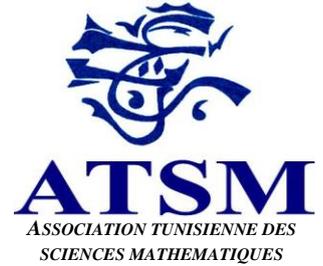




UNION MATHÉMATIQUE AFRICAINE
Commission Olympiades Pan
Africaines de Mathématiques



21^e édition des Olympiades Panafricaines de Mathématiques

Tunisie : 8-16 septembre 2012

Premier jour : 12 septembre 2012

Durée : 4 h 30

Exercice 1

Le segment $[AB]$ est une corde d'un cercle de centre O ne passant pas par O . Soit T un point du segment $[OB]$. La perpendiculaire à la droite (OB) passant par T coupe la droite (AB) en C et le cercle en D et E . On désigne par S le projeté orthogonal du point T sur la droite (AB) .

Démontrer que $AS \times BC = TE \times TD$.

Exercice 2

Déterminer tous les entiers naturels non nuls m et n tels que $n^m - m$ divise $m^2 + 2m$.

Exercice 3

Déterminer tous les nombres réels x solutions de l'équation $[x^2 - 2x] + 2[x] = [x]^2$.
(Ici $[a]$ désigne le plus grand nombre entier inférieur ou égal à a .

Par exemple $[7] = 7$, $[7,3] = 7$ et $[-4,2] = -5$.)



UNION MATHÉMATIQUE AFRICAINE
Commission Olympiades Pan
Africaines de Mathématiques



21^e édition des Olympiades Panafricaines de Mathématiques
Tunisie : 8-16 septembre 2012

Deuxième jour : 13 septembre 2012

Durée : 4 h 30

Exercice 4

On a écrit sur un tableau les nombres $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2012}$. Aïcha en choisit deux, notés x et y , puis elle les efface et les remplace par le nombre $x + y + xy$. Elle continue ainsi jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre sur le tableau.
Quelles sont les valeurs possibles de ce nombre ?

Exercice 5

Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous nombres réels x et y ,

$$f(x^2 - y^2) = (x + y)(f(x) - f(y)).$$

Exercice 6

i) Déterminer les angles d'un triangle ABC tel que la longueur de la hauteur issue de B soit égale à celle de la médiane issue de C et que la longueur de la hauteur issue de C soit égale à celle de la médiane issue de B .

ii) Déterminer toutes les valeurs possibles de l'angle \widehat{ABC} d'un triangle ABC tel que la longueur de la hauteur issue de A soit égale à celle de la médiane issue de C et que la longueur de la hauteur issue de C soit égale à celle de la médiane issue de B .