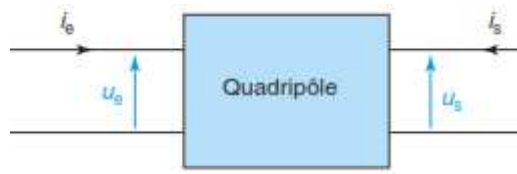


Chapitre 5. DIAGRAMME DE BODE DES FILTRES DU 1^{ER} ORDRE

I. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

1. Définition d'un quadripôle

Un quadripôle linéaire D constitué par un système linéaire possédant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie.



On s'intéresse aux signaux sinusoïdaux.

Soit $u_e(t)$ un signal sinusoïdal appliqué au quadripôle.

$$u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t + \varphi_e)$$

Le signal complexe associé est :

$$\underline{u}_e = \underline{U}_{em} e^{j(\omega t)}$$

Avec $\underline{U}_{em} = U_{em} e^{j\varphi_e}$

Pour un quadripôle linéaire et en régime sinusoïdal forcé, la tension de sortie $u_s(t)$ est sinusoïdale de même pulsation ω .

$$u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$$

Le signal complexe associé est :

$$\underline{u}_s = \underline{U}_{sm} e^{j(\omega t)}$$

Avec $\underline{U}_{sm} = U_{sm} e^{j\varphi_s}$

2. Fonction de transfert d'un quadripôle

On appelle fonction de transfert d'un quadripôle, la fonction $\underline{H}(j\omega)$ telle que :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{U}_{sm}}{\underline{U}_{em}}$$

On peut déduire que :

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega) e^{j\varphi}$$

$H(\omega)$ est le module de la fonction de transfert et $\varphi = \varphi_s - \varphi_e$ son argument (déphasage de la sortie par rapport à l'entrée).

Exemples : les fonctions de transfert de circuits RC et RL séries:

Circuit RC : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$ la tension de sortie est prise aux bornes du condensateur

Circuit CR : $\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$ la tension de sortie est prise aux bornes de la résistance

Circuit RL : $\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega}{R+jL\omega}$ la tension de sortie est prise aux bornes de la bobine

Circuit LR : $\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R+jL\omega}$ la tension de sortie est prise aux bornes de la résistance

3. Lien entre en la fonction de transfert et l'équation différentielle

Rappel : En notation complexe, multiplier par $(j\omega)$ revient à dériver une fois par rapport au temps. Multiplier par $(j\omega)^n$ revient à dériver n fois par rapport au temps.

Prenons l'exemple du circuit RC :

Circuit RC : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$ la tension de sortie est prise aux bornes du condensateur

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Donc :

$$\underline{u}_C(1 + jRC\omega) = \underline{u}_C + jRC\omega \underline{u}_C = \underline{u}_e$$

En notation réelle :

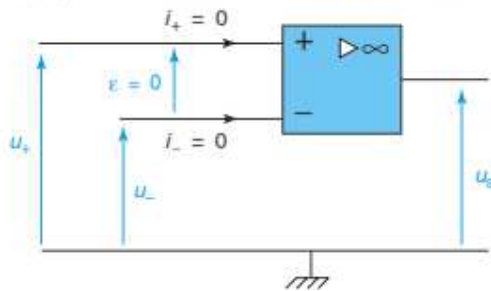
$$u_C(t) + RC \frac{du_C}{dt} = u_e(t)$$

On retrouve l'équation différentielle du circuit.

4. Quadripôle passif – quadripôle actif

Un quadripôle est **passif** quand il ne comporte que des dipôles R, L, C. Il est **actif** s'il contient en plus des sources d'énergie électrique. Dans la pratique, il s'agit d'un ou plusieurs amplificateurs opérationnels fonctionnant en régime linéaire.

Amplificateur opérationnel (AO) en régime linéaire



- Le courant d'entrée inverseuse - est nul.
 - Le courant d'entrée non inverseuse + est nul.
 - La tension différentielle e est nulle.
- Remarque. L'alimentation en énergie électrique n'est pas représentée.

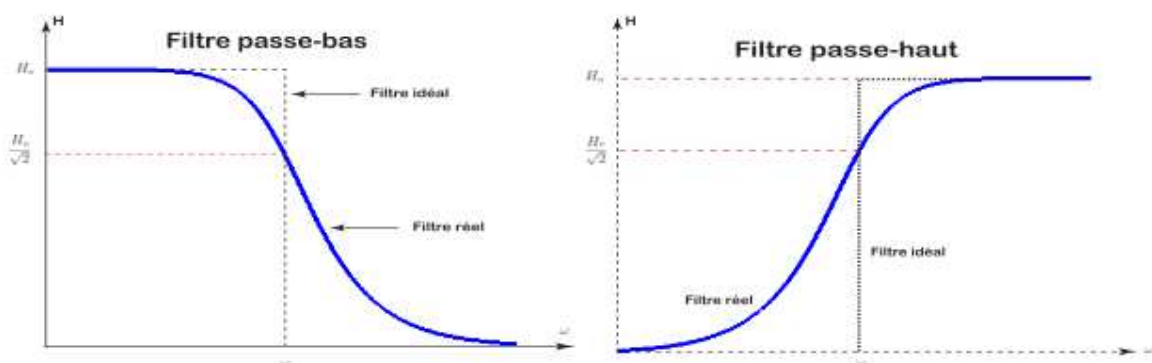
5. Filtres

Un filtre idéal est un quadripôle linéaire pour lequel la tension de sortie est nulle dans un domaine de fréquences caractéristique.

Un filtre réel est un quadripôle linéaire pour lequel la tension de sortie est atténuée dans un domaine de fréquences caractéristique.

Il est caractérisé par sa bande passante et pour un filtre du 1^{er} ordre à sa pulsation de coupure ω_c (ou fréquence de coupure F_c).

Pour le 1^{er} ordre, on distingue le filtre passe-bas du 1^{er} ordre et le filtre passe haut du 1^{er} ordre.



On définit la **bande passante à -3dB** comme la bande de fréquence à l'intérieur de laquelle :

$$H(\omega) \geq H(\omega_c) \quad \text{ou} \quad G \geq G_{max} - 3dB$$

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$$

6. La fonction de transfert réduite

Elle est utilisée pour simplifier les calculs. On définit une variable $x = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{F}{F_c}$; on appelle x la pulsation réduite ou la fréquence réduite. ω_c est la pulsation caractéristique du filtre (F_c la fréquence caractéristique).

On a donc la fonction de transfert réduite du filtre sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = H(x)e^{j\varphi}$$

II. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est une représentation en échelle logarithmique en abscisse.

Le diagramme de Bode est un moyen de représenter le comportement fréquentiel d'un système. Il permet une résolution graphique simplifiée.

1. Le gain en décibel

Le gain en décibels est défini par :

$$G_{dB} = 20 \log H = 20 \log (|\underline{H}(j\omega)|)$$

Le diagramme de Bode est le tracé des deux courbes : le gain en décibels et la phase en fonction du logarithme décimal de la pulsation :

- $G_{dB}(\omega) = f(\log(\omega))$: diagramme de Bode pour le gain
- $\varphi(\omega) = g(\log(\omega))$: diagramme de Bode pour la phase

$$\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega)$$

Avec les grandeurs réduites, le gain en décibels est :

$$G_{dB} = 20 \log H(x) = 20 \log (|\underline{H}(jx)|)$$

$$\varphi(x) = \arg \underline{H}(jx)$$

Le diagramme de Bode devient :

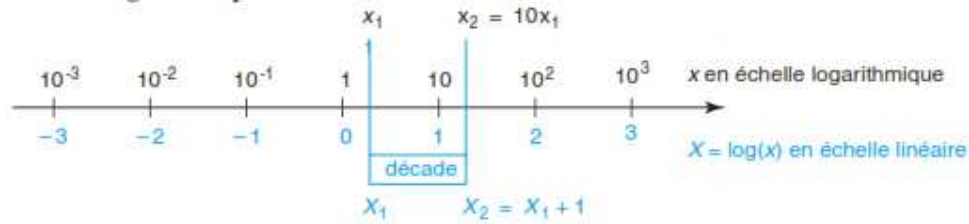
- $G_{dB}(x) = f(\log(x))$: diagramme de Bode pour H en décibels
- $\varphi(x) = g(\log(x))$: diagramme de Bode pour la phase

Point maths. L'échelle logarithmique. Décade

L'axe des abscisses de chacune des courbes $G(x)$ et $\varphi(x)$ est gradué en échelle logarithmique (figure 3). Les valeurs de x sont en général représentées par décades ($\dots 10^{-3}$, 10^{-2} , 10^{-1} , 1, 10^1 , 10^2 , $10^3 \dots$).

Une décade est l'intervalle de fréquence $[f_1 ; f_2]$ tel que : $\frac{f_2}{f_1} = 10$.

Principe de l'échelle logarithmique



III. Etude des filtres du 1^{er} ordre

1. Le filtre passe-bas

La forme canonique du filtre passe-bas est :

le filtre du deuxième ordre n'est plus au programme

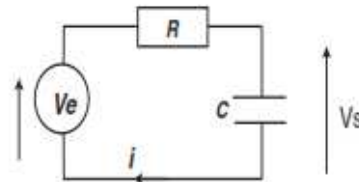
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\underline{H}(jx) = \frac{A_0}{1 + jx}$$

A_0 est une constante réelle et ω_c la pulsation de coupure du filtre. $\omega_c = \omega_0$

Un exemple :

considérons le circuit (RC) suivant :



► En BF : $\omega(x) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{jC\omega} \rightarrow \infty$ (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert), donc le courant est nul et par conséquent $v_s(t) = v_e(t)$

► En HF : $\omega(x) \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{jC\omega} \rightarrow 0$ (le condensateur se comporte comme un fil), donc la tension entre ses bornes est nulle et par conséquent $v_s(t) = 0$

On conclut que ce filtre laisse passer les tensions sinusoïdales de faibles fréquences et élimine les tensions de hautes fréquences : **C'est un filtre passe-bas**

La fonction de transfert s'écrit : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$

donc :

$$A_0 = 1 \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

La fonction de transfert réduite est pour ce circuit est :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + jx}$$

a. Diagramme de Bode pour le gain et la phase

On a :

$$\underline{H}(jx) = \frac{A_0}{1 + jx}$$

Donc :

Le diagramme de Bode pour le gain (module de $\underline{H}(jx)$) :

$$H(x) = \frac{|A_0|}{\sqrt{(1 + x^2)}}$$

Le diagramme de Bode pour la phase :

$$\varphi(x) = \arg \underline{H}(jx) = \arg A_0 - \arg (1 + jx)$$

Dans notre exemple $A_0 = 1$ donc $\arg A_0 = 0$

$$\varphi(x) = - \arg (1 + jx)$$

b. Comportement asymptotique et expression à la fréquence de coupure

A basse fréquence BF

Pour notre exemple : $A_0 = 1$

$$x \ll 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx 1 = |\underline{H}(jx)| e^{j\varphi(x)} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(jx)| \approx 1 \Rightarrow G_{BF} = 20 \log(1) = 0 \\ \varphi_{BF} = 0 \end{cases}$$

Point maths. Pour déterminer le comportement asymptotique à basse fréquence, on cherche un équivalent de la fonction de transfert à basse fréquence. Pour cela on ne conserve au dénominateur que le terme de plus bas degré en x , soit ici le terme 1 (degré nul).

On en déduit les équations des asymptotes basse fréquence : $G_{BF} = 0$ et $\varphi_{BF} = 0$.

A fréquence de coupure

Pour notre exemple : $A_0 = 1$

$$f = f_c \Rightarrow x = 1 \Rightarrow |H(jx)| e^{j\varphi(x)} = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} |H(j)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{(x=1)} = -3 \text{ dB} \\ \varphi_{(x=1)} = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

La courbe du gain en fonction de $\log(x)$ passe par le point $(0 ; -3 \text{ dB})$.

La courbe de la phase en fonction de $\log(x)$ passe par le point $(0 ; -\frac{\pi}{4})$.

A haute fréquence HF

Pour notre exemple : $A_0 = 1$

$$x \gg 1 \Rightarrow H(jx) \approx \frac{1}{jx} = \frac{1}{x} e^{-j\frac{\pi}{2}} = |H(jx)| e^{j\varphi(x)} \Rightarrow \begin{cases} |H(jx)| \approx \frac{1}{x} \Rightarrow G_{\text{HF}} = -20\log(x) \\ \varphi_{\text{HF}} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Point maths. Pour déterminer le comportement asymptotique à haute fréquence, on cherche un équivalent de la fonction de transfert à haute fréquence en ne conservant que le terme de plus haut degré en x , soit ici le terme jx .

On en déduit les équations des asymptotes haute fréquence : $G_{\text{HF}} = -20\log x$ et $\varphi_{\text{HF}} = -\frac{\pi}{2}$.

Rappel : $\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$

c. Diagramme asymptotique et pente de l'asymptote HF

Diagramme asymptotique

La courbe asymptotique du gain est constituée des deux demi-droites d'équations :

$G_{\text{BF}} = 0$ et $G_{\text{HF}} = -20\log(x)$. Elles sont reliées au point $(0;0)$.

La courbe asymptotique de la phase est constituée des deux demi-droites d'équations :

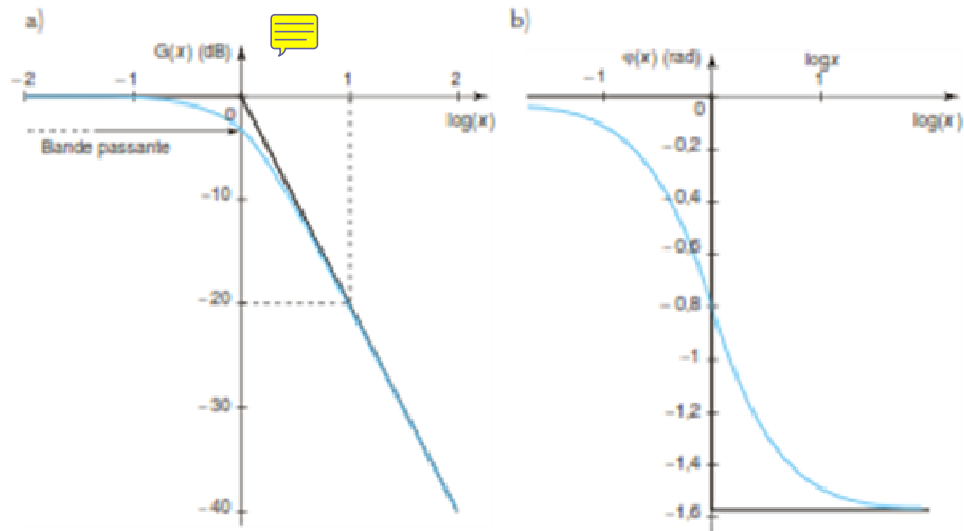
$\varphi_{\text{BF}} = 0$ et $\varphi_{\text{HF}} = -\pi/2$ d'origine $\log(x) = 0$ et du segment vertical qui les relie.

Pente de l'asymptote à HF

En posant $X = \log(x)$, il vient $G_{\text{HF}} = -20X \Rightarrow \frac{dG_{\text{HF}}}{dX} = -20 \text{ dB/décade}$. Le gain diminue de 20 dB quand la fréquence est multipliée par 10 (X augmente d'une unité) ; on dit que la pente de l'asymptote haute fréquence est égale à $-20 \text{ dB par décade}$.

► *Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du premier ordre de fonction de transfert*

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1+jx}$$



- a) Courbe du gain (en couleur) et courbe asymptotique du gain (en noir).
 On a porté $\log(x)$ en échelle linéaire des abscisses. Le gain est en décibels.
- b) Courbe de la phase (en couleur) et courbe asymptotique de la phase (en noir).
 On a porté $\log(x)$ en échelle linéaire des abscisses. La phase est en radians.

d. Bande passante à -3db

Point méthode. Détermination de la bande passante à -3 dB d'un filtre

- a) Déterminer la valeur maximale $|\underline{H}|_{\max}$ du module de la fonction de transfert.
- b) Résoudre l'équation $|\underline{H}| = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$. Selon le cas, on travaille avec la pulsation, la fréquence ou la fréquence réduite.

• **Autre méthode :** déterminer la valeur maximale $G_{\max}$ du gain, puis résoudre l'équation $G = G_{\max} - 3$.

- Détermination de la valeur maximale $|\underline{H}|_{\max}$ du module de la fonction de transfert :

$$H_{\max} = H_{x=0} = 1.$$

- Résolution de l'équation :

$$|\underline{H}(jx)| = \left| \frac{1}{1+jx} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f = f_c.$$

Donc la bande passante à -3dB d'un filtre passe bas du 1^{er} ordre de fréquence de coupure F_c est :

$$\Delta f \in [0; F_c]$$

2. Le filtre passe-haut

La forme canonique du filtre passe-bas est :

$$\underline{H}(j\omega) = A_0 \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\underline{H}(jx) = A_0 \frac{jx}{1 + jx}$$

A_0 est une constante réelle et ω_c la pulsation caractéristique.

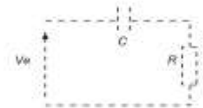
Un exemple :

considérons le circuit (CR) suivant :

En BF : $Z_c \rightarrow +\infty \Rightarrow v_s(t) \rightarrow 0$

En HF : $Z_c \rightarrow +0 \Rightarrow v_s(t) \rightarrow v_e(t)$

Donc le filtre CR est un filtre passif passe-haut



L'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

donc : $A_0 = 1$ et $\omega_c = \frac{1}{RC}$

La fonction de transfert réduite est pour ce circuit est :

$$\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1 + jx}$$

a. Diagramme de Bode pour le gain et la phase

On a :

$$\underline{H}(jx) = \frac{A_0 jx}{1 + jx}$$

Donc :

Le diagramme de Bode pour le gain (module de $\underline{H}(jx)$) :

$$H(x) = \frac{|A_0 x|}{\sqrt{(1 + x^2)}}$$

Le diagramme de Bode pour la phase :

$$\varphi(x) = \arg \underline{H}(jx) = \arg (jA_0 x) - \arg (1 + jx)$$

Dans notre exemple $A_0 = 1$ donc $\arg A_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \arg(1 + jx)$$

b. Comportement asymptotique et expression à la fréquence de coupure

A basse fréquence BF

Pour notre exemple : $A_0 = 1$

$$f \ll f_c \Rightarrow x \ll 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx jx = x e^{j\frac{\pi}{2}} = |\underline{H}(jx)| e^{j\varphi(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(jx)| \approx x \Rightarrow G_{BF} = 20\log(x) \\ \varphi_{BF} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Point maths. On ne conserve que les termes de plus bas degré en x , au numérateur (jx) et au dénominateur (1).

On en déduit les équations des asymptotes basse fréquence : $G_{BF} = 20\log(x)$ et $\varphi_{BF} = \frac{\pi}{2}$.

A fréquence de coupure

Pour notre exemple : $A_0 = 1$

$$f = f_c \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{H}(j) = |\underline{H}(j)| e^{j\varphi(1)} = \frac{j}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} = |\underline{H}(jx)| e^{j\varphi(x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(j)| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{(x=1)} = -3 \text{ dB} \\ \varphi_{(x=1)} = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

- La courbe du gain en fonction de $\log(x)$ passe par le point $(0 ; -3 \text{ dB})$.
- La courbe de la phase en fonction de $\log(x)$ passe par le point $(0 ; \frac{\pi}{4})$.

A haute fréquence HF

Pour notre exemple : $A_0 = 1$

$$f \gg f_c \Rightarrow x \gg 1 \Rightarrow \underline{H}(jx) \approx 1 = |\underline{H}(jx)| e^{j\varphi(x)} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{H}(jx)| \approx 1 \Rightarrow G_{HF} = 0 \\ \varphi_{HF} = 0 \end{cases}$$

On en déduit les équations des asymptotes haute fréquence : $G_{HF} = 0$ et $\varphi_{HF} = 0$.

c. Diagramme asymptotique et pente de l'asymptote BF

Diagramme asymptotique

La courbe asymptotique du gain est constituée des deux demi-droites d'équations :

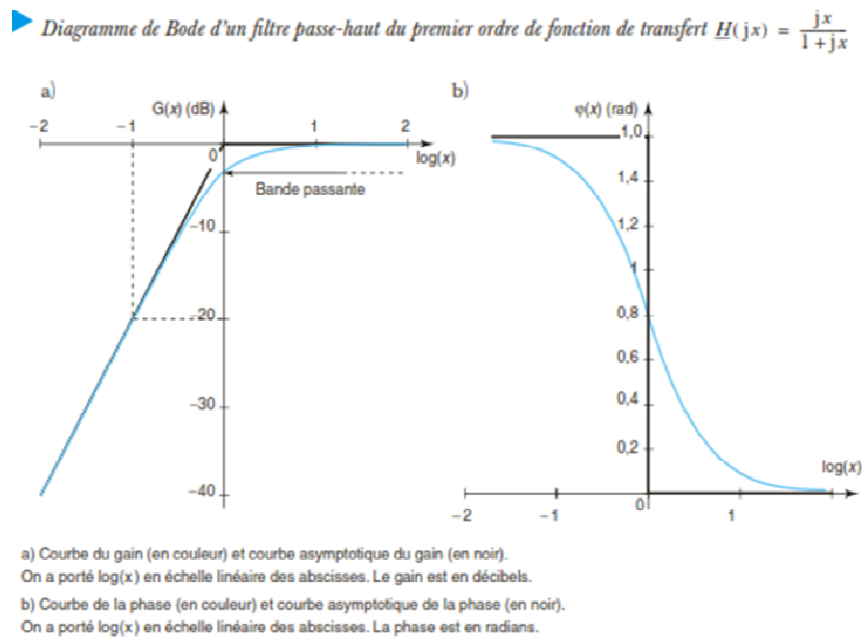
$G_{BF} = 20\log(x)$ et $G_{HF} = 0$ reliées au point (0 ;0).

La courbe asymptotique de la phase est constituée des deux demi-droites d'équations :

$\varphi_{BF} = \pi/2$ et $\varphi_{HF} = 0$ d'origine $\log(x) = 0$ et du segment vertical qui les relie.

Pente de l'asymptote BF

En posant $X = \log(x)$, il vient $G_{BF} = 20X$, d'où $\frac{dG_{BF}}{dX} = 20 \text{ dB/décade}$. Le gain augmente de 20 dB quand X augmente d'une unité (ou quand la fréquence est multipliée par 10). La pente de l'asymptote basse fréquence du gain est égale à +20 dB par décade.



d. Bande passante à -3db

On utilise la même méthode que celle utilisée pour le filtre passe-bas

• Détermination de la valeur maximale $|H|_{\max}$ du module de la fonction de transfert :
 $H_{\max} = H_{x \rightarrow \infty} = 1$.

• Résolution de l'équation : $|H(jx)| = \left| \frac{jx}{1+jx} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f = f_c$.

La bande passante à -3dB d'un filtre passe-haut du 1^{er} ordre de fréquence coupure F_c est

$$\Delta f \in [F_c; +\infty]$$