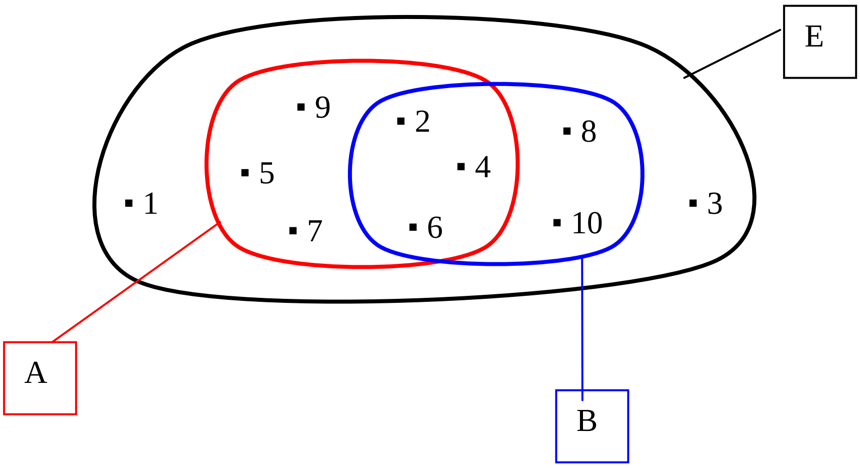
Dénombrement

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

A) Parties d'un ensemble :

Soit la représentation sagittale des ensembles E, A et B.



1°) Existe-t-il des éléments de A qui ne sont pas dans E ? Que dit-on des ensembles A et E ?

Réponse :

Tout élément de A est aussi élément de E, on dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble E ou que A est un sous ensemble de E ou encore A est une partie de E.

On note : A⊂E ou E⊃A.

Un ensemble C qui n'a pas d'élément est appelé ensemble vide et noté : ϕou { }.

Soient A et B deux ensembles :

A⊂E ⇔ tout élément de A est élément de E ;

$$A = E \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset E \\ E \subset A \end{cases}.$$

2°) Déterminer A⋂B puis A ⋃B

Réponse : $A \cap B = \{2;4;6\}$ *et* $A \cup B = \{5;7;2;4;6;8;9;10\}$.

Soient A et B deux ensembles :

A ⋃B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B ;

A⋂B est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B.

Remarque : si A⋂B =ϕ, on dit que A et B sont disjoints.

3°) Trouver le complémentaire de A dans E.

Réponse : $C_E^A = \{1;8;10;3\}$.

Soit A un sous-ensemble de E. On appelle complémentaire de A dans E, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.

Remarque : s'il n'ya pas d'ambiguïté sur E C_E^A est noté $\overline{A}$.

Exercice : déterminer $\overline{A}$; $\overline{B}$; $A \cup \overline{A}$; $\overline{A \cap B}$; $\overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B}$; $\overline{A} \cap \overline{B}$. Que remarque-t-on ?

Réponse : *on remarque que :* $A \cup \overline{A} = E$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Théorème : Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E,

$$A\cup\overline{A}=E\ ;\quad \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}\quad ;\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}\ .$$

4°) **Définition :** on appelle différence de A et B notée : A – B l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B.

Exemple : Trouver A – B puis B – A.

B) Analyse Combinatoire :

I– Ensemble fini – Cardinal : soit n un entier naturel non nul

1- Définition 1 :

Lorsque un ensemble E a n éléments, on dit que E est un ensemble fini et que son cardinal est n. On note alors Card (E) = n.

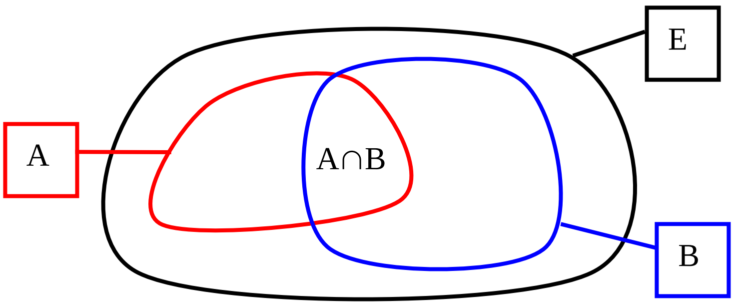
2- Exemple :

- E = { a, b, c, d, e } est un ensemble fini et card E = 5 ;
- Si E = ϕ , il comporte 0 élément et on pose card E = 0
- Certains ensembles ne sont pas finis tels que $\mathbb{N}$; $\mathbb{R}$; [0,1]

3- Cardinal d'une réunion d'ensemble finis :

Activité : Dans une classe de terminale, tous les élèves étudient au moins l'anglais ou l'allemand. 30 élèves étudient l'anglais, 20 élèves étudient l'allemand et 15 élèves étudient l'anglais et l'allemand. Quel est le nombre d'élèves de cette classe ?

Réponse : Désignons par E l'ensemble des élèves de cette classe, par A l'ensemble des élèves qui étudient l'anglais et B l'ensemble des élèves qui étudient l'allemand.



Card A = 30 ; Card B = 20 ; ; Card(A∩B) = 15 et E = A∪B ;
Donc Card E = card A + card B – card (A ∩B) = 30 + 20 – 15 = 35.

Théorème:

Soient A et B des parties d'un ensemble fini E.

Card (A∪B) = Card A + Card B – Card (A∩B) .
Card (C_E^A) = Card $\overline{A}$ = Card E – Card A .

Remarque: Si A et B sont disjoints alors Card (A∪B) = Card A + Card B.

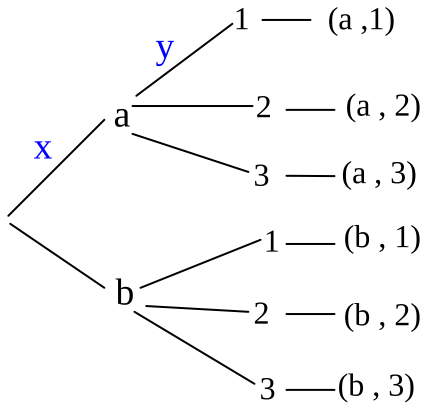
4- Produit cartésien d'ensembles finis:

a) Définition 2 : E et F sont deux ensembles finis et non vides. Le produit cartésien de E par F, noté E×F, est l'ensemble des couples (x ;y) où x∈E et y∈F.

b) <u>Exemple</u>:

- Soient les ensembles $E=\{a;b\}$; $F=\{1;2;3\}$ trouver E×F, F×E.

y / x	1	2	3
a	(a,1)	(a,2)	(a,3)
b	(b,1)	(b,2)	(b,3)



E×F = $\{(a,1);\ (a,2)\ ;\ (a,3)\ ;(b,1)\ ;\ (b,2)\ ;\ (b,3)\ \}$

F×E = $\{(1,a);\ (1,b)\ ;\ (2,a)\ ;(2,b)\ ;\ (3,a)\ ;\ (3,b)\ \}$.

Il y'a deux choix possibles pour x ; x étant fixé il y'a trois choix possibles pour y. Il en résulte qu'il y'a 6 couples (x ; y).

c)<u>Théorème</u> : Si E et F sont deux ensembles finis tels que card E = p et card F = n alors E×F est un ensemble fini et card (E×F) = n p.

Si E = F, alors card (E×E) = card (E^2) = $(\text{card}E)^2$.

5- <u>p-listes d'éléments d'un ensemble fini</u> :

a) <u>Définition 3</u> :

Soit E un ensemble fini non vide, p un nombre entier supérieur ou égal à 1.

On appelle p-liste d'élément de E (ou p-uplets) toute liste (x_1 ; x_2 ; x_3 ; … ; x_p) de p éléments de E.

L'ensemble de ces p-listes sera noté E^p.

b) <u>Exemple 1</u> : on lance un jeton de 10F, on note la face apparue. Puis un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quel est le nombre de résultats possibles ?

Réponse : $A=\{P;F\}$ $B=\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ \}$ *; Nombre de résultats = 2×6 = 12.*

c) <u>Exemple 2</u> :

La Bank of Africa MALI (BOA) veut établir pour ses clients des cartes de crédits « SESAME » dont le code est composé de quatre chiffres, tous distinct de zéro. Quel est le nombre de carte « SESAME » qu'elle peut émettre ?

<u>Réponse</u> : Un code s'écrira $x_1x_2x_3x_4$ où les x_i ($1 \le i \le 4$) sont les éléments de l'ensemble $E=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Il y en aura autant que de 4-listes (ou quadruplets) d'éléments de E, soit 9^4, donc 6 561 cartes possibles. Remarques :

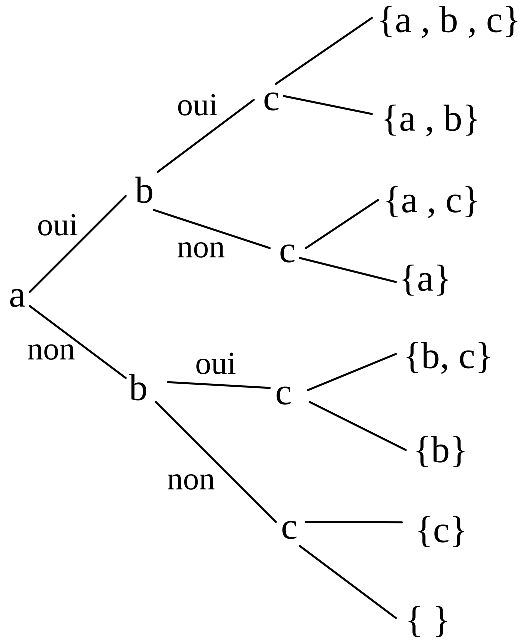
-R_1/ Chaque cas correspond à une application d'un ensemble de 9 éléments vers un ensemble de 4 éléments.

-R_2/ Déterminer le nombre de carte revient à dénombrer le nombre de 4-listes ou de quadruplets d'éléments de E.

-R_3/ Plus généralement le nombre d'application de E_p dans E_n est : n^p.

d) <u>Théorème</u> :
Soit E un ensemble à n éléments, et soit p un entier naturel non nul.
Le nombre de p-listes de E est n^p.

6- <u>Ensemble des parties d'un ensemble fini</u> :
Pour déterminer l'ensemble des parties d'un ensemble E noté P(E) on construit l'arbre des parties de E. Soit $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\ \}$



$$\mathscr{P}(E) = \{\{a\ ;\ b\ ; c\}; \{a; b\}; \{a\ ; c\}; \{a\ \}; \{b; c\}; \{b\ \};\ \{c\ \}; \phi\ \}$$

<u>Théorème</u> :
Le nombre des parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

7- <u>Arrangement de p éléments d'un ensemble fini</u> :

a) <u>Définition 4</u> :

Soit p un nombre entier supérieur ou égal à un. E un ensemble fini non vide.
Un arrangement de p éléments de E, est une p-liste d'éléments deux à deux distincts de E.
b) Exemple :
Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On en tire 3, une à une, sans remise. Combien y'a-t-il de tirages possibles ?
<u>Réponse</u> : le résultat d'un tirage peut se représenter par un triplet (x_1 ; x_2 ; x_3) où x_1 désigne le numéro de la 1ère boule tirée ;
x_2 désigne le numéro de la 2ère boule tirée ;
x_3 désigne le numéro de la 3ère boule tirée .
Pour x_1 il y'a 15 numéros possibles ; pour x_2 il y'a 14 numéros possibles et pour x_3 il y'a 13 numéros possibles.
Le nombre de tirage possible est donc : $15 \times 14 \times 13 = 2\ 730$.

c) Théorème :

Soit E un ensemble à n éléments et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Le nombre d'arrangement à p éléments est noté $A_n^p = n \times (n-1) \times .... \times (n-p+1)$.

$A_{15}^3 = 15 \times 14 \times 13 = 2730$.

d) Permutation (cas particulier) :

Si n = p , on appelle permutation de E un arrangement à n éléments de E. Il y'a donc $A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times ..... \times 3 \times 2 \times 1$ permutations.

Cet nombre est noté : n ! (lire factorielle n).

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ..... \times 3 \times 2 \times 1$ et $0! = 1! = 1$ *par convention*

Par exemple on a : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3\,628\,800$

- Théorème :

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations des éléments de E est égal à n !.

- Exemple : Un parieur a sélectionné trois chevaux avec lesquels il veut composer son tiercé. De combien de façon dispose- t-il pour les classer dans l'ordre ?

Réponse : Le nombre de façon est 3 ! = 6 façons.

8- Combinaison de p éléments d'un ensemble fini :

a) Définition : Soit n un nombre entier supérieur ou égal à un, p un nombre entier compris entre zéro et n. On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble E fini, toute partie de E ayant p éléments.

Exemple : soit E = { a ; b ; c} un ensemble à 3 éléments. Les parties de E ayant 2 éléments sont : { a ; b} ; { a ; c} ; { b ; c} .

b) Théorème :

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à un, p un nombre entier tel que : $1 \leq p \leq n$. Le nombre de combinaison à p éléments de E à n éléments est noté :

C_n^p *ou* $\binom{n}{p}$ et donné par la formule :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n \times (n-1) \times .... \times (n-p+1)}{p \times .... \times 2 \times 1} \;;\; C_n^0 = 1 \;;\; C_n^n = 1 \;;\; C_n^1 = n$$

Exemples : Calculer C_8^2 et C_{50}^3

$C_8^2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$; $C_{50}^3 = \frac{50 \times 49 \times 48}{3 \times 2 \times 1} = 19600$.

$C_n^0 = 1$ signifie : il y a en effet une seule partie vide ;

$C_n^1 = n$ signifie : il y a en effet n singleton dans un ensemble à n éléments ;

$C_n^n = 1$ signifie : il y a en effet une seule partie pleine.

9- **Pour s'y retrouver dans les différents tirages** :

Tirages	Successifs (l'ordre compte)	Simultanés (l'ordre ne compte pas)
Avec remise	n^p p-listes	
Sans remise	A_n^p Arrangements	C_n^p Combinaisons

Exercices :
Un sac contient 9 jetons numérotés : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

a) On tire 3 jetons successivement, en remettant à chaque fois le jeton tiré dans le sac avant de tirer le suivant. On écrit côte à côte chacun des 3 chiffres tirés, dans l'ordre du tirage, formant ainsi un nombre de 3 chiffres. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?. Exemples de résultats : 232 ; 551 ; 333 ; 124 ; 421…
Réponse : Il s'agit de triplets (3-listes) ; leur nombre est : $9^3 = 729$.

b) On procède au tirage de 3 jetons successivement, mais sans remise. On place les jetons côte à côte dans l'ordre du tirage. Combien de peut-on former ainsi de nombres de 3 chiffres ?. Exemples de résultats : 235 ; 541 ; 145 ; …
Réponse : Il s'agit d'arrangements $A_n^p = 9\times8\times7 = 504$.

c) On procède au tirage de 3 jetons simultanément. Combien peut-on obtenir de résultats différents ?. Exemple de résultats : { 2 ; 3 ; 5} ; { 4 ; 5 ; 8} …
Réponse : Il s'agit de combinaisons. On ne tient pas compte de l'ordre :
{ 2 ; 3 ; 5} = {3 ; 2 ; 5} = { 5 ; 3 ; 2}. Il y'a donc C_9^3 résultats possibles.

$$C_9^3 = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84.$$

II– **Propriétés de** A_n^p **et de** C_n^p :

1) **Expression de** A_n^p **et de** C_n^p **à l'aide de factorielles** :

En posant 0 ! = 1 on a :

. pour $1 \leq p \leq n$, $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ et pour $0 \leq p \leq n$, $C_n^p = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

2) <u>Triangle de Pascal et propriétés des</u> C_n^p :

Disposons des C_n^p dans un tableau à double entrée, appelé triangle de Pascal.

n \ P	0	1	2	3	4	……
0	C_0^0	×	×	×	×	……
1	C_1^0	C_1^1	×	×	×	……
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2	×	×	……
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	×	……
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4	……
.	.	.	.	.	.	……

$$C_n^p \quad \to \quad + \quad \to \quad C_n^{p+1} \quad \to \quad = \quad \to \quad C_{n+1}^{p+1}$$.

Remplaçons chaque C_n^p par sa valeur on obtient :

1
1 1   <u>Triangle de PASCAL</u>
1 2 1
1 3 3 1   4 + 6 = 10
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

– <u>Propriétés</u> :

P_1) Pour $0 \leq p \leq n$, $C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$;

P_2) Pour $0 \leq p \leq n$, $C_n^p = C_n^{n-p}$

3) Formule du binôme de Newton :

$(a + b)^1 = 1a + 1b$; $(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$; $(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$.

Nous admettons que :

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p \quad \text{(appelé Formule du binôme de Newton)}$$.

<u>Exemples</u> :

$(x + 2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$.
$(x - y)^4 = 1x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + 1y^4$.

III– <u>NOTION DE PROBABILITÉS</u> :

1°) <u>Introduction</u> :

a) <u>Exemple</u> :

On lance 2 fois en l'air un dé non pipé (normal), x et y font un pari.
Si 66 apparaît alors x gagne 600Frs. Si 4 ou 5 apparaît alors y gagne 300Frs. Qui est favorisé dans ce jeux ?.
On constate que x a « une chance » sur 6 de gagner 600Frs. Par contre y a « deux chances » sur 6 de gagner 300Frs.
6 numéros peuvent apparaître quand on lance un dé en l'air : c'est ce qu'on appelle les cas possibles. L'ensemble des cas possibles forment l'Univers de probabilité Ω ;
$\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 \}$. Dans le cas de y, 2 numéros lui permettent de gagner 300Frs. On dit qu'il y'a 2 cas favorables pour y.
<u>Conclusion</u> :
Dans cet exemple l'issue de l'opération « lancer le dé en l'air » n'est pas certaine, on dit que c'est une opération aléatoire.

b) <u>Définitions ou vocabulaire</u> :

- Cas possibles = *résultats d'une épreuve* :
- Univers de probabilité = *ensemble de cas possibles* ;
- Cas favorables = *situation qui est favorable* ;
- Évènement = *sous-ensemble de l'univers de probabilité* ;

<u>Exemple1</u> : Dans le lancé de dé $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ un évènement A={1; 3 ;6}.
Pour y les cas favorables sont : 4 et 5 ; B = {4 ; 5} est *un évènement favorable* ;
C ={4} est un *évènement favorable*.

- Évènement élémentaire ou éventualité = *sous-ensemble de Ω ayant un seul élément.*

<u>Exemple2</u> : On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie normale. Déterminer le nombre de cas possibles.
Le nombre de cas possible Ω = {PPP ; PFP ; FFP ; FFF ; FPF ; PFF ; FPP ; PPF}
Un cas possible est : {3 lancers} $\rightarrow$ {P, F} le nombre d'application : $2^3 = 8$;
X = {PFP} est une éventualité.

- Évènement impossible = c'est un évènement qui ne peut pas se réaliser ; il est noté ϕ.

Exemple : On tire au hasard 2 cartes d'un jeux normal de 32 cartes. Le nombre de cas favorables est C_{32}^{2}. « *Avoir 2 As de cœur* » est un évènement impossible.

- Évènement certain = évènement qui se réalise à coup sûr au cours d'une épreuve

Par exemple « *Avoir Pile* (P) *ou bien Face* (F) *en lançant une pièce de monnaie en l'air* ».

- Évènements équiprobables = évènements ayant les même chances de réalisation.

Exemple : On lance en l'air une pièce de monnaie 2 fois. Le nombre de cas possibles est $2^2=4$. Ω = {PP ; PF ; FF ; FP}. Les évènements A = « *avoir 0 fois P* » et B = « *avoir exactement 2 fois F* » sont *2 évènements équiprobables*.

2°) **Probabilité :**

Soit un Ω univers d'éventualités équiprobables (*on ne peut pas discerner les éventualités qu'après l'épreuve*). Posons Card Ω = n.
Soit A un évènement de Ω tel que cardA = k .

- Définition :

La probabilité de réalisation de A est k réel notée P(A) définie par :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{Nombre\ de\ cas\ Favorables}{Nombre\ de\ cas\ Possibles}.$$

$k \le n \Rightarrow \frac{k}{n} \le \frac{n}{n} = 1 \Rightarrow P(A) \le 1$; $k \ge 0 \Rightarrow \frac{k}{n} \ge \frac{0}{n} = 0\ (n \ne 0) \Rightarrow P(A) \ge 0$ d'où

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Remarques :

R_1) La probabilité d'un évènement certain est égal à 1 ; $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$.

R_2) La probabilité d'un évènement impossible est égal à 0.

Exemple :

Dans un jeu normal de 32 cartes, on tire au hasard sans remise 3 cartes. Calculer la probabilité d'avoir exactement 2 Rois et 1 As parmi les 3 cartes tirées.

Réponse : le nombre de cas possibles est C_{32}^3 et le nombre de cas favorable est : $C_4^2 \times C_4^1$. La probabilité de A = « d'avoir 2 Rois et 1 As » est :

$$P(A) = \frac{C_4^2 \times C_4^1}{C_{32}^3} = \frac{24}{32 \times 155} = \frac{3}{620} = 0{,}004.$$

Probabilités conditionnelles – Variables aléatoires

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I– Variables Aléatoires Réelles :

Dans toute la suite Ω désigne l'univers associé à chaque expérience aléatoire.

1°) Exemple introductif :

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher. On tire simultanément 2 boules. On perçoit un franc par boule rouge tirée. Quels sont les gains possibles ? Avec quelles probabilités ?
On peut tirer 0, 1 ou 2 boules rouges, et donc gagner 0, 1 ou 2 francs.
Désignons par X la somme perçue. La probabilité que X soit égal à 0 est noté p(X=0) ; elle est égale à la probabilité de l'évènement « tirer 0 boule rouge et 2 boules blanches » ; $p(X=0)=\dfrac{C_3^0\times C_4^2}{C_7^2}=\dfrac{6}{21}=\dfrac{2}{7}$;

La probabilité que X soit égal à 1 est noté p(X=1) ; elle est égale à la probabilité de l'évènement « tirer 1 boule rouge et 1 boules blanches » ;

$p(X=1)=\dfrac{C_3^1\times C_4^1}{C_7^2}=\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$;

La probabilité que X soit égal à 2 est noté p(X=2) ; elle est égale à la probabilité de l'évènement « tirer 2 boules rouges et 0 boule blanche » ;

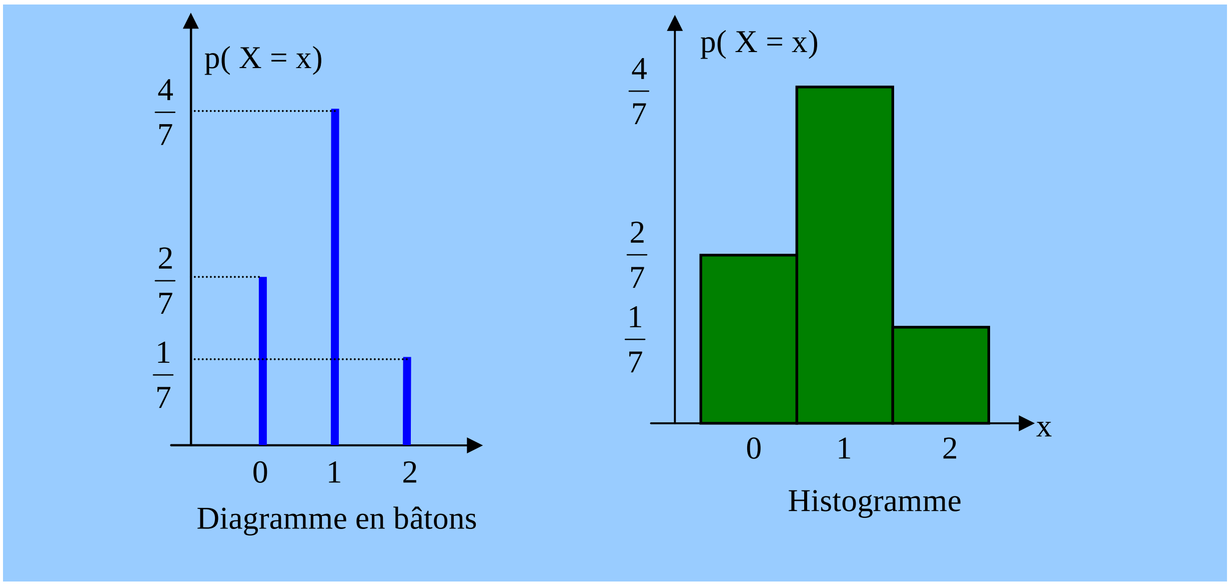
$p(X=2)=\dfrac{C_3^2\times C_4^0}{C_7^2}=\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$.

Ces résultats peuvent se présenter dans un tableau, la première ligne indiquant les valeurs possibles x de X.

x	0	1	2
p(X = x)	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Ce tableau définit la loi de probabilité de X.

Représentations graphiques :



2°) Variable aléatoire – Loi probabilité :

a) Définition 1 :

On appelle variable aléatoire X réelle toute application de Ω dans ℝ, qui à chaque élément de Ω fait correspondre un nombre réel.
Notons X(Ω) l'ensemble des valeurs possibles de X. $X(\Omega) = \{ x_1 ; x_2 ;\ldots\ldots ; x_n\}$.

b) Définition 2 :

La loi de probabilité de X est la fonction qui à tout élément *x* de X(Ω) fait correspondre la probabilité que X prenne cette valeur x. Par abus de langage on dit que c'est la probabilité que « X soit égal à *x* » et que l'on note : p(X = *x*).

Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme d'un tableau

x	x_1	x_2	…….	x_n
p(X = x)	p_1	p_2	…….	p_n

Conseil : Lorsqu'on calcul une loi de probabilité d'une variable aléatoire, il est indispensable de vérifier que : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

II– Fonction de Répartition :

1°) Définition :

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω muni d'une probabilité p.

On appelle fonction de répartition de X la fonction F de $\mathbb{R}$ vers [0 ; 1] définie de la façon suivante :

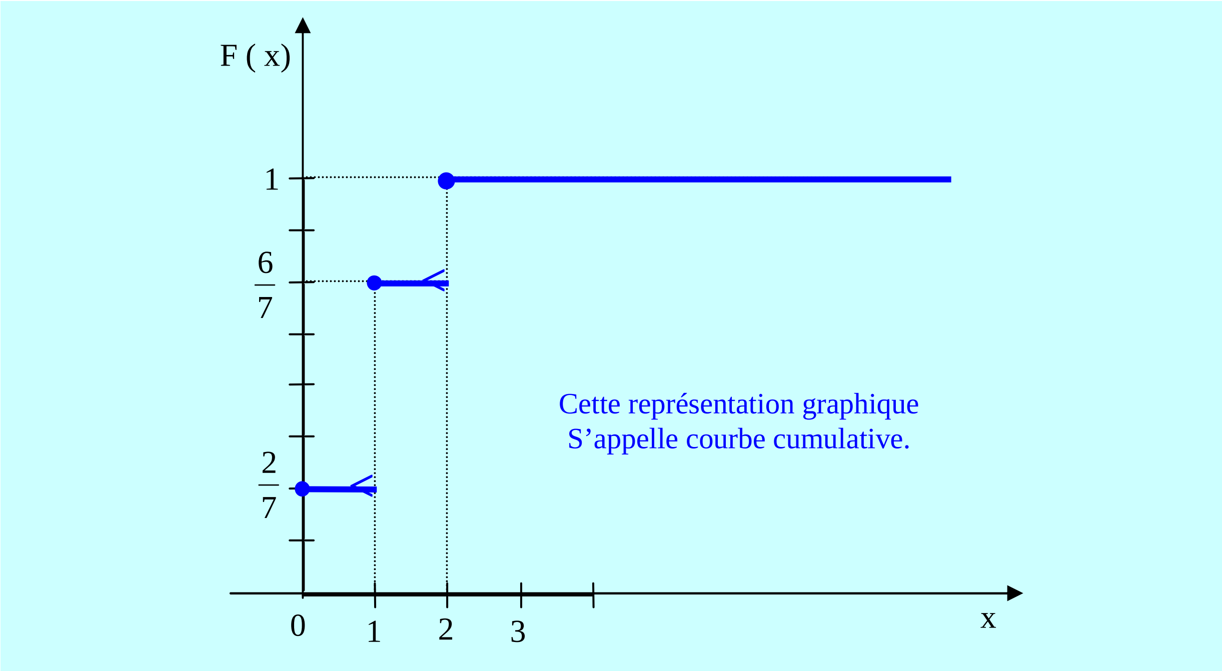
X	x_1	x_2	x_3	x_4
$P(X = x_i)$	P_1	P_2	P_3	P_4

- $x \in]-\infty\ ;\ x_1[\ ;\ F(x) = 0$
- $x \in [x_1\ ;\ x_2[\ ;\ F(x) = P_1$
- $x \in [x_2\ ;\ x_3[\ ;\ F(x) = P_1 + P_2$
- $x \in [x_3\ ;\ x_4[\ ;\ F(x) = P_1 + P_2 + P_3$
- $x \in [x_4\ ;\ x_5[\ ;\ F(x) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$
- $x \in [x_5\ ;\ +\infty[\ ;\ F(x) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$.

En reprenant l'exemple introductif on a :

Intervalles des valeurs de x	Valeurs de X Vérifiant $X \leq x$	F(x) c'est- à-dire $p(X \leq x)$ vaut
$]-\infty\ ;\ 0[$	Aucune	0
$[0\ ;\ 1[$	0	$p(X = 0) = \frac{2}{7}$
$[1\ ;\ 2[$	0 et 1	$p(X = 0) + p(X = 1) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$
$[2\ ;\ +\infty[$	0, 1 et 2	$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \frac{6}{7} + \frac{1}{7} = 1$

2°) Représentation graphique de F :



3°) Propriétés de la fonction de répartition :

a) F est une fonction en escalier.
b) F est une fonction croissante.

III– Espérance Mathématique :

1°) Définition :

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_n avec les probabilités p_1 ; p_2 ; … ; p_n . On appelle espérance mathématique de X le nombre

$$E(X) = x_1\, p(X=x_1) + x_2\, p(X=x_2) + \ldots\ldots + x_n\, p(X=x_n)$$

ou encore $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$.

Dans la pratique, la loi de probabilité étant donnée par un tableau :

x	x_1	x_2	…….	x_n
p(X = x)	p_1	p_2	…….	p_n

Il suffit de calculer la somme : $x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots\ldots + x_n\, p_n$.

2°) Exemple :

Pour l'exemple introductif on a $E(X) = 0\times p(X=0) + 1\times p(X=1) + 2\times p(X=2) = \frac{6}{7}$.

IV– Variance, Écart Type :

1°) Définition de la variance :

Soit une variable aléatoire X prenant les valeurs x_1 ; x_2 ; … ; x_n avec les probabilités p_1 ; p_2 ; … ; p_n . On appelle Variance de X le nombre réel positif noté : V(X) et définie par : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$ ou $V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$.

En statistique, la dispersion se mesure par la variance qui est la moyenne pondérée de la série $(x_i - \bar{x})^2$.

De façon analogue, en probabilité, la variance est l'espérance mathématique de $[X-E(X)]^2$.

2°) Autre Expression de la variance :

On démontre que la variance est l'espérance du carré moins le carré de l'espérance.

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

3°) Écart-type :

– Définition : Pour toute variable aléatoire X, on appelle écart-type de X le nombre réel σ(X) défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

– Exemple : Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément de l'urne 3 boules et l'on considère la variable aléatoire X définie par « nombre de boules noires parmi les boules tirées »

a) quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Déterminer la loi de probabilité de X

c) Calculer l'espérance mathématique, la variance, l' écart type de X.

Solution :

a) $X \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

$P(X=0) = P_1 = \dfrac{C_5^3 \times C_3^0}{C_8^3} = \dfrac{10}{56}$; $P(X=1) = P_2 = \dfrac{C_5^2 \times C_3^1}{C_8^3} = \dfrac{30}{56}$;

$P(X=2) = P_3 = \dfrac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} = \dfrac{15}{56}$; $P(X=3) = P_4 = \dfrac{C_5^0 \times C_3^3}{C_8^3} = \dfrac{1}{56}$.

b) Loi de probabilité

X	0	1	2	3	*Total*
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$	1

c) L'Espérance mathématique $E(x)=\sum_{i=1}^{n} P_i\, x_i = P_1\, x_1 + P_2 x_2 + \dots\dots\dots + P_n x_n$.

$$E(x)=0\times\frac{10}{56}+1\times\frac{30}{56}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{56}=\frac{63}{56}=\frac{9}{8}.$$

La variance est $V(X)=\sum_{i=1}^{n} P_i\left(x_i - E(x)\right)^2$.

$$V(X)=P_1\left(x_1-\frac{9}{8}\right)^2+P_2\left(x_2-\frac{9}{8}\right)^2+\dots\dots+P_4\left(x_4-\frac{9}{8}\right)^2 \;;$$

$$V(X)=\frac{10}{56}\left(0-\frac{9}{8}\right)^2+\frac{30}{56}\left(1-\frac{9}{8}\right)^2+\frac{15}{56}\left(2-\frac{9}{8}\right)^2+\frac{1}{56}\left(3-\frac{9}{8}\right)^2=\frac{1800}{3584}=0{,}5.$$

L'Ecart type est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$; $\sigma(X)=\sqrt{0{,}5}=0{,}20$.

V– Probabilité conditionnelle :

Soit Ω un univers d'éventualités, A et B 2 évènements de Ω.

1°) Évènement Somme :

a) Définition 1 :

L'évènement somme de A, B est l'évènement noté :A∪B « A ou B » qui est réalisé si et seulement si l'un au moins des évènements A ou B est réalisé.

Exemple : On lance en l'air un dé normal. C= « avoir 5 ou 4 » est la somme des évènements A= « avoir 5 » ; B = « avoir 4 » ; C = A∪B.

b) Définition 2 : On dit que 2 évènements A et B sont incompatibles si et seulement si ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Exemple : Dans le lancé d'un dé, A= « avoir 5 » ; B = « avoir 4 » ; A et B sont incompatibles, A∩B = **ϕ.**

c) Théorème 1 :

Soient A et B 2 évènements incompatibles d'un univers Ω.

. P (A∪B) = P(A) + P(B) .

Démonstration

Le nombre de cas possibles est card Ω = n ; n ≠ 0.

Le nombre de cas favorables : posons cardA = k et cardB = m.

Card(A∪B) = cardA + cardB – card(A∩B) ; A∩B = $\phi \Rightarrow$ *card(A∪B) = k + m.*

P (A∪B) = $\frac{k+m}{n}=\frac{k}{n}+\frac{m}{n}$ *= P(A) + P(B).*

Exemple: On tire au hasard 2 cartes d'un jeu normal de 32 cartes. Calculer la probabilité d'avoir 2 Dames ou 2 Rois.

Le nombre de cas possibles est C_{32}^2. Soit C = « avoir 2D ou 2R » et soient les évènements A = « avoir 2D » ; B = « avoir 2R ».

A et B sont incompatibles $A \cap B = \phi$. Donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$P(A) = \dfrac{C_4^2}{C_{32}^2}$ *et* $P(B) = \dfrac{C_4^2}{C_{32}^2}$; $P(A \cup B) = \dfrac{C_4^2}{C_{32}^2} + \dfrac{C_4^2}{C_{32}^2} = 2\,\dfrac{C_4^2}{C_{32}^2}$.

2°) **Évènement Contraire :**

Soit Ω un univers d'éventualités, A et B deux évènements de Ω.

a) Définition 3 : On dit que l'évènement B est l'évènement contraire de A si et seulement si, $\begin{cases} B \text{ est réalisé si } A \text{ ne l'est pas} \\ \text{et } A \text{ est réalisé si } B \text{ ne l'est pas} \end{cases}$ *Notation :* $B = \overline{A}$.

– Exemple 1 : Dans le lancé d'une pièce de monnaie, soient A = « avoir P » et B = « avoir F » ; $B = \overline{A}$ et $A = \overline{B}$.

b) Théorème 2 :

Soit A un évènement d'un univers Ω. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration

$A \cap \overline{A} = \Phi$; $A \cup \overline{A} = \Omega$, $p(\overline{A} \cup A) = p(A) + p(\overline{A}) = 1$; d'où $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Exemple 2 :

i) Dans un jeu de 32 cartes, quelle est la probabilité pour qu'un joueur recevant 5 cartes au hasard ait au moins 1 cœur ?

ii) Même question avec au moins 2 cœurs ?

Solution :

i) A = « avoir au moins 1 cœur » $\overline{A}$ = « avoir 0 cœur parmi les cartes tirées ».

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$. *Calculons* $P(\overline{A})$

Nombre de cas possibles est C_{32}^5 ; nombre de cas favorables C_{24}^5.

$P(\overline{A}) = \dfrac{C_{24}^5}{C_{32}^5}$. *Donc* $P(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_{24}^5}{C_{32}^5}$.

ii) A = « avoir au moins 2 cœurs » $\overline{A}$ = « avoir 0 cœur ou 1 cœur ».

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$. *Calculons* $P(\overline{A})$

B = « avoir 1 cœur parmi les cartes tirées » ; C = « avoir 0 cœur parmi les cartes tirées » . $B \cup C = \overline{A}$ et $B \cap C = \phi$ donc $P(\overline{A}) = P(B) + P(C)$.

- P(B) : nombre de cas possibles = C_{32}^5 ; nombre de cas favorables = $C_8^1 \times C_{24}^4$. D'où

$P(B) = \dfrac{C_8^1 \times C_{24}^4}{C_{32}^5}$.

- *P(C) :* *nombre de cas possibles* = C_{32}^{5} ; *nombre de cas favorables* = $C_8^0 \times C_{24}^5$.

D'où $P(C) = \dfrac{C_8^0 \times C_{24}^5}{C_{32}^5}$. $P(\overline{A}) = \dfrac{C_8^1 \times C_{24}^4 + C_8^0 \times C_{24}^5}{C_{32}^5} \Leftrightarrow P(A) = 1 - p(\overline{A}) = 0{,}37$.

3°) **Évènement Produit :**

Soit Ω un univers d'éventualités, A et B deux évènements de Ω.

a) Définition 4 :

l'évènement produit des évènements A , B est l'évènement C noté A∩B qui est réalisé si et seulement si, A et B sont simultanément réalisés.

Exemple :

un lancé de 2 dés C « avoir 6 et 5 » ; A= « avoir 5 » ; B = « avoir 6 » . C = A∩B.

b) Théorème 3 :

Soient 2 évènements quelconques A et B. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple : D'un jeu de 32 cartes on tire au hasard simultanément 2 cartes. Calculer la probabilité d'avoir un Roi ou un Valet parmi les cartes tirées.

4°) Probabilité conditionnelle – évènements indépendants :

Soient les évènements A et B d'un univers Ω .

a) Définition 5 : La probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé est le nombre réel noté P (B/A) et définie par : $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$; $p(A) \neq 0$.

Exemple : D'un jeu de 32 cartes on tire successivement 2 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir un as au 2ème tirage ?

b) Définition 6 :

Deux évènements A et B sont dits indépendants si et seulement si,

$$P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A)$$

Remarque : En réalité dans le concret, 2 évènements A et B sont indépendants si la réalisation de A n'a aucune influence sur celle de B et réciproquement.

Exemple : d'un sac contenant des boules blanches et des boules noires on tire au hasard successivement en remettant chaque fois la boule tirée.
A = « avoir une boule blanche au 1er tirage »
B = « avoir une boule noire au 2ème tirage »
A et B sont indépendants. Deux évènements concrètement indépendants sont indépendants en probabilité.