LIMITES et CONTINUITÉ

1 Limite d'une fonction continue.

11 Notion de base.

111 Limites de référence.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'ensemble de définition D_f . Et a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Pour déterminer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ il faut que a soit un élément ou une borne de D_f .

Les limites suivantes sont dites de références :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x^n &= 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ (pour } n \in \mathbb{N} \text{)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} &= 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} &= +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^{2n+1}} &= -\infty; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0; \lim_{x \rightarrow a} k = k. \end{aligned}$$

Remarque : la limite d'une fonction en a peut ne pas exister.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ n'existent pas.}$$

112 Opérations sur les limites.

- Somme et limites.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$			
1'	1+1'	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

- Produit et limites

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	1 ≠ 0	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$				
1' ≠ 0	1 × 1'	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
0	0	0	?	?
$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$		$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$		$-\infty$	$+\infty$

- Quotient et limites.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$				
$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
0		?	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$+\infty$	0	0	?	?
$-\infty$	0	0	?	?

Remarque : lorsque $l \neq 0$ et $l' \neq 0$, l'étude du signe de $g(x)$ aux voisinages de a permet de déterminer la limite du quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ quand x tend vers a qui est $+\infty$ ou $-\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times \frac{1}{g(x)})$.

12 Formes indéterminées.

Les situations marquées d'un point ? Dans les tableaux sont appelées formes indéterminées :

$$-\infty + \infty, 0 \times \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}.$$

Techniques pour lever l'indéterminée.

- Factorisation du terme de plus haut degré :

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}) = +\infty$.

Tout polynôme a la même limite en l'infini que son terme de plus haut degré.

Toute fraction rationnelle a la même limite en l'infini que le quotient simplifié des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \lim_{x \rightarrow \infty} |x| \sqrt{a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}}$$

- Expressions conjuguées.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+4} - \sqrt{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - 2x; \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x - 1} + x + 2; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3}}{4 - \sqrt{6x-2}}$$

- Limite d'un taux de variation : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ lorsque f est dérivable en a

$$]-3; 0[,] [$$

- Changement d'écriture. *calculer* : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2}$..

13 Limite d'une fonction composée : $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f[g(x)]$

(1) Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f \circ g(x) = l$

(2) $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$ où $b = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

(3) Pratique : En posant $y = g(x)$. Quand $x \rightarrow a$; $y \rightarrow b$ et $\lim_{x \rightarrow a} f[g(x)] = \lim_{y \rightarrow b} f(y)$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\frac{\pi}{2} + x}$.

Conséquences :

1° si f est positive et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$.

Remarque : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty$

2° si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |l|$.

Remarque : si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$

14 Calculs de limites par comparaison.

Inégalités pour x assez proche de a	Comportement pour $x \rightarrow a$	conclusion
$u(x) \leq f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
$f(x) \leq v(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} v(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = l$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$
$ f(x) - l \leq u(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$
$u(x) \leq v(x)$	u et v admettent des limites en a	$\lim_{x \rightarrow a} u(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} v(x)$

15 Prolongement continu.

Si f n'est pas définie en a et admet une limite finie l en a alors f prolongeable en a . La fonction g

définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \neq a \\ l & \text{pour } x = a \end{cases}$ est le prolongement continu de f en a .

Exemple : $f(x) = \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ mais $0 \notin D_f$ Donc f admet un prolongement continu en 0 :

$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$ est le prolongement continu de f en 0 .

16 limite d'une fonction monotone sur un intervalle $]a, b[$

Propriété : Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $]a, b[$.

- Si f est majorée sur $]a, b[$ alors f admet une limite finie à gauche en b .
- Si f est minorée sur $]a, b[$ alors f admet une limite finie à droite en a .

$\Delta\Delta$ Enoncer cette propriété pour f décroissante sur $]a, b[$.

Propriété : Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $]a, b[$.

- Si f est non majorée sur $]a, b[$ alors f admet une limite infinie à gauche en $b (+\infty)$
- Si f est non minorée sur $]a, b[$ alors f admet une limite infinie à droite en $a (-\infty)$

$\Delta\Delta$ Enoncer cette propriété pour f décroissante sur $]a, b[$.

2 Fonction continue

21 Continuité sur un intervalle ;

211 continuité locale (a nombre réel)

Soit f une fonction et a un réel.

f est continue en a lorsque f est définie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

212 continuité globale (sur un intervalle)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f est continue sur I lorsqu'elle est continue en chaque point de I .

1° Les fonctions élémentaires suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$:

$x \mapsto ax^n$; $x \mapsto k(\text{cons } \tan te)$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto |x|$.

2° la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

3° la fonction : $x \mapsto E(x)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

213 Propriétés

Propriété 1

Soit f et g deux fonctions continues sur un même intervalle I :

1° $f + g; fg; kf; f^n (n \in \mathbb{N}); |f|$ sont continues sur I .

2° si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I

3° si f est positive sur I alors $\sqrt{f}$ est continue sur I

$\Delta\Delta$ ■ Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

■ Toute fraction rationnelle est continue sur tout intervalle de son ensemble de définition.

■ La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur tout intervalle de la forme : $\left] \frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

Propriété 2

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f est fonction continue sur I tel que $f(I) \subset J$ et g une fonction continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I . (la composée deux fonctions continues est continue)

22 Image d'un intervalle

221 Propositions.

1° Par une fonction continue non constante l'image d'un intervalle est un intervalle.

2° Par une fonction continue non constante l'image d'un intervalle fermé est un intervalle fermé.

(I fermé $\Rightarrow f(I)$ fermé)

3°

si f est continue sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [m, M]$ où m et M sont le min et le max de f sur $[a, b]$

Exercice. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Une fonction admettant le tableau de variation suivant :

Quelle est l'image par f de chacun des intervalles suivants : $] -3; 0[$, $] -4; -3[$, $[0; +\infty[$, $] -\infty; -3[$.

222 Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences.

Théorème 1 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux éléments de I . Tout réel m compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent α compris entre a et b .

Théorème 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$. (0 admet au moins un antécédent dans $[a, b]$).

Théorème 3(principe de localisation)

Si de plus f est strictement monotone sur $[a, b]$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[a, b]$.

Remarque : on peut ainsi déterminer une valeur approchée de la solution α par dichotomie ou balayage.

Théorème 4

1) Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si f ne s'annule pas sur I alors f garde un signe constant sur I .

2) Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si $f(I)$ ne contient pas 0 alors l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans I .

Exercice : soit $h : x \mapsto x^3 - 3x + 3$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1° Etudier h puis établir son tableau de variation.

2° Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $h(x)=0$ dans $\mathbb{R}$.

3° Déterminer une valeur approchée de chacune d'elle à 10^{-2} ; à 10^{-3} et à 10^{-5} près.

223 Bijection et bijection réciproque.

Proposition 1

1° Toute fonction continue et strictement monotone sur I est injective de I dans $\mathbb{R}$.

2° Toute fonction continue et strictement monotone sur I est bijective de I dans $J=f(I)$.

Si de plus $0 \in J$ alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans I .

si $0 \notin J$ alors $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans I (f garde un signe constant sur I)

soit $f : I \rightarrow J$ une bijection. la réciproque de f est fonction notée f^{-1} telle que :

Définition $f^{-1} : J \rightarrow I$ et $\begin{cases} x \in I, y \in J \\ f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \end{cases}$

Remarques : ■ $f(f^{-1}(x)) = x$ pour tout $x \in J$; $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in I$.

■ Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $(\Delta) : y = x$

■ si f est continue I alors f^{-1} l'est sur J

■ f et f^{-1} ont même sens de variation.

■ si f est dérivable sur I , f^{-1} n'est pas forcément dérivable J .

224 Exemples de bijections réciproques.

Soit n un entier naturel non nul. La fonction racine nième est la bijection réciproque de la fonction :

$$\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ ; x \mapsto x^n.$$

Notation : $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$ pour racine nième de x . on a : $(\sqrt[n]{x})^n = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Remarque : on appelle puissance $\frac{p}{q}$ de x le réel $x^{\frac{p}{q}}$ défini par : $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$.

3 Branches infinies

31 Présentation et asymptote

311 Présentation

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et d'ensemble de définition D_f et C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On dit que C_f admet une branche infinie dans les cas suivants :

- En $+\infty$ ou en $-\infty$ f a une limite finie ou infinie.
- En un réel a , f a une limite infinie.

312 Asymptotes parallèles à l'un des axes du repère.

■ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$), on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à C_f en $+\infty$ (en $-\infty$)

■ lorsque $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \infty$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \infty$ la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe C_f .

313 Asymptote non parallèle aux axes du repère.

Lorsqu'il existe deux nombres réels a et b tels que :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$) la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote (oblique) à la courbe C_f en $+\infty$ (en $-\infty$).

Propriété :

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à C_f en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b. \text{ (Faire l'analogie en } -\infty \text{)}$$

Proposition :

S'il existe deux réels a et b et une fonction g tels que $f(x) = ax + b + g(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à C_f en $+\infty$. (Faire l'analogie en $-\infty$).

Remarque : Les courbes représentatives de deux fonctions f et g sont dites asymptotes en $+\infty$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$. (Faire l'analogie en $-\infty$).

32 Direction asymptotique.

Posons : $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	$a = +\infty$ ou $a = -\infty$	Branche parabolique de direction (O,I)	
	$a \in \mathbb{R}^*$	$b \in \mathbb{R}$	Y=ax+b est une droite asymptote
		$b = +\infty$ ou $b = -\infty$	Branche parabolique de direction celle de y=ax
		b n'existe pas	Direction asymptotique celle de y=ax
	$a = 0$	Branche parabolique de direction (O,I)	
	a n'existe pas	Ni asymptote, ni direction asymptotique, ni direction parabolique.	