Chapitre 1 — Les suites numériques

Compétences attendues :

- ✔ Savoir calculer les premiers termes d'une suite.
- ✔ Déterminer le sens de variation d'une suite.
- ✔ Prouver une propriété par récurrence.
- ✔ Montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique

Fabien Bessière
Adresse mail : `fabienbessiere@gmail.com`

1 Généralités sur les suites numériques.

1.1 Définition d'une suite numérique

Définition

Une suite u est une fonction sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels. L'image du nombre entier naturel n par la suite u, notée $u(n)$ où u_n est appelée terme d'indice n ou de rang n de la suite.

Remarque *La suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n). De plus, u_{n+1} est le terme d'indice $(n+1)$, noté aussi $u(n+1)$.*

Exemple Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n+3$. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{10}. Même question pour Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = (n+1)^2$

1.2 Suite définie par une relation de récurrence

Définition

Une suite est définie par une relation de récurrence quand elle est définie par la donnée de :

- son premier terme.
- d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant (On exprime u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n). Cette relation est appelée **relation de récurrence**.

Exemple Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = -2u_n + 3$. Calculer u_1 et u_2.

1.3 Suite définie par une formule explicite

Une suite est définie par une formule explicite lorsque u_n s'exprime directement en fonction de n ($u_n = f(n)$). Dans ce cas, on peut calculer chaque terme à partir de son indice.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1+3n$. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{10}.

2 Sens de variation d'une suite

Définition

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* si pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} \geq u_n$.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* si pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} \leq u_n$.

Exemple Étudier le sens de variation de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 4n+3$.

Proposition

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et, pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.

- Si la fonction f est *croissante* sur $[0;+\infty[$, alors la suite u est *croissante*.
- Si la fonction f est *décroissante* sur $[0;+\infty[$, alors la suite u est *décroissante*.

3 Suites arithmétiques

3.1 Suite arithmétique de raison r

Définition

On dit qu'une suite u est *arithmétique*si il existe un nombre réel r tel que pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre réel r est appelé *raison* de la suite u.

Remarque *Autrement dit, une suite est arithmétique si et seulement si chaque terme (sauf le premier) est obtenu en ajoutant au terme précédent un réel r, toujours le même.*

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ de raison $r = 4$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Proposition

Une suite arithmétique de raison r est croissante si et seulement si $r > 0$ et décroissante si et seulement si $r < 0$.

3.2 Formule explicite

Proposition

Si u est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous nombres entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

En particulier, pour tout nombre entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr$$

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 8$ de raison $r = 2$

1. Pour nombre entier naturel n, donner l'expression de la suite (u_n) en fonction de n.
2. Calculer u_1 et u_7.
3. Calculer le terme au rang 12.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison 8 et $u_3 = -40$. Calculer u_9.

4 Suites géométriques

4.1 Suite géométriques de raison q

Définition

On dit qu'une suite u est *géométriques* si il existe un nombre réel q tel que pour tout nombre entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Le nombre réel q est appelé *raison* de la suite u.

Remarque *Autrement dit, on passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant toujours par q.*

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ de raison $q = -2$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

4.2 Formule explicite

Proposition

Si u est une suite géométrique de raison q ($q \neq 0$) alors, pour tous nombres entiers naturels n et p, $u_n = u_p \times q^{n-p}$. En particulier, pour tout nombre entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ de raison $q = 2$.

1. Calculer u_1 et u_7.
2. Calculer le terme au rang 5.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $u_3 = -40$. Calculer u_6.

5 Exercices d'entrainement

5.1 Suites numériques - généralités

1 Déterminer les 4 premiers termes des suites suivantes :

$$u_n = 2n^2 - n + 1 \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{2n+1}{2-3n}$$

2 Dans cet exercice, on mettra en évidence la monotonie des suites

1. On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{3^n}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
2. La suite (v_n) est définie par : $v_n = \frac{n}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (v_n) est strictement décroissante à partir du rang 2.
3. Soit (u_n) la suite dont le terme de rang n est définie par : $u_n = -32n + 102$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que cette suite est décroissante.
4. Soit (w_n) la suite dont le terme de rang n est définie par : $w_n = 2n - \frac{25}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite (w_n) est croissante.

3 Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n - u_n^2 - 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4
u_n					

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4 Pour les suites suivantes, calculer les termes u_1 et u_2 :

1. $\begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= \frac{2u_n}{u_n+1} \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 &= -1 \\ u_{n+1} &= (u_n+1)^2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n-1}{u_n} \end{cases}$

5 Étudier le sens de variation de chaque suite.

1. $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$
2. $u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$
3. $u_n = (n-5)^2$, $n \geq 5$
4. $\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = u_n - n \end{cases}$

6 Étudier les variations des suites suivantes :

1. $u_n = 2n + 1$,
2. $v_n = \frac{3n}{2^n}$,
3. $w_n = \frac{3n+1}{2n+2}$.

5.2 Suites arithmétiques et géométriques

7 Soit la suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 15$.

1. Écrire u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Écrire u_n en fonction de n.
3. Calculer u_1 et u_{10}.
4. Calculer la somme $S_{10} = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$

8 On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n - 3}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n + 3}{2}.$$

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{w_n + t_n}{2}$.

9 ⋆ Soient a et b deux réels non nuls avec $a \neq 1$. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$. Démontrons que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

Chapitre 2 — Dérivations

Compétences attendues :

- ✔ Comprendre géométriquement la notion de dérivé.
- ✔ Savoir déterminer l'équation d'une tangente à une courbe en un point.
- ✔ Connaître parfaitement les dérivées de fonctions usuelles.
- ✔ Connaître parfaitement les opérations sur les fonctions dérivables.

Fabien Bessière,
Adresse mail : `fabienbessiere@gmail.com`

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ désigne sa courbe représentative.

1 Taux d'accroissement d'une fonction

Définition

Soient a et b deux réels dans I $(a < b)$. On appelle *taux d'accroissement* de la fonction f entre a et b, le quotient :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exemple Soit f la fonction carré $x \mapsto x^2$. Calculer le taux d'accroissement de f entre $a = 2$ et $b = 3$.

Interprétation graphique : Soient A et B deux points de $\mathscr{C}$, d'abscisses respectives a et b. Le taux d'accroissement de la fonction f ente les deux réels a et b avec $a < b$ est égal au coefficient directeur de la droite (AB).

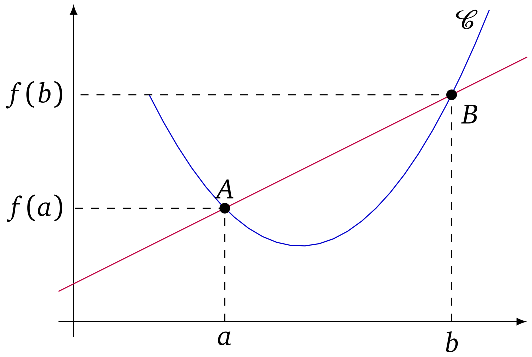


Figure 1

2 Nombre dérivé

Soit $a \in I$ et h un réel tel que $a + h \in I$. Remarquons que le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$, est :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Définition

Si, lorsque le nombre h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, le taux d'accroissement précédent prend des valeurs de plus en plus proches d'un nombre $\ell \in \mathbb{R}$, alors on dira que la fonction f est dérivable en a et que ℓ est le *nombre dérivé de f en a*. On note (lorsqu'il existe), ce nombre $f'(a)$. Plus rigoureusement :

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

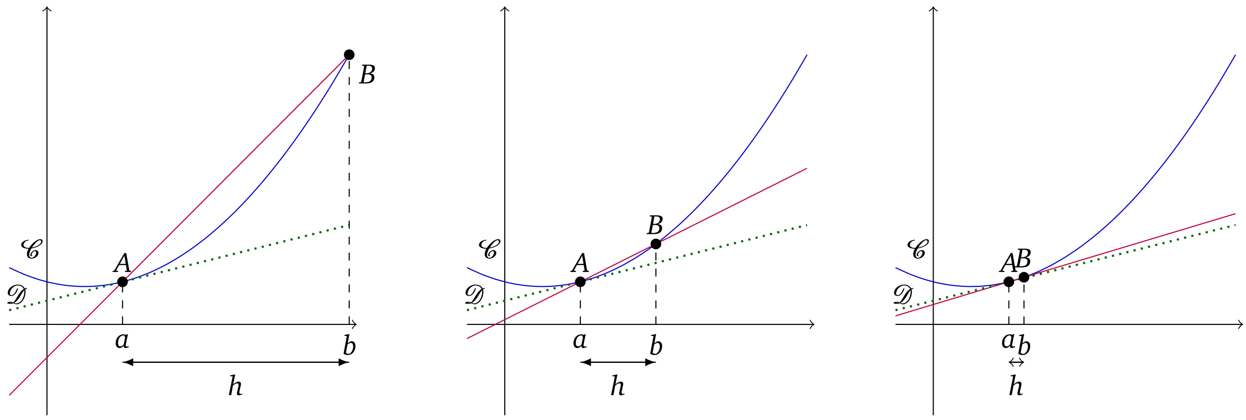
ce qui signifie : « $f'(a)$ est la limite quand h tend vers 0 de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ »

Exemple Soit f la fonction carré $x \mapsto x^2$. Calculer $f'(1)$.

3 Tangente à une courbe

Partons de la figure 1 et posons $h = b - a$. On a vu que le taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AB). Quand h tend vers 0, le point B se rapproche infiniment du point A. Ainsi, la droite (AB) tend vers une position limite qu'on appelle la *tangente* en A à la courbe $\mathscr{C}$.

Illustration : Quand h tend vers 0, la droite (AB) se rapproche de la droite $\mathscr{D}$, tangente à $\mathscr{C}$ en A.



Définition

Si f est dérivable en $a \in I$, alors la *tangente à la courbe* $\mathscr{C}$ *au point* A *d'abscisse* a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Proposition

L'équation réduite de cette tangente est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exemple Calculer l'équation de la tangente de la fonction $f : x \mapsto x^2$ au point $a = 1$.

4 Fonction dérivée

Définition

On dit que la fonction f est dérivable sur I si pour tout $a \in I$, f est dérivable en a. De plus, la fonction qui a x associé le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée *fonction dérivée* de f, et sera notée f'.

Exemple Soit $f : x \mapsto x^2$ et $a \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivé de f au point a.

4.1 Fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$)

Proposition

Pour tout entier relatif n, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}^*$ si n est négatif) par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}^*$ si n est négatif), et on a, pour tout réel x (non nul si n est négatif) $f'(x) = nx^{n-1}$.

4.2 Fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

Proposition

La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ pour tout réel $x \in [0,+\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer $f'(4)$.

4.3 Somme et produit par un réel

Proposition

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et $f : x \mapsto u(x)+v(x)$. Alors f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $f'(x) = u'(x)+v'(x)$.

Remarque *On retiendra :* $(u+v)' = u'+v'$.

Exemple Calculer la dérivé de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^4 + \frac{1}{x}$.

Proposition

Soit u une fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $f : x \mapsto \lambda.u(x)$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $f'(x) = \lambda.u'(x)$

Remarque *On retiendra* $(\lambda u)' = \lambda u'$.

Exemple Calculer la dérivé de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 5x^3 - x$.

4.4 Produit, inverse et quotient

Proposition

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et $f : x \mapsto u(x).v(x)$. Alors f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $f'(x) = u'(x).v(x)+v'(x).u(x)$.

Remarque *On retiendra* $(uv)' = u'.v + u.v'$.

Exemple Calculer la fonction dérivé f' de la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x^2\sqrt{x}$

Proposition

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I telles que pour tout $x \in I$: $v(x) \neq 0$.

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:
$$f'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}.$$
- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:
$$f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - v'(x).u(x)}{v^2(x)}.$$

Remarque *On retiendra* $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ *et* $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$.

Exemple Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-3}{2x^2}$. Même question pour la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4x-3}{x^2+2}$.

5 Tableaux récapitulatif

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On récapitule ici les propriétés de dérivés de fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de dérivabilité de f	Fonction f'
$x \mapsto \lambda$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 1$
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$
$x \mapsto x^n$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \geq 0 \\ \mathbb{R}^* & \text{si } n < 0 \end{cases}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$]0;+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I (avec pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$). On récapitule les opérations de dérivabilités :

Fonction	Dérivé
$u+v$	$u'+v'$
$\lambda.u$	$\lambda.u'$
$u.v$	$u'.v+v'.u$
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$
u^n	$n.u'.u^{n-1}$

6 Application de la dérivation à l'étude du sens de variation d'une fonction

L'idée est qu'autour du point de contact, la courbe et la tangente ont le même comportement. Si la fonction est croissante, sa courbe « monte », la tangente aussi, donc son coefficient directeur, le nombre dérivé, est positif. Si la fonction est décroissante, alors par le même mécanisme, le coefficient directeur est négatif.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur I.

— f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

— f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.

— f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Remarque *On retiendra que pour déterminer les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.*

Exemple Soit $f : x \mapsto 2x^2 - 8x + 5$. Donner la dérivée de la fonction f. En déduire les variations de f.

7 Exercice d'entrainement

1 Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto 2021$

2) $f : x \mapsto x^4 - 3x$

3) $f : x \mapsto 10x^7 - 3x^4 + 5x + 100$

4) $f : x \mapsto -\frac{2}{5}x^5 - \pi x + \frac{1}{3x}$

5) $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

6) $f : x \mapsto \frac{x-3}{x}$

7) $f : x \mapsto \frac{2x^2-4x+1}{x-2}$

8) $f : x \mapsto (2x^2 - 5x + 1) \times (x^2 + x + 1)$

9) $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{3x^2-1}$

10) $f : x \mapsto x^2 - 7x + \sin(x) - 6$

11) $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 169x + \cos(x)$

12) $f : x \mapsto \sin(x) + 4x^3 + 9x^2 - 210x - 400$

13) $f : x \mapsto 2x + 1 + \frac{1}{x}$

14) $f : x \mapsto (10x - 3) \times (x + 12)$

15) $f : x \mapsto \frac{1}{2x^2+3}$

16) $f : x \mapsto -5x^2 + 6 + \frac{1}{x^4}$

17) $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

18) $f : x \mapsto \sin^2(x)$

19) $f : x \mapsto (x^2 + 1) \times \sqrt{x}$

20) $f : x \mapsto 2x^3 - 4x^2 + 7$

Chapitre 3 — La fonction exponentielle

Compétences attendues :

- ✔ Connaitre la dérivée, les variations et la courbe représentative de la fonction exponentielle
- ✔ Connaitre les propriétés sur l'exponentielle
- ✔ Savoir résoudre une équation avec des exponentielle
- ✔ Savoir résoudre une inéquation avec des exponentielle

Fabien Bessière,
Adresse mail : `fabienbessiere@gmail.com`

1 Caractérisation de la fonction exponentielle

1.1 Définition et propriétés

Définition — Théorème

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Cette fonction est appelée *fonction exponentielle*, elle est notée exp : $x \mapsto \exp(x)$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1.$$

Exemple Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3\exp(x) + 4x^2 \qquad g(x) = (5x+4)\exp(x) \qquad h(x) = 2x^3\exp(x).$$

Proposition

Pour tous x, y réels, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

1.2 Conséquence de la relation fonctionnelle

Proposition

Pour tous x, y réels et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \qquad \exp(nx) = (\exp(x))^n.$$

Exemple Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \exp(2x-3) \times \exp(-3x-1), \qquad B = (\exp(4x))^2 \times \exp(-6x+3), \qquad C = \frac{\exp(-2x+7)}{\exp(-5x-1)}.$$

2 Notation e

2.1 Nombre e et notation e^x

Définition

L'image de 1 par la fonction exponentielle est note e c'est-à-dire que $\mathrm{e} := \exp(1)$.

Remarque *Le nombre e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper. Ce nombre est un irrationnel c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers. Une valeur approchée est $e \approx 2,711828$.*

2.2 Propriétés algébriques avec la nouvelle notation

Soit $x \in \mathbb{R}$. On adapte une notation bien pratique pour retenir les formules qui est la suivante :

$$\boxed{\mathrm{e}^x := \exp(x)}$$

Proposition

On a $\mathrm{e}^0 = 1$. Plus généralement, pour tout réels x, y et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y, \qquad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}, \qquad \mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}, \qquad \mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n.$$

✖ **Attention !** En général, $\boxed{\mathrm{e}^{xy} \neq \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}$ et $\boxed{\mathrm{e}^{xy} \neq (\mathrm{e}^x)^y}$

Exemple Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-4}, \qquad B = \frac{\mathrm{e}^{-7}}{\mathrm{e}^2}, \qquad C = \mathrm{e} \times (\mathrm{e}^x)^3, \qquad D = \frac{\mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^{-4}}{(\mathrm{e}^2)^2 \times \mathrm{e}^{-2x}}.$$

2.3 Lien avec les suites géométriques

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite définie u pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{an}$ est une suite géométrique de raison e^a.

Exemple Donner la raison de la suite géométrique u définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{3,5n}$

3 Étude de la fonction exponentielle

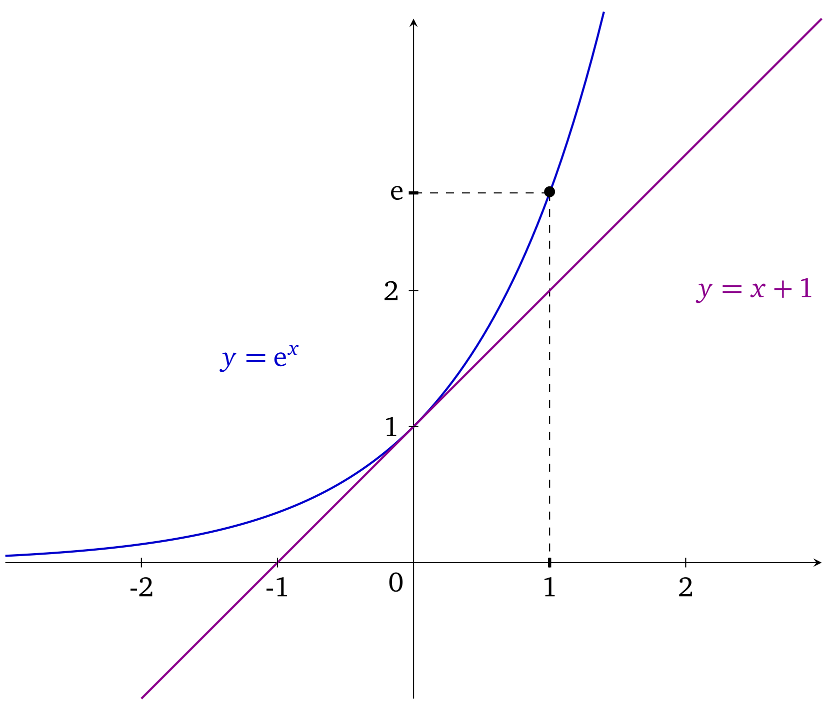
3.1 Signe de la fonction exponentielle

Proposition

La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante.

On retiendra $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^x > 0}$

Voici la courbe de la fonction exponentielle ainsi que de sa tangente au point d'abscisse 0 :



3.2 Résolution d'équations et d'inéquations

Proposition

Pour tous réels a et b :

$$e^a \leq e^b \iff a \leq b \qquad \text{et} \qquad e^a < e^b \iff a < b$$

De plus, $e^a = e^b \iff a = b$

Exemple Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3e^{-4x+1} - 3e = 0$
2. $e^{3x+2} = e^{-4}$
3. $e^{x^2} - e^9 = 0$

Exemple Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{3x+1} > 1$
2. $e^{-2x+2} \geqslant e^4$
3. $e^{x+1} + e^{-7x+9} < 0$

3.3 Exponentielle d'une fonction affine

Proposition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

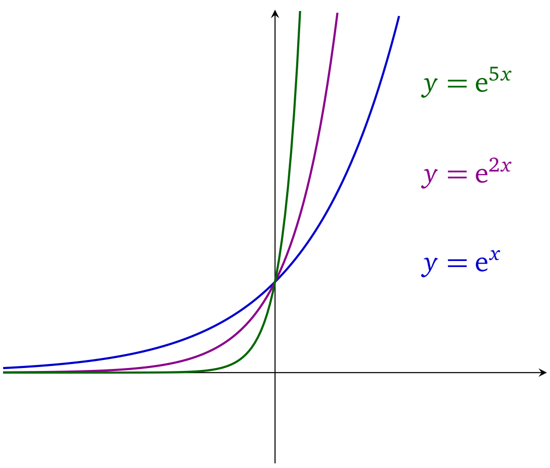
$$f'(x) = ae^{ax+b}$$

Exemple Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-5x-3}$.

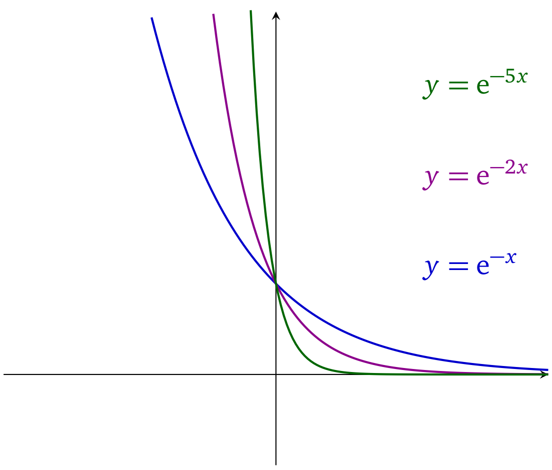
Proposition

Soit $k \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{kx}$.

- Si $k > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $k < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



$k > 0$



$k < 0$

3.4 Exponentielle d'une fonction quelconque

Proposition

Soit I un intervalle dans $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors l'application $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

On retiendra : $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$

Exemple Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^{\sqrt{x}+2}$.

4 Exercices d'entrainements

1 Simplifier chaque expression :

$$A = e \times e^{2x-1} - (e^x)^2, \qquad B = (e^{-x})^2\sqrt{e^{4x}}, \qquad C = \frac{e^x e^{1-2x}}{e}.$$

2 Démontrer que chacune des égalités suivantes est vérifié pour tout réel x.

1) $e^{-2x} + \frac{1}{e} = \frac{1+e^{2x-1}}{e^{2x}}$

2) $(e^x + e^{-x})^4 - (e^{2x} + e^{-2x})^2 + 4 = 4(e^x + e^{-x})^2$

3) $\frac{(e^x+1)^2 - (e^x-1)^2}{4e^x} = 1$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$e^{x^2} = (e^x)^2 \qquad \text{et} \qquad e^{\frac{2x+1}{x-3}} = e^{x+1}$$

4 Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{x - e^x}{e^x + 1}$

2) $f(x) = (2 - x^2)e^x$

3) $f(x) = 7e^x(e^x - x^3 + 5x)$

4) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

5 Donner les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^x$

6 Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = e^{-x^2+\sqrt{2}x+10}$

2) $f(x) = e^{e^x-1}$

3) $f(x) = e^{-\cos(x)} + e^{17}$

4) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2e^x}$

Chapitre 4 — La fonction logarithme népérien

Compétences attendues :

- Connaitre la dérivée, les variations et la courbe représentative de la fonction logarithme népérien
- Connaitre les propriétés sur le logarithme népérien
- Savoir résoudre une équation avec des logarithme népérien
- Savoir résoudre une inéquation avec des logarithme népérien

Fabien Bessière,
Adresse mail : `fabienbessiere@gmail.com`

1 Caractérisation de la fonction logarithme népérien

Il existe plusieurs moyen pour définir le logarithme népérien d'un nombre. L'un d'eux repose sur le théorème suivant :

Théorème des valeurs intermédiaires

Soient a et b deux réels dans un intervalle I et f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors pour tout $k \in [f(a), f(b)]$, l'équation :

$$f(x) = k$$

possède UNE UNIQUE solution

Exemple Soit $a \in]0, +\infty[$. Montrer que l'équation $\mathrm{e}^x = a$ admet une unique solution

1.1 Définition et propriétés

Définition du logarithme

Soit $x \in]0, +\infty[$. Le logarithme népérien de x est l'unique réel dont l'exponentielle est égale à x. Il est noté $\ln(x)$. On définit ainsi une fonction sur $]0, +\infty[$, la fonction ln.

Théorème

- Pour tout réel a et tout réel strictement positif b,

$$\mathrm{e}^a = b \iff a = \ln(b).$$

- Pour tout réel strictement positif a et tout réel b,

$$\ln(a) = b \iff a = \mathrm{e}^b.$$

Ce théorème a pour conséquence :

$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^x) = x}$ $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x}$ $\boxed{\ln(1) = 0}$.

Exemple Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes suivantes :

1) $\mathrm{e}^{3x+1} = 5$

2) $\ln(2x + 3) = 2$

3) $2\mathrm{e}^{x^2} - 3 = 0$

4) $\ln(x) + \ln(2) = 0$

Définition

Soit $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On définit le nombre a à la puissance x en posant :

$$a^x := \mathrm{e}^{x \ln(a)}$$

Exemple Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^x = 3$.

Proposition

Pour tout $x, y \in]0, +\infty[$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y).$$

1.2 Conséquence de la relation fonctionnelle

Proposition

Pour tous x, y réels dans $]0,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \qquad \ln(x^n) = n\ln(x), \qquad \ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x).$$

✖ **Attention !** En général, $\boxed{\ln(x+y) \neq \ln(x) \times \ln(y)}$ et $\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right) \neq \frac{\ln(x)}{\ln(y)}}$

Exemple Simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \ln(4) - 2\ln(8) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

2) $B = \ln(3-\sqrt{2}) + \ln(3+\sqrt{2})$

3) $C = \frac{\ln(100)}{\ln(10)}$

4) $D = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

2 Propriété analytique de la fonction logarithme népérien

2.1 Dérivée de la fonction logarithme népérien

Théorème

La fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Exemple Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x) - x + 1.$$

Calculer la dérivée de la fonction f et donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

2.2 Sens de variation de la fonction logarithme népérien

Théorème

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

On obtient alors plusieurs conséquences :

Théorème

- Pour tout $a, b \in]0,+\infty[$: $\quad \ln(a) < \ln(b) \iff a < b.$
- Pour tout $a, b \in]0,+\infty[$: $\quad \ln(a) = \ln(b) \iff a = b.$
- Pour tout $x \in]0,+\infty[$:
  - $\ln(x) > 0 \iff x > 1,$
  - $\ln(x) < 0 \iff x \in]0,1[.$

Exemple 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\quad \ln(2x+3) = \ln(x+7).$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\quad \ln(2x+3) > \ln(x+7).$

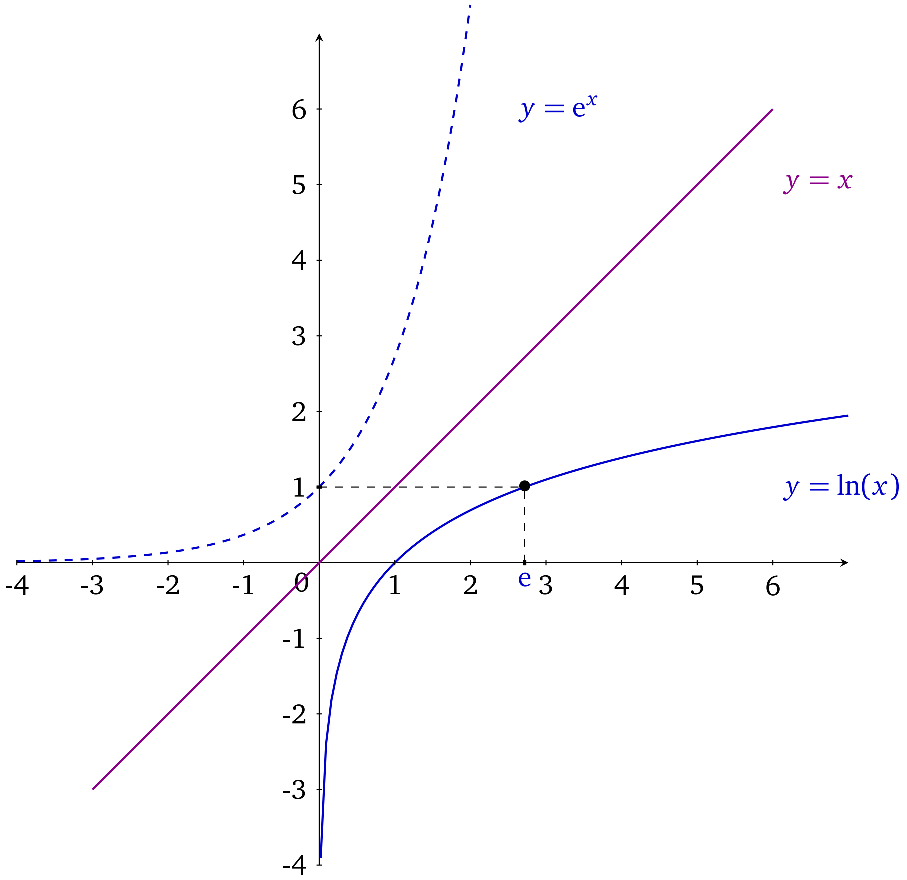
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\quad \ln(2x+3) < \ln(x+7).$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\quad \ln(5x+10) = \ln(x-2).$

Exemple Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n \geq 109$.

3 Représentation graphique et dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$

Voici la courbe de la fonction logarithme népérien sur $]0, +\infty[$ ainsi que la droite d'équation $y = x$ et la courbe représentative de la fonction exponentielle.



Exemple Déterminer l'équation de la tangente de la courbe représentation de la fonction logarithme népérien au point d'abscisse 1.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$. Alors la fonction f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

On retiendra :

$$\boxed{(\ln(u))' = \frac{u'}{u}}$$

Exemple Posons pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Calculer la dérivée de la fonction f.

4 Exercices d'entrainements

1 Simplifier au maximum chaque expression :

1) $\ln(\sqrt{e^3}) - 3\ln(e) + \ln(e^2)$

2) $\ln(e^2 - 1) - \ln(1 + e)$

3) $\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\ln(3+2\sqrt{2})$

2 Démontrer les propriétés suivantes :

1) pour tout $x > 1$,

$$\ln(x^4 - 1) - \ln(x^2 + 1) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1).$$

2) pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\ln(e^x + e^{-x}) + x = \ln(1 + e^{2x}).$$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $9^x - 5^{x+2} = 5^x - 3^{2x+1}$

2) $2e^{2x} - 7e^x + 6 = 0$

4 Le but de cet exercice est de résoudre deux équations grâce à un changement de variable.

1) Quelles sont les solutions de l'équation : $2x^2 - 5x - 3 = 0$?

2) Utiliser la question précédente pour résoudre les deux équations :

(a) $2(\ln(x))^2 - 5\ln(x) - 3 = 0$

(b) $\dfrac{2e^{2x} - 3}{e^x} = 5$

5 Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{2+\ln(x)}{1-\ln(x)}$

2) $f(x) = x^2\ln(x) - x^2 + x$

3) $f(x) = \frac{2x+1}{\ln(x)}$

4) $f(x) = \frac{\ln(x)}{2x^2+1}$

6 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{(\ln(x))^2 + \ln(x) + 1}$.

1. Déterminer la dérivée de g.
2. Dresser le tableau de variations de g.

Chapitre 5 — Généralités sur les fonctions

Compétences attendues :

- ✔ Savoir déterminer le domaine de définition d'une fonction.
- ✔ Savoir déterminer le sens de variation d'une fonction.
- ✔ Savoir tracer la courbe représentative d'une fonction.
- ✔ Savoir démontrer une inégalité en étudiant une fonction.

Fabien Bessière,
Adresse mail : `fabienbessiere@gmail.com`

1 GÉNÉRALITÉS

1.1 Domaine de définition

Définition

Soit f une fonction. Le domaine de définition de la fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

Il y a trois règles à retenir pour déterminer le domaine de définition d'une fonction :

① On ne divise pas par 0.

② Une expression dans une racine carré doit être positive ou nulle.

③ Une expression dans un logarithme népérien doit être strictement positif.

Exemple Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$

2) $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

3) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x\ln(x)}$

4) $f : x \mapsto \ln(2x+3)$

1.2 Composée de fonctions

Définition

Soient I et J deux intervalles. Soit f une fonction définie sur I telle que pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J. Soit g une fonction définie sur J. La composée de f suivie de g est la fonction notée $g \circ f$, définie pour tout réel x de I,

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Exemple Déterminer la fonction $g \circ f$ dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 2x+3$

2) $f : x \mapsto 2x+3$ et $g : x \mapsto x^2$

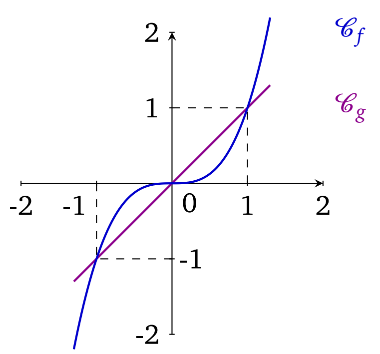
3) $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et $g : x \mapsto \ln(2x+3)$

4) $f : x \mapsto \ln(2x+3)$ et $g : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

✖ **Attention !** Comme on a pu le voir dans l'exemple précédent, en général : $\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$

1.3 Position relative de deux courbes

Soient f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On veut étudier la position relative de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f et de la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de g. Graphiquement, quels courbes est au dessus/dessous de l'autre et sur quels intervalles ?



On va formaliser cette idée :

Proposition

- si pour tout réel x d'un intervalle J contenu dans I, on a $f(x)-g(x)>0$, alors $\mathscr{C}_f$ est stictement au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle J.
- si pour tout réel x d'un intervalle J contenu dans I, on a $f(x)-g(x)<0$, alors $\mathscr{C}_f$ est stictement en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle J.
- si pour tout réel $x_0 \in I$ on a $f(x_0)-g(x_0)=0$, alors $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en leur point d'abscisse x_0.

En résumé, on retiendra :

pour étudier la position de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_f$, on étudie le signe de $f(x)-g(x)$ suivant les valeurs de x.

Exemple Pour tout réel x, on pose $f(x)=x^2$ et $g(x)=x^3$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2 Monotonie et extremum d'une fonction

2.1 Sens de variation

Une fonction croissante (resp. décroissante) est une fonction qui préserve (resp. renverse) les inégalités.

Définition

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est *croissante* si pour tout $x, y \in I$, $\quad x<y \implies f(x) \leqslant f(y)$
- On dit que f est *strictement croissante* si pour tout $x, y \in I$, $\quad x<y \implies f(x) < f(y)$
- On dit que f est *décroissante* si pour tout $x, y \in I$, $\quad x<y \implies f(x) \geqslant f(y)$
- On dit que f est *strictement décroissante* si pour tout $x, y \in I$, $\quad x<y \implies f(x) > f(y)$
- On dit que f est (resp. strictement) *monotone* si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante.

Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si f et g sont croissantes, alors $f+g$ l'est aussi. Si de plus f ou g l'est strictement, alors $f+g$ aussi.
On a un résultat similaire pour les fonctions décroissantes.

Exemple Dire sans calculs pourquoi la fonction $x \mapsto x+\ln(x)$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

Théorème

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f est à valeurs dans J c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$.

- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de même sens de variation, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) croissante.
- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de sens de variation opposés, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) décroissante.

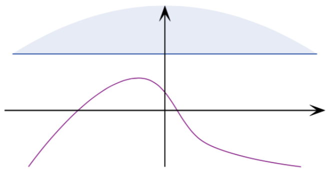
Exemple Dire sans calculs pourquoi la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.2 Extremum d'une fonction

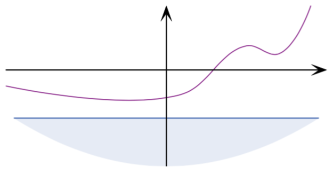
Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

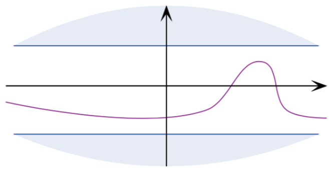
- On dit que f est *majorée* si il existe un réel M tel que pour tout x dans I, on a $f(x) \leqslant M$. Un tel réel M est appelé un majorant de f. On dit aussi que f est *majorée* par M.
- On dit que f est *minorée* si il existe un réel m tel que pour tout x dans I, on a $f(x) \geqslant m$. Un tel réel m est appelé un minorant de f. On dit aussi que f est *minorée* par m.
- On dit que f est *bornée* si f est à la fois majorée et minorée.



Fonction majorée non minorée



Fonction minorée non majorée



Fonction bornée

Exemple 1) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \cos(x)e^{-x}$ est majorée par 1.

2) Montrer que la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ est minorée par 2.

3) Montrer que la fonction f définie sur $[1, 2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x^2+4}$ est bornée.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f admet un *maximum* en a sur I si pour tout x dans I on a $f(x) \leqslant f(a)$. Le maximum vaut $f(a)$ et est atteint en a.
- On dit que f admet un *minimum* en a sur I si pour tout x dans I on a $f(x) \geqslant f(a)$. Le minimum vaut $f(a)$ et est atteint en a.
- On dit que f admet un *extremum* en a si f admet un minimum ou un maximum en a.

Exemple 1) Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - 3x$. Étudier les extremums de f sur $\mathbb{R}$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$. Étudier les extremums de g sur $[-5, 7]$.

3 EXERCICES D'ENTRAINEMENTS

1 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et donner l'allure de la courbe représentative de la fonction f :

1) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{3x}$.

2) $f(x) = x^2 e^{-x}$.

3) $f(x) = 2x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

2 Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \cos(x) + \frac{3}{2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.

3) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

3 Le but de cette exercice est de démontrer 4 inégalités classiques.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad e^x \geqslant x + 1$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \sin(x) \leqslant x$.

3) Montrer que pour tout $x > 0$, $\quad \ln(x) \leqslant x - 1$.

4) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \geqslant x$

4 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f (*on pourra utiliser la question 3 de l'exercice précédent*).

2) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.

3) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f.

5 Soient $\alpha > 1$ et $x > 0$. Montrer que :

$$(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x.$$

Chapitre 6 — Primitive et intégrale

Compétences attendues :

- ✔ Savoir calculer des primitives.
- ✔ Connaitre le lien entre primitive et intégrale.
- ✔ Connaitre les propriétés vérifiées par l'intégrale.

Fabien Bessière,
Adresse mail : `fabienbessiere@gmail.com`

1 Notion de primitive et calcul

Dans la suite, I désignera un intervalle.

1.1 Définitions

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est ***une*** *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et si $F' = f$.

Exemple Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est **une** primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ et que $x \mapsto x\ln(x) - x$ est **une** primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est continue sur I, alors f admet au moins une primitive sur I.
- Si F est **une** primitive de f sur I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

✖ **Attention !** Il n'existe jamais une seule primitive, on ne dit jamais « la » primitive mais **une** primitive. Il peut ne pas en exister, mais s'il en existe, il en existe une infinité et elles sont toutes égales à constante additive près.

✖ **Attention !** La primitivation est plus difficile que la dérivation. Par exemple, dériver la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est facile mais la primitiver est une tout autre histoire ! On retiendra :

En général, on ne sait pas primitiver le produit, le quotient ou la composé de deux fonctions

1.2 Formulaire de primitive usuelles

On connaît déjà un formulaire de dérivées usuelles. On obtient un formulaire de primitive par lecture inverse :

Fonction f	Intervalle	UNE primitive F
$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 1$
$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto x$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^2}{2}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}, n \in \mathbb{N}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{-1}{x}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$]-\infty, 0[$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$

Il manque des formules concernant la fonction exponentielle, la fonction logarithme népérien, les fonctions sinus et cosinus. Nous les donnerons dans la suite.

Dans le tableau ci-dessous, u et v sont deux fonctions continues sur un intervalle I et U et V sont respectivement une primitive de u et une primitive de v sur I et k est un réel.

Fonction	Intervalle	UNE primitive
$u+v$	I	$U+V$
ku	I	kU

Exemple 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x + 5$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-1)(2x^2+5)$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

3) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = -\frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $]0,+\infty[$.

1.3 Opération sur les primitives

Dans le tableau ci-dessous, la fonction u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Condition sur u et I	UNE primitive
$u'u^n, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{1\}$	aucune	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u^n}, \quad n \geqslant 2$	u ne s'annule pas sur I	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	u est strictement positive sur I	$2\sqrt{u}$

Exemple 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x-1)(x^2-x+3)^3$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

2) Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $]1,+\infty[$.

3) Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ par

$$f(x) = -\frac{1}{(2x-1)^2}$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Déterminer l'ensemble des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

1.4 Cas de l'exponentielle

Théorème

- Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^x + \lambda$ où λ est un réel.
- Plus généralement, soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)} + \lambda$ où λ est un réel.

  En particulier, si a est un réel non nul et b un réel, les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} + \lambda$ où λ est un réel.

On retiendra :

Une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u.

Exemple 1) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$

2) Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

3) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2}$

1.5 Cas du logarithme népérien

Théorème

- Les primitives sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln(x) + \lambda$ où λ est un réel.
- Plus généralement, soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I. Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \ln(u(x)) + \lambda$ où λ est un réel.

On retiendra :

Si $u > 0$, **une** primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln(u)$.

Exemple 1) Déterminer une primitive sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x-1}$.

2) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

3) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

2 Intégrale d'une fonction continue

Définition (Intégrale d'une fonction positive)

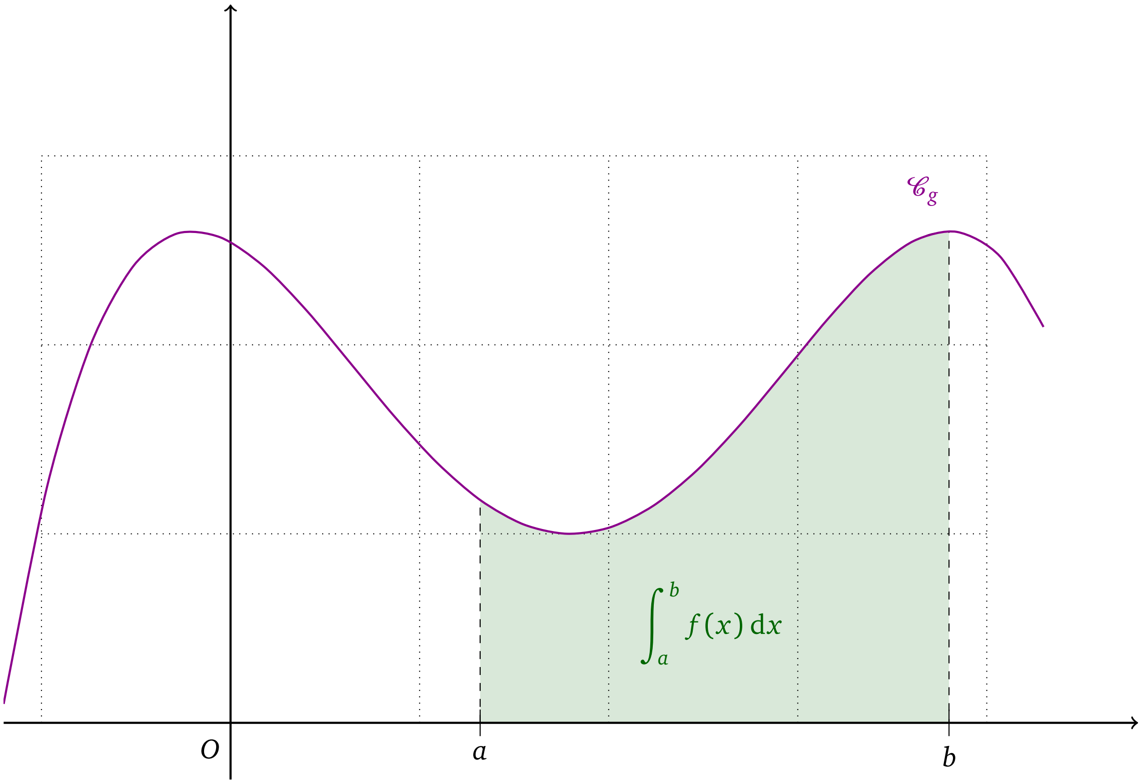
Soit $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive sur $[a, b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe. L'intégrale de a à b de f est l'aire de la portion de plan comprise entre la droite $x = a$, la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite $x = b$ et l'axe (Ox). Elle est notée :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

C'est un nombre réel.

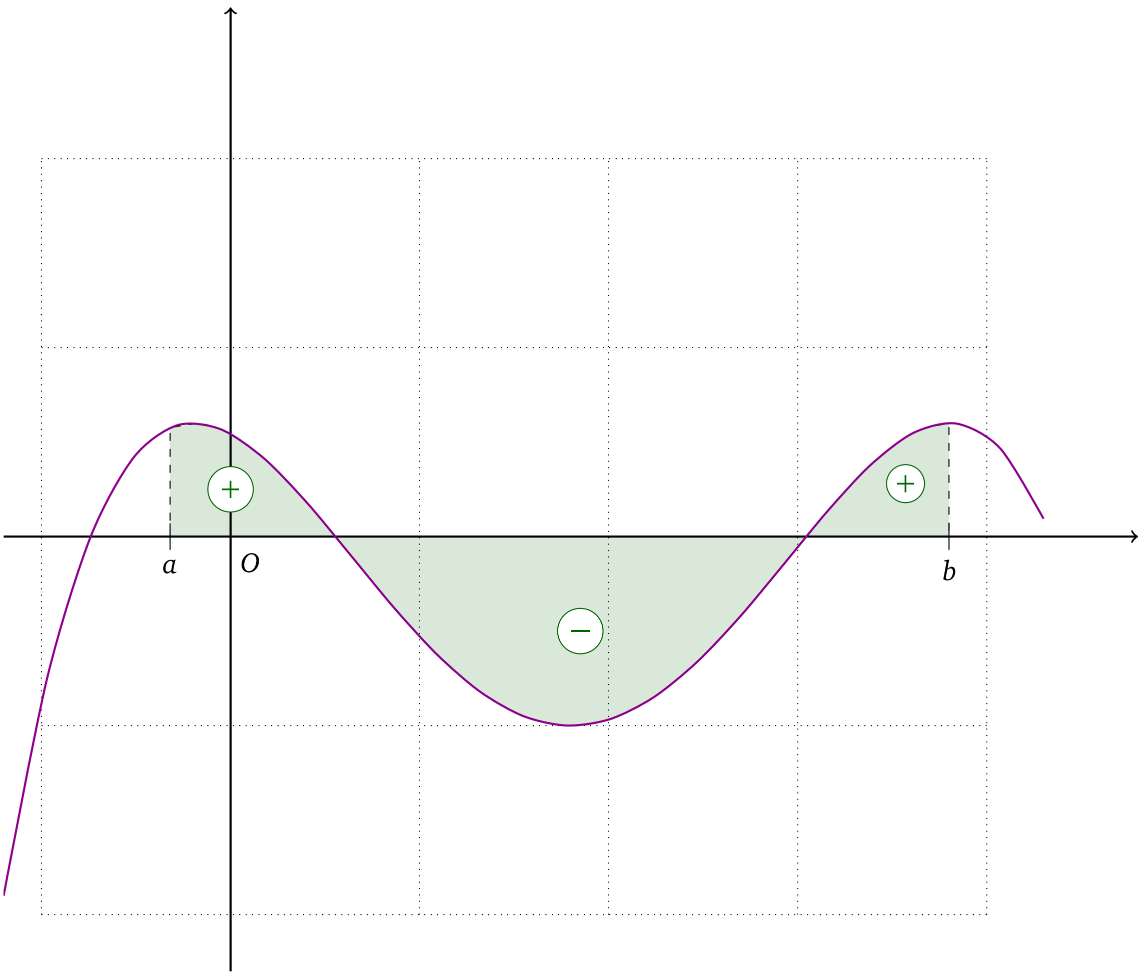
Remarque La variable x est ce qu'on appelle une *variable muette*, on peut la noté t ou s ou n'importe qu'elle autre lettre. Autrement dit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$



Définition (Intégrale d'une fonction de signe quelconque)

Soit $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive sur $[a, b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe. L'intégrale de a à b de f est l'aire de la portion de plan précédente, comptée positivement lorsque $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'axe $(0x)$ et négativement lorsque $\mathscr{C}_f$ est au-dessous.



Par convention, si $a \geqslant b$, on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue)

Soient f, g deux fonctions continues sur I et $a, b, c \in I$.

- **Linéarité :** Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$
- **Relation de Chasles :** $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$
- **Inégalité Triangulaire :** $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ si $a \leqslant b$.

On a aussi des propriétés avec des inégalités :

Théorème (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue)

Soient f, g deux fonctions continues sur I et $a, b \in I$.

- **Positivité :** Si $f \geqslant 0$ et $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$
- **Croissance :** Si $f \leqslant g$ et $a \leqslant b$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1) Étudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Monter que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
4) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4 Lien entre primitive et intégrale

On passe à l'un des théorèmes les plus importants d'analyse :

Théorème

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$.

1) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.
2) Pour toute primitive F de f sur I, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

On note $[F]_a^b$ la quantité $F(b) - F(a)$.

Exemple Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{2\pi} \sin\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x, \quad n \geqslant 1.$$

5 Problème récapitulatif

Pour tout réel x, on pose :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

et on note $\mathscr{C}_F$ sa courbe représentative.

1) Montrer que F est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout réel x.
2) Étudier le signe de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
3) Étudier les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

4) Déterminer une équation de la tangente T au graphe de F en son point d'abscisse 0.

5) Déterminer la position relation de $\mathscr{C}_F$ et de la droite T.

6) En étudiant la fonction $g : x \mapsto F(x) + F(-x)$, montrer que la fonction F est impaire.

7) Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 1 - \frac{1}{x}$.