



UNION MATHÉMATIQUE AFRICAINE  
Commission Olympiades Pan  
Africaines de Mathématiques

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE  
Union – Discipline - Travail



MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE



20<sup>e</sup> Olympiades Pan Africaines  
de Mathématiques  
Yamoussoukro : 20-30 mai 2010

## Premier jour : 26 mai 2010

**Durée : 4 h 30**

### Instructions

- *Les instruments de calcul (ordinateurs, calculatrices, règles à calculer, etc) et les documents (notes manuscrites ou extraits de livres) ne sont pas autorisés en salle de composition.*
- *Seuls les stylos, crayons, règles et compas peuvent être utilisés.*

### Exercice 1

- a) Montrer qu'il est possible de regrouper deux à deux les nombres 1, 2, 3, ..., 10 de façon que les sommes des termes de chacune des cinq paires soient cinq nombres premiers distincts.
- b) Est-il possible de regrouper deux à deux les nombres 1, 2, 3, ..., 20 de façon que les sommes des termes de chacune des dix paires soient dix nombres premiers distincts ?

### Exercice 2

De combien de façons peut-on aligner 19 filles (toutes de tailles différentes), de sorte qu'aucune d'entre elles n'ait une autre fille plus petite devant et derrière elle ?

### Exercice 3

Dans un triangle ABC dont tous les angles sont aigus, la hauteur issue de C coupe (AB) en F et la médiane issue de B coupe (AC) en M.

Sachant que  $BM = CF$  et que  $\widehat{MBC} = \widehat{FCA}$ , montrer que ABC est un triangle équilatéral.



UNION MATHÉMATIQUE AFRICAINE  
Commission Olympiades Pan  
Africaines de Mathématiques

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE  
Union – Discipline - Travail



MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE



20<sup>e</sup> Olympiades Pan Africaines  
de Mathématiques  
Yamoussoukro : 20-30 mai 2010

## Deuxième jour : 27 mai 2010

**Durée : 4 h 30**

### Instructions

- *Les instruments de calcul (ordinateurs, calculatrices, règles à calculer, etc) et les documents (notes manuscrites ou extraits de livres) ne sont pas autorisés en salle de composition.*
- *Seuls les stylos, crayons, règles et compas peuvent être utilisés.*

### Exercice 4

On place sept points distincts sur un cercle de périmètre  $c$ . Trois de ces points forment un triangle équilatéral et les quatre autres forment un carré.

Montrer que parmi les sept arcs déterminés par les sept points sur le cercle, il en existe au moins un dont la longueur est inférieure ou égale à  $\frac{c}{24}$ .

### Exercice 5

Une suite d'entiers positifs de terme général  $a_n$  et de premier terme  $a_0$  est définie pour tout entier naturel  $n$  de la façon suivante :

- si le dernier chiffre de  $a_n$  est inférieur ou égal à 5, alors ce chiffre est supprimé et les chiffres restants forment le terme  $a_{n+1}$  (Si  $a_{n+1}$  ne contient pas de chiffre le procédé s'arrête.)
- autrement  $a_{n+1} = 9 a_n$ .

Peut-on choisir un entier naturel  $a_0$  de sorte que la suite  $(a_n)$  soit infinie ?

### Exercice 6

Existe-t-il une fonction  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que, pour tous entiers  $x$  et  $y$ , on ait  $f(x + f(y)) = f(x) - y$  ?