

COMPÉTENCE 3 :

Traiter une situation relative à la géométrie du plan, à la géométrie de l'espace et aux transformations du plan.

Thème 1 :

Géométrie du plan.

LEÇON 8 : BARYCENTRE

A -SITUATION D'APPRENTISSAGE

B- RESUME DE COURS

I. Barycentre de deux points pondérés

1. Point pondéré

Définition

Soit A est un point du plan et **a** un réel non nul, on appelle point pondéré, le couple (A, **a**).

Exemple : les couples (A, **2**) ; (B, **-5**). Sont des points pondérés

2. Propriété et Définition

A et B sont deux points du plan, a et b sont deux nombres réels tels que : $a + b \neq 0$.

Il existe un point G et un seul tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

Ce point G est appelé barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b).

Notation

Le barycentre G de deux points pondérés (A, a) et (B, b) se note :

$$G = \text{bar} \{(A, a); (B, b)\}$$

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline \end{array}$$

Exercice de fixation

Soient A, B et G trois points du plan tels que : $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

A partir de cette égalité vectorielle, détermine les points pondérés, pour lesquels G est le barycentre.

a. Conséquence

$$G = \text{bar} \{(A, a); (B, b)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$$

Exemple

$$G = \text{bar} \{(A, 2); (B, -3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{-3}{2+(-3)} \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$$

De même

$$G = \text{bar} \{(A, 2); (B, -3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{2+(-3)} \overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{BA}$$

b. Théorème : Le barycentre de deux points A et B appartient à la droite (AB)

Exercice de fixation

Soient A, B et K trois points du plan tels que : $-2\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{BA} - 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Justifie que K appartient à la droite (AB).

Remarque

- Si les coefficients sont de même signe, alors le barycentre $G \in [AB]$
- Si les coefficients sont de signes contraires, alors le barycentre $G \in (AB) \setminus [AB]$
- Si les coefficients sont égaux, alors le barycentre G est le milieu de $[AB]$

3. Propriétés

a. Homogénéité du barycentre

Propriété

Soit k un nombre réel non nul et deux points pondérés (A, a) et (B, b) .

G est barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) équivaut à G est barycentre des points pondérés (A, ka) et (B, kb) .

Exercice de fixation

On donne $G = \text{bar} \{(A, 2); (B, 7)\}$

Détermine le nombre réel a tel que $G = \text{bar} \{(A, a); (B, 21)\}$

b. Isobarycentre

Définition

Le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, α) où $\alpha \neq 0$ est appelé l'isobarycentre des points A et B , c'est le milieu de $[AB]$.

Exemple : $G = \text{bar} \{(A, 3); (B, 3)\}$ équivaut à G est l'isobarycentre des points A et B
 G est le milieu du segment $[AB]$.



c. Conservation du barycentre par projection

Propriété

Le projeté du barycentre de deux points pondérés est le barycentre des projetés de ces points affectés des mêmes coefficients.

Exercice de fixation

Soit $G = \text{bar} \{(A, a); (B, b)\}$ et P une projection tel que : $P(A) = A'$, $P(B) = B'$ et $P(G) = G'$.
Quel est le barycentre des points pondérés (A', a) et (B', b) .

d. Réduction de la somme : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$

Propriété

Soit (A, a) et (B, b) deux points pondérés tels que $a + b \neq 0$ et G leur barycentre.

Pour tout point M du plan on a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\overrightarrow{MG}$.

Exercice de fixation

Soit le barycentre K des points pondérés $(C, 3)$ et $(D, 1)$. Pour tout point M du plan exprime

$3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ en fonction de $\overrightarrow{MK}$.

Remarque Lorsque $a + b = 0$, alors $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = a\overrightarrow{MA} - a\overrightarrow{MB} = a(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = a\overrightarrow{BA}$.

e. Coordonnées du barycentre

Propriété

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ et si G est le barycentre de (A, a) et (B, b) , alors $G(\frac{ax_A + bx_B}{a+b}, \frac{ay_A + by_B}{a+b})$

Exercice de fixation

Soit $A(1, 2)$ et $B(-1, 3)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Détermine les coordonnées du barycentre G du système $\{(A, -1); (B, 2)\}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

II. Barycentre de trois points pondérés

1. Définition et propriété

Soit (A, a) , (B, b) et (C, c) trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$.

Il existe un unique point G vérifiant $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Le point G s'appelle le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) .

Notation : $G = \text{bar} \{(A, a); (B, b); (C, c)\}$

Exercice de fixation

Soient A, B, C et G quatre points du plan tels que : $\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

A partir de cette égalité vectorielle, détermine les points pondérés, pour lesquels G est le barycentre.

Conséquence

$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ équivaut à } \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

Exemple

$$-2\overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ équivaut à } \overrightarrow{AG} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

2. Propriétés

a. Homogénéité du barycentre

Propriété

Soit k un nombre réel non nul et trois points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) .

G est barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) équivaut à G est barycentre des points pondérés (A, ka) , (B, kb) et (C, kc) .

Exercice de fixation

On donne $G = \text{bar} \{(A, 1); (B, -7); (C, -4)\}$

Détermine les nombres réels a et c tels que $G = \text{bar} \{(A, a); (B, \frac{14}{3}); (C, c)\}$

b. Isobarycentre

Définition

Le barycentre des points pondérés (A, α) , (B, α) et (C, α) où $\alpha \neq 0$ est appelé L'isobarycentre des trois points A, B et C .

Exemple

$$-4\overrightarrow{GE} - 4\overrightarrow{GH} - 4\overrightarrow{GF} = \vec{0} \text{ équivaut à } G \text{ est l'isobarycentre de } E, F \text{ et } H.$$

Remarque

L'isobarycentre de trois points non alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC .

c. Réduction de la somme : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$

Propriété

Soit (A, a) , (B, b) et (C, c) trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$ et G leur barycentre.

Pour tout point M du plan on a : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\overrightarrow{MG}$

Exercice de fixation

Soit le barycentre E des points pondérés $(A, -1)$, $(B, 4)$ et $(C, -7)$.

Pour tout point M du plan exprime $-\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 7\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{ME}$.

d. Coordonnées du barycentre

Propriété

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ et si G est le barycentre de (A, a) , (B, b) et (C, c) , alors

$$G\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}, \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}\right)$$

Exercice de fixation

Soit $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$ et $C(0, -2)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Détermine les coordonnées du barycentre G du système $\{(A, -1); (B, 2); (C, 3)\}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

3. Barycentre partiel

Propriété et définition

Soient (A, a) ; (B, b) et (C, c) trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$ et $a + b \neq 0$. Si G est le

barycentre du système $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ et H le barycentre du système $\{(A, a); (B, b)\}$

alors G est le barycentre du système $\{H, (a + b); (C, c)\}$.

H est appelé barycentre partiel des points pondérés (A, a) ; (B, b) .

Exercice de fixation

Soit $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$

Exprime G comme l'isobarycentre de deux points.

Remarque

On ne change pas le barycentre de trois points pondérés en remplaçant deux d'entre eux par leur

barycentre partiel (s'il existe) affecté de la somme des deux coefficients à condition que cette somme

soit non nulle.

III. Barycentre de quatre points pondérés

1. Définition et propriété

Soit $(A, a), (B, b), (C, c)$ et (D, d) quatre points pondérés tels que $a + b + c + d \neq 0$.

Il existe un unique point G vérifiant : $a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} + d\vec{GD} = \vec{0}$.

Le point G s'appelle le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) , (C, c) et (D, d) .

Notation: $G = \text{bar}\{(A, a); (B, b); (C, c); (D, d)\}$

Remarque : L'isobarycentre des sommets d'un parallélogramme est le centre de ce parallélogramme.

Exercice de fixation

Soient A, B, C, D et G des points du plan tels que : $\vec{GA} - \vec{GB} + 4\vec{GC} - 2\vec{GD} = \vec{0}$

A partir de cette égalité vectorielle, détermine les points pondérés, pour lesquels G est le barycentre.

2. Conséquence

Si $a + b + c + d \neq 0$ et $G = \text{bar} \{(A, a); (B, b); (C, c); (D, d)\}$, alors pour tout point M du plan, $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} + d\overrightarrow{MD} = (a + b + c + d)\overrightarrow{MG}$.

Exemple

Soit $H = \text{bar} \{(A, 4); (B, -2); (C, 4); (D, -5)\}$

Pour tout point M du plan, on a : $4\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MH}$

IV. Ligne de niveau d'une application f :

1. Définition

Soit f une application du plan dans $\mathbb{R}$ et k un nombre réel.
la ligne de niveau k de l'application f est l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$.

Exemple

Soit O un point du plan et f l'application du plan dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M associe la distance OM .

La ligne de niveau 3 de f est l'ensemble des points M tels que $OM = 3$; C'est donc le cercle de centre O et de rayon 3.

2. Ligne de niveau de l'application $M \mapsto aMA^2 + bMB^2$

Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan, a et b deux nombres réels tous non nuls. f l'application du plan dans $\mathbb{R}$ tel que : $f(M) \mapsto aMA^2 + bMB^2$

Si $a + b \neq 0$, on désigne par G le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) .

la ligne de niveau k de l'application f est : soit l'ensemble vide, soit le point G , soit un cercle de centre G .

Exercice de fixation

On donne deux points A et B tels que $AB = 12$.

Soit l'application $f: M \mapsto MA^2 + MB^2$

Détermine la ligne de niveau 122 de f .

3. Ligne de niveau de l'application $M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Propriété

Soit A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$ et f l'application de $\mathcal{P} \setminus \{B\}$ dans $\mathbb{R}$ tel que : $f(M) \mapsto \frac{MA}{MB}$

la ligne de niveau k de l'application f est :

- La médiatrice de $[AB]$ si $k = 1$
- Un cercle de centre G si $k \neq 1$

Exercice de fixation

Soit A et B deux points du plan tels $AB = 6$

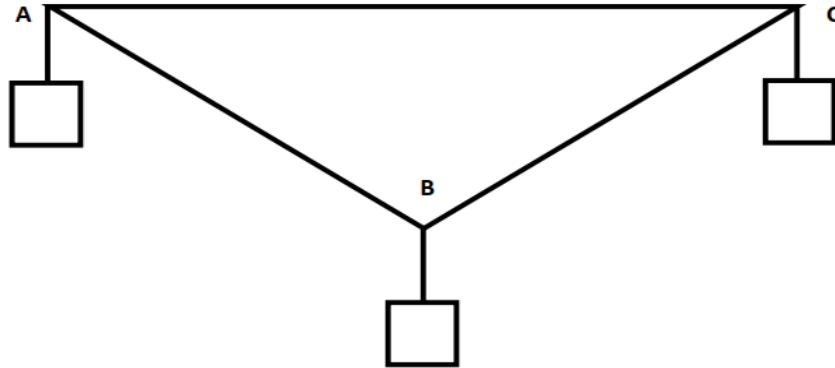
Détermine la ligne de niveau 3 de l'application $f: M \mapsto \frac{MA}{MB}$

C- SITUATION COMPLEXE

Au cours d'une séance de travaux pratiques, les élèves d'une classe de première scientifique découvrent le dispositif ci-dessous.

Ce dispositif est une plaque triangulaire ABC de masse négligeable. On suspend à chacun de ses sommets des solides de masse ($m_A = 2\text{g}$) ; ($m_B = 5\text{g}$) et ($m_C = 3\text{g}$).

Les élèves veulent déterminer en quel point G, accrocher le fil pour que la plaque reste en équilibre. Détermine la position exacte du point G, en expliquant ta démarche.



FICHE DE TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

Soient A, B et H trois points tels que : $5\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} = \vec{0}$. Complète les pointillés pour que la phrase soit vraie.

H est le barycentre des points pondérés

Exercice 2

Soient A et B deux points distincts.

- 1) Justifie qu'il existe un point G barycentre des points (A, 3) et (B, 2).
- 2) Exprime $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis place G.
- 3) Soit M un point du plan. Ecris en fonction de $\overrightarrow{MG}$, $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$.

Exercice 3

ABC est un triangle et G est le barycentre de (A,1) ; (B, 4) ; (C, -3).

- 1) Construis le barycentre de H de (B, 4) et (C, -3)
- 2) Justifie que G est l'isobarycentre de points A et H.
- 3) Construis le point G.
- 4) Soit A (1, -2) , B (-3, -2) et C (-1, 0) dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) , détermine les coordonnées du barycentre G.

Compétence 1

Traiter des situations relatives aux calculs algébriques et aux fonctions Fonctions

Thème 2

Leçon 9 : ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

A-SITUATION D'APPRENTISSAGE

B. CONTENU DU COURS

I - PARITE

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f et (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

a) Définition

Une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f est dite paire lorsque pour tout x élément de D_f , on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

Exemple

Les fonctions : $x \mapsto c$ ($c \in \mathbb{R}$), $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \cos x$ sont paires.

la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{2}{1+|x|}$ est paire car l'ensemble de définition D_f de la fonction f est $\mathbb{R}$ et donc pour tout x de D_f , on a $-x \in D_f$.

Ensuite pour tout x de D_f , $f(-x) = \frac{2}{1+|-x|}$; $|-x| = |x|$; donc $f(-x) = f(x)$.

b) Interprétation graphique

Propriété

La fonction f est paire si et seulement si la droite (OJ) est un axe de symétrie de (C_f) dans un repère orthogonal (O, I, J) .

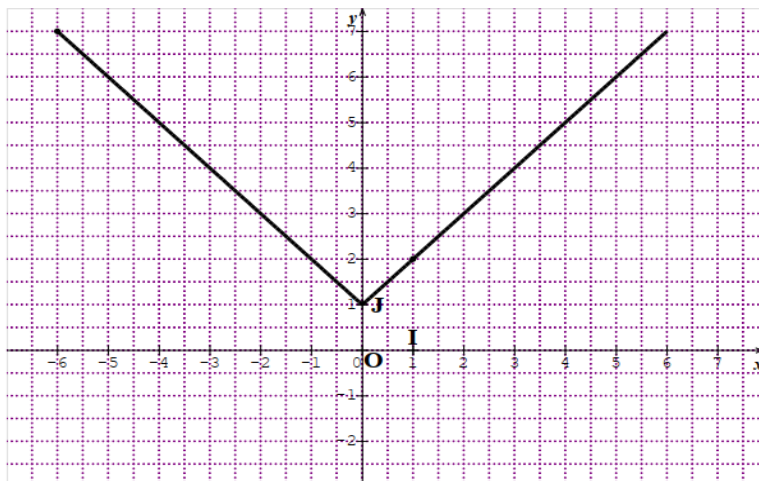
Exemple

La courbe représentative de la fonction : $x \mapsto x^2$ admet la droite des ordonnées (OJ) comme axe de symétrie dans un repère orthogonal (O, I, J) .

Exercice de fixation

La représentation ci-dessous, est celle d'une fonction f de $[-6; 6]$ dans $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormé (O, I, J) . Cette représentation graphique admet la droite (OJ) comme axe de symétrie.

Justifie que la fonction f est paire.



2. Fonction impaire

a) Définition

Une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f est dite impaire lorsque pour tout x élément de D_f , on a : $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Exemple

Les fonctions : $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \sin x$ sont impaires.

La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ est impaire car l'ensemble de définition D_f de la fonction f est $\mathbb{R}$ et donc pour tout x de D_f , on a $-x \in D_f$.

Ensuite pour tout x de D_f , $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+(x)^2}$. il en résulte que : $f(-x) = -f(x)$.

b) Interprétation graphique

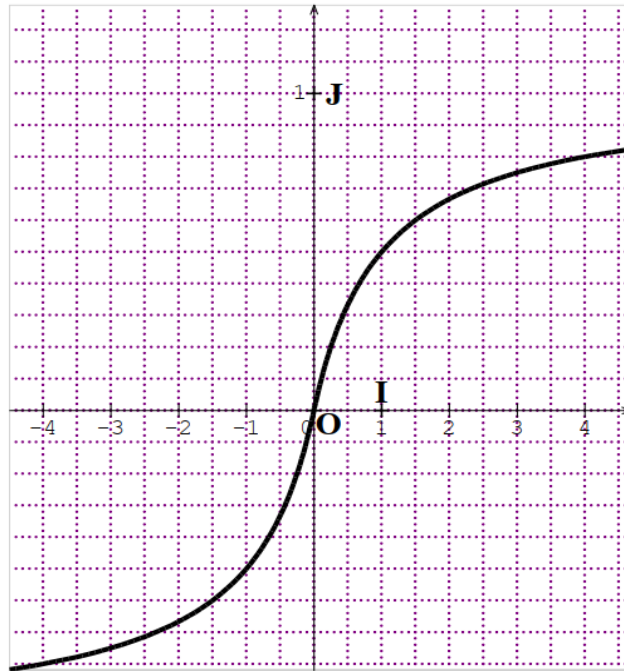
Propriété

La fonction f est impaire si et seulement si le point O est un centre de symétrie de (C_f) dans le plan rapporté à un repère (O, I, J) .

Exercice de fixation

La représentation ci-dessous, est celle d'une fonction f de $[-4; 4]$ dans $\mathbb{R}$ dans un repère (O, I, J) .

Cette représentation graphique admet le point O comme centre de symétrie.



Justifie que la fonction f est impaire.

Remarques

- Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit symétrique par rapport à zéro lorsqu'il vérifie la propriété suivante : $\forall x \in E$, on a $-x \in E$.

Exemples : Les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$, $[-1; 1]$ et $]-3; 3[$ sont symétriques par rapport à 0.

- Lorsque la fonction f est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap [0; +\infty[$. La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrie par rapport à la droite (OJ) si f est paire ou par symétrie par rapport au point O si f est impaire.

II-ELEMENTS DE SYMETRIE

1. Axe de symétrie

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soit une droite (D) d'équation : $x = a$ et une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f .

La droite (D) est un axe de symétrie de la courbe de f si et seulement si pour tout x de D_f on a :

$$(2a - x) \in D_f \text{ et } f(2a - x) = f(x).$$

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Soit une droite (D) d'équation : $x = 3$ et une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -2(x - 3)^2 + 5.$$

Remarque : on peut aussi utiliser la propriété ci-dessous

La droite (D): $x = a$ est un axe de symétrie de (c_f) si et seulement si :

Pour tout $h \in \mathbb{R}$; tel que, $(a + h) \in D_f$ on a $(a - h) \in D_f$ et $f(a + h) = f(a - h)$

2. Centre de symétrie

Propriété

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit un point A de couple de coordonnées (a, b) et une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f .

Le point A est un centre de symétrie de la courbe de f si et seulement si pour tout x de D_f on a :

$$2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) + f(x) = 2b.$$

Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Soit A de coordonnées (2 ;3) et une fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = (x - 2)^3 + 3.$$

Démontre que le point A est un centre de symétrie de la courbe de g .

Remarque : on peut aussi utiliser la propriété ci-dessous

La droite $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie de (c_f) si et seulement si :

Pour tout $h \in \mathbb{R}$; tel que, $(a + h) \in D_f$ on a $(a - h) \in D_f$ et $\frac{f(a+h)f(a-h)}{2} = b$

3. Fonction périodique

Définition

Soit T un nombre réel strictement positif.

Une fonction f est dite périodique de période T lorsque $\forall x \in D_f$:

$$x + T \in D_f, \quad x - T \in D_f \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x).$$

Remarque

on dit souvent qu'une fonction f est T -périodique pour exprimer qu'elle est périodique de période T .

Exemple

- Les fonctions : $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$ sont périodiques de période 2π .
- La fonction : $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π .

La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sin(2x)$ est π -périodique

- car l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$; et donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $x + \pi$ et $x - \pi$ appartiennent à $\mathbb{R}$.
- Ensuite $\sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x)$ car la fonction sinus est 2π -périodique.

Donc $f(x + \pi) = f(x)$.

Remarques

- Si T est une période de f alors $\forall (k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) f(x + kT) = f(x)$.
- Si f est périodique de période T , il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap [a; a + T[$. La courbe obtenue est ensuite complétée par les translations de vecteurs $T\vec{OI}$ et $-T\vec{OI}$.

III- ASYMPTOTE OBLIQUE

Définition

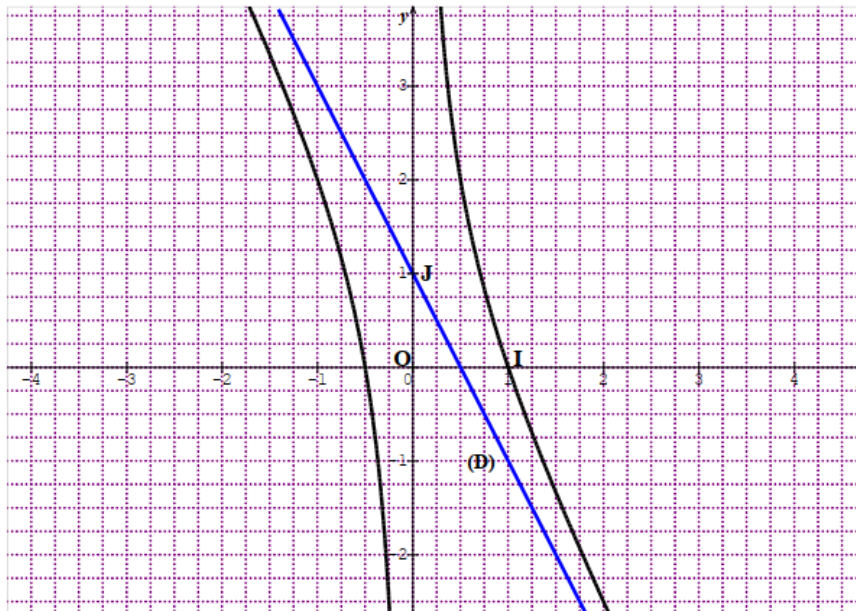
f est une fonction et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

Soit a et b des nombres réels ($a \neq 0$).

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$), on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à (C_f) en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exemple

Sur la représentation ci-dessous, la droite (D) est une asymptote (oblique) à la courbe en $(+\infty)$ et en $(-\infty)$.



C- SITUATION COMPLEXE

Des élèves de 1^{ère} D ont découvert le texte suivant dans une revue. « Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'ampoules dite `` économique de 20 watts''. Chaque ampoule est vendue à 100 francs CFA. Il a été établi que le coût de production de x ampoule(s) est donné par la fonction suivante : $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[10 ; 100]$. Le Directeur de l'entreprise cherche à déterminer le nombre d'ampoules à fabriquer pour minimiser le coût de production et avoir un bénéfice maximal ».

Impressionnés par cette formule donnant le coût de production, tu cherches à répondre aux préoccupations du Directeur.

Réponds, à l'aide d'une argumentation basée sur tes connaissances mathématiques aux préoccupations du Directeur.

FICHE DE TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, étudie la parité de f .

1) $f(x) = 3x^4 - |x| + 1$; 2) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$; 4) $f(x) = x^2 + 4x - 8$.

Exercice 2

Soit f la fonction polynôme définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 7$ de représentation graphique (C_f) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

Démontre que la droite (D) d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de (C_f) .

Exercice 3

Soit f la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{x^2+5x-1}{x+1}$. On note (C_f) , la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J) .

Démontre que le point $A(-1 ; 3)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

Exercice 4

Soit f la fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{2x^2+3x-1}{x-1}$. On note (C_f) , la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

1) Démontre que pour tout x de D_f , $f(x) = 2x + 5 + \frac{4}{x-1}$

2) Démontre que la droite d'équation $y = 2x + 5$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 5

Soit $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

1-Justifie que le point $A(0 ; -1)$ est un centre de symétrie de (C) .

2- Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3-a) Calcule la dérivée de f .

b) Etudie les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ et dresse son tableau de variation.

4-a) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

b) Etudie la position de (C) par rapport (T) .

5- Trace la droite (T) et construis (C) sur $[0 ; +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni du même repère orthonormé (O, I, J) tel que : $OI = OJ = 1\text{cm}$.

Exercice 7

f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$.

1-Calculer : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. Interprète graphiquement les résultats obtenus.

2-Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3-a) Détermine les réels a , b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.

b) Justifie que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Etudie les positions de (C) par rapport à (D).

4-a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$.

b) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

5-Démontre que le point A(2 ; 1) est un centre de symétrie de (C).

6-Construis la courbe (C) et ses asymptotes. Unité graphique : OI = OJ = 1 cm.

Exercice 8

Partie A

Soit p la fonction polynôme définie par : $p(x) = x^4 + 6x^2 - 16x + 9$.

1-Justifie que : $p(x) = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 9)$.

2-Etudie le signe de $p(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + 3}$ et on note (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1-Détermine l'ensemble de définition D_f de f .

2-Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3-a) Justifie que : $\forall x \in D_f, f(x) = x - 1 + \frac{8}{x^2 + 3}$.

b) Dédus-en que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Etudie les positions relatives de (C) et (D).

4-a) Justifie que : $\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{p(x)}{(x^2 + 3)^2}$.

b) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

5-Démontre qu'il existe un unique point A de (C) tel que la tangente à (C) en A soit parallèle à (D).

6-a) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1 est :

$$y = 2x + 2.$$

b) Vérifie que : $\forall x \in D_f, f(x) - (2x + 2) = -\frac{(x+1)^3}{x^2 + 3}$.

c) Etudie les positions relatives de (C) et (T).

7-Trace les droites (D) et (T) et construis la courbe (C). Unité graphique : 1 cm.

PREMIERE PARTIE