



UNION MATHÉMATIQUE AFRICAINE
Commission Olympiades Pan
Africaines de Mathématiques



22^e édition des Olympiades Pan Africaines de Mathématiques

Abuja: 23 Juin – 2 Juillet, 2013

Premier Jour : 28 Juin 2013

Durée : 4 h 30

Exercice 1

Un entier naturel non nul n est tel que $n(n + 2013)$ soit un carré parfait.

- Montrer que n ne peut pas être premier.
- Trouver une valeur de n telle que $n(n + 2013)$ soit un carré parfait.

Exercice 2

Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x et y , on ait $f(x)f(y) + f(x + y) = xy$.

Exercice 3

Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe tel que $\hat{A} = \hat{D}$ et $\hat{B} = \hat{E}$. Soient K et L les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[DE]$.

Montrer que la somme des aires des triangles FAK , KCB et CFL est égale à la moitié de l'aire de l'hexagone si et seulement si

$$\frac{BC}{CD} = \frac{EF}{FA}$$



UNION MATHÉMATIQUE AFRICAINE
Commission Olympiades Pan
Africaines de Mathématiques



22^e édition des Olympiades Pan Africaines de Mathématiques

Abuja: 23 Juin – 2 Juillet, 2013

Second Jour : 29 Juin 2013

Durée : 4 h 30

Exercice 4

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que (AB) est parallèle à (CD) . Soit P et Q les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.

Montrer que si $\widehat{ABP} = \widehat{CBD}$, alors $\widehat{BCQ} = \widehat{ACD}$.

Exercice 5

Les cases d'un échiquier $n \times n$ avec $n \geq 5$ sont coloriées en noir ou en blanc de telle sorte que trois cases adjacentes sur une ligne, une colonne ou une diagonale ne soient pas de la même couleur.

Montrer que pour tout carré 3×3 à l'intérieur de l'échiquier, deux de ses cases situées aux coins sont de couleur blanche et les deux autres sont de couleur noire.

Exercice 6

Soit x , y et z des nombres réels tels que $x < y < z < 6$. Résoudre le système d'inéquations :

$$\begin{cases} \frac{1}{y-x} + \frac{1}{z-y} \leq 2 \\ \frac{1}{6-z} + 2 \leq x \end{cases}$$