sur $]0, +\infty[$.

3° En déduire que, quels que soient a et b strictement positifs :

$$\sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geqslant 2\sqrt{2}$$

(l'égalité n'ayant lieu que lorsque $a = b$).

4. Parabole de sûreté

(D'après *« Enveloppes »* de V. BOLTIANSKI. Éditions Mir. Moscou.)

Si l'on fait abstraction des frottements et de la résistance de l'air, la trajectoire (courbe **balistique**) d'un obus ou boulet, lancé d'un point O, avec une vitesse initiale v, suivant un angle d'inclinaison α par rapport à l'horizontale $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ est la parabole $\mathcal{T}_\alpha$ d'équation :

$$y = \frac{-g}{2v^2 \cos^2 \alpha}\, x^2 + (\tan \alpha)\, x,$$

où g est l'accélération de la pesanteur ($g = 9{,}81$ m/s^2). Dans ce qui suit la vitesse v est fixée et l'on note k la constante positive : $k = \frac{g}{v^2}$. La parabole $\mathcal{T}_\alpha$ a alors pour équation $y = t_\alpha(x)$ avec :

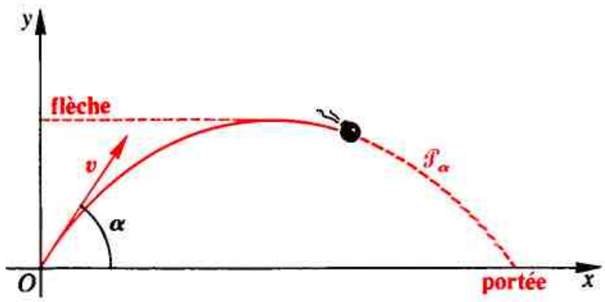
$$t_\alpha(x) = \frac{-k}{2\cos^2 \alpha}\, x^2 + (\tan \alpha)\, x\ ,$$

($k > 0$ fixé).

1° **La flèche :** La flèche est l'altitude maximale atteinte par l'obus.

a) Exprimer la flèche $h(\alpha)$ pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} h(x) = \frac{1}{2k}$.



(On montre[1], en mécanique, que lorsque l'obus est lancé verticalement, son altitude maximale est :

$$\frac{1}{2k} = \frac{v^2}{2g}.)$$

2° **La portée :** La portée $p(\alpha)$ est la distance de O au point d'impact avec l'horizontale.

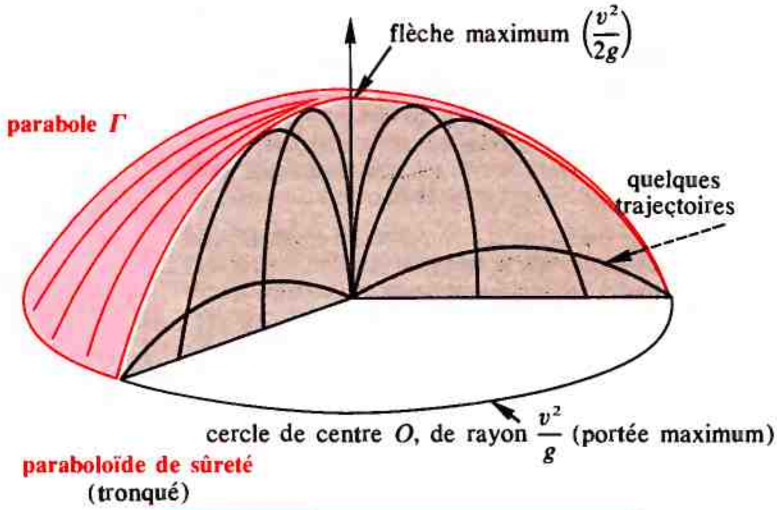
a) Calculer $p(\alpha)$.

b) Montrer que la portée maximale est $\frac{1}{k}$ et qu'elle est atteinte lorsque $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

[1] On montre, mais on évite les vérifications expérimentales.

3° La parabole de sûreté

Il s'agit d'étudier la **zone de tir**, c'est-à-dire la partie de l'espace atteinte par les trajectoires d'un obus si l'on tire sous des angles α différents (en supposant ces trajectoires toujours situées dans le même plan et en complétant les tracés par symétrie d'axe (Oy), pour des raisons évidentes).



a) Montrer qu'un point $M(x, y)$ (avec $x>0$ et $y \geqslant 0$) peut être atteint par une trajectoire d'obus, si et seulement si :

$$y \leqslant -\frac{k}{2}x^2+\frac{1}{2k}.$$

(On pourra établir qu'il existe α appartenant à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $y=t_\alpha(x)$, si et seulement si $\tan\alpha$ est racine d'une équation du second degré que l'on étudiera.)

b) Soit $f : x \longmapsto -\frac{k}{2}x^2+\frac{1}{2k}$.

Vérifier que $y=f(x)$ est l'équation de la parabole Γ d'axe (Oy), de sommet $H\left(0, \frac{1}{2k}\right)$ (point de flèche maximale) et passant par le point $\mathscr{T}\left(\frac{1}{k}, 0\right)$ (point de portée maximale).

c) Soit α fixé dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En effectuant la comparaison des fonctions f et t_α (pour $x \geqslant 0$), montrer que :

- la parabole Γ est au-dessus de $\mathscr{T}_\alpha$;
- les deux courbes ont en commun un seul point où elles admettent alors la même tangente.

Note : La parabole Γ est appelée parabole de sûreté. Dans l'espace, la zone de tir est limitée par le paraboloïde de sûreté, surface de révolution obtenue à partir de la parabole de sûreté, cf. figure en haut, à droite.)

5. La suite $(n \sin n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas bornée

On suppose qu'il existe un réel $M>0$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$|n \sin n| \leqslant M.$$

1° Montrer que $|n \sin(n+1)| \leqslant M+1$.

2° En développant $\sin(n+1)$, établir l'existence d'un réel $M'>0$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$|n \cos n| \leqslant M'.$$

3° Obtenir alors une contradiction. (On pourra considérer $\cos^2 n+\sin^2 n$.)

6. Deux racines

Montrer que l'équation $x^2=x\sin x+\cos x$ admet deux solutions.

7. L'inégalité d'Huygens

On se propose d'établir que, pour $0 \leqslant x<\frac{\pi}{2}$:

$$2\sin x+\tan x \geqslant 3x.$$

1° Soit f la fonction :

$$x \longmapsto 2\sin x+\tan x-3x.$$

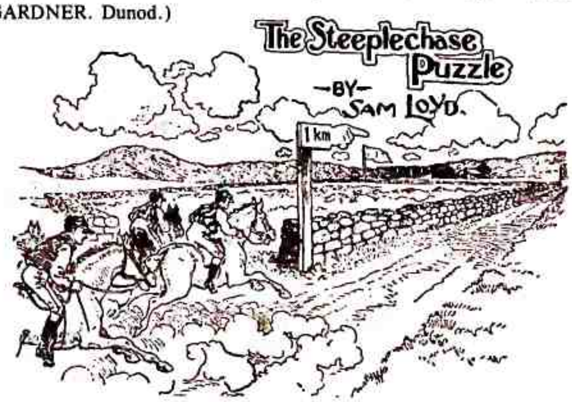
Montrer que f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $f'(x)$.

2° Étudier le signe de f' sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. (On pourra poser $X=\cos x$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $P(X)$ $(0<X \leqslant 1)$ où P est un polynôme du troisième degré.)

3° En déduire l'inégalité proposée.

8. Le Steeple-Chase

(Daprès les *« Casse-Tête Mathématiques » de Sam Loyd.* Martin GARDNER. Dunod.)



Trouvez le chemin le plus court jusqu'au drapeau.

Ce petit problème, à propos d'une course de chevaux, devrait intéresser non seulement les amateurs de courses, mais également les amateurs de casse-tête. A la fin de la course, lorsqu'il ne reste que 1 km 3/4 à parcourir, les jockeys sont tellement groupés que la victoire reviendra à celui qui choisira le meilleur raccourci pour arriver au drapeau. Le dessin montre

la tribune du jury à l'extrémité d'un champ rectangulaire de 1 km de long sur un côté et de 3/4 de km de large sur l'autre, bordé par la piste. Par la piste, la distance jusqu'au drapeau est de 1 km 3/4, distance que tous les chevaux peuvent parcourir en 3 minutes. Cependant ils ont entière liberté de prendre un raccourci par le champ, mais alors la vitesse des chevaux y est réduite. Le sol du champ rectangulaire est tel qu'il fait perdre aux chevaux 25 % de leur vitesse.

Afin de terminer leur course le plus rapidement possible, à quel endroit de la piste sur le côté, long d'un kilomètre, les chevaux devront-ils sauter la barrière et courir directement sur le drapeau?

9. Permutation

Étudier le comportement à l'infini des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n}\sin n \quad \text{et} \quad v_n = n \sin\frac{1}{n}.$$

10. Casse-tête

Les gouvernements de deux pays voisins — appelons-les Nordie et Sudie — avaient décidé d'un commun accord qu'un dollar nordiste vaudrait un dollar en Sudie et vice-versa. Mais, un jour, le gouvernement de la Nordie décréta qu'un dollar sudiste ne vaudrait que 90 cents en Nordie.

Le lendemain, le gouvernement de la Sudie riposta en décrétant qu'un dollar nordiste ne vaudrait que 90 cents en Sudie. Dans une localité à cheval sur la frontière, vivait un jeune homme avisé. Il se rendit dans un bazar du côté nordiste, acheta un rasoir de 10 cents en le payant avec un dollar nordiste. On lui rendit la monnaie sous la forme d'un dollar sudiste, qui valait là 90 cents. Il traversa alors la rue, entra dans un bazar sudiste et acheta un paquet de lames de rasoir valant 10 cents, le payant avec le dollar sudiste. On lui rendit la monnaie sous la forme d'un dollar nordiste. Quand le jeune homme rentra chez lui, il possédait son dollar comme avant, et ses achats en plus. Et chaque commerçant avait 10 cents dans son tiroir-caisse.

Qui donc avait payé le rasoir et le lames?

11. Périodique?

Soit u, v les fonctions :

$$u : x \longmapsto \cos x \quad \text{et} \quad v : x \longmapsto \cos(x\sqrt{2}).$$

1° Étudier la périodicité des fonctions u et v.

2° On note f la fonction $u+v$.
Justifier la relation $2f(x)+f''(x)=\cos x$, pour tout réel x (f'' est la dérivée seconde de f).
En déduire que f n'est pas périodique.

12. Performance

On se propose d'obtenir une estimation de $u_n-\sqrt{5}$ pour un entier naturel n quelconque à partir de l'inégalité :

$$0<u_n-\sqrt{5}<\frac{1}{2\sqrt{5}}(u_{n-1}-\sqrt{5})^2 \qquad (1)$$

(cf. activité 4, page 357).

1° Établir la succession d'inégalités :

$$0<u_n-\sqrt{5}<\frac{1}{2\sqrt{5}}(u_{n-1}-\sqrt{5})^2$$

$$0<(u_{n-1}-\sqrt{5})^2<\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2(u_{n-2}-\sqrt{5})^{2^2}$$

$$0<(u_{n-2}-\sqrt{5})^{2^2}<\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^{2^2}(u_{n-3}-\sqrt{5})^{2^3}$$

$$0<(u_2-\sqrt{5})^{2^{n-2}}<\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^{2^{n-2}}(u_1-\sqrt{5})^{2^{n-1}}$$

$$0<(u_1-\sqrt{5})^{2^{n-1}}<\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^{2^{n-1}}(u_0-\sqrt{5})^{2^n}.$$

2° En déduire à l'aide d'un procédé de multiplications en cascade que :

$$0<u_n-\sqrt{5}<\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^{2^n-1}(u_0-\sqrt{5})^{2^n},$$

puis que :

$$0<u_n-\sqrt{5}<\frac{2\sqrt{5}}{20^{2^n-1}}(u_0-\sqrt{5})^{2^n}.$$

3° On suppose que u_0 est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à 10^{-1} près.
Montrer que u_{10} fournit une valeur approchée de $\sqrt{5}$ avec, au moins, 1 637 décimales exactes. (On utilisera — après justification — l'inégalité $10^3<2^{10}$.)

13. Racine cubique

Soit f la fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{9x}{x^3+6}$.

1° Étudier et représenter graphiquement la fonction f (on montrera en particulier que (Ox) est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$).

2° On désigne par α le réel $\sqrt[3]{3}$ et l'on considère la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0=1 \\ x_n=f(x_{n-1}). \end{cases}$$

Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (x_n) et (éventuellement en s'aidant d'une calculatrice) faire des conjectures sur la monotonie et son comportement à l'infini.

3° **Étude de la suite (x_n)**
Comparer les fonctions f et $x \longmapsto x$ sur $[0, \alpha]$.
En déduire que :

- la suite (x_n) est majorée par α;
- la suite (x_n) est strictement croissante.

4° **Comportement à l'infini de (x_n)**

a) Démontrer que $f(x)-\alpha$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x)-\alpha=\frac{(x-\alpha)^2P(x)}{x^3+6},$$

où P est un polynôme du premier degré que l'on explicitera.

En déduire que, sur $[1, \alpha[$:

$$|f(x)-\alpha| < \frac{13}{14}|x-\alpha|^2.$$

b) Montrer que :

$$|x_n-\alpha| \leqslant \frac{13}{14}|x_{n-1}-\alpha|^2, \text{ pour } n \geqslant 1.$$

c) A partir de quel rang est on assuré que :

$$|x_n-\alpha| < 10^{-4} \text{ ?}$$

(Contrôler à la calculatrice.)

d) Établir que $\lim_{n \to +\infty} x_n = \alpha$. (Afin de simplifier les calculs, on pourra se « contenter » de l'inégalité $|x_n-\alpha| \leqslant \frac{13}{14}|x_{n-1}-\alpha|$. (à justifier).)

5° **Lien avec la méthode de Newton**

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -\frac{3}{x^2}$.

a) Donner une représentation graphique de g et vérifier que α est la seule racine de l'équation $g(x)=0$.

b) Montrer que sur $]0, +\infty[$ la fonction

$$x \longmapsto x - \frac{g(x)}{g'(x)}$$

est égale à la fonction f.

c) En déduire que la suite (u_n) définie par :

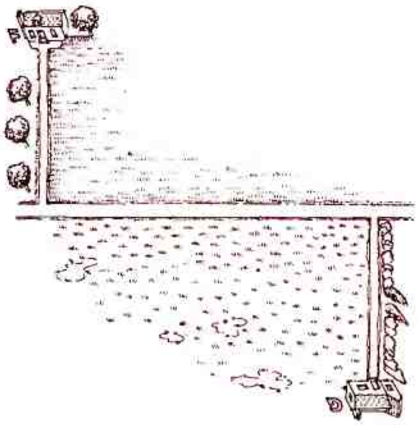
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = u_{n-1} - \dfrac{g(u_{n-1})}{g'(u_{n-1})} \end{cases}$$

(algorithme de Newton)

est égale à la suite (x_n) définie en *2°*.

14. Pour aller chez Guillaume

D'après *« jeux et stratégies »*, n° 31.



François et Guillaume habitent chacun à 120 m de la route principale qui mène au village. Ils y accèdent au moyen d'un chemin perpendiculaire à cette route, ces deux chemins étant distants de 240 m.

Pour aller chez Guillaume, François a la possibilité soit d'emprunter les chemins et routes sur lesquels il marche à 5 km/h, soit de passer à travers champ.

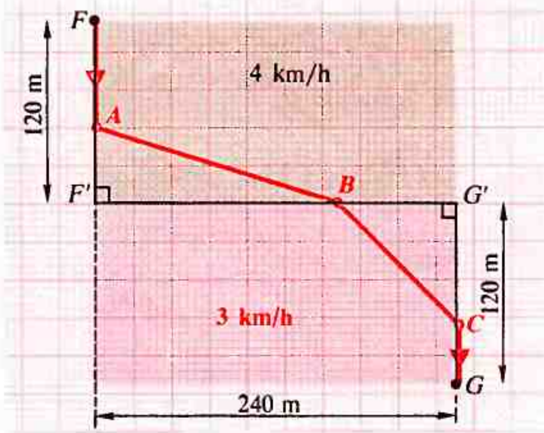
Sur celui situé du côté de sa maison, il ne peut marcher qu'à la vitesse de 4 km/h et sur celui situé du côté de la maison de Guillaume, sa vitesse tombe à 3 km/h.

Quel trajet doit-il emprunter s'il veut arriver chez Guillaume en un minimum de temps?

Indications

Soit A, B, C trois points quelconques appartenant respectivement aux segments $[F, F']$, $[F', G']$ et $[G', G]$ (figure ci-dessous). On considère le trajet $FABCG$.

On pose $F'B = m \quad (0 \leqslant m \leqslant 240)$.



1° Montrer que le trajet FB (« à travers champ ») est plus rapide que le trajet FAB quel que soit A sur $[F, F']$. Expliciter $t(m)$, durée du trajet FB.

2° Montrer que le trajet $BG'G$ (« route et chemin ») est plus rapide que le trajet BCG quelque soit C sur $[G, G']$. Expliciter $\tau(m)$ la durée du trajet $BG'G$.

3° Conclure en minimisant sur $[0, 240]$ la fonction $m \longmapsto t(m) + \tau(m)$.

15. Traits de fraction

On se propose de résoudre les équations suivantes :

E_1 : $\begin{cases} x > 0 \\ x = 1 + \dfrac{2}{x}; \end{cases}$

E_2 : $\begin{cases} x > 0 \\ x = 1 + \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{x}}; \end{cases}$

E_3 : $\begin{cases} x > 0 \\ x = 1 + \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{x}}}; \end{cases}$

E_n : $\begin{cases} x > 0 \\ x = 1 + \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{\ddots\, 1+\dfrac{2}{x}}}}. \end{cases}$ (n traits de fractions)

1° Résoudre E_1, E_2 et E_3. Remarques?

2° Soit f la fonction $x \longmapsto 1 + \frac{2}{x}$.

a) Étudier et représenter graphiquement la fonction f.

b) Soit (x_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}) \\ x_0 > 0. \end{cases}$$

Donner une interprétation graphique de (x_n) et montrer que $x_n > 0$ pour tout n.

c) Soit α et β $(\alpha < 0 < \beta)$ les racines de l'équation $f(x) = x$.

On pose $u_n = \dfrac{x_n - \beta}{x_n - \alpha}$. Montrer que u_n est défini pour tout entier n et que la suite (u_n) est une suite géométrique.
En déduire :

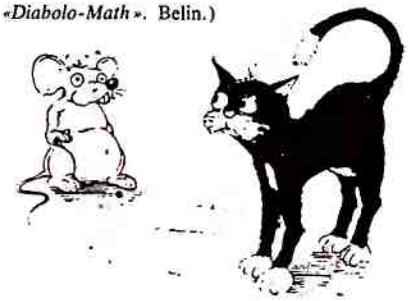
$$u_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \cdot \frac{x_0 - \beta}{x_0 - \alpha}, \text{ pour } n \geqslant 0.$$

3° Résoudre l'équation E_n.

16. Mouse anl Cal

Une souris esl à 20 pas de son lrou. Un chal esl à 5 bonds de la sourls. Pendanl que le chal lail un bond, la sourls lail 3 pas, et un bond du chal a la même longueur que 10 pas de la sourls. Le chal rattrapera-l-il la souris?

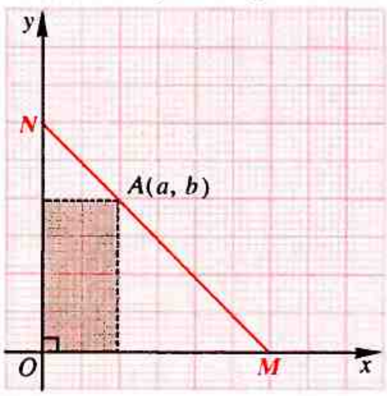
(D'après «*Diabolo-Math*», Belin.)



17. Encore un minimum

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $A(a, b)$ un point dont les coordonnées sont strictement positives. On considère les segment $[M, N]$ où :

- M est un point de (Ox) d'abscisse positive;
- N est un point de (Oy) d'ordonnée positive;
- les points (A, M, N) sont alignés.



Il s'agit de déterminer :

1. l'aire minimum du triangle OMN;
2. la longueur minimum du segment $[M, N]$.

1° **Aire minimum**
On pose $OM = x$. Exprimer l'aire $S(x)$ du triangle OMN et préciser l'ensemble de définition de S.
Montrer que le minimum de S est $2ab$.

2° **Longueur minimum**

Soit x la mesure dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'angle $\widehat{AMO}$.

a) Montrer que la longueur $l(x)$ du segment $[M, N]$ est égale à $\dfrac{a}{\cos x} + \dfrac{b}{\sin x}$.

b) Étudier les variations de l et démontrer qu'elle admet un minimum au point x_0 tel que :

$$\tan x_0 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

c) Établir que $l(x_0) = (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^3$.
$\left(\text{On pourra utiliser la relation } \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.\right)$

18. Les médailles

(D'après «*Olympiades de Mathématiques.*»

Dans une compétition sportive qui a duré N jours $(N > 1)$, x médailles ont été distribuées (x entier > 1).
Le premier jour on a distribué une médaille plus $\frac{1}{7}$ des $(x - 1)$ médailles restantes. Le deuxième jour on a distribué 2 médailles plus $\frac{1}{7}$ du nouveau reste et ainsi de suite, de telle manière que le N-ième jour on a distribué exactement les N médailles qui restaient.

Le problème est de déterminer les nombres N et x.
On désigne par Ω_n le nombre de médailles restantes après la distribution du n-ième jour $(0 \leqslant n \leqslant N)$: on convient que $\Omega_0 = x$.

1° Montrer que, pour $1 \leqslant n \leqslant N$:

$$\Omega_n = \frac{6}{7}(\Omega_{n-1} - n)$$

et que $\Omega_N = 0$.

2° Déterminer une suite arithmétique (α_n) telle que $\alpha_n = \frac{6}{7}(\alpha_{n-1} - n)$ pour $n \geqslant 1$.
En déduire qu'il existe un réel k tel que :

$$\Omega_n - \alpha_n = k \times \left(\frac{6}{7}\right)^n, \quad \text{pour } n \geqslant 0.$$

Déterminer k à l'aide de la valeur de Ω_0.

3° Montrer que la condition $\Omega_N = 0$ conduit à la relation suivante entre x et N :

$$x = \frac{7^N}{6^{N-1}}(N - 6) + 36.$$

4° a) En utilisant le théorème de Gauss « Si a divise le produit bc et si a est premier avec b, alors a divise c » (a, b, c entiers). Montrer que x est entier si et seulement si 6^{N-1} divise $N-6$.

b) Démontrer que, pour $N \geqslant 7$:

$$0 < N-6 < 6^{N-1}.$$

c) En déduire que : $N=6$ et $x=36$.

19. Troisième degré et méthode de Newton

Soit f la fonction[1] $x \longmapsto x^3-2x-5$.

1° Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α qui appartient à l'intervalle $]2, 3[$.

2° **Calcul d'une valeur approchée de α à 10^{-6} près**

a) A l'aide d'un balayage de l'intervalle $]2, 3[$ obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

b) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} - \dfrac{f(u_{n-1})}{f'(u_{n-1})} \; (n \geqslant 1) \\ u_0 = 2{,}1 \end{cases}$$

(algorithme de Newton).

Expliciter u_n en fonction de u_{n-1}. A l'aide de la calculatrice faire une conjecture sur une valeur approchée x_0 de α à 10^{-6} près.
Contrôler cette conjecture (on calculera $f(x_0-10^{-6})$ et $f(x_0+10^{-6})$ et on utilisera les propriétés de la fonction f).

3° **Étude de la suite (u_n)**
Soit φ la fonction :

$$[2; 2{,}1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Par la suite, on note $I=[2; 2{,}1]$.

a) Montrer que, pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 10$. Sans expliciter la fonction φ, établir que φ est définie, dérivable sur I et que la dérivée φ' est du signe du produit ff''.

b) Calculer f'' et en déduire que :

- φ est croissante sur $[\alpha; 2{,}1]$;
- si $\alpha < x < 2{,}1$, alors $\alpha < \varphi(x) < x$.

c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante (strictement) et minorée par α.

4° **Limite de (u_n). Rapidité de convergence**

a) Justifier l'existence d'un polynôme g tel que :

$$f(x)=(x-\alpha)g(x)$$

et montrer (sans expliciter les fonctions f, f' et g) que pour tout x de I :

$$\varphi(x)-\alpha=(x-\alpha)^2\frac{g'(x)}{f'(x)}.$$

b) Démontrer que, pour $x \in [2, 2{,}1]$:

$$0 < \varphi(x)-\alpha \leqslant (x-\alpha)^2 \times \frac{6{,}3}{10}.$$

En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 < u_n - \alpha \leqslant 0{,}63\,(u_{n-1}-\alpha)^2.$$

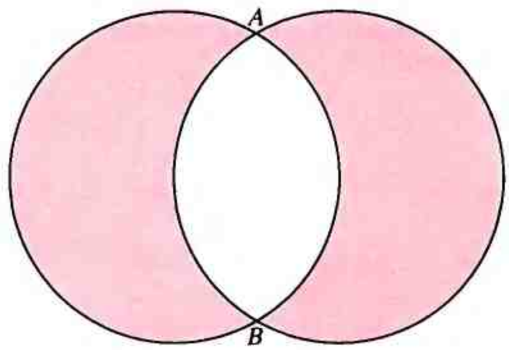
c) Montrer par un procédé de multiplications en cascade que $0 < u_n - \alpha < \dfrac{1}{10^{2^n}}$. (On utilisera le fait que $|u_0-\alpha| < \dfrac{1}{10}$ et on se « contentera » de l'inégalité $0 < u_n-\alpha < (u_{n-1}-\alpha)^2$.)

En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = \alpha$.

Combien de décimales exactes de α, le réel u_5 assure-t-il de donner?

20. Les croissants réunis[1]

Jeux et stratégies n° 13, Fév.-Mars 1983.



Pour son dixième anniversaire, la Société des Croissants Réunis a décidé de changer son logo. Le nouveau est constitué de deux cercles identiques qui se coupent, délimitant trois zones. Les aires de ces trois zones sont identiques et les deux zones extrêmes représentent deux croissants réunis par leurs pointes, comme sur ce schéma.

Le mur du hall d'entrée du siège social sera ainsi orné de ce nouveau sigle. Le peintre qui doit effectuer ce travail a peu d'éléments. Il connaît les emplacements sur le mur des deux points A et B, pointes des croissants. Ces deux points sont distants de deux mètres et situés sur une même verticale. Le peintre, perplexe, n'arrive pas à situer les centres des deux cercles de façon que les trois zones aient la même surface.

[1] Cette fonction a été utilisée par le mathématicien WALLIS (1616-1703) dans son « *Algebra* » (1685) pour illustrer la méthode de Newton.

[1] Ce problème déjà abordé dans le livre de Seconde, du point de vue graphique, est repris ici à l'aide des suites numériques.

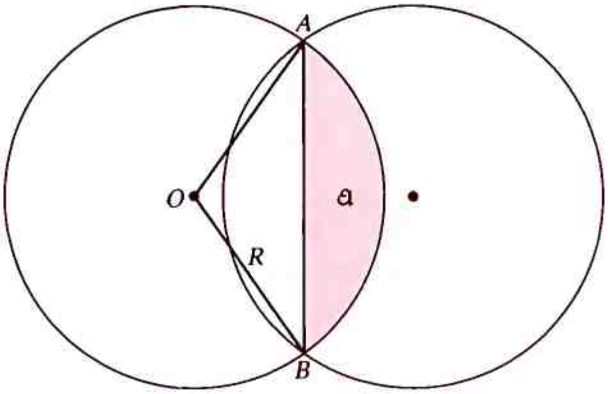
Aidez-le en calculant :

- **soit la distance de chacun des centres au milieu du segment [A, B];**
- **soit la longueur du rayon de chacun des deux cercles.**

1° Montrer que la position cherchée des disques est obtenue lorsque l'aire $\mathcal{A}$ est égale au quart de l'aire de chacun de ces disques.

2° Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en fonction de R et θ, où θ désigne la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

$\left(\text{On doit trouver } \mathcal{A} = \frac{1}{2} R^2(\theta - \sin\theta).\right)$



Montrer alors que la position cherchée est obtenue pour θ solution de :

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{\pi}{2} \\ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

3° On pose $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Montrer que α est solution de :

$$(I)\begin{cases} \cos x = x \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4° Étudier les variations de la fonction $f : x \longmapsto x - \cos x$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire que l'équation (I) a une solution unique α appartenant à $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right[$.

5° Tracer dans un même repère la courbe d'équation $y = \cos x$ et la droite $y = x$, pour x appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

On définit alors la suite (u_n) par $u_0 = \frac{\pi}{4}$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$. Représenter les premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer?

6° Montrer que la suite $(u_{2n})_{n \geq 0}$ est décroissante, minorée par α, et que la suite $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ est croissante, majorée par α.

En déduire que, pour tout entier n, u_n et α appartiennent à $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right[$.

7° **Contrôle de la convergence de (u_n) vers α**

a) On pose $v_n = u_n - \alpha$. Vérifier que $|v_n| \leq 8 \times 10^{-2}$.

b) Montrer que

$$v_{n+1} = \cos\alpha(\cos v_n - 1) - \sin\alpha \sin v_n,$$

puis que :

$$|v_{n+1}| \leq \frac{\alpha}{2}|v_n|^2 + \sin\alpha\,|v_n|.$$

(On utilisera les majorations obtenues au chapitre 7 sur les fonctions trigonométriques.)

c) Montrer que pour tout entier n :

$$|v_{n+1}| \leq \frac{3}{4}|v_n|,$$

puis que $|v_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |v_0|$.

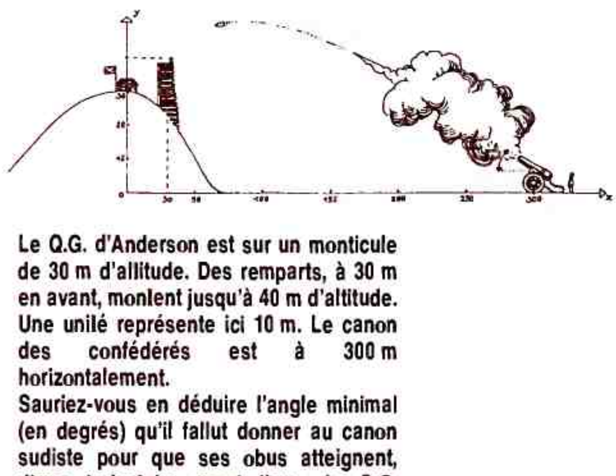
En déduire que (u_n) converge vers α.

8° Calculer u_n pour n appartenant à $\{1, \ldots, 10\}$.
En déduire un encadrement de α d'amplitude 3×10^{-3}.

21. La prise de Fort-Sumter

(D'après *« Jeux et Stratégies »*, n° 7.)

Le début des hostilités de la guerre de Sécession fut marqué, le 12 avril 1861, par la prise de Fort-Sumter (Charleston) par les confédérés (sudistes) avec la capitulation d'Anderson.



Le Q.G. d'Anderson est sur un monticule de 30 m d'altitude. Des remparts, à 30 m en avant, montent jusqu'à 40 m d'altitude. Une unité représente ici 10 m. Le canon des confédérés est à 300 m horizontalement.
Sauriez-vous en déduire l'angle minimal (en degrés) qu'il fallut donner au canon sudiste pour que ses obus atteignent, d'une trajectoire parabolique, le Q.G. d'Anderson et que le drapeau « stars and bars » soit hissé à la place du « stars and stripes »?

22. Le problème hongrois

Un carré unité est divisé en 9 carrés égaux, le carré central est colorié. Les huit carrés qui restent sont à leur tour divisés et coloriés suivant le même procédé (figures ci-contre).
Si l'on poursuit indéfiniment, quelle est la limite de l'aire du domaine colorié?

23. Le nombre d'or

(**Rappel :** Le nombre d'or, noté Φ, est la racine positive de l'équation $x^2 = x+1$; $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.)

On se propose d'étudier l'algorithme d'approximation du nombre Φ, introduit à ce sujet dans le chapitre 6, (cf. page 259) :

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{x_{n-1}^2+1}{2x_{n-1}-1} \\ x_0 \text{ convenablement choisi.} \end{cases}$$

1° **Étude de la fonction** $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{2x-1}$.

a) Étudier et représenter graphiquement la fonction f. (On montrera en particulier que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de f.)

b) On désigne par I l'intervalle $[\Phi, +\infty[$. Établir que f est une application strictement croissante de I dans I telle que $f(x)<x$ pour tout réel x de I distinct de Φ.

2° **Étude de la suite** (x_n)

Soit $x_0 > \Phi$ et (x_n) définie par $x_n = f(x_{n-1})$. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite (x_n).

Étudier la monotonie et la minoration de (x_n).

3° **Comportement à l'infini**

a) Montrer que, pour $n \geqslant 1$:

$$x_n - \Phi = \frac{(x_{n-1}-\Phi)^2}{2x_{n-1}}$$

et en déduire :

$$0 < x_n - \Phi < \frac{1}{2}(x_{n-1}-\Phi)^2.$$

b) En s'inspirant du procédé utilisé dans l'exercice **12**, montrer que :

$$0 < x_n - \Phi < \frac{1}{2^{2^n-1}}(x_0-\Phi)^{2^n} \qquad (1).$$

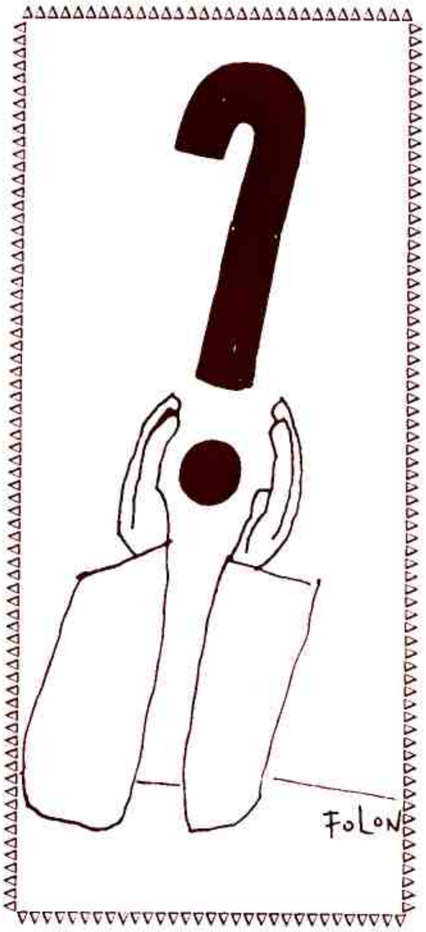
c) Soit $x_0 = 1{,}7$. Vérifier que x_0 est une valeur approchée de Φ par excès à 10^{-1} près.

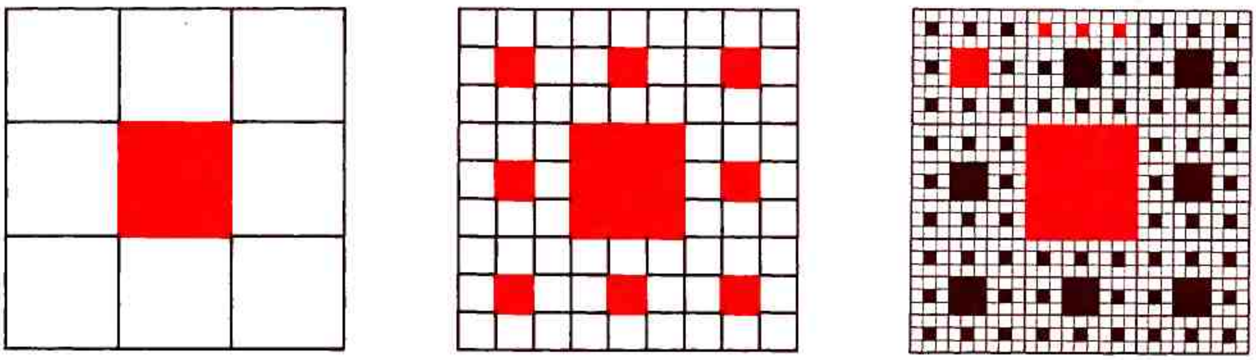
En utilisant l'inégalité (1) préciser un rang à partir duquel $0 < x_n - \Phi < 10^{-8}$. Comparer avec le résultat indiqué par la calculatrice.

d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \Phi$.

24. « La bêtise consiste à vouloir conclure... »

FLAUBERT.
« Correspondance »





Imprimé en France par Aubin Imprimeur Ligugé, Poitiers.
N° d'édition 01 / N° de collection 64 / N° d'impression P 24956
Dépôt légal, n° 4062-2-1987
13/4705/3

Une autre dynamique
de l'enseignement
de l'analyse
pour les problèmes,
par les problèmes.

Avec un approfondissement authentique des méthodes de recherche et de résolution.

Une conception ouverte et vivante d'un ouvrage de Mathématiques élaboré pour l'élève et qui entend souder rigueur et fantaisie, unir humour et réussite.

Parce que l'analyse n'est pas une langue morte...

Parce que ce livre refuse d'assimiler l'élève de Première à une fourmi besogneuse et aveugle...

Dans la même collection :

9 782010 126345

13/4705/3

Imprimé en France / SAGIM - Livry-Gargan

A. GRAMMAT