Fomesoutra.com
ça soutra !

ENSEMBLE ℂ DES NOMBRES COMPLEXES 2020 - 2021

Fiche de séquence N°1

I. Classe :TSExp **Durée : 15 h**

II. Domaine : Sciences Mathématiques et Technologies **(**SMT**)** **Discipline :** Mathématiques

III. Compétences :

Résoudre une situation-problème

Composantes

Diagnostiquer la situation – problème

Manifestations

- Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation.
- Etablir des relations entre les données retenues.
- Comparer cette situation – problème avec des situations semblables déjà résolues
- Formuler le problème

IV. Contenu : ENSEMBLE ℂ DES NOMBRES COMPLEXES

V. Ressources éducatives

- **Ressources humaines :** Néant
- **Ressources matérielles** : craie, tableau, la règle
- **Ressources financières** : Néant

VI. Stratégies d'animation :

- Travail individuel
- Travail en petit groupe
- Brainstorming

VII. Déroulement des activités (situation d'apprentissage)

Pré – évaluation :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$2x^2 + 2\sqrt{6}\,x + 3 = 0$; $\left(\sqrt{2}-1\right)x^2 + 2x + \sqrt{2} + 1 = 0$; $x^2 + \left(\sqrt{3}-2\right)x^2 - 2\sqrt{3} = 0$

Situation problème :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$a)\ \ 3x^2 - x - 1 = 0$; $b)\ \ x^2 + 4 = 0$; $c)\ \ x^2 + 4x + 8 = 0$

2. Les équations $x^2 + 4 = 0 \ \ et \ \ x^2 + 4x + 8 = 0$ n'admettent pas de solution réelle.

Puis que ces équations existent, elles doivent forcement avoir de solution même si ces solutions ne sont pas réelles.

En imaginant un nombre noté i tel que $i^2 = -1$, résouds a nouveau les équations

$x^2 + 4 = 0 \ \ et \ \ x^2 + 4x + 8 = 0$

Activité 1 : Bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$: *(a, b)*$\mapsto$ *a+bi*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^2 + 2x = 0$; $x^2 + 2x + 3 = 0$; $x^2 - 9 = 0$; $x^2 + 1 = 0$

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, on va donc construire un ensemble que l'on appelle $\mathbb{C}$ (Complexe) dont l'élément principal ajouté est le nombre i tel que : $i^2 = -1$.

On aura : $x^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = i^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{i^2} \Rightarrow x = i \ \ ou \ \ x = -i$

D'où $S = \{-i\ ;\ i\}$

Donner la solution de l'équation $x^2 + 2x + 3 = 0 \ dans \ \mathbb{C}$.

Synthèse partielle :

$-1 - 2i \ \ et \ \ -1 + 2i$ sont appelés nombres complexes.

Définition :

On appelle l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres z de la forme :

Issa Mallé Professeur de l'enseignement secondaire général LPCKM

$z = a + bi \quad avec\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad et \quad i^2 = -1$

Autrement dit la la bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout couple $(a\ ;\ b) \mapsto a + bi$.
Le nombre réel a s'appelle la partie réelle de z notée : $Re(z)$.
Le nombre réel b s'appelle la partie imaginaire de z noté : $Im(z)$.
La forme $z = a + bi$ est appelée forme algébrique.

Activité 2 : Affixe d'un point, d'un vecteur

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$. Au point M de coordonnées $(a\ ;\ b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

a) Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

$z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 + i$; $z_3 = -1 + 2i$; $z_4 = 2 - i$

$z_5 = i$; $z_6 = -i$; $z_7 = 1$; $z_8 = -i - 3$

$z_9 = 2z_1 - 3z_2$; $z_{10} = z_3(z_4 - z_2)$.

b) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$; $\overrightarrow{M_2M_3}$; $\overrightarrow{OM_4}$.

Synthèse partielle :

a) Théorème :

- A tout nombre complexe $z = a + bi$, on peut faire correspondre un point $M(a\ ;\ b)$ dans un plan ortho normal $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\ )$. On dit que z est l'affixe de M, on écrit alors $M(z)$.
- Au point M de coordonnées $(a\ ;\ b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$. On dit que $z = a + bi$ est l'affixe de M.
- Au vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(a\ ;\ b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$. On dit que $z = a + bi$ est l'affixe de $\vec{V}$.

b) Propriétés :

- Si M a pour affixe $z = a + bi$ et M' a pour affixe $z' = a' + b'i$ avec $a,\ a',\ b,\ b'$ réels, alors : Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z - z' = (a' - a) + i(b' - b)$.
- Si $\vec{V}$ a pour affixe z et $\overrightarrow{V'}$ a pour affixe z', alors $\vec{V} + \overrightarrow{V'}$ a pour affixe $z + z'$.
- Si k est un réel, alors $k\vec{V}$ a pour affixe kz

Activité 3 : Somme, produit, quotient de deux complexes

a) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

$z_1 = (2 + 5i) + (3 - 7i)$; $z_2 = (2 + 5i) - (3 - 7i)$; $z_3 = (2 + 5i)(3 - 7i)$

$z_4 = (2 + 5i)(2 - 5i)$; $z_7 = i^4$; $z_8 = (1 + i)^2$

b) Calculer $(3 + 2i)(3 - 2i)$. En déduire la forme algébrique de :

$\frac{1}{3+2i} \quad et \quad \frac{3+i}{3+2i}$

Synthèse partielle :

L'addition, la soustraction et la multiplication dans ℂ sont définies de la façon suivante :
Soit $a,\ a',\ b,\ b'$ des nombres réels.

- $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + i(b + b')$
- $(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + i(b - b')$
- $(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- L'inverse de $a + bi$ s'obtient par la formule $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

Ainsi le quotient : $\frac{a+bi}{a'+b'i} = (a' + b'i)\frac{1}{a+bi} = \frac{(a'+b'i)(a-bi)}{a^2+b^2}$

Activité 4 : Conjugué d'un complexe

Soit z un nombre complexe dont la forme algébrique est $z = a + bi$.

On appelle le nombre conjugué de z, le nombre noté $\overline{z}$ tel que : $\overline{z} = a - bi$

a) Trouver la forme algébrique du complexe $z = \frac{2+i}{3+2i}$ en multipliant la numérateur et le dénominateur par le complexe conjuqué du dénominateur.

b) Faire de même pour :

$z_1 = \frac{1}{2+7i}$; $z_2 = \frac{4}{\sqrt{3}+i}$; $z_3 = \frac{2-i}{5+3i}$; $z_4 = \frac{i}{1-3i}$; $z_5 = \frac{2+i}{i}$

Synthèse partielle :

Propriétés :

Soit z un nombre complexe et $\overline{z}$ son conjugué. On a :

- $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$
- $z + \overline{z} = 2Re(z)$ et z est un imaginaire pur équivaut à : $z + \overline{z} = 0 \quad ou \quad z = -\overline{z}$
- $z - \overline{z} = 2Im(z)$ et z est réel équivaut à : $z - \overline{z} = 0 \quad ou \quad z = \overline{z}$

Pour tous complexes $z \ et \ z'$, on a :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; $\overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad n \in \mathbb{N}^*$
- $avec \ z' \neq 0, on \ a : \ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Evaluation formative :

1) Donner la forme algébrique du conjugué $\overline{z}$ du complexe suivant : $z = \frac{3-i}{1+i}$.

2) Dans le plan complexe, M est le point d'affixe $z = x + yi$, $x \ et \ y$ réels,

A tout complexe z, $z \neq 1$, on associe : $Z = \frac{5z-2}{z-1}$.

a) Exprimer $Z + \overline{Z}$ en fonction de $z \ et \ \overline{z}$.

b) Démontrer que « Z est un imaginaire pur » équivaut à « M est un point d'un cercle privé d'un point ».

Activité 5 : Module et argument d'un nombre complexe

Activité 5-1 : Module d'un nombre complexe

Soient $z = 2 + 2i \quad et \quad z' = 3 - 4i$

Placer les points $M \ et \ M'$ d'affixe respectives $z \ et \ z'$.

Calculer la distance $\|\overrightarrow{OM}\| \ et \ \left\|\overrightarrow{OM'}\right\|$

$2\sqrt{2}$ est la distance de O à M

Synthèse partielle :

On appelle module de z, la distance OM, noté $|z|$ tel que : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Activité 5-2 : propriétés de module

Calculer le module de chacun des nombres complexes :

$z_1 = 3 + 4i$; $z_2 = 1 - i$; $z_3 = 5 - \frac{i}{2}$; $z_4 = 3$; $z_5 = i - 4$; $z_6 = i$

$z_7 = 2$; $z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $z_9 = z_1 \times z_2$; $z_{10} = z_2 + z_5$; $z_{11} = \frac{z_1}{z_5}$

Quelle égalité obtenez-vous ?

Synthèse partielle :

Pour tous nombres complexes non nuls, on a :

$|z + z'| \leq |z| + |z'|$; $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $|z^n| = |z|^n$

Activité 5-3 : Argument d'un nombre complexe

a) Placer le point M d'affixe $z = 2 + 2i$ dans un repère orthonormé direct $(O \ ; \ \vec{u} \ ; \ \vec{v})$.

b) Calculer la distance OM (c'est-à-dire $|z|$)

c) Soit θ la mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})$. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
d) En déduire la mesure en radian de θ.
Le nombre $\theta = \frac{\pi}{4}$ est appelé argument de z.

Synthèse partielle :
Soit z un complexe non nul de forme algébrique $a + bi$ et soit M, le point d'affixe z.
On appelle argument de z, noté $\arg(\theta)$, tout mesure $\theta\ \ de\ l'angle\ (\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ telle que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{cases} \qquad avec\ \ \theta = \arg(z)[2\pi]$$

Remarque :
θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire modulo 2π.
Propriétés :
Soient $z\ \ et\ \ z'$ deux nombres complexes non nuls, on a :
$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\quad modulo\ \ 2\pi$; $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ \ modulo\ \ 2\pi$
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\quad modulo\ \ 2\pi$; $\arg(z^n) = n\arg(z)\quad modulo\ \ 2\pi$
$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\quad modulo\ \ 2\pi$; $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\quad modulo\ \ 2\pi$

Evaluation formative :
a) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :
$z_1 = 1 + i$; $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$; $z_3 = -4 + 3i$
b) en déduire le module et l'argument de $z_1 \times z_2$; $\frac{z_2}{z_1}$; $(z_3)^4$

Activité 6 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul
Soit $z = a + bi$ et θ la mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ telle que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

Ecrire le complexe z en fonction de $\cos\theta\quad et\quad \sin\theta$.
L'écriture $|z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la forme trigonométrique de $z = a + bi$.

Synthèse partielle :
On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe $z = a + bi$ ($z \neq O$), l'écriture :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\qquad avec\qquad r = |z|\quad et\quad \theta = \arg(z)\quad [2\pi]$

Evaluation formative :
1) a) Donner les formes trigonométriques de :
$z_1 = 1 + i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$; $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$; $z_4 = i$
b) Placer les points correspondants dans un cercle trigonométrique.
2) Soient $z_1 = 2 + 2i\quad et\quad z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.
Ecrire $z_1\ \ et\ \ z_2$ sous la forme trigonométrique. En déduire les formes trigonométriques de :
$z_1 \times z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1)^3$; $\overline{z_1}$; $-z_2$; $\frac{{z_1}^2}{z_2}$

Activité 7 : Résolution d'équations du second degré dans ℂ
Activité 7-1 : Equation du second degré à coefficients réels
Résoudre dans ℂ les équations suivantes :
$2z^2 + z - 3 = 0$; $z^2 - 2z + 2 = 0$; $4z^2 + 4z + 1 = 0$

Synthèse partielle :

Toute équation du second degré dans ℂ admet toujours deux solutions distinctes ou confondues. Si cette équation est à coefficients réels, c'est-à-dire :

$az^2 + bz + c = 0 \quad avec \quad a \in \mathbb{R}^*, \quad b \in \mathbb{R} \quad et \quad c \in \mathbb{R}$

Elle admet comme solutions dans ℂ.

1) Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

2) Si $\Delta = 0$, une solution réelle double : $z_0 = \frac{-b}{2a}$

3) Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjugués avec $\Delta = i^2|\Delta|$.

$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Activité 7-2 : Exemple de factorisation de polynômes dans ℂ

a) Soit $\delta = a + bi$, déterminer le complexe δ telque : $\delta^2 = 2i$

b) Factoriser le trinôme $P(z) = (1 - i)z^2 - \sqrt{2}\, z + \frac{1}{2} = 0$

Les complexes $1 + i \quad et \quad -1 - i$ sont les racines carrées complexes de $2i$.

Synthèse partielle :

Les racines du polynôme d'indéterminée $P(z) = az^2 + bz + c$; où $a, \ b \ et \ c$ sont des nombres complexes avec $a \neq 0$, sont :

$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad ; \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$

où δ est l'une des deux racines carrées complexes du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

On a alors la forme factoriser : $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$

Remarque :

Les racines carrées de Δ sont $\delta \ et - \delta$, donc remplacer $\delta \ par - \delta$ ne fait qu'échanger $z_1 \ et \ z_2$

Plus généralement, soient $u = x + yi \quad et \quad z = a + bi$. On appel racine carrée complexe de z, le complexe u tel que : $u^2 = z$

Résoudre $u^2 = z$ revient à résoudre le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = |z| \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

Activité 8 : Application à la résolution dans ℂ d'équations de degré 3 ou 4

Soit l'équation dans ℂ suivante : $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$.

1) Montrer que i est solution de cette équation.

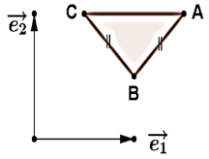
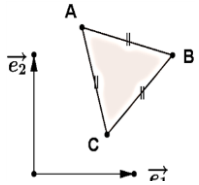
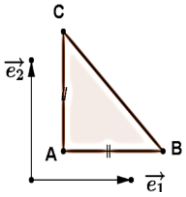
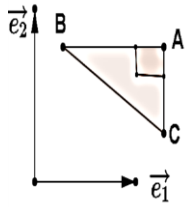
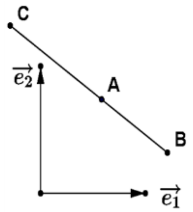
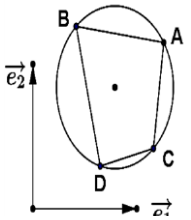
2) Déterminer les réels $a, \ b \ et \ c$ tel que :

$z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(az^2 + bz + c)$

3) Résoudre alors cette équation.

Interprétation géométrique de ces notions :

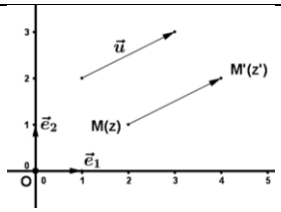
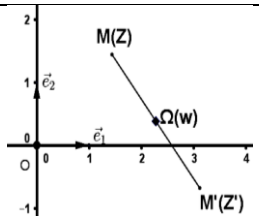
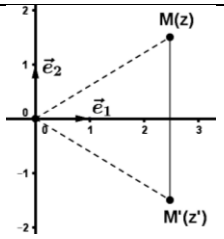
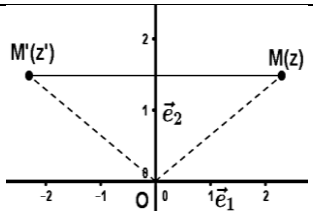
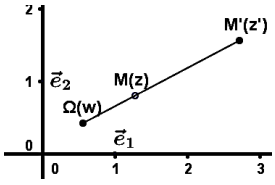
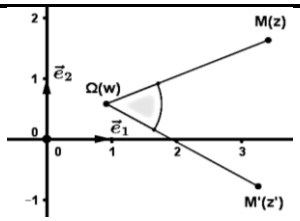
1. Configurations du plan et nombres complexe :

Configuration	Caractérisation géométrique	Caractérisation complexe
Triangle ABC isocèle en A 	$AB = AC$ $\text{mes}\,\widehat{A} = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$	$\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$ $a \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$
Triangle ABC équilatéral 	$AB = AC = BC$ $\text{mes}\,\widehat{A} = \text{mes}\,\widehat{B} = \text{mes}\,\widehat{C} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A 	$AB = AC$ $\text{mes}\,\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = -i$
Triangle ABC rectangle en A 	$\text{mes}\,\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} = ib\ (b \in \mathbb{R}^*)$
Points A , B , C alignés 	$\text{mes}\,(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[\pi]$	$\frac{z_C - z_B}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Points A , B , C , D Cocyclique 	$\text{mes}\,(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 0[\pi]$	$\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \text{ ⁄ } \frac{z_D - z_B}{z_D - z_A} \in \mathbb{R}^*$

2) Transformations et nombres complexe :

Les transformations et nombres complexes sont résumés dans un tableau comme suite :

Nous indiquons dans le tableau2 ci-dessous l'écriture complexe de certaines transformations du plan. Dans ce tableau, M(z)et M′(Z′) désignent un point et son image, ainsi que leurs affixes, par chacun de ces transformations.

Transformation	**Image M′ d'un point M**	**Définition géométrique**	**Ecriture complexe**
Translation de vecteur $\vec{u}(a)$		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + a$
Symétrie de centre Ω(w)		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - w = -(z - w)$
Symétrie par rapport à l'axe réel		$\begin{cases} OM' = OM \\ \left(\vec{e}_1, \widehat{\overrightarrow{OM}}\right) = -\left(\vec{e}_1, \widehat{\overrightarrow{OM}}\right) \end{cases}$	$z' = \bar{z}$
Symétrie par rapport à l'axe imaginaire		$\begin{cases} OM' = OM \\ \left(\vec{e}_1, \widehat{\overrightarrow{OM}}\right) = \pi - \left(\vec{e}_1, \widehat{\overrightarrow{OM}}\right) \end{cases}$	$z' = -\bar{z}$
Homothétie de centre Ω(w) et de rapport k		$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - w = k(z - w)$
Rotation de centre Ω(w) et d'angle α		$\begin{cases} \mathbf{\Omega M' = \Omega M} \\ \mathbf{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \boldsymbol{\alpha}\ [2\pi] \end{cases}$	$\mathbf{z' - w = e^{i\alpha}(z - w)}$

Evaluation formative :

I. Soit les complexes $-1-i$; $1+i$; $-1+i$ d'image respective les points $A,\ B,\ C$

a) Déterminer le module et l'argument de $z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

II. Soit la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2+i$

a. Déterminer l'écriture complexe de la translation t.

b. $soit\ \ z=x+yi\ \ et\ \ z'=x'+y'i$. Détermination de l'expression analytique de la translation t

III. Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe $3-i$ et de rapport -2.

a. Déterminer l'écriture complexe de h

$z'=-2z+9-3i$

b. Déterminer l'expression analytique de h

IV. Soit la rotation r de centre A d'affixe $z_A=3i$ et d'angle $\theta=\frac{\pi}{3}$.

a) Déterminer l'écriture complexe de rotation.

b) Déterminer l'expression analytique de r.

3) Application à l'étude des similitudes directes et indirectes

a) Similitude directe :

Soit $M\ \ et\ \ M'$ deux points d'affixe respective $z\ \ et\ \ z'$. Soit Ω un point du plan d'affixe z_Ω.

Déterminons l'écriture complexe de la similitude directe $\mathcal{s}$ de centre Ω et de rapport k $(k\in\mathbb{R})$ et d'angle θ.

$$\mathcal{s}(M)=M' \Longrightarrow \begin{cases} \Omega M'=k\Omega M \\ \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{\Omega M'}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}\right)=\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |z'-z_\Omega|=k|z-z_\Omega| \\ \arg\left(\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}\right)=\theta \end{cases} \Longrightarrow \frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}=ke^{i\theta}$$

$$\Longrightarrow (z'-z_\Omega)=ke^{i\theta}(z-z_\Omega) \Longrightarrow z'=ke^{i\theta}(z-z_\Omega)+z_\Omega$$

$\Longrightarrow z'=ke^{i\theta}\ z+(1-ke^{i\theta})z_\Omega$ est l'écriture complexe de la similitude directe de centre Ω de rapport k et d'angle θ.

- L'écriture complexe d'une similitude est de la forme $z'=az+b$ où $a\ \ et\ \ b$ sont des nombres complexes tel que $(a\neq 1)\ avec\ \ a=ke^{i\theta}\Longrightarrow |a|=k\ \ \ et\ \arg a=\theta$

$$b=\left(1-ke^{i\theta}\right)z_\Omega \Longrightarrow z_\Omega=\frac{b}{1-ke^{i\theta}}=\frac{b}{1-a}$$

Exemple :

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$a)\ z'=\left(1+\sqrt{3}\,i\right)z+1+i$; $b)\ z'=-iz+1-2i$

b) Similitude indirecte :

L'écriture complexe d'une similitude indirecte de rapport k et d'angle Ω d'affixe z_Ω et d'angle θ.

$z'=ke^{i\theta}\ \overline{z}+\left(1-ke^{i\theta}\right)z_\Omega\ on\ a\ \ z'=a\overline{z}+b$

Exercices :

Exo1 : Soit $z=\frac{2iz-1}{z+1}$; $z\neq 1$

1) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z.
2) Trouver l'ensemble $(\mathcal{T})$ des point M d'affixe z du plan pour que :

a) z soit imaginaire pure ;

b) z soit réel.

3) Trouver l'ensemble des points M du plan tel que : $|z|=2$

Exo2 : Soit l'équation $(E),\ z\in\mathbb{C}$: $iz^3+(4-3i)z^2-(8+3i)z+8i=0$

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pur z_0 à déterminer.
2) Déterminer les nombres complexes $a,\ b,\ c$ tels que :

$iz^3 + (4-3i)z^2 - (8+3i)z + 8i = (z-i)(az^2+bz+c)$

3) Résoudre l'équation (E).

4) Le plan complexe est muni d'un repère $(O\ ,\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$, soit les points $A,\ B,\ C$ d'affixe respective $i\ ,\ 1+2i\ \ et\ \ 2+i$.

a) Place les points $A\ ,\ B\ ,\ C$.

b) Calculer $AB\ ,\ AC\ ,\ BC\ ,\ (\widehat{\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AB}})$. En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer z l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme puis place le point D.

Activité 8 : Formule de Moivre - Racines $n^{ièmes}$ d'un complexe

Activité 8-1 : Formule de Moivre

a) Ecrire les complexes suivants sous forme trigonométrique :

$z = 1+i$; $z' = 1-\sqrt{3}\,i$

b) En déduire la forme trigonométrique de $z_1 = z^{18}$; $z_2 = z^{2021}$

c) Si $z = \cos x + i\sin x$. Déduire de a) et b) que l'expression de z^n.

Synthèse partielle :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ est appelée formule de Moivre

Activité 8-2 : Racines $n^{ièmes}$ d'un complexe

a. Soit $z = 1+\sqrt{3}i$. Ecrire z sous la forme trigonométrique ou exponentielle.

b. Soit $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Trouver les nombres complexes w tels que : $w^3 = z$

Synthèse partielle :

$w^3 = z$. On dit que w est une racine cubique de z.

Soit n un entier naturel strictement inférieur à 1 et z étant un nombre complexe non nul. On appelle racine n^{ième} de z tout nombre complexe w tel que :

$w^n = z$.

Posons $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\quad et\quad w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$w^n = u \Leftrightarrow \rho^n(\cos(n\alpha) + \mathrm{i}\sin(n\alpha)) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Par identification :

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases} \quad avec\ \ k \in \{0\ ,1\ ,2\ ,\ 3\ ,\ 4\ \ldots\ldots n-1\}$$

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right) \qquad ou \qquad z_k = \sqrt[n]{r}.e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$