III- L'algèbre entre l'arithmétique et la géométrie

III- 1 : La théorie de la mesure
III- 2 : Quelques éléments sur l'arithmétique euclidienne
III- 3 : Algèbre et géométrie
III- 4 : Approche du continu (1) : les fractions continues
III-5 : Approche du continu (2) : la définition eudoxienne

Les *Eléments* sont le fruit de l'échec de la tradition pythagoricienne, pour **qui tout était nombre**, c'est-à-dire pour qui mathématique = arithmétique. La découverte des **irrationnels** fait voler en éclat le cadre pythagoricien. Les math ont deux objets : les nombres et les grandeurs ; l'arithmétique et la géométrie.
Preuve de **l'irrationalité** = Supposons qu'il existe a, b entiers, premiers entre eux, tels que $a/b = \sqrt{2}$. Alors $a^2 = 2b^2$. Un carré pair est le carré d'un nombre pair. Donc a est pair. D'où $a = 2c$ et $b^2 = 2c^2$, d'où b est pair.
Combinaison entre géométrie et arithmétique : la géométrie garantit **existence** d'un segment, coté d'un carré double d'un autre donné ; l'arithmétique élémentaire permet de démontrer que le rapport entre les cotés des deux carrés n'est pas un rapport entre entiers. Cette combinaison indique que : 1) on ne peut pas traiter les grandeurs géométriques comme des grandeurs arithmétiques, mais aussi que, ces deux grandeurs partagent des choses en commun (on peut combiner arithmétique et géométrie dans une même preuve). Il y a **des méthodes communes** aux deux théories math.
Algèbre désignera pendant vingt siècles ensemble des méthodes communes utilisées en géométrie et en arithmétique. Chez les grecs, algèbre n'est pas une théorie : simplement un ensemble d'outils que l'on peut utiliser dans différents contextes.
Je vais vous parler d'abord de cette méthode commune = la théorie de la mesure, commune à l'arithmétique et à la géométrie ; ensuite, je vous parlerai rapidement de l'arithmétique euclidienne ; j'en viendrai à la notion de produit, qui bloque l'élaboration d'une démarche proprement algébrique et de l'émergence d'une théorie des équations. Enfin, je parlerai des différentes façon de définir la continuité et les irrationnels.

III- 1 : Arithmétique et géométrie – la théorie de la mesure

- Théorie commune à grandeur et à nombre entier = **la théorie de la mesure** : voir V, déf. 1-3 ; VII, déf. 3-5 ; la seule différence = en V axiome d'archimède, en VII, unité.
- Pour les grandeurs : définition de la relation de mesure = une grandeur est une partie d'une autre lorsque ajouté n fois bout à bout elle est égale à l'autre – grandeurs ayant un rapport sont les grandeurs tels qu'il existe un n tel que la plus petite n fois répétée dépasse la plus grande. Cf. déf. 1-4.
- Pour les nombres : un nombre est partie d'un autre quand il mesure le plus grand. Des parties quand il ne le mesure pas. Cf. déf. 3-5. Pas là d'axiome d'Archimède ; par contre, déf. 1-2 parle de l'unité = nombre est une multitude composé d'unités. Commensurabilité des nombres entiers = sont composés d'unités.

Essayons de caractériser cette théorie de la mesure, qui traverse la division arithmétique / géométrie. Pour qu'il y ait mesure, il faut : 1) addition ; 2) structure **d'ordre total** compatible avec l'addition, qui est en partie donnée par les Notions Communes (supporte méthode d'exhaustion) ; 3) axiome d'Archimède. Si l'on n'a pas ces trois éléments on ne peut parler de grandeurs mesurables.
En terme moderne : une grandeur est un **semi-groupe archimédien** (loi interne associative, des propriétés de régularités, commutatifs, relation d'ordre total, axiome d'Archimède).
Grandeurs mesurables peuvent être fort différentes les unes des autres : des entiers ; des longueurs, des aires, des volumes ; des masses, des vitesses, … Mais toutes ont en commun ces trois éléments.
Exo : à quoi sert le théorème de Pythagore ? Définir une addition pour les surfaces.

Voir le texte de Lelong-Ferrand et Arnaudiès. Ce texte vise à une définition absolument générale de ce qu'est une grandeur mesurable, et reprend les principaux éléments de la théorie de la mesure = grandeur mesurable demi groupe archimédien. L'addition peut être très différente de l'addition usuelle (par ex, cela peut être le produit ; penser à la question de la mesure des plaisirs et à la définition d'une opération d'additions). L'axiome A4 serait chez Euclide une notion commune. L'axiome d'Archimède permet de définir la mesure de la grandeur X**, à une unité près par défaut**, lorsque l'unité est choisie : le plus grand entier tel que $mU <= X$. Point important chez les grecs : l'unité **est donnée** en arithmétique ; elle est choisie en géométrie. On est très proche du texte d'Euclide.
Là où on va plus loin, c'est dans la définition I. 9. 1, qui fait allusion au théorème I. 8. 2. On complète d'abord l'ensemble Γ de façon à obtenir un groupe ordonné archimédien, et on a un théorème qui dit que : si A est un groupe archimédien quelconque, alors quel que soit $u>0$, $u \in G$, il existe un homomorphisme **croissant unique** h de G dans le groupe additif R, satisfaisant à $\mathbf{m(u) = 1}$ – de plus, cet homomophisme est strictement croissant, donc injectif. Homomorphisme de (G, +) dans (R, +) : $f(a + b) = fa + fb$; croissant : si $a<b$ alors $fa<fb$; injectif : deux éléments différent de G ont des mesures différentes dans R.
Que veut dire ce résultat ? Une fois fixée la grandeur unité, alors vous ne pouvez associer des nombres réels que d'une seule façon à toutes les autres grandeurs, si vous voulez préservez l'additivité et la relation d'ordre. Ce théorème nous dit donc au moins deux choses :

- Sur G : possible de mesurer n'importe quel élément de g = de lui associer **d'une seule façon** un nombre tel que les grandeurs plus grandes auront des mesures plus grandes, et somme de deux grandeurs aura pour mesure la somme des mesures des deux grandeurs, une fois l'unité choisie, bien entendu. G est bien une définition de notre idée intuitive de grandeur mesurable.

- Sur R : vous avez besoin de R, pas seulement de Q, pas seulement des extensions algébriques sur Q, pour pouvoir mesurer ce que les grandeurs (= les éléments d'un groupe archimédien). Raison d'être de R : la mesure des grandeurs. Ici, point que l'on retrouvera dans la théorie grecque du continu : raison d'être de R, pas les équations ; il y a quelque chose dans la corps des réels qui pointe vers la nature = nombre réel : mesure d'une grandeur qui n'est pas elle-même un nombre.

- La structure « grandeur » (« semi-groupe archimédien ») est indépendante de la question du caractère **discret** ou **continu** de l'ensemble ordonné. Z est un groupe archimédien ; R est lui-même un groupe archimédien. Les math modernes parviennent à **thématiser** (constituer comme objet d'étude) cette structure, très courante, commune au continu et au discret.
Euclide ne fait pas cela. Il décrit deux fois la **même** théorie, qui n'est jamais dégagée et étudiée pour elle-même. C'est presque la même théorie au livre V et au livre VII, mais Euclide **fait celui qui ne s'en aperçoit pas.** Parfois, il prouve le même théorème, une fois pour les nombres, l'autre fois pour les grandeurs géométriques, sans affirmer que c'est le même théorème et la même démonstration.
Cette attitude s'explique par le problème des incommensurables, qui fait que mathématiques sont divisées en deux domaines séparés, et que cette séparation des objets étudiés interdit d'élaborer **une théorie unificatrice**. Les mathématiciens étudient des objets, et les maths sont définis par leurs objets. Si ces objets sont distincts, alors les théories sont distinctes, même si elles se ressemblent. Pas du tout la perspective hilbertienne : même théorie sert à plein de choses différentes.

III- 2 : Quelques éléments sur l'arithmétique chez Euclide :

Problème soulevé par l'unité : abstrait / chose en soi ? Pblme que cela pose : rapport entre unité et chose concrète = unité intelligible : effacement des différences qui singularise chaque unité, mais alors comment peut il y avoir plusieurs unités ; en même temps, si les choses sont conservés dans leurs différences, alors elles ne sont pas des unités (on ne peut pas ajouter une patate et une carotte). Parler de Frege et de sa critique de l'unité et du nombre entier.

- Algorithme d'Euclide ou anthyphérèse pour rechercher la commune mesure. PGCD : VII, 1-3 (PPCM : VII, 34-36) : soit deux nombres a et b ; on forme $a_1 = \max(a, b) - \min(a, b)$ et $b_1 = \min(a, b)$. On répète l'opération = $a_{i+1} = \max(a_i, b_i) - \min(a_i, b_i)$ et $b_{i+1} = \min(a_i, b_i)$, jusqu'à ce que $a_i = b_i$, qui est le PPCM de a et de b (jusqu'à que a_i mesure b_i).
Exemple : a = 64 ; b = 24 ; $a_1 = 40$ et $b_1 = 24$; $a_2 = 16$ et $b_2 = 24$; $a_3 = 8$ et $b_3 = 16$; $a_4 = 8$ et $b_4 = 8$. PGCD : 8.
Pourquoi il fonctionne ? Faire la soustraction entre deux nombres préserve les facteurs communs. Si c est facteur de a et de b, alors il est facteur du « reste » a – b.
Sur l'algorithme lui-même, deux remarques :

- Idée qu'il y a une saisie de ce qui singularise la structure algébrique de l'anneau N par rapport à d'autres anneaux. Il n'y a pas d'autres anneaux pour les grecs, ni de structure d'anneau (1920). Mais il y a une tentative de caractériser les entiers par leur propriété de divisibilité, ce qui n'est pas du tout évident. Cela signifie que les nombres ne sont pas simplement **des outils permettant un décompte**, mais des objets dont on étudie les propriétés et les relations. Cette caractérisation est toujours utilisée aujourd'hui. Anneau principal = anneau intègre dont tous les idéaux sont principaux = algorithme euclidien est applicable.
- Algorithme a-t-il une fin ? La question n'est pas vraiment abordée en VII 2. Mais Euclide revient sur la difficulté à l'occasion d'un problème similaire, en VII, 31 : « tout nombre est mesuré par un nombre premier ». Lire la preuve et repérer que Euclide prend le soin de dire qu'il n'y a pas **de « descente infinie » dans les nombres = nombres entiers.** L'algorithme termine parce que les entiers ont une structure particulière. L'algorithme ne termine lorsque deux longueurs incommensurables : les **incommensurables sont par là liées à la question de la nature de l'infini**. On reviendra sur cette question bientôt

Rôle de l'algorithme est fondamental : 1) Permet de démontrer le théorème de Gauss (VII, 30 : ab = c et que d, premier, mesure c, alors d mesure a ou b) ; 2) Permet de démontrer théorème fondamental de l'arithmétique = unicité de la décomposition en facteur premier de n, n étant quelconque.
Autre résultat lié à cet algorithme et à l'idée de nombre premier. Infinité des nombres premiers (IX, 20) : raisonne avec trois nombres, plutôt qu'avec n nombres, mais sinon le même raisonnement qu'aujourd'hui (raisonnement par l'absurde).
[Soit n nombres premiers ; considérer le nombre $p = p_1 \ldots p_n + 1$. Soit p est premier, et alors l'affaire est réglée ; soit il n'est pas premier, alors il est mesuré par un nombre premier p'. Admettons que $\exists i$ $p' = p_i$, alors p' mesure p – 1 et p ; donc le p' mesure 1 (ici qu'intervient l'algorithme d'Euclide) ce qui est impossible.]

- Remarque générale sur les notations :
La notation des nombres est segmentaire, et les longueurs des segments sont commensurables. Lier à présence de l'algorithme d'Euclide = possibilité de soustraction aisée. Pythagoriciens : représentation géométrique des nombres = nombre sont des carrés, des cubes, des pairs ou des impairs = ils ont des formes, comme les figures (qui joue le rôle de variable [x^2]).
Pas de **notation** des nombres comme nous la connaissons nous : différents systèmes de notation, eux-mêmes peu commode, ce qui rend opération très lourde à effectuer. *Cf. texte de Peiffer*. Pas de notation pour l'addition et pour la multiplication de plus de deux nombres.
Point important : il y a deux usages des signes numériques – le décompte, le calcul. Dans beaucoup de cultures, deux systèmes de signes numériques : les chiffres romains, et l'abaque (ou la représentation segmentaire). Le coup de génie des math indien ou arabe : avoir inventer le 0. Pourquoi ? Les systèmes positionnels : unités, dizaines, centaines, … Permet de calculer sur n'importe quelle notation. Mais demande d'avoir une grille sous-jacente ; dès qu'on enlève la grille, ambiguïté.
Le 0 permet d'enlever la grille, et de conjoindre, dans une même notation, la possibilité du calcul et du décompte. Deux petites remarques :

- Invite à une réflexion sur la technique : exemple des étudiants de philo sur la technique, la voiture, l'avion, la bombe. Mais d'autres inventions, moins spectaculaire, plus discrète, mais plus fondamentale : celle du signe 0.
- Invite à une réflexion sur les notations : trouver les signes apte à bien exprimer les idées, souvent lier à inventer les idées ou les concepts eux-mêmes. Les arabes ont inventés l'objet polynômes en inventant la notation décimale.

III- 3 : Algèbre et géométrie chez Euclide

- Algèbre ensemble des méthodes communes à arithmétique et géométrie. On a vu un peu d'arithmétique, un peu de géométrie. Je vais revenir à l'articulation entre les deux.
On trouve dans le livre II, théorie de « l'algèbre géométrique », un ensemble de méthodes qui pourraient passer aujourd'hui pour de l'algèbre élémentaire : théorie des équations quadratiques (des « identités remarquables »), mais interpréter comme une théorie des aires de carré et de rectangles. Idée fondamentale, addition de segment, ou produit d'un segment par un entier est un segment, mais produit de segments est une aire. C'est Descartes qui rompra le premier avec cela : expliquer comment.
Donc $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (II, 4) est une certaine décomposition de la surface du carré de coté $(a + b)$. Pas une propriété des « opérations » de x et de +.
La résolution d'équation du second degré est donc, dans le cadre de cette théorie, aussi interprété géométriquement. Sur ce point, noter qu'en Grèce, le gnomon = différence de deux carrés joue un rôle fondamental.
Exemple de $x^2 + 10x = 39$. Carré de coté x ; ajout de deux rectangles de largeur x et de longueur 5 ; compléter le carré à partir du gnomon. Le grand carré est d'aire $25 + 39 = 64$. D'où $x = 3$.

- Dans les *Eléments*, les méthodes communes qui relèveraient aussi bien de l'arithmétique que de la géométrie sont interprétées géométriquement ; l'idée semble être que, dès qu'il y a des carrés, il peut y avoir des incommensurables, et le problème n'est pas arithmétique. Ce qui est surprenant, c'est qu'il n'y ait pas de théorie des équations du second degré : une équation peut être interprétée géométriquement, mais elle n'a pas l'obligation de l'être. Des question de partages des biens lors d'un héritage, des problèmes commerciaux peuvent donner naissance à des équations du second degré. Or, chez les grecs, l'interprétation est toujours géométrique, elle préexiste toujours à l'équation : le concept d'équation qui peut être interprétée de différentes manières n'est pas dégagée.
IXème siècle, Al Khwarizmi : élaboration d'une théorie des équations du premier et du second degré, auxquelles peuvent être ramenés indifféremment les problèmes arithmétiques et géométriques, utile à la fois pour le calcul, les échanges commerciaux, les successions, l'arpentage des terres, … Le concept d'équation est introduit, pour la première fois, pour désigner **une classe infinie de problèmes** susceptibles d'être couchés dans une même forme, forme dont la résolution est justifiée géométriquement, mais qui est en elle-même sans contenu géométrique.

- Multiples raisons du développement. On peut en citer deux :

- Monde unifié musulman s'étend du VIIIème au XIIème siècle de l'Inde à l'Espagne. Tribus nomades d'Arabie unifié par Mahomet (mort en 632) vont conquérir, dominer et stabiliser pendant cinq siècle un immense territoire. A l'intérieur de cet Etat, de multiples systèmes arithmétiques, très différents les uns des autres, se côtoient : notations romaine, indienne, mésopotamienne, des segments euclidiens, etc, etc… Une question pratique est dès lors posée : comment unifier les

notations de façon à tout simplement pouvoir les lire dans cet espace politique gigantesque ? Question concrète : celle de l'administration de l'Etat, qui exige que les nombres soient écrits de la même façon, et que cette écriture puisse être la plus commode possible pour faire les calculs.
La confrontation des arithmétiques a fait apparaître beaucoup plus clairement la généralité et la nature abstraite du **concept d'opération**. Vues de cette manière, les opérations ont été perçues comme un moyen de systématiser et d'organiser l'exposé arithmétique. Ainsi Al-Uqlidisi : « il est possible de remplacer ces neuf chiffres par d'autres chiffres, soit par des chiffres Abjad (de l'alphabet arabe), soit par des chiffres romains ». Indifférence de l'algèbre par rapport à son objet a certainement été d'abord une indifférence aux systèmes divers de numération proposés dans ce vaste empire.

- La religion n'est peut-être pas sans influence. Islam : religion où pas de représentation de Dieu. Problème pour les religions du Verbe : l'idolâtrie. Condamnation très forte dans l'Ancien Testament de toute représentation d'un Dieu, qui Innommable, est coupé de la nature. Polythéisme : les Dieux sont des êtres sociaux comme nous (cf. Brassens, *Le grand Pan est mort*). Monothéisme : Dieu est une volonté toute puissante, qui n'a rapport avec aucune altérité, et qui se manifeste par des commandements, non par une incarnation particulière.
  Grecs et romains, sculpture des Dieux. Christianisme : **rejet des sculptures**. Dieu se donne par le Verbe, pas par sa présence et ses actions dans le monde. Mais une question est posée, celle des images ? catholicisme : image comme substitut aux Ecritures pour les illettrés ; orthodoxe, icône = Dieu s'incarne dans les images. Islam, comme dans le judaïsme : rejet de toute forme de représentation de Dieux. Développement d'un art ornemental (les arabesques) – et également un tour nettement moins ontologique de la pensée : de même que l'on peut élaborer un art sans image, de même on peut élaborer une pensée libérée de l'impératif de représenter quelque chose.
  Le terrain est propice à une analyse de la théorie de la mesure dégagée de ses applications arithmétiques et géométriques ; on ne pose plus systématiquement la question : sur quoi porte ma théorie ? De même que l'artiste des pays d'Islam ne cherche pas à répondre – qu'est-ce cela représente ? – les matheux des pays d'Islam développe des théories sans leur assigner une application déterminée.

III- 4 : Approche du continu (1) : les fractions continues

- Articulation arithmétique – géométrie ; problème des incommensurables. Parce qu'il y a des radicaux irrationnels que l'on est obligé d'adopter une lecture géométrique des problèmes mettant en jeu le second degré, et que l'on ne peut pas développer une théorie algébrique neutre.
D'un point de vue moderne, on a la suite : $N \subset Z \subset Q \subset R$. Mais malgré tout, une césure dans la façon dont vous définissez R. N, Z, Q, pas de problème. Une fraction, vous savez ce que c'est : classe d'équivalence sur ZxZ ; pareil, même plus simple, pour C une fois que vous avez R. Mais un réel ? Comment définir un réel ?
Vous savez définir R comme un corps commutatif archimédien qui est **complet** (définition de la complétude ?). Et vous pourriez dire : un réel est un élément du corps complet en question. Mais comment définir un réel *déterminé*, $\sqrt{2}$ par exemple ? Plusieurs méthodes, essentiellement deux : 1) une qui n'est pas grecque (du moins, on ne sait pas trop), qui sera développer par les arabes, mais que je vous donne parce qu'elle est belle, et s'inscrit dans le droit fil de l'arithmétique euclidienne ; 2) l'autre qui est grecque, la théorie des ratios, qui montre à quel point les grecs avaient compris remarquablement la difficulté de définir le continu ; elle ne sera pas toujours comprise au XVII au XVIII^{ème}, mais sera reprise, et modifiée, au XIXème par Dedekind, lorsqu'il définira de façon rigoureuse la R à partir de N.

- Je vais partir de deux exemples qui manifeste le lien entre incommensurables et algorithme d'Euclide :
    - Appliquer l'algorithme à $2^{1/2}$ et 1. On a : $\sqrt{2}$, 1 ; $\sqrt{2}-1$, 1 ; $2 - \sqrt{2}$, $\sqrt{2} - 1$. Donc on retrouve la proportion $\sqrt{2} / 1$, de laquelle on était parti, après deux étapes.
Interpréter géométriquement ce résultat, à partir d'un rectangle de coté $\sqrt{2}$, 1. On retombe sur un rectangle qui est **similaire** au premier rectangle : même rapport entre ces cotés. D'où la possibilité de recommencer à l'infini. Ici, vous voyez : lien important entre la théorie de la similitude, et des incommensurables.
    - Appliquer l'algorithme à $(1+\sqrt{5})/2$, 1. On a : 1, $(\sqrt{5}-1)/2 = (1+\sqrt{5})/2x(\sqrt{5}-1)/2$, $(\sqrt{5}-1)/2$. Le rectangle construit est similaire au rectangle dont on part, après juste une étape.
Remarque sur le second exemple : nombre qui est le rapport de la diagonale au coté d'un pentagone régulier, une des figures sacrées pour les pythagoriciens ! Certainement une des premières manifestations de l'icommensurabilité = *voir la figure du pentagone*. Ici, incommensurabilité se lit dans l'agencement des segments du pentagone = esquisse d'une répétition infinie des opérations de l'algorithme euclidien, au cœur de la figure sacrée.

J'avais parlé de question d'échelle lors de la similitude : incommensurabilité apparaît comme une possibilité de répéter indéfiniment, sans arrêt les opérations prescrites dans l'algorithme d'Euclide à différentes échelles. Il y a, vous voyez, un lien intrinsèque chez les grecs entre irrationalité et infini.
Deux notions d'infini (Aristote, *Physique* II). Infini en puissance = l'infini comme possibilité de répéter une opération (successeur dans les entiers, répéter les opérations de l'algorithme). Infini en acte = un objet, ou un ensemble infini. Aristote : l'infini en acte est une contradiction. Par contre, infini en puissance n'est pas un objet et peut être admis. Difficulté de penser les irrationnels : nous oblige à penser un infini comme donné = √2, mesure de la diagonale, est donné par **toutes les étapes** de l'algorithme d'Euclide qui ne termine pas.

- La définition anthyphérètique des irrationnels n'est pas une définition des *Eléments*. Elle aurait été développé avant tout par Al Kayyam, qui est connu plutôt aujourd'hui pour ses poèmes. Cette définition est liée au développement de la théorie des fractions continues dont Mme Perrin va vous parler. L'idée est de définir les nombres irrationnels en partant de l'algorithme d'Euclide = d'identifier ces grandeurs aux quotients successifs obtenus au cours de cet algorithme.

Exemple de 20/12 : 20/12 = 1 + 8/12. 1 = 1x8/12 + 4/12. 8/12 = 2x4/12. On peut le voir autrement : 20/12 = 1 + 8/12 = 1+ 1/(12/8). 12/8 = 1 + 1/(1 + ½). Interprétation géométrique : dans un rectangle de longueur 20 et de coté 8, la longueur contient une fois la largeur, ce qui laisse un premier reste (8/12) ; et la largeur, contient 1 fois le premier reste, un second reste étant laissé ; le premier reste contient exactement deux second reste.
Etape décisive : l'inversion du reste. Au lieu de prendre la largeur comme unité, je prend le reste comme nouvelle unité, et j'essaie avec cette unité là de mesurer la largeur (l'ancienne unité).
Exemple de √2 : √2 = 1 + (√2-1) = 1+1/(1/√2-1) = 1+1/(1+√2) = 1 + 1/(2 + (√2-1)). Revenir aux figures : le troisième rectangle est similaire au premier = dans le second rectangle, j'ai un carré, et un rectangle similaire au premier.

Dans l'algorithme d'Euclide, on approche la grandeur par le nombre maximum d'unités contenues en elle ; il y a un reste. Ensuite, on considère **ce reste comme la nouvelle unité**, et on divise l'ancienne pas le reste ; et on recommence, jusqu'à ce que l'on obtienne deux nombres divisibles. Même idée dans la notation en fraction continue.
Remarque : l'idée fondamentale dans la notation en fraction continue est la même : diviser l'unité par le reste obtenu = de changer d'unité, de dégager un système **d'unités liées les unes aux autres**. Le truc génial et déstabilisant : le système des unités n'est pas choisi à priori, comme dans la notation décimale, ou comme dans la notation à base deux (une fois le décompte fait des unités, on passe aux dixièmes, puis aux dixièmes de dixièmes, etc…). Dans la notation d'un rapport en fraction continue, **les unités utilisées dans la notation sont adaptée au nombre à exprimer, elles sont produites par l'application de l'algorithme**. Dans exemple de 20/12 : 12, puis 8, puis 4.

Idée de Al Kayyam (*voir le texte*) : **deux rapports de grandeurs sont égaux, si les quotients partiels obtenus lors de la division euclidienne sont les mêmes**. Définition de √2 : une suite infinie d'entiers qui sont les restes des quotients partiels.
Intérêt de la définition : **brouille** frontière entre nombre et grandeur. Mais le **prix à payer est lourd** : admettre l'infini actuel, et le prendre comme point de départ de la définition d'un incommensurable = deux rapports sont égaux si chaque terme d'une suite infinie d'entiers sont égaux.
Lagrange démontre en 1770 qu'il faut et qu'il suffit qu'un rapport de grandeurs corresponde à la racine d'une équation quadratique à coefficient entiers pour que le développement en fraction continuée soit périodique = répétition ici importante parce que développement à l'infini est saisie par la répétition indéfinie d'un groupe d'opération, tandis que dans l'approche de Al Kayyam, les restes n'ont pas à être périodique.
Là encore, on pourrait repérer dans les types de défense produites pour ces genres de définitions, des arguments de nature théologiques = Dieu est un infini actuel pour les chrétiens et les musulmans, donc l'infini actuel n'est pas contradictoire.

III- 5 : Approche du continu (2) : la définition eudoxienne

- Exposé de la définition d'Eudoxe :

Euclide commence par définir le fait pour deux grandeurs d'avoir un rapport l'une avec l'autre :
V- 4 : Des grandeurs sont dites *avoir un rapport l'une relativement à l'autre* quand elles sont capables, étant multipliées, de se dépasser l'une l'autre.

La possibilité pour une grandeur d'être multiple d'une autre est fondamentale, pour Euclide (déf. 1 et 2). Elle correspond à la possibilité de mettre bout à bout des segments pour en construire de plus grands. Cette quatrième définition est connue aujourd'hui sous le nom de propriété d'Archimède.
Rappel : (R, +, x) est un corps archimédien, c'est-à-dire un corps vérifiant la propriété d'Archimède :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \forall A \in \mathbb{R}^{*+}, \exists n \in \mathbb{N}^*, n\varepsilon > A$.

Euclide énonce ensuite la très célèbre définition V-5 de l'identité de rapport entre grandeurs :

V- 5 : Des grandeurs sont dites être dans le même rapport, une première relativement à une deuxième, et une troisième relativement à une quatrième, quand les équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément la dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et de la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacun à chacun, et pris de manière correspondante.

Vitrac, remarquant que « la longueur et la complexité de l'énoncé témoignent d'un effort de clarté et de rigueur d'expression qui n'était pas si évident à formuler dans la langue naturelle », propose la traduction logique suivante :

$A : B = C : D$ signifie $\forall m \forall n \in \mathbb{N}, [(nA > mB) \wedge (nC > mD)] \vee [(nA = mB) \wedge (nC = mD)] \vee [(nA < mB) \wedge (nC < mD)]$.

La très grande force de la définition V-5 est de nous dire à quelles conditions un rapport entre deux grandeurs est égal à un autre, **que ce rapport soit ou non incommensurable**. Telle est l'origine de la complexité de la définition, qui identifie l'égalité de deux rapports en faisant un détour par **« la répartition relative des multiples des grandeurs entrant dans le rapport »** – voir plus loin.
La définition V-5 vaut évidemment dans le cas où les deux rapports sont commensurables, c'est-à-dire dans le cas où l'on puisse trouver un grandeur Y, tel que $A = nY$ et $B = mY$, n et m étant des entiers (et la même chose pour C et D). Mais elle est applicable aussi au rapport entre la diagonale et le coté du carré. Un rapport de A à B est identique au rapport incommensurable $\sqrt{2}$ ssi $\forall m \forall n \in \mathbb{N}\ [(nA > mB) \wedge (n\sqrt{2} > m)] \vee [(nA = mB) \wedge (n\sqrt{2} = m)] \vee [(nA < mB) \wedge (n\sqrt{2} < m)]$. Dit autrement, si A : B est différent du rapport de la diagonale au coté d'un carré, alors on peut trouver un couple d'entier (m, n) tel que $nA>mB$ et $n\sqrt{2} < m$.

Question : mettre en rapport les deux versions de la définition (en langue usuelle et en notation logique). Pourquoi Euclide précise-t-il « selon n'importe quelle multiplication », « chacun à chacun », et « pris de manière correspondante » ?
Question : pouvez-vous extraire de la définition V-5 une définition de l'inégalité de deux rapports. Montrer que le rapport entre 5 et 2 diffère du rapport entre 100 et 41.

On peut, intuitivement, exprimer les choses ainsi : deux rapports sont identiques ssi ils sont supérieurs à exactement les mêmes rationnels (c'est l'intuition qui est sous-jacente à la construction de Dedekind – voir cours Y. Perrin). Cf. théorème des valeurs intermédiaires = la coupure détermine un réel.
Mais la façon dont procède Eudoxe indique que sa définition a une autre origine. De Morgan a donné une représentation très suggestive de la définition V-5, qui a l'avantage de la lier à la définition précédente V-4. Représentons sur une droite les multiples de A et les multiples de B :

Les droites nous donnent une représentation visuelle de la manière dont les multiples se répartissent relativement les uns aux autres. Par exemple : $B<A<2B<2A<3B<4B<3A$…
Vitrac explique : « cette répartition réciproque caractérise les grandeurs relatives de A et de B car si l'on modifie l'une des deux grandeurs, même de très peu, on bouleversera la répartition des multiples respectifs. Par exemple, si on prend $A'>A$ avec $A' = A+ \varepsilon$, alors comme [axiome d'Archimède] il existe un nombre n tel que $n\varepsilon>B$, si on a :

$(m-1)B<nA\leq mB$,

on aura:

$mB<nA'$. »

L'inégalité de B : A et de B : A' se manifeste par le fait que, si on considère donne l'ensemble des multiples de A, B, A, si on gradue la droite en prenant pour unité les grandeurs comparées, alors **il y aura un endroit sur la graduation où la différence apparaîtra de façon visible – où le point n d'une échelle correspondra au point n+1 d'une autre.** L'image n'est pas celle de la partition en deux de Q – l'intuition qui préside à la formulation de V, 5, est celle de la comparaison de différentes échelles sur la droite.

Cours de Y. Perrin sur la construction de Dedekind et sur les fractions continues.

Conclusion

- Il y une vraie différence par rapport à la conception anthyphérètique. Chez Eudoxe, la définition ne distingue entre rapport rationnel et irrationnel. La définition s'applique à tous les rapports. Chez Al Kayyam, le champ d'application de l'algorithme d'Euclide est **étendu**, des rapports d'entiers à des rapport de grandeur qui ne sont pas des grandeurs entières. C'est cette extension conduit à admette un infini actuel.
Il n'y a pas d'infini actuel chez Eudoxe ; on trouve seulement l'idée que, si deux rapports diffèrent, alors il y un endroit, **à une distance finie**, où on trouvera un désajustement dans les multiples. On trouve chez Eudoxe une quantification sur un ensemble infini d'éléments ; mais cet infini est « potentiel », dans la mesure où il est donnée par une règle = ajouter à la longueur produite la longueur originale.
Point décisif : si la théorie eudoxienne des proportions s'applique à toutes les grandeurs, elle ne permet pas elle-même de distinguer les grandeurs incommensurables des autres. Eudoxe cherche soigneusement à éviter d'utiliser l'algorithme d'Euclide ; son approche est résolument **non-arithmétique** : ni les grandeurs, ni les rapports entre grandeurs ne sont des nombres.
Mais en refusant d'employer l'anthyphérèse, Eudoxe **ne peut pas explorer la structure des incommensurables**. Eudoxe élabore une sorte de minimum vital : V, 5 n'essaie pas de déterminer, de cerner, le phénomène de l'incommensurabilité ; V, 5 nous donne les moyens, par la considération des nombres (des multiples) de définir mathématiquement (= rigoureusement) **l'identité des rapports**. Mais pour étudier la différence entre les rationnels et les incommensurables, et pour étudier les différents types d'incommensurabilité, alors l'approche eudoxienne n'est pas adéquate.

- La différence avec Al Kayyam nous permet également de comprendre la différence avec Dedekind :
1) Sur le plan math, Dedekind définit la continuité par le **caractère inépuisable du corps engendré**. Pas une extension comme les autres ; idée de complétude = coupure sur des coupures ne crée rien de nouveau, ou dit autrement R est maximum par l'opération coupure à partir de Q.
Rien de tel chez Euclide. En réalité, les nombres **constructibles** dont Euclide a besoin sont **une partie propre de R** ; Euclide n'a pas besoin du continu, il a seulement besoin de pouvoir donner un sens à la notion de rapport, sans passer par le rapport entre entiers.
2) Sur le plan théorique, chez Dedekind, les coupures sont des ensembles de nombres rationnels, susceptibles d'être multiplié, additionné, etc… Et l'existence de $\sqrt{2}$ n'a pas être prouvée : il existe une et une seule coupure sur Q qui correspond à ce nombre.
Chez Euclide : les proportions **ne sont pas des nombres, mais des rapports entre grandeurs**. Et qu'il **existe** un tel ou tel rapport entre grandeurs dépend de la structure donnée dans l'expérience ; on ne peut pas le prouver empiriquement. Le continu n'est pas une création de la pensée, qui définit les entiers et les réels dans un même mouvement. C'est une donnée de la nature ; c'est la nature qui s'offre comme continue.

IV- DESCARTES ET SA POSTERITE

Suite du cours de M. Galuzzi

1- Rappel introductif

Descartes modifie complètement l'organisation des savoirs mathématiques. Deux critiques sont adressées aux Anciens :

1) Classification des problèmes en plan, solide, linéaire **ne permet pas de mettre de l'ordre en géométrie** : des courbes très étudiées (quadratrice, conique, …), d'autres complètement absentes. Pour Descartes, il faut revoir l'ensemble de la classification.
2) Rejet de la notion de **figure** : d'une part, trop dépendante de la sensibilité, d'autre part impossible à classifier. Idée de Descartes : voir la figure comme **le résultat d'un rapport entre lignes** (segments), comme ensemble des points satisfaisant telles ou telles conditions.

Descartes va utiliser l'algèbre pour introduire de l'ordre en géométrie. **L'idée géniale : considérer les polynômes à deux inconnues comme représentant les courbes géométriques, et classer ces courbes algébriques en fonction de leur degré.** F(x, y) = 0, avec F(x, y) polynôme à coefficients entiers, représente une courbe géométrique ; les exponentielles, … (les courbes transcendantes) sont exclues du domaine de la géométrie.
Deux avantages :

- Méthodes de découverte et de résolutions de problèmes très puissantes : voir ce que vous a expliqué M. Galuzzi et évoquer le problème de Pappus. Le problème dans une forme particulière s'énonce comme suit : soit a, b, c et trois droites concourantes coplanaires et α, β, γ les trois angles entre ces droites ; un point C étant considéré, on note CB, CD, CF la distance (sous les angles donnés) de C à ces droites. On pose alors : $CB \cdot CD = CF^2$. La question est de déterminer les lieux des points C.

- Avantage dans la classification : on obtient une progression maîtrisée et indéfinie de niveau différent à la place du fourre-tout que constituait la catégorie des courbes relevant de la classe des problèmes linéaires – et cette mise en ordre a été rendue possible par la mise à l'écart des figures, et la substitution à leur place des polynômes.

Critiques adressées à la tradition ne sont que le revers du grand programme de réorganisation du savoir math prôné par Descartes. Une mise en ordre de la géométrie, **permise par instrument qu'est l'algèbre. Mais cela a un coût : séparation entre courbes algébriques (dont il y a une équation algébriques) et les autres, transcendantes, exclues des math (fonction circulaire, exponentielle, etc…).**
(Descartes, philosophe de la méthode. Or idée de méthode trouve sa racine dans la découverte que l'algèbre permettait une mise en ordre cohérente et élégante du savoir géométrique. La méthode ici = faire le détour par l'expression algébrique des courbes, et mis à l'écart de leur dimension intuitive. Détour par les équations permet de prendre conscience de la façon dont les courbes sont construites – Descartes accroît les tendances constructives de la géométrie grecque).

J'ai parlé de la façon dont la théorie cartésienne permettait de résoudre d'anciens problèmes. Je vais maintenant évoquer de nouvelles difficultés engendrées par cette théorie. Le problème principal est le suivant : comment déterminer l'« allure » de la courbe lorsque que l'on connaît uniquement sa formule ? Passage par l'algèbre fournit des critères nouveaux (invisibles à même la courbe) pour classer les diverses figures ; mais elle ouvre un nouvel espace de recherche : comment déterminer les propriétés d'une courbe lorsqu'on ne connaît que l'expression algébrique de la fonction. Cf. les études de fonctions du secondaire.
Descartes : si on arrive à découvrir pour chaque point de la courbe une droite normale et/ou tangente à la courbe, alors on pourra se faire une idée de la façon dont la courbe se développe. Deux origines du calcul infinitésimal : 1) les questions de quadrature très anciennes ; 2) les questions de détermination de la tangente et de la normale, auxquelles la géométrie analytique donne une nouvelle actualité : comment de l'algèbre revenir à du géométrique ? Leibniz et Newton : verront que ces problèmes sont les mêmes : en cela, ils sont véritablement les inventeurs du calcul.

Importance du calcul différentiel **: pont entre les courbes algébriques et les courbes transcendantes**. Question notamment des quadratures. Montrer la table des primitives : on a des fonctions rationnelles, et leur primitive est transcendante. D'où le calcul différentiel pose un grave problème à Descartes : remet en question l'ensemble de sa classification et de sa démarche. Une opération inverse de la dérivation nous fait sortir du domaine des courbes algébriques. La frontière entre courbe mécanique et courbe géométrique n'est pas aussi **étanche** que les cartésiens veulent bien le dire.

Mais problème : extension du champ d'étude aux courbes transcendantes, extension du champ d'application des méthodes permettant de calculer les tangentes, nous oblige à rompre avec l'idée que les méthodes algébriques sont au cœur de la géométrie.
Il y a une grande cohérence de Descartes : si la géométrie est l'étude des équations des courbes géométriques, la description des propriétés géométriques doit s'effectuer par des moyen purement algébrique. L'algèbre est autonome et donne les moyens d'étudier l'ensemble des caractéristiques non algébriques, géométriques, des courbes. Mais aussi une énorme restriction : refus des courbes non algébriques, et refus du calcul différentiel.

Descartes est un mathématicien majeur : point de passage entre géométrie des anciens et calcul différentiel. Point de passage qui se pense comme un point d'arrêt : ce qui est intelligible, c'est l'algèbre ; une fermeture, qui interdit, non pas le développement d'algorithme différentiel, mais qui interdit leur généralisation. Point à souligner, et qui permet peut-être de comprendre la volonté cartésienne de fermer le champ des math à l'algèbre. La connaissance math est, chez Descartes, constamment **dévalorisée**. Descartes ne cherche pas à faire progresser les math, mais à les clôturer, à les unifier, pour identifier une **méthode mathématique** (*mathesis universalis*) applicable dans d'autres domaines plus important : la métaphysique et la théologie d'abord, la connaissance de la nature et de l'homme ensuite. Il n'est pas rare que des avancées mathématiques prennent la forme d'une volonté de réorganiser les disciplines ; il est plus rare que cette réorganisation ait pour fin une volonté philosophique de cerner une forme d'essence des mathématiques.

2- Quelques éléments sur la naissance du calcul différentiel

Je vais vite, j'y reviendrai quand je parlerai de Cauchy. Trois choses :

1) Il faut distinguer la question du calcul de celui de la métaphysique du calcul. Les mathématiciens sont tous d'accord sur les résultats et sur les règles que l'on peut appliquer aux fonctions pour trouver soit leur **dérivée** soit leur **primitive**.
On a pour les règles classiques : si $y(x) = au(x) + bv(x)$ alors $dy/dx = adu/dx + bdv/dx$; si $y(x) = u(x)v(x)$, alors $dy/dx = udv/dx + vdu/dx$; si $y(x) = u(x)/v(x)$ alors $dy/dx = (vdu/dx – udv/dx)/v^2$; si $y(x) = f(g(x))$ et $z = g(x)$, alors $dy/dx = dy/dz . dz/dx$.
Tous les mathématiciens sont d'accord sur le fait que ces règles s'appliquent à des fonctions transcendantes aussi bien qu'à des fonctions entières ; et sont d'accord pour considérer l'intégration comme l'opération inverse de la dérivation. En cela, ils vont plus loin que Descartes.

2) Ils sont en désaccord sur l'interprétation extra-calculatoire qu'il convient de donner à ces opérations différentielles. Mais ils partagent tous l'idée que l'interprétation ne peut pas être algébrique = la différentiation est une opération qui ne peut pas être comparée aux opérations de division, d'extraction de racine, etc…

Comment définit-on le quotient différentiel de $f(x) = x^2$? Ou, perçu géométriquement, la pente de la courbe $y = x^2$ au point x ?
On considère $f(x + h) – fx / h = ((x + h)^2 - x^2)/h = (2xh + h^2)/h = 2x + h$. Or, le quotient n'est pas $2x + h$, mais $2x$. Qu'est-il arrivé à h ? Tel est le problème que pose le concept de quotient différentiel.
Berkeley : Dans le calcul, on fait comme si h est différent de 0, car sinon, on ne pourrait pas définir le quotient diff comme un rapport. Mais à la fin du calcul, on fait comme si $h = 0$. Comment justifier cet évident manque de rigueur ?
Problème est le problème de fondation du calcul différentiel.

Réponses :

1) les infinitésimaux : h est un infinitésimal, c'est-à-dire une quantité que l'on peut négliger lorsqu'elle est mise en rapport à une quantité finie (on peut diviser par des infiniment petits, mais les négliger dans les sommes). Leibniz, Bernouilli. Berkeley = les infiniment petits sont contradictoires.
2) les fluxions : on ne définit pas les infiniment petits, mais directement les quotient différentiels conçus comme des vitesses, c'est-à-dire comme des rapports d'incrément entre la fonction et la variable – dans notre exemple, la vitesse est $2x + h$. Et Newton doit malgré tout affirmer que si h est petit, alors la vitesse est $2x$. D'où la critique de Berkeley s'applique, et en plus, la notion de vitesse n'est pas mathématique.
3) La limite : le quotient diff est la limite du rapport $(2xh + h^2)/h$ lorsque h va vers 0. Mais ce concept de limite n'est pas plus précisé et la question de Berkeley est : $2x + h$ ne peut jamais atteindre $2x$. Si h tend vers 0, mais n'est pas 0, alors $2x + h$ tend vers $2x$, mais n'est jamais égal à $2x$.

Penser ce qui est de l'ordre d'une tendance, d'une potentialité non effectuée.

4) rigueur grecque : calculus est une méthode de découverte, pas une méthode de preuve. Supposons que R, rapport de la variation de y par rapport à variation de x ne soit pas égal à 2x, que R>2x. Alors, si on suppose que pour h petit, le taux de variation de fx est proportionnel à x, pour h suffisamment petit, on peut toujours montrer que hypothèse R>2x est contradictoire. Pareil pour R<2x. MacLaurin.
Problème est que cette méthode de preuve par l'absurde parfois difficilement applicable ; surtout R doit être définie indépendamment du quotient différentiel. La méthode peut être appliquée dans le calcul des aires, parce qu'on a une définition géométrique de l'aire – mais dans le calcul de dérivée ? La notion de pente d'une droite est moins claire géométriquement. Et on soumet le calcul à la géométrie, dans cette approche.

Pour donner un sens aux opérations différentielles, il faut sortir du calcul, et passer à des considérations extérieures au calcul : à une métaphysique du calcul – qui prend la forme d'une théorie des infiniment petits (Leibniz), d'une cinématique (Newton), d'une théorie de la limite.
En gros : le calcul diff est un ensemble de recette qui marche ; mais **on ne peut pas justifier ces « recettes », de façon purement algébrique ; il faut introduire de nouveaux types de considérations métaphysiques, géométrique ou dynamique. Chaque fois, on étend la théorie des grecs à des objets que cette théorie ne considérait pas**.

3) Projet d'Euler et de Lagrange : arracher les concepts différentiels de la métaphysique, c'est-à-dire essayer d'interpréter le **calcul par le calcul** = de définir les principaux concepts de l'analyse, définir les fonctions transcendantes seulement par les règles de transformation des expressions (et non par la signification extrinsèque des termes).
Mais pour cela, il faut transformer l'algèbre de Descartes : l'étendre de façon à pouvoir à la fois de rendre compte des courbes transcendantes et de l'opérateur de différentiation. Le principal outil : série ou algorithme infinie. Des polynômes, comme chez Descartes, mais qui ne finissent pas, à la différence de chez Descartes.
Une extension minimale du programme cartésien, en ce sens Euler peut à bon droit qualifier sa démarche d'algébrique (il n'introduit pas des quantités non algébriques), mais une extension quand même : Euler ne se limite plus aux fonctions algébriques et peut interpréter le calcul différentiel.
Lagrange : les dérivées nème d'une fonction sont définis à partir des coefficients de la série de Taylor de la fonction en question. Vous : vous calculer les dérivées pour déterminer le développement en série de Taylor de la fonction ; Lagrange dit : l'ordre logique, c'est l'inverse = calculer une dérivée nème, c'est déterminer le nème coefficient de la série de Taylor = c'est effectuer certaines opérations algébriques sur des séries.

Trois phases : Descartes et clôture algébrique ; Leibniz et Newton : développement du calcul différentiel qui exige l'adoption d'une perspective différente, dans laquelle le point de vue de Descartes apparaît comme une limitation (pourquoi se limiter aux courbes algébriques, etc...) ; retour d'une approche formaliste : volonté de fonder le calcul sur le calcul : Euler et Lagrange, qui seront à leur tour balayé par Cauchy = naissance de l'analyse au sens moderne du terme, qui va être fondée finalement sur la théorie des ensembles.

3- Euler : fonction et série

La définition de la notion de fonction : « une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et des nombres ou de quantités constantes ». Que signifie « Expression analytique » ?
« Je les ai d'abord divisés en algébriques et en transcendantes. Les premières sont composées de quantités variables combinées entre elles par les opérations ordinaire de l'algèbre, et les secondes dépendent **d'autres opérations** ou des mêmes combinaisons que les précédentes **mais répétées une infinité de fois**. »
Ce qui intéresse Euler : étendre le programme de Descartes de façon à pouvoir parler des fonctions transcendantes, et du calcul. **Outil = les séries.**
Cf. §59 début du chap IV consacré au développement des fonctions en série : « **La formule $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ + etc…, en ne prenant qu'un nombre fini de termes, ne peut représenter ni les fonctions fractionnaires, ni les fonctions irrationnelles de z ; néanmoins on cherche ordinairement pour les exprimer une suite de même forme, qu'on suppose composée d'une infinité de termes. D'ailleurs une semblable série, quoique infinie, paraît plus propre à faire connaître la nature des fonctions transcendantes**. »
Selon Euler :

- Une fois que l'on admet les séries entières, on peut récupérer les fonctions transcendantes classiques ; on peut également étendre les règles de différentiation et d'intégration en dérivant et en intégrant terme à terme les séries.
- En même temps, les séries ne sont pas des objets radicalement nouveaux par rapport aux objets cartésiens : des polynômes sans dernier terme.

Définition de la fonction : combinaison possiblement infinie de termes simples selon les règles algébriques classiques. Idée de Euler : comme les séries sont des polynômes infinies, toutes les règles s'appliquant aux polynômes et qui ne font pas mention du dernier terme sont applicables aux séries entières. Donc derrière la notion de fonction se cache la notion de série infinie. Ce dernier concept est au fondement de la théorie des fonctions. Cf. expression de « algèbre ou analyse de l'infini ».

Problème que pose cette mise en relation : une série aujourd'hui est la limite des sommes partielles d'une suite ; **elle n'existe donc que lorsque la suite des sommes partielles converge**. Autrement dit, le symbole par lequel vous indiquez une série ne correspond à rien, ne désigne aucun objet, **si la série ne converge pas**. Chez Euler, ce n'est pas le cas. Pour Euler, une série = un **polynôme qui ne finit pas** = une règle d'écriture. Ce n'est pas un **nombre**, ou une relation entre nombre, une expression. La conception d'Euler correspond, non pas à la définition des séries que l'on vous a donné, mais plutôt à la définition que l'on donne dans la théorie des séries formelles.
J'ai dit : pour les mathématiques du XVIII$^{\text{ème}}$, « toutes les règles s'appliquant aux polynômes et qui ne font pas mention du dernier terme sont applicables aux séries entières ». **Mais sait-on déterminer avec précision les règles qui ne font pas référence aux dernier terme ? Peut-on étendre des règles algébriques, qui valent pour les polynômes, pour les séries, sans se poser la question de la convergence ?** Non. Cette extension, pour être légitime, présuppose que de nouvelles conditions, analytiques et non algébriques (ayant trait à la convergence) soient remplies.
Si i et j varient de 1 à n, et si les a_{ij} prennent des valeurs dans R, on a, puisque l'addition est commutative et associative, $\Sigma_i\Sigma_j a_{ij} = \Sigma_j\Sigma_i a_{ij}$. L'ordre dans lequel je fais une addition ne modifie pas le résultat de l'addition, ce qui fait que je peux réorganiser la somme comme je le veux.

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ai-je le droit d'opérer une telle réorganisation dans le cas d'une série double ? $\Sigma_i\Sigma_j a_{ij} = \Sigma_j\Sigma_i a_{ij}$? La règle est purement « algébrique » : commutativité et associativité ; elle ne fait pas mention d'un dernier terme. Pourtant, je n'ai absolument pas le droit de généraliser une telle règle.
Contre-exemple :

$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0\ldots \\ 0 & +1 & -1\ldots \\ \ldots & & \end{array}$$

Si les i indiquent les lignes et les j les colonnes, $\Sigma_i\Sigma_j a_{ij} = 0$; $\Sigma_j\Sigma_i a_{ij} = 1$.
$\Sigma_i\Sigma_j a_{ij} = \Sigma_j\Sigma_i a_{ij}$? Question étrange dans l'univers d'Euler :

- d'un coté, on n'a pas la même série, car une série est donnée par la loi qui ordonne le développement des termes ou des coefficients (dans le cas des séries entières).
- en même temps, les règles qui permettent de permuter les signes de sommes sont purement algébriques.

En réalité, Euler **admet souvent que le résultat des sommes infinies ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue la sommation**. Ce fait est « purement algébrique » et ne semble pas dépendre de l'existence d'un dernier terme.
C'est Cauchy, en 1821, qui établit une condition suffisante permettant de permuter le signe de somme : si la série double est telle que $\boldsymbol{\exists B>0\ \forall m>0,\ \Sigma_i\Sigma_j |a_{ij}|<B}$, alors $\Sigma_i\Sigma_j a_{ij}$ et $\Sigma_j\Sigma_i a_{ij}$ convergent vers la même limite.
Il y a là une limite interne au point de vue de Euler : **certaines propriétés « apparemment » purement algébriques ne s'étendent pas si facilement lorsque l'on passe du fini à l'infini.** Deux séries issues d'une simple réorganisation des termes dans une série double peuvent converger vers deux nombres différents, ce qui n'est pas le cas lorsque les sommes sont finies.
Une certaine logique dans le résultat : la série infinie nous est donnée « intensionnellement », par une règle – dans le cas fini, plusieurs règles peuvent être articulées à un même ensemble de termes. Donc, on ne peut pas modifier la règle, comme on le souhaite, sans modifier l'objet ; on n'a plus accès à « l'extension ».
(Cantor et le développement de l'arithmétique transfini : dans le cas des entiers finis, les cardinaux et les ordinaux sont confondus ; mais dans le cas des entiers infinis, ce n'est plus le cas : il y a une infinité d'ordinaux différents dénombrables. Les ordinaux ici correspondent à la série, en tant que donnée **intensionnellement**. Ainsi, l'addition entre ordinaux n'est pas commutative. La théorie de Cantor est une version abstraite des problèmes posées par la théorie des séries.)

4- La loi du binôme

Pour saisir le concept eulérien de série, pour en comprendre la véritable puissance, même s'il a des limites, je vais faire un détour par l'histoire de la loi du binôme de Newton. Quelle est cette loi ? Dans toute sa généralité, elle peut s'énoncer ainsi, a étant un réel quelconque :

Pour tout $-1<x<1$, $(1 + x)^a = 1 + x . a/1! + x^2 . a(a-1)/2! + x^3 . a(a-1)(a-2)/3! + \dots$

Cette égalité a été pour la première fois énoncée par Newton, qui ne l'a pas toutefois démontré. Mais l'énoncé provient de la généralisation d'une formule plus restreinte où a varie sur N. Ce que je vais vous expliquer, c'est comment Newton est parvenu à généraliser la première formulation ; ce mouvement me paraît magnifiquement illustrer le rapport singulier noué entre algèbre et série infinie à l'âge classique.

1- En premier lieu, un petit historique sur la notation des exposants. La mise au point de l'écriture moderne est contemporaine de la généralisation de la loi du binôme (*p. 17 de Hairer et Wanner*).

$a . a = a^2, \dots$

Et $a^2 . a^3 = (a . a) . (a . a . a) = a^5$

D'où : $a^n . a^m = a^{n+m}$ (*)

- Généralisation au puissance négative :

1 , a , aa , aaa, …

On poursuit à gauche:

…1/aa ,1/a , 1 , a , aa , aaa, …

Et on vérifie que l'on a toujours : $a^n . a^m = a^{n+m}$.

- Généralisation à une puissance rationnelle : on multiplie de manière répétée rad. a ; une progression est obtenue, qui, si on continue à utiliser la règle des puissances (*), suggère $a^{m/n}$ = (radn$^{\text{ème}}$. a)^m.

Exemple de $a^{1/2}\, a^{1/2} = a^{1/2+1/2} = a$. Ce qui induit : $a^{1/2} = \sqrt{a}$

- Généralisation à une puissance irrationnelle : par approximation. Exemple de $a^{\text{rad. } 7}$.

Newton, *La méthode des fluxions et des suites infinies* : « Il convient d'observer que je me sers de x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}, etc. au lieu de 1/x, 1/x², $1/x^3$, $1/x^4$, etc. de $x^{1/2}$, $x^{3/2}$, $x^{5/2}$, $x^{1/3}$, $x^{2/3}$, etc. au lieu de radx, radx^3, radx^5, rad3x², et de $x^{-1/2}$, $x^{-2/3}$, $x^{-1/4}$, etc. au lieu de 1/radx, 1/rad3x², 1/rad4x etc. Et cela par règle d'Analogie, comme on peut le concevoir par des Progressions Géométriques semblables à celles-ci, x^3, $x^{5/2}$, x², $x^{3/2}$, x, x^0 ou 1, $x^{-1/2}$, x^{-1}, $x^{-3/2}$, x^{-2}, etc. »

2- D'où vient la loi du binôme, dans le cas où n est entier ? Ecrire la formule jusqu'à n = 4. On voit apparaître le triangle arithmétique, où chaque coefficient est la somme des deux nombres au-dessus.

Le triangle de Pascal.

Pascal calcule le terme général de la suite par la première démonstration par récurrence : coefficient est Ckn. On retrouve la règle : C(k-1)(n-1) + Ck(n-1) = Ckn. On trouve chez Pascal les deux interprétations : comme coefficient du binôme, comme nombre de sous-ensemble à k éléments dans un ensemble à n élément. Interprétation polynômiale et combinatoire.

3- **Généralisation effectuée par Newton** – coup de génie est d'avoir étendu la règle aux **exposants fractionnaires et aux exposants négatifs**. Je ne vais parler ici que de la façon dont Newton a étendu cette règle aux exposants négatifs.

Dans triangle de Pascal, il faut donner une première diagonale (le « 1 » du coin et les 0 sur la diagonale) pour pouvoir amorcer le tableau ; une fois cela fixé, alors il est possible de remplir les cases même de la première ligne et de la première colonne.

Cette simple remarque conduit à un point intéressant : pourquoi limiter le triangle de Pascal comme le fait Pascal ? Rien n'interdit de **continuer, en utilisant la même règle, le triangle de Pascal par le haut et par la gauche**. Rien dans l'algorithme de Pascal ne justifie que l'on s'arrête où Pascal s'arrête ; il est possible de continuer, et si on continue, alors on obtient un diagramme qui s'étend sans limite, mais qui exprime sans plus aucune restriction **son mode intelligible de construction**.

Idée de Newton consiste en ceci : avoir saisi que **rien dans la règle de construction du triangle contraignait à s'arrêter là où on s'arrêtait d'ordinaire, et que rien donc ne justifiait que l'on étende pas l'interprétation des coefficients au triangle étendu**.

On va essayer de construire en retournant la règle qui permet de compléter le triangle par le bas, la diagonale qui correspond à l'exposant –1. On trouve de proche en proche les coefficients, mais cette fois, le nombre de coefficient non identique à 0 est infinie = un développement en série infinie.

Le ressort de la découverte de Newton : **immerger une construction finie dans un cadre infini pour en faire ressortir le processus de construction**. Souligner l'importance de voir des zéros là où on ne mettait rien ; souligner l'importance de la réflexion sur les bords.

(Les feuilles photocopiées de Westfall*. Newton complète le triangle en le continuant « à droite ». Passage de Newton très clair.)*

4- Quelle est la signification du développement en série au XVIII^{ème} siècle, pour des Newton ou pour des Euler ? Actuellement, l'algèbre et l'analyse sont deux domaines distincts, même si il y a de nombreux ponts entre les deux, et beaucoup de théories hybrides. Par exemple, cela a un sens de qualifier une preuve de topologique et de l'opposer à une preuve plus algébrique. Au XVIIIème siècle, un calcul où l'infini apparaît, c'est-à-dire quelque chose qui relèverait plus de l'analyse, n'est pas opposée à la pensée algébrique (à la théorie des polynômes). Tout au contraire : la **continuation à l'infini** est ce **qui permet une saisie pure des règles ou de l'opérativité qui gouverne les calculs**.

1) Saisir l'algorithme sous-jacent à la construction du triangle arithmétique, c'est être prêt à étendre indéfiniment vers la gauche ou vers le haut ce triangle
2) Inversement, l'accès à l'infini ne nous est fourni que par la loi de progression de la série ou l'algorithme de construction du triangle.

Cf. signification des points de suspension : pas simplement une absence, une négation, un vide à compléter ; expression d'une loi de progression que vous ne pouvez pas saisir autrement que comme capacité à continuer à l'infini la série.
Retour à la préface et à l'unité du projet d'Euler : la série, non pas seulement une extension du programme algébrique de Descartes ; mais **l'algèbre à l'état pur**, théorie des règles de calcul, affranchie d'une limitation qui ne lui est pas essentiel. En algèbre, on travaille sur des règles algorithmique, et les séries sont l'expression de ces règles. Continuation à l'infini indique que l'on prend ces règles pour objet, et que l'on ne considère un nombre fini de leur application. La série, et les points de suspension, indiquent que l'on prend pour objet les règles en elles-mêmes – qui peuvent en elles-mêmes être appliquées un nombre indéfini de fois. Polynôme est partie limitée d'un tout, comme le triangle est le morceau d'une totalité qui le déborde sur tous ces cotés.
Point très fort : pour généraliser, pour saisir la règle sous l'exemple, il faut nécessairement **penser l'infini** = la possibilité de poursuivre indéfiniment l'application de la règle manifeste **ce qu'est la règle**. Infini garantit saisie pure de l'opérativité = une condition sine qua non de l'algèbre.
Cf. en musique la musique de Bach : variation mélodique qui nous donne l'impression de ne pas commencer et de pouvoir ne jamais finir (morceau qui donne l'impression que l'on vient de monter le son). Cf. en philosophie : pensées de Spinoza, Leibniz, … où le rapport des esprits finis à Dieu est fondamental . Lire le texte de Pascal : le fini comme « écume » de l'infini (pensée reprise dans le romantisme au XIXème siècle : images en philo du romantisme, le sublime, …) ; on peut voir un écho de cette idée dans la pratique mathématiques.

5- Développement en série

Euler : donne des règles permettant de développer fonction en série entière. Je vais décrire deux cas exemple : celui du développement en série d'une fonction fractionnaire / celui de la fonction exponentielle.

1) Méthode des coefficients indéterminés : poser $fx = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ Puis ensuite, trouver la règle engendrant les coefficients en se servant de l'expression littérale de fx.
Prendre l'exemple de la fonction rationnelle : $\mathbf{y = a / (b + cx)}$. On a : $a = (b + cx)(A + Bx + Cx^2 + \dots)$

$$\text{Ce qui donne : } a = \begin{array}{l} bA + bBx + bCx^2 + bDx^3 + \dots \\ \qquad\;\; cAx + cBx^2 + cCx^3 + \dots \end{array}$$

On a : $A = a/b$; $cA + bB = 0$; $cB + bC = 0$; $cC + bD = 0$; ...
On a une suite définie par récurrence : $u_0 = a/b$; $cu_n + bu_{n+1} = 0$, ce qui donne : $u_{n+1} = -c/b\ u_n$. Le terme générale de $u_n = a/b(-c/b)^n$.
Naissance de l'étude des suites **définies par récurrence**. L'étude des suites suit celle des séries ! Remarquer que, eu égard au fraction rationnelle, la méthode est **générale** : plus le dénominateur a un degré important, plus la récurrence est complexe (pour un degré deux, elle est une récurrence à deux termes, pour degré trois à trois termes, etc…).
Le point intéressant est que vous voyez que l'infini dont il est ici question dans l'algèbre eulérienne est encore un infini **potentiel**, que l'on peut et que l'on doit manipuler par la récurrence. Cf. idée de Poincaré : le seul principe mathématique fondamental, le raisonnement par récurrence.

2) Fonction transcendante : pas de méthode universelle (différent de Lagrange) ; je vais vous présenter le raisonnement d'Euler concernant le développement de l'exponentiel.
Fait par étudiants.
[Voir *Hairer Wanner*, p. 26 : 1) développement de $(1 + 1/N)^N$ par le binôme – par des considérations infinitésimales, montre que l'expression tend vers $e = 1 + 1/1 + 1/1.2 + 1/1 . 2 . 3 + \dots$ 2) développe ensuite $(1 + x/N)^N$ et par les mêmes considérations infinitésimales, montre qu'elle tend vers : $1 + x + x^2 / 1 . 2 + \dots$ 3) montre que $(1 + x/N)^N$ tend vers e^x, et que donc $e^x = 1 + x + x^2 / 1 . 2 + \dots$
Critique de ce raisonnement :

- pose un problème interne : introduit des infiniment petits. D'où les entreprises de Lagrange à la fin du XVIIIème : série de Taylor devient fondation du concept de dérivée.
- pose un problème externe : n'obéit pas aux critères actuels de rigueur et de généralité. Toutes les fonctions ne sont évidemment pas analytique. D'où approche de Cauchy.

L'infini apparaît sous deux formes chez Euler : 1) série ; 2) symbole de grandeur. Point important : des symboles sur lesquels on calcule (des règles sont sous-jacentes) et on n'essaie pas de les interpréter. Tendance déjà présente chez Leibniz : infiniment petits = des fictions, mais systématisés.

Point important : $((x + h)^2 - x^2)/h = 2x + h$. Quand h tend vers 0, les deux quantités $(x + h)^2 - x^2$ et h sont nuls, mais le rapport entre ces quantités infiniment petites sont **finies** (grandeurs sont homogènes). Les quantités infiniment petites sont des symboles qui nous permettent d'écrire certains ratio qui sont finis.

V- La naissance de la forme moderne du calcul différentiel et intégral chez Cauchy

Se baser sur le livre de Grabiner *The origins of Cauchy's rigorous calculus*.

Diverses positions à la fin du XVIIIème siècle. Importance de la position de Lagrange, qui met en avant le développement en série de Taylor.

Le but de Cauchy est proche de celui de Lagrange : algébriser le *calculus* ; en même temps, pas le même algèbre : pas le développement en série infinie, mais l'usage des inégalités. Cauchy fait fond sur un ensemble disparates de techniques mis en place par les mathématiciens du XVIIIème pour approximer les racines d'une équation, ou la somme d'une série, et les utilise pour définir les concepts de base du *calculus*.

1- Le calcul au XVIIIème siècle

Deux concepts fondamentaux : le **quotient différentiel** et l'**intégrale**. L'intégrale est conçue comme le résultat de l'inverse de l'opération de différentiation. Donc bien voir deux choses : d'une part le quotient différentiel n'est pas conçu comme une fonction dérivée ; d'autre part, l'intégrale indéfinie précède l'intégrale définie (il n'y a pas de théorie de l'intégration comme somme infinie de quantités infiniment petites). Toutes les application du calculus consistent en la traduction d'un problème en une expression algébrique ou analytique qui peut être soit différentiée soit considérée comme le quotient différentiel d'une autre expression.

Comment définit-on le quotient différentiel de $f(x) = x^2$? Ou, perçu géométriquement, la pente de la courbe $y = x^2$ au point x ?
On considère $f(x + h) – fx / h = ((x + h)^2 - x^2)/h = (2xh + h^2)/h = 2x + h$. Or, le quotient n'est pas $2x + h$, mais $2x$. Qu'est-il arrivé à h ? Tel est le problème que pose le concept de quotient différentiel.
Berkeley : Dans le calcul, on fait comme si h est différent de 0, car sinon, on ne pourrait pas définir le quotient diff comme un rapport. Mais à la fin du calcul, on fait comme si $h = 0$. Comment justifier cet évident manque de rigueur ?
Problème est le problème de fondation du calcul différentiel.

Réponses :

1) les infinitésimaux : h est un infinitésimal, c'est-à-dire une quantité que l'on peut négliger lorsqu'elle est mise en rapport à une quantité finie (on peut diviser des infiniment petit, mais les négliger dans les sommes). Leibniz, Bernouilli. Berkeley = les infiniment petits sont contradictoires.
2) les fluxions : on ne définit pas h, mais directement les quotient différentiels conçus comme des vitesses, c'est-à-dire comme des rapports d'incrément entre la fonction et la variable – dans notre exemple, la vitesse est $2x + h$. Et Newton doit malgré tout affirmer que si h est petit, alors la vitesse est $2x$. D'où la critique de Berkeley s'applique, et en plus, la notion de vitesse n'est pas mathématique.
3) La limite : le quotient diff est la limite du rapport $(2xh + h^2)/h$ lorsque h va vers 0. Mais ce concept de limite n'est pas plus précisé et la question de Berkeley est : $2x + h$ ne peut jamais atteindre $2x$. Si h tend vers 0, mais n'est pas 0, alors $2x + h$ tend vers $2x$, mais n'est jamais égal à $2x$.

4) rigueur grecque : calculus est une méthode de découverte, pas une méthode de preuve. Supposons que R, rapport de la variation de y par rapport à variation de x ne soit pas égal à $2x$, que $R>2x$. Alors, si on suppose que pour h petit, le taux de variation de fx soit proportionnel à x, pour h suffisamment petit, on peut toujours montrer que hypothèse $R>2x$ est contradictoire. Pareil pour $R<2x$. MacLaurin.
Problème est que cette méthode de preuve par l'absurde parfois difficilement applicable ; surtout R doit être définie indépendamment du quotient différentiel. Comment ? La méthode peut être appliquée dans le calcul des aires, parce qu'on a une définition géométrique de l'aire – mais dans le calcul de dérivée ? La notion de pente d'une droite est moins claire géométriquement. Et on soumet le calcul à la géométrie, dans cette approche.

5) méthode algébrique : on définit le quotient différentiel à partir du développement en série infinie d'une fonction. On peut poser :

$$y(x + h) = y(x) + hp(x) + h^2q(x) + \ldots$$

Le quotient différentiel est défini comme étant $p(x)$. On n'explique pas ce que h est devenu. Ce qui doit être expliqué, est pourquoi $p(x)$, défini comme il est, permet toutes les application du quotient diff, tel qu'il est habituellement conçu (trouver les tangentes, les maxima, etc…). Lagrange parvient à réaliser ce programme.
Mais un autre problème guette : qui me dit que toute fonction a un développement en série, que ce développement est unique, et qu'il converge pour toutes les valeurs de x, aux valeurs de la fonction ?

6) compensation des erreurs : 2x + h n'est pas égal à 2x, mais l'erreur se compense, et le résultat peut, grâce à cette compensation être correcte. Comment justifier la négligence de h dans le résultat final ? Compensation d'une erreur faite en interprétant le quotient différentiel : la courbe à un point donné est considéré comme si elle coïncidait avec la tangente en deux points séparés. Parce que le problème est posée de façon erronée, la réponse telle qu'elle est, est erronée. Je la corrige en négligeant h. Méthode développée par L. Carnot.
Mais Berkeley : on fait deux erreurs au lieu d'une. Qui me dit que ces erreurs se compensent dans tous les cas ?

Idée fondamentale de Cauchy :
1) la méthode algébrique est la seule fondamentale, mais l'algèbre des séries infinies n'est pas adéquate
2) il faut utiliser un autre domaine, celui utilisé dans les calculs d'approximation, qui mobilise de façon essentielle **l'algèbre des inégalités**. Carnot a vu quelque chose.

Concept de limite : fx a pour limite L quand x tend vers a = $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, si $a-\delta<x<a+\delta$, alors $L-\varepsilon<fx<L+\varepsilon$. Faire un dessin. Pour exprimer la notion de limite, il ne faut plus raisonner sur le concept de quantité, mais sur le concept d'intervalle de quantité, ou d'encadrement. Une nouvelle algèbre : **plus de signe d'égalité, mais des signes d'inégalités**.

2- Approximation et calcul différentiel

Algèbre jusqu'ici : théorie des équations et séries infinies (des polynômes généralisés). Mais à la fois pour calculer les racines et les valeurs des fonctions transcendantes : problèmes. D'où développement des techniques d'approximation, dont la généralité est très grande, puisqu'elles sont applicables aux fonctions entières comme aux fonctions transcendantes.
Importance de ces techniques d'approx :
1) développe manipulation des inégalités ;
2) lien entre algèbre des inégalités et série de Taylor met en relation algèbre infini et algèbre des inégalités ;
3) fin du XVIIIème, analyse sur les marges d'erreur et les vitesses de convergence d'une approximation.

Mais approximation est conçue comme une méthode permettant d'atteindre **de façon toujours plus proche un nombre réel dont l'existence est donnée**. Ainsi, d'Alembert et Lagrange cherche à déterminer la marge d'erreur d'une approximation pour un n donné.
Ce que va faire Cauchy, c'est reprendre ces techniques mais en changer le sens : les nombres réels vont être définis comme **des limites de processus d'approximation convergent**, **et leur existence prouvée par la convergence de l'approximation**. Cauchy s'intéresse par exemple à savoir, étant donné une marge d'erreur (un epsilon donné), s'il y a un n à partir duquel toutes les approximations sont dans la marge.

POINT FONDAMENTAL : la limite prend la place de la valeur que l'on approchait, et l'existence d'une limite dépend de la convergence des deux suites limitant l'intervalle. L'usage des inégalités va permettre de prouver l'ensemble des résultats accumulé par les matheux du XVIIIème siècle = **l'analyse va devenir une algèbre des inégalités**. Dire que f a pour limite L en x = a, c'est dire que quel que soit $\varepsilon>0$, alors il existe un δ, tel que si $|x-a|<\delta$ alors $|fx - L|<\varepsilon$. Remarquer que la notation des valeurs absolues vient de Cauchy (simplifie l'expression des inégalités) ; remarquer aussi que le ε est le même que le signe pour l'erreur dans les approximations.

Exemple du critère de Cauchy de convergence d'une suite, qui reflète la même inversion : le critère pour la convergence est interne à la suite, et ne fait pas appel à la valeur que cette suite serait censée approchée. Ce qui était un moyen d'approcher une valeur **à laquelle on avait un autre accès** (géométrique, la plupart du temps) devient un mode de définition et une preuve d'existence de la valeur.
Manque cependant chez Cauchy, idée de complétude des réels. Cauchy ne montre pas que deux suites qui convergent ont une limite (ou une suite de Cauchy a une limite). Par exemple, dans Q, le fait que la différence entre deux suites, l'une croissante, l'autre décroissantes, soient aussi petites que l'on veut ne signifient pas qu'il existe un nombre qui est leur limite. Il faudra attendre la fin du XIXème siècle pour voir expliciter cette hypothèse.

3- Le théorème de la valeur moyenne

Rappel du théorème : si f est continue et que $f(a)<0$ et $f(b)>0$, alors il existe c dans l'intervalle [a, b], $f(c) = 0$.

Théorème qui avait pour les matheux du XVIIème et du XVIIIème une évidence géométrique, et qui n'avait pas besoin de démonstration. La nouvelle définition de la limite par des inégalités permet une preuve algébrique du théorème.

Au XVIIIème, de **nombreuses techniques d'approximation des racines d'une équation** : P(A)<0 et P(B)>0. Lagrange : soit n aussi petit que l'on veut. Considère A, A+n, A+2n, …, B-2n, B-n, B, et effectuons les calculs de P(A + in), pour toutes les valeurs de i. On peut ainsi repérer de façon plus précise les racines de P, et les séparer les unes des autres. Il se trouve que Lagrange a un moyen de calculer n tel que n est plus petit que la différence entre deux racines. Donc, quand n est choisi de cette manière, la méthode permet de cerner toutes les racines réelles de l'équation entre A et B.

Cauchy divise l'intervalle entre x_0 et X_0 en m parties égales : x_0 + h/m, … ; et il considère une fonction continue f(x), non nécessairement polynomiale. Mais lui ne cherche pas évaluer les racines. Au lieu de cela, il répète la procédure dans un intervalle [x_0 + nh/m, x_0 + (n+1)h/m], qu'il divise encore par m.
Il produit ainsi deux suites, une croissante, x_0, x_1, …, et une décroissante X_0, X_1, … en considérant chaque fois les extrémités inf et sup des intervalles encadrant la valeur annulant la fonction f(x).
Cauchy constate que la suite différence entre les deux suites est : $X_0 - x_0$, $(1/m)(X_0 - x_0)$, $(1/m^2)(X_0 - x_0)^2$, …, donc les deux suites convergent vers une limite a.
Comme **f est continue**, c'est-à-dire que $|f(x + h) - fx|$ décroît quand h tend vers 0, alors f(x_0), f(x_1)… et f(X_0), f(X_1), … converge vers une limite f(a).
Comme les deux suites sont de signes opposés, alors f(a) doit être identique à 0.

DONC il existe bien une valeur a, appartenant à [x_0, X_0], telle que fa = 0.

A la différence de ses prédécesseurs, Cauchy ne cherchait pas à approcher une racine, mais à prouver son existence. La preuve reprend la technique d'approximation de Lagrange, mais **elle la met sur la tête**. La technique fournit la première étape de la preuve, mais l'idée de répéter et de construire par cette répétition deux suites convergentes, pour démontrer l'existence de la racine, est complètement neuve.
Etrange de constater que l'entreprise de rigorisation de l'analyse (prouver tous les théorèmes du calculus à partir des définitions basées sur des inégalités) **provient d'un usage des techniques d'approximations. Forme de léger paradoxe : la précision et la rigueur dans les preuves provient des techniques d'approximation, dont la généralité provient du fait qu'elle ne cherche pas à déterminer exactement les valeurs des racines d'une équation ou d'une somme infinie.**

4- Le concept d'intégrale

Je vais rapidement évoquer les définitions que Cauchy de l'intégrale. Là encore on retrouve le mouvement consistant à s'appuyer sur des procédures d'approximation de certains nombres pour définir et prouver l'existence de ces nombres.

1) Au XVIIIème, l'intégrale n'a pas la définition que vous connaissez aujourd'hui, et qui est indépendante du concept de dérivée ou de différentiel : l'intégration est définie **comme l'opération inverse de la différentiation**. $\int_a^b ftdt$ est par définition égale à $F(b) - F(a)$, où F est définie par l'équation différentielle $dF/dx = fx$. Donc, l'intégrale n'est pas perçue comme une somme infinie de quantités infiniment petites, et l'intégrale indéfinie $\int_a^x ftdt$ est ainsi considérée comme plus fondamentale de l'intégrale définie $\int_a^b ftdt$.
Leibniz avait initialement conçu l'intégrale comme somme, mais les mathématiciens ont par la suite abandonné cette approche : une grandeur infiniment petite étant déjà difficile à élaborer, une somme infinie de quantités infiniment petites est très difficile à manipuler. Donc dans la période classique du calcul infinitésimal, il **n'y a pas de théorie de l'intégrale** ; il y a seulement une théorie de la différentiation.

Maintenant, les mathématiciens du XVIIème savaient que certaines intégrales ne peuvent pas être déterminées par ce biais : la primitive de la fonction $1/x$ est $\int_1^x 1/tdt = \ln x + C$, n'est pas déterminable par le simple calcul = elle n'est pas une fonction algébrique. Comment déterminer la valeur de l'intégrale pour $x = b$? L'idée est d'effectuer une approximation de l'aire sous la courbe y = 1/x entre x = 1 et x = b. De plus, il y a des fonctions continues par morceaux, qui déterminent une aire, et dont on a du mal à dire si elles ont des primitives. Or on peut calculer l'aire. Donc, même si la théorie de l'intégrale est inexistante, il y a bien des calculs d'approximation, très élaborés, visant à donner une idée de la valeur d'une intégrale indéfinie pour certaines valeur de la variable.

Cauchy est le premier à avoir abandonné cette façon de faire, à avoir abandonné la définition de l'intégrale indéfinie comme résultat de l'opération inverse de dérivation.
Pourquoi ? La question n'est pas évidente, car après tout, dans cette optique, l'intégrale ne posait pas plus de problème que la dérivée, et ayant élaboré une théorie de la limite et de la différentiation, Cauchy aurait pu revendiquer avoir défini ce qu'est une intégrale.

La raison la plus forte d'abandonner le primat accordé à l'intégrale indéfinie vient certainement du désir d'étendre aux **fonctions de variables complexes** les opérations fondamentales du *calculus*. Dans le domaine complexe, c'est-à-dire dans le plan euclidien, l'intégrale définie comme on le définit aujourd'hui (c'est-à-dire comme une limite de somme) **dépend du chemin que parcourt la variable indépendante** – et **ce trajet n'est pas fixée par la donnée des extrémités**.
Il y a des cas où une intégrale curviligne $\int_C fzdz$ ne dépend que des extrémités de C – mais il y a des situations où ce n'est justement pas le cas. On ne peut donc plus, si l'on veut généraliser l'intégration au fonction complexe, définir l'intégrale comme la différence des valeurs que la « primitive » prend aux extrémités. La seule façon de concevoir l'intégrale, c'est de prendre en compte les valeurs de la fonction *f* **tout au long du chemin** C – donc de revenir, malgré ses difficultés propres, à la définition de l'intégrale comme limite de somme.

2) La définition de Cauchy. On se place dans le cadre d'une fonction numérique à valeurs dans R. Cauchy commence par diviser l'intervalle $[x_0, X]$ en n **parties non nécessairement égales** $[x_0, x_1]$, … , $[x_{n-1}, X]$. Il considère $S = (x_1-x_0)f(x_0) + \ldots + (X-x_{n-1})f(x_{n-1})$. S dépend de f, de n, mais également du mode de division de l'intervalle. La question cruciale est : si la taille des sous-intervalles diminue et que n tende vers l'infini, la dépendance de S par rapport au mode de division de l'intervalle disparaîtra-t-elle ? Cauchy répond oui à la question, et soutient que la limite de S quand n tend vers l'infini est l'intégrale de fx entre a et b.
Je ne refais pas sa démonstration, mais là encore, insistons sur un point : cette technique consistant à considérer S, et à faire diminuer les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, est utilisée dès Archimède pour approcher l'aire de la surface sur la courbe. Cependant, généralement, les mathématiciens prescrivaient **de façon explicite le mode de division**, parce que ce qu'ils cherchaient, c'étaient **approcher le plus efficacement possible** une valeur dont l'existence était connue par ailleurs, qui était donnée géométriquement.
Ici, ce que veut faire Cauchy, ce n'est pas **approcher** une valeur dont l'existence est connue par ailleurs ; il veut **définir une valeur**, et pour cela, au lieu de chercher à trouver une mode de division de l'intervalle particulièrement adaptée à la fonction, il essaie de montrer que si la fonction est continue (**il utilise en fait la continuité uniforme**), alors la somme a une limite **quel que soit le mode de division**. Cette volonté de montrer que la limite de la somme est indépendante du mode de division est fondamentale parce qu'elle signale le décrochage épistémologique effectué par Cauchy : on ne recherche pas une efficacité plus grande dans la vitesse de la procédure d'approximation ; on cherche à définir un nouvel objet, par un passage à la limite.

La définition de l'intégrale par Cauchy sera raffinée par Riemann : Riemann ne considère pas la valeur de la fonction au point à gauche des sous-intervalles mais la laisse varier dans l'intervalle ; surtout Riemann montre que la somme S peut avoir une limite sans que la fonction soit continue. Riemann étend la définition de Cauchy a une classe plus vaste de fonctions. Mais, comme les autres théoriciens de l'intégrale par la suite, il se situe toujours dans la voie ouverte par Cauchy : l'intégrale n'est plus définie comme le résultat inverse d'une opération de dérivation.