

Kenya – PAMO 2018

26<sup>ièmes</sup> OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES

Nairobi du 23 au 30 Juin 2018

**Jour 1 : Mercredi 27 Juin 2018**

**Durée : 4 h 30 min**

PROBLÈME 1

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  telles que  $(f(x + y))^2 = f(x^2) + f(y^2)$  pour tous  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

PROBLÈME 2

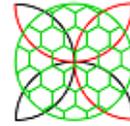
Un tournoi d'échecs est organisé avec la participation de garçons et de filles. Le nombre de filles est le double de celui des garçons. Deux joueurs se rencontrent exactement une fois. A la fin du tournoi, il n'y a eu aucun nul et le rapport des victoires des filles par les victoires des garçons a été  $\frac{7}{9}$ . Combien de joueurs ont participé au tournoi ?

PROBLÈME 3

Pour tout entier naturel non nul  $x$ , on pose

$$g(x) = \text{le plus grand diviseur impair de } x,$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{g(x)}, & \text{si } x \text{ est pair;} \\ 2^{\frac{x+1}{2}}, & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

On considère la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Montrer que l'entier 2018 apparaît dans cette suite, déterminer le plus petit entier naturel non nul  $n$  tel que  $x_n = 2018$ , et déterminer si  $n$  est unique ou non.



Kenya - PAMO 2018

26<sup>èmes</sup> OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES

Nairobi du 23 au 30 Juin 2018

**Jour 2 : Jeudi 28 Juin 2018**

**Durée : 4 h 30 min**

PROBLÈME 4

Etant donné un triangle  $ABC$ , soit  $D$  le point d'intersection de la droite passant par  $A$  perpendiculaire à  $(AB)$ , et de la droite passant par  $B$  perpendiculaire à  $(BC)$ . Soit  $P$  un point à l'intérieur du triangle. Montrer que les points  $D, A, P$  et  $B$  sont cocycliques si et seulement si  $\widehat{BAP} = \widehat{CBP}$ .

PROBLÈME 5

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des réels non nuls, deux à deux distincts tels que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4 \text{ et } ac = bd.$$

Montrer que

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} \leq -12$$

et que  $-12$  est le maximum.

PROBLÈME 6

Un cercle est divisé en  $n$  secteurs ( $n \geq 3$ ). Chaque secteur peut être rempli soit par 1 ou 0. On choisit n'importe quel secteur  $\mathcal{C}$  contenant 0, on le change en 1 et on change simultanément les symboles  $x, y$  dans les deux secteurs adjacents à  $\mathcal{C}$  en leurs complémentaires  $1 - x, 1 - y$ . On répète ce procédé tant qu'il existe un zéro dans un certain secteur. Dans la configuration initiale il existe un 0 dans un seul secteur et des 1 dans les autres secteurs. Pour quelles valeurs de  $n$  peut-on finir ce procédé ?

