Leçon : VECTEURS ET POINTS DU PLAN

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**
  - De quel évènement parle le texte ?

La volonté de récompenser les meilleurs élèves d'un Lycée

- Quels sont les acteurs de cet évènement ?

Le Chef d'établissement et des élèves

- Où se déroule l'évènement ?

L'évènement se déroule au lycée

- A quel moment se déroule l'évènement (éventuellement) ?

A la fin d'un trimestre ou à la fin de l'année

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**
  - Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ?

Repérer un trésor à partir d'informations fournies

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

  \- Que décident de faire les acteurs ?

Les élèves décident de faire des recherches sur vecteurs et le repérage dans le plan.

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

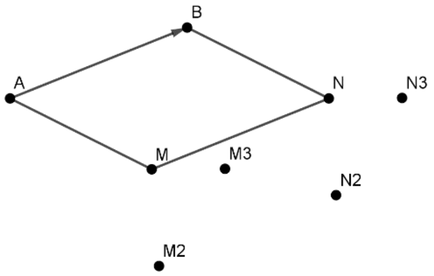
L'étude des vecteurs et le repérage sont l'objet de la leçon que nous allons découvrir aujourd'hui : Vecteurs et points du plan.

CORRIGES DES ACTIVITES

❖ **ACTIVITE 1**

1-

2- a)



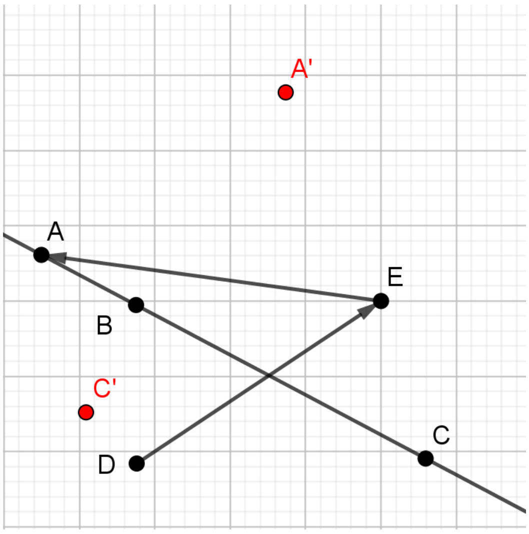
$ABNM$ est un parallélogramme

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$

Donc $N = t(M)$ donc t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$t_{\overrightarrow{AB}}(M2) = N2 \; et \; t_{\overrightarrow{AB}}(M3) = N3$

Corrigé de l'exercice de fixation



❖ **ACTIVITE 2**

Soit O un point du plan, et $\vec{u}$ un vecteur non nu.

Soit $M_1 \; et \; M_2$ deux points du plan tels que :

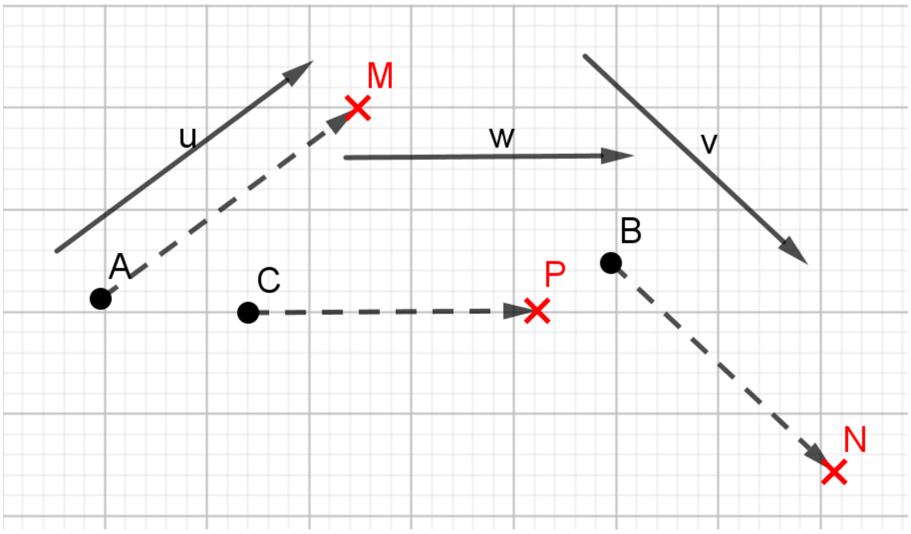
$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM_2} = \vec{u}$$

Alors $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = \vec{o}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{M_2M_1} = \vec{o}$

Donc $M_2 = M_1$

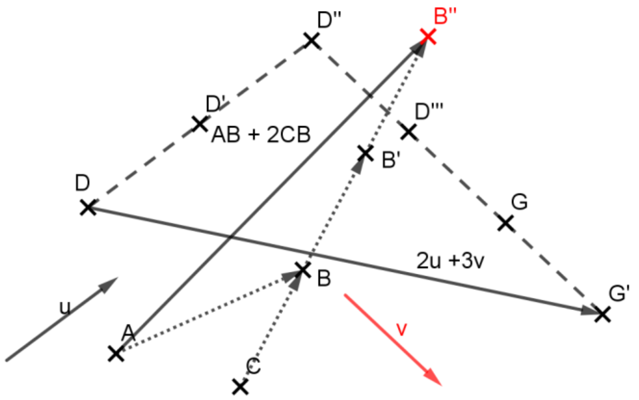
Il existe un point M et un seul tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>



❖ <u>ACTIVITE 3</u>

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs



<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

1- a) $\vec{u} = \vec{u} + \overrightarrow{ov}$ donc , $\vec{u}$ combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

b) $\vec{u} + \overrightarrow{2w}$ pas combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

c) combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coefficient 2 et -3

2- a) oui

b) non , présence de $\vec{v}$

c) non , présence de $\vec{v}$

❖ <u>ACTIVITE 4</u>

1- $a = -5$; $b = 2; c = \frac{1}{4}$; $d = -6$

2- a) $x_A = 2$; $x_B = -3$; $x_C = 4$; $x_D = -4$

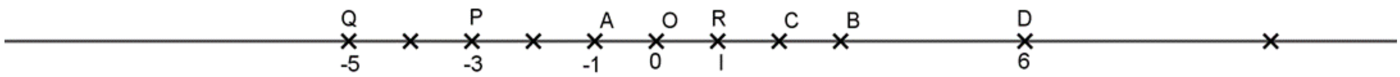
b) $x_B - x_A = -3 - 2 = -5$; $x_D - x_B = -4 - (-3) = -1$

$x_C - x_A = 4 - 2 = 2$; $x_D - x_A = -4 - 2 = -6$

c) $x_B - x_A = a$; $x_C - x_A = b$; $x_D - x_B \neq c$; $x_D - x_A = d$

d) $|x_B - x_A| = 5$; $|x_D - x_B| = 1$; $|x_D - x_A| = 6$

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>



3- a) $\overline{AB} = 4$; $\overline{AC} = 3$; $\overline{BD} = 3$

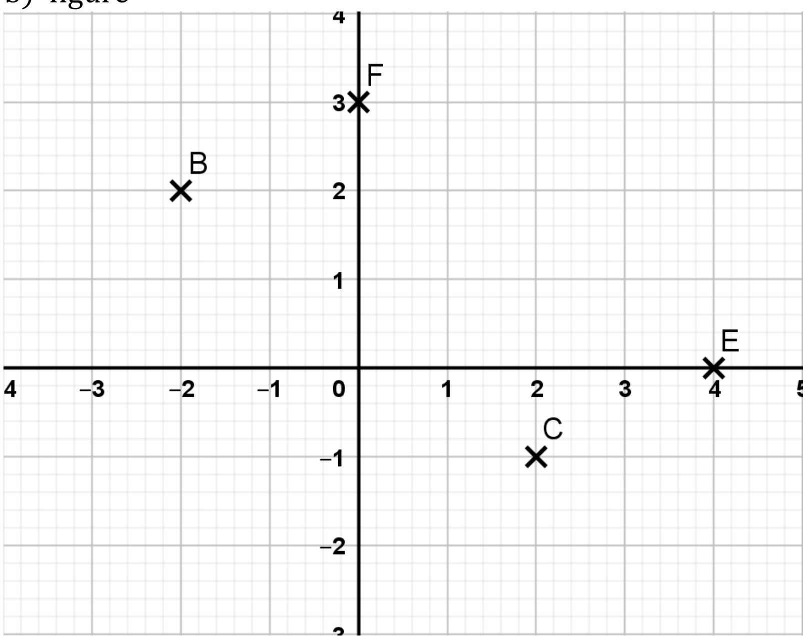
b) $\overline{PQ} = -2$

c) $d(A, B) = |x_B - x_A| = 4$; $d(P, Q) = |x_Q - x_P| = 2$

❖ **<u>ACTIVITE 5</u>**

1- a) O, I et J ne sont pas alignés
donc les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ ne sont colinéaires.

b) figure



c) les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ n'étant pas colinéaires, les points O I et J ne sont alignés donc (O, I, J) est un repère du plan.

__Corrigé de l'exercice de fixation__

1- les points $A, B\ et\ E$ ne sont pas alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}\ \ et\ \ \overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires d'où $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ et une base de v.

2- Idem

❖ __ACTIVITE 6__

a) $\overrightarrow{OH} = x\vec{\imath} \qquad et \qquad \overrightarrow{OK} = y\vec{\jmath}$

b) $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HK}$

$= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$ car $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OK}$

D'où $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

c) Soit $x, y, x'et\ y'$ des nombres réels tels que

On a : $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$

Donc : $(x - x')\vec{\imath} + (y - y')\vec{\jmath} = \vec{o}$ 1

Comme $\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath}$ ne sont pas colinéaires

Donc l'égalité 1 équivaut à $\begin{cases} x - x' = 0 \\ y - y' = 0 \end{cases}$, c'est à dire $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

__Corrigé de l'exercice de fixation__

vecteurs	coordonnées	Ecriture vectorielle
$\overrightarrow{AB}$	(6 ; 4)	$\overrightarrow{AB} = 6\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$
$\overrightarrow{AF}$	(0 ; 3)	$\overrightarrow{AF} = 3\vec{\imath}$
$\overrightarrow{OM}$	$(-2\ ;\ -1)$	$\overrightarrow{OM} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$
$\overrightarrow{BC}$	$(-2\ ;\ -5)$	$\overrightarrow{BC} = -2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$
$\overrightarrow{CE}$	$(-3\ ;\ -2)$	$\overrightarrow{CE} = -3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$
$\overrightarrow{CK}$	(0 ; 3)	$\overrightarrow{CK} = 3\vec{\jmath}$

❖ __ACTIVITE 7__

$\vec{u}\ \ et\ \ \vec{v}$, deux vecteurs non nuls du plan

$\vec{u}\ \ et\ \ \vec{v}$, sont colinéaires équivaut à il existe α et β réels non nuls.

$\vec{u}\ \ et\ \ \vec{v}$ sont tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{o}$ équivaut à . $\vec{u} = \frac{-\beta}{\alpha}\vec{v}$

En posant $\frac{-\beta}{\alpha} = \lambda$

On obtient : $\vec{u}\ \ et\ \vec{v}$ colinéaires équivaut à il existe $\lambda \in$ IR / $\vec{v} = \lambda\vec{u}$

Corrigé de l'exercice de fixation

1- Vrai
2- Vrai
3- Vrai

❖ **ACTIVITE 8**

$\vec{u}$ est un vecteur du plan , (A,B) et (C,D) deux représentants de $\vec{u}$

1- On a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$

Donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

D'où : $AB = CD$

2- La longueur de $\vec{u}$ $est\ AB$
3- La longueur de $\frac{1}{AB}\vec{u}$ est 1 car $(\frac{1}{AB} \times AB = 1)$

Corrigé de l'exercice de fixation

1- Vrai
2- Faux
3- Vrai

❖ **ACTIVITE 9**

1- Soit (A, B) un représentant de $\vec{u}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Rightarrow x = x_B - x_A \quad ; \quad y = y_B - y_A$

2- $\|\vec{u}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Corrigé de l'exercice de fixation

a) $\vec{u} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ $\quad \|\vec{u}\| = AB = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$
b) $\vec{u} = -5\vec{\jmath}$ $\quad \|\vec{u}\| = AB = \sqrt{(-5)^2} = 5$
c) $\vec{u} = 3\vec{\imath}$ $\quad \|\vec{u}\| = AB = \sqrt{3^2} = 3$

❖ **ACTIVITE 10**

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ on suppose que $\vec{u} = \delta\vec{v}$, $\delta\epsilon IR$

1. On a : $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ colinéaires car $\vec{u} = \delta\vec{v}$, $\delta\epsilon IR$.

Donc : $\begin{cases} x = \delta x' \\ y = \delta y' \end{cases} \quad \begin{matrix} y' \\ x' \end{matrix} \Big|$

$\begin{cases} xy' = \delta x'y' \\ x'y = \delta x'y' \end{cases}$

Addition membre à membre
$xy' + (-x'y) = 0$
$xy' - x'y = 0$

2. $xy' - x'y = 0$
   $xy' = x'y$

$\vec{u} \neq \vec{0}$ supposons que $y \neq 0$

Donc : $x' = \frac{xy'}{y}$

D'où : $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$

$= \frac{xy'}{y}\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$

$= \frac{xy'}{y}\vec{\imath} + \frac{yy'}{y}\vec{\jmath}$

$= \frac{y'}{y}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$

$\vec{v} = \frac{y'}{y}\vec{u}$

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ n'étant pas nuls , $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont donc colinéaires

Corrigé de l'exercice de fixation

1) $det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 4 \times 5 = -18$

2) $\vec{w}\binom{-1}{3}$ *et* $\vec{t}\binom{2}{-6}$ $\det(\vec{w};\vec{t}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$ donc $\vec{w}$ *et* $\vec{t}$ sont colinéaires

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4+3 \\ \frac{8}{3}+2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5+3 \\ \frac{10}{3}+2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 8 \\ \frac{16}{3} \end{pmatrix}$

b) $\det(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaire $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ sont des vecteurs directeurs de deux droites parallèles et puisque ces deux droites ont un point commun, donc elles sont confondues c'est à dire que A, B et C sont alignés.

- **<u>ACTIVITE 11</u>**

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

1) $\vec{u}+3\vec{v}\begin{pmatrix}11\\-16\end{pmatrix}$ $-\vec{u}+2\vec{w}\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$

2) $\propto\vec{u}+\beta\vec{v}\begin{pmatrix}\propto x+\beta x'\\\propto y+\beta y'\end{pmatrix}$

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

$\vec{w}=\vec{u}+2\vec{v}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\11\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\11\end{pmatrix}$

$\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\11\end{pmatrix}$

- **<u>ACTIVITE 12</u>**

$A(3\,;1)$ $B(-1\,;\,-2)$ $M(x\,;y)$

1) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-3\\-2-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$

2) A, B et M sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\det(AM,AB)=0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix}x-3 & -4\\y-1 & -3\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow -3x+4y+5=0$

L'ensemble des points M du plan tel que $A, B\ et\ M$ soient alignés est la droite dont une équation est $-3x+4y+5=0$.

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

1- (AB) : $A(4\,;3)\ et\ B(-1\,;2)$

St M(x ; y)

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-4\\2-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$

$M\in(AB)$ $\Leftrightarrow$ dét$\left(\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{AB}\right)=0$

$\Leftrightarrow$ $2x+y-11=0$

Une équation de $(AB)\ est$: $2x+y-11=0$

2- St $M(x\,;y)$ un point du plan

$\overrightarrow{RM}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{RM},\vec{v})=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix}x-2 & -3\\ y+1 & 2\end{vmatrix}=2x-4+3y+3=0$

❖ **<u>ACTIVITE 13</u>**

$(D): ax+by+c=0 \qquad (a\,;\,b)\neq(0\,;0)$

$(D'): a'x+b'y+c'=0 \qquad (a'\,;b')\neq(0\,;0)$

1) $\vec{u}\binom{-b}{a} \qquad \vec{u}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$

2) $(D)//(D')$ équivaut à $\quad \vec{u}\ \ et\ \ x'$ colineaires

équivaut à $\quad \det(\vec{u},\vec{u}')=0$

équivaut à $\quad -ba'+ab'=0$

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

1- $(D):\ y=2x+1$

$(D'):-2x+y=-1$

Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}\binom{1}{2}$

Un vecteur directeur de (D') est $\vec{u}'\binom{-1}{-2}$

On a $\vec{u}=-\vec{u}'$, donc (D)//(D')

2- Vecteur directeur de (D): $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+5\\ \frac{2}{3}-\frac{20}{3}\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\ -\frac{18}{3}\end{pmatrix}$ Soit $\overrightarrow{AB}\binom{6}{-6}$

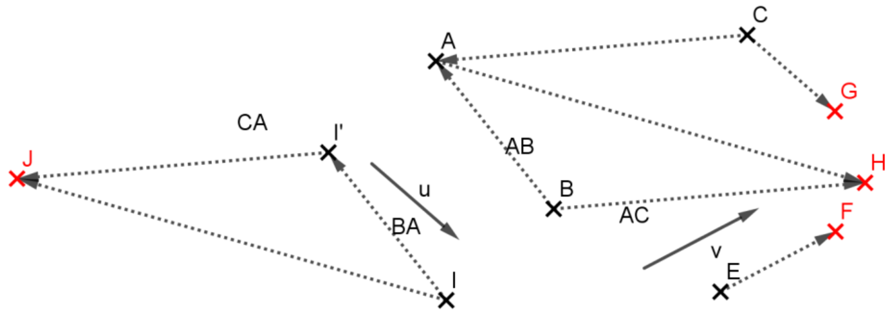
Un vecteur directeur de (D') est $\vec{u}\binom{1}{1}$

On a $\det(\overrightarrow{AB};\vec{u})=\begin{vmatrix}6 & 1\\ -6 & 1\end{vmatrix}=6+6=12\neq 0$

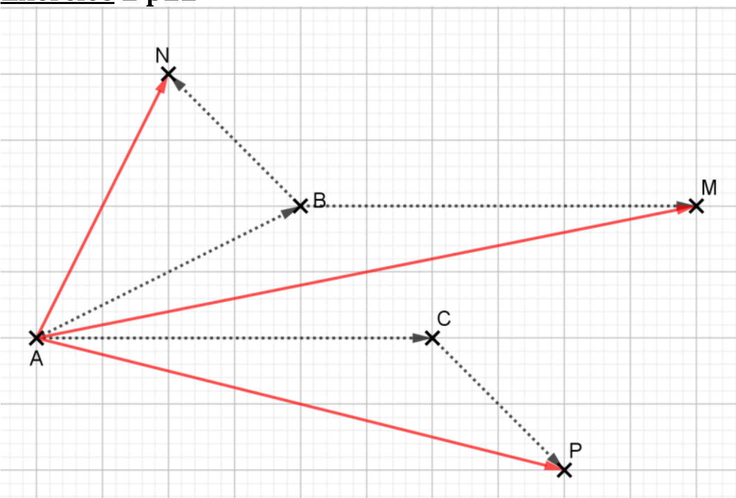
Donc $(D)\ et\ (D')$ ne sont pas parallèles

CORRECTIONS DES EXERCICES

Exercice 1p 22



Exercice 2 p22



❖ Exercice 3 P22

a) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$; b) $\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{JE}$; c) $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AK}$

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; e) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$; f) $\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC}$

❖ Exercice 4 P22

Si $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{v}$, alors $\begin{cases} \vec{v} = \frac{5}{2}\vec{u} \\ -\vec{v} = -\frac{5}{2}\vec{u} \\ \vec{v} = (-\frac{5}{2})(-\vec{u}) \end{cases}$

❖ Exercice 5 P22

a) $\frac{2}{5}\left(\vec{u}+\frac{1}{4}\vec{u}\right)=\frac{2}{5}+\frac{5}{4}\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{u}$

b) $\frac{3}{5}\left(10\vec{u}-\frac{5}{6}\vec{u}\right)=\frac{3}{5}+\frac{5}{6}\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{u}$

c) $2(-3\vec{u})+5\vec{v}=-6\vec{u}+5\vec{v}$

d) $0{,}5\left(2\vec{u}-\frac{3}{0{,}5}\vec{v}\right)=\vec{u}-3\vec{v}$

- **<u>Exercice 6</u> P22**

1.D ;

2.C ;

3 B (Dans l'exercice, il faut remplacer la proposition de la ligne 3 $B \rightarrow 2\overrightarrow{OA}$ par $B \rightarrow 2\overrightarrow{CB}$)

- **<u>Exercice 7</u> P22**

1- a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)-\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=\vec{0}-\vec{0}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{AO}$

2- $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}$

$$=4\overrightarrow{MO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$

$$=4\overrightarrow{MO}+\vec{0}$$

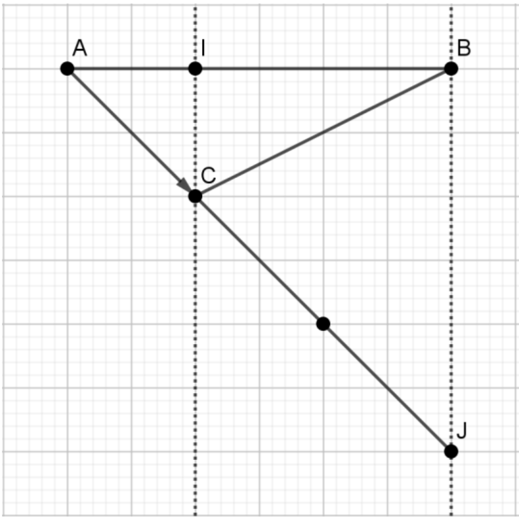
$$=4\overrightarrow{MO}$$

- **<u>Exercice 8</u> P22**

1.V ; 2.V ; 3.F

- **<u>Exercice 9</u> P22**

1- Construction



2- Démontrons que (IC)//(BJ)

On a : $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}\right)$$

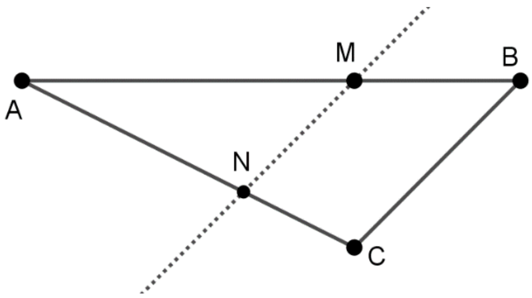
$$= \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$$

$$\overrightarrow{IC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires par conséquent les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.

__Exercice 10__ **P22**

1- Construction



2- On a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

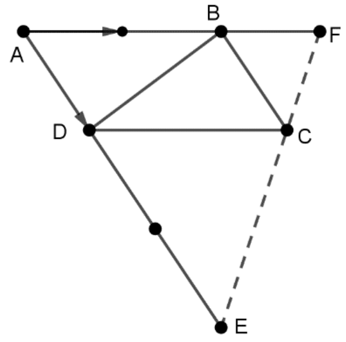
$$= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

Donc $(MN)//(BC)$

- **<u>Exercice 11</u> P22**

1-



2- $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$

$= 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

$= 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

3- Démontrons que $E, C \ et \ F$ sont alignés

De 2) On a : $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc $2\overrightarrow{CF} = -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

C.-à-d. $2\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EC}$

Donc les droites $(CF) \ et \ (EC)$ sont parallèles. De plus elles ont un point commun C, donc elles sont confondues ce qui traduit que E, C et F sont alignés

- **<u>Exercice 12</u> P23**

1- Dessin

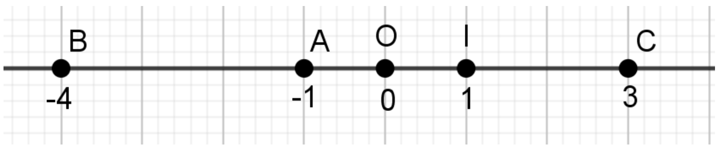
2- A → 3 ;

3- B → -2 ;

4- C → 3,5

- **<u>Exercice 13</u> P23**

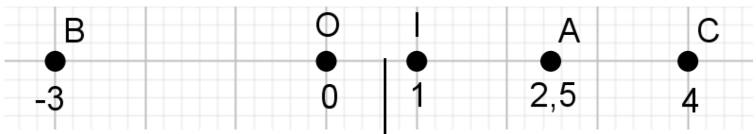
1- .



2- IA = 2 ; AC = 4 ; BI = 5 ; OB = 4 ; OC = 3

- **<u>Exercice 14</u> P23**

1- .



2-

3- $\overline{AB} = -3 - 2{,}5 = -5{,}5$

$AB = 5{,}5$

$\overline{BC} = 4 - (-3) = 7$

$BC = 7$

$\overline{AC} = 4 - 2{,}5 = 1{,}5$

$AC = 1{,}5$

4- $\overline{AB} + \overline{BC} = -5{,}5 + 7 = 1{,}5 = \overline{AC}$

$AB + BC = 5{,}5 + 7 = 12{,}5 > 1{,}5 = AC$

- **<u>Exercice 15</u> P23**

$\vec{u} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ $\vec{v} = -3(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}) + \vec{\jmath}$ $\vec{w} = 2(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{\imath}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

❖ <u>Exercice 16</u> P23

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{z}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

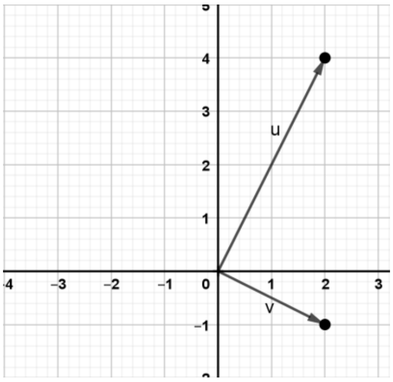
❖ <u>Exercice 17</u> P23

$\overrightarrow{OB}\binom{-4}{1}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}\binom{-4-3}{1+5}$ $\quad$ $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}\binom{-7}{6}$ $\quad$ $\overrightarrow{BA}\binom{7}{-6}$

❖ <u>Exercice 18</u> P23

1. .



2. $\overrightarrow{OM}\binom{4}{3}$ donc $M(4\,;3)$

$\overrightarrow{MN}=\vec{u}-\vec{v}$

$\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\vec{u}-\vec{v}$

$\overrightarrow{ON}=\vec{u}-\vec{v}+\overrightarrow{OM}$

$N\begin{pmatrix}2-2+4\\4+1+3\end{pmatrix}$

$N\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$

- ❖ <u>Exercice 19</u> **P23**

  $A(4\,;\,-3)$; $B(5\,;1)$ et $\vec{u}\binom{-3}{2}$

1. $\overrightarrow{AB}\binom{5-4}{1+3}$; $\overrightarrow{AB}\binom{1}{4}$

2. $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{NB}=\vec{u}$

$\binom{x-4}{y+3}=\binom{-3}{2}$ donc $M\binom{1}{-1}$

$\binom{a-5}{b-1}=\binom{-3}{2}$ donc $N\binom{2}{3}$

- ❖ <u>Exercice 20</u> **P23**

$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=2\vec{\imath}-5\vec{\jmath}\\ \vec{v}=-7\vec{\imath}-4\vec{\jmath}\end{array}\right\}$

1. $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}2&-7\\-5&-4\end{vmatrix}=-8-35=-43$
2. $\det(\vec{u},\vec{v})\neq 0$, donc $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

- ❖ <u>Exercice 21</u> **P23**

$\vec{u}\binom{1}{3}$, $\vec{v}\binom{-2}{5}$ et $\vec{w}\binom{6}{15}$

1. $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}1&-2\\3&5\end{vmatrix}=5+6=11\neq 0$; donc $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix}-2&-6\\5&15\end{vmatrix}=-30+30=-60=0$ donc $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont colinéaires.

- ❖ <u>Exercice 22</u> **P23**

  A(2 ; 3) ; B(5 ; 7) et C(-7 ; -9)

1. $\overrightarrow{AB}\binom{5-2}{7-3}$ $\overrightarrow{AB}\binom{3}{4}$
2. $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}3&-9\\4&-12\end{vmatrix}=-36+36=0$; $\overrightarrow{AB}\ \ et\ \ \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. A, B et C sont alignés.

- ❖ <u>Exercice 23</u> **P23**

A(1 ; 3) ; B(-2 ; 5) ; C(0 ; -1) et D(6 ; -5)

$\overrightarrow{AB}\binom{-2-1}{5-3}$ $\overrightarrow{AB}\binom{-3}{2}$; $\overrightarrow{CD}\binom{6-0}{-5+1}$ $\overrightarrow{CD}\binom{6}{-4}$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles

- **<u>Exercice 24</u> P23**

A (1 ; 3) ; B (-2 ; 5) et C (4 ; 5)

1. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2-1 \\ 5-3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix} 1-x_G \\ 3-y_G \end{pmatrix}$

$x_G = 1$; $y_G = \frac{13}{3}$

$G\left(1 ; \frac{13}{3}\right)$

2. $x_I = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$; $y_I = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{5+5}{2} = 5$

$I(1 ; 5)$

$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 5-3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{GA}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad A, I, G\ alignés.$

- **<u>Exercice 25</u> P24**

$\vec{u} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\vec{v} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ $\quad \|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\vec{w} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ $\quad \|\vec{w}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$\vec{x} = 2\vec{\imath}$ $\quad \|\vec{x}\| = \sqrt{2^2} = 2$

$\vec{y} = -3\vec{\jmath}$ $\quad \|\vec{y}\| = \sqrt{(-3)^2} = 3$

- **<u>Exercice 26</u> P24**

A (-19 ; 27) B (-3 ; -36) C (53 ; -3)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3+19 \\ -36-27 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 16 \\ -63 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = \sqrt{16^2 + (-63)^2} = \sqrt{256 + 3969}$

$AB = 65$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 53+19 \\ -3-27 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 72 \\ -30 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AC = \sqrt{72^2 + (-30)^2} = \sqrt{5184 + 900}$

$AC = 78$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 53+3 \\ -3+36 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 56 \\ 33 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad BC = \sqrt{56^2 + 33^2} = \sqrt{3136 + 1089}$

$BC = 65$

$$\left.\begin{aligned} AB = BC &= 65 \\ AC &= 78 \end{aligned}\right)$$

- **<u>Exercice 27</u> P24**

1.

$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ $\qquad\qquad$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{16+9} = 5$

2.

$\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{-3}{5}\end{pmatrix}$ $\qquad\qquad$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{16+9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{5}} = 1$ donc $\vec{v}$ est un vecteur unitaire

$\det(\vec{w},\vec{v}) = \begin{vmatrix}\frac{4}{5} & 4\\\frac{-3}{5} & -3\end{vmatrix} = 0$, donc $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *sont colinéaires*

$\det(\vec{w},\vec{v}) = \begin{vmatrix}\frac{4}{5} & -8\\\frac{-3}{5} & 6\end{vmatrix} = 0$, donc $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *sont colinéaires*

$\vec{w} = -\frac{5}{4}\vec{v}$, donc $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *sont colinéaires*

- **<u>Exercice 28</u> P24**

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC}$

D'où $M = B$

b) $\overrightarrow{2AM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$

D'où $M = D$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA}$

d) $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA}$

$3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$

$2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{CB} +$

$4\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$4\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

$4\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

On construit le point M dans ce cas.

1. Soit M un point du plan.

$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

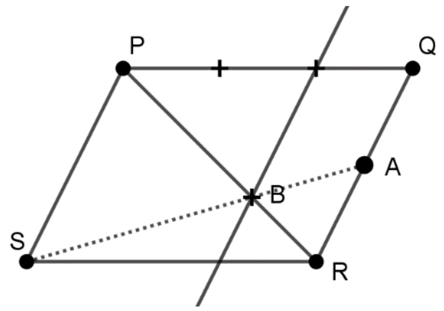
$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$ A, B et C alignés

Absurde car $ABCD$ est un parallélogramme.

Il n'existe donc aucun point M tel que $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

❖ **<u>Exercice 30</u> P24**



$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$

On sait que :

- Le quadrilatère PQRS est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$
- Le point A est le milieu du segment $[QR]$, donc $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

On a : $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SP}$, donc d'après l'égalité de Chasles : $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SP}$, d'où :

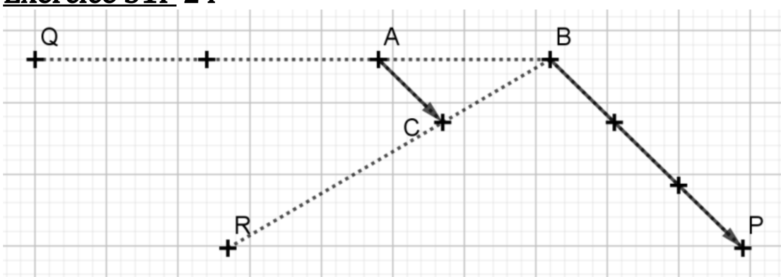
$\overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{SR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SP}$

On sait aussi que $\overrightarrow{PB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PR}$, donc d'après l'égalité de Charles : $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SB} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR}\right)$,

d'où : $\overrightarrow{SB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SR} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SP} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{SR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SP}\right)$.

Ainsi : $\overrightarrow{SB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AS}$. Par suite les points S, A et B sont alignés.

- **<u>Exercice 31P</u> 24**



Démontrons que : $R \in (BC)$

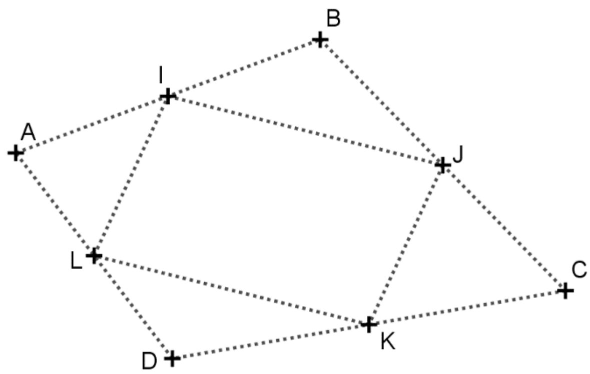
On a : $\overrightarrow{BQ} = -3\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP}$

Donc : $\overrightarrow{BR} = -3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

D'où : $\overrightarrow{BR} = 3\overrightarrow{BC}$

Ainsi les points B, C et R sont alignés.

- **<u>Exercice 32</u> P24**



On a : $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ d'après la propriété de la droite des milieux.

On a : $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MJ} - \overrightarrow{ML} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IK} - 2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IL} = \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{LI} = \vec{0}$

On en déduit que pour tout M du plan : $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{ML}$

- **<u>Exercice 33</u> P24**

ABC triangle

$\vec{u} = (1 + \sqrt{3})\overrightarrow{AB} - \sqrt{2}\overrightarrow{BC} = -(1 + \sqrt{3})\overrightarrow{BA} - \sqrt{2}\overrightarrow{BC}$

$\vec{v} = \sqrt{2}\overrightarrow{AB} + (1 - \sqrt{3})\overrightarrow{BC} = -\sqrt{2}\overrightarrow{BA} + (1 - \sqrt{3})\overrightarrow{BC}$

Ainsi dans le repère $(B, \overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BC})$ les coordonnées des vecteurs.

$\vec{u}\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\vec{v}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

On a : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -1-\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1-\sqrt{3} \end{vmatrix} = 1+\sqrt{3}-\sqrt{3}+3-2 = 0$

Les vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont donc colinéaires.

- ❖ **<u>Exercice 34</u> P24**

a) $\vec{u}\binom{1}{4}$ $\quad\quad$ $\vec{v}\binom{m}{2}$ $\quad$ $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2-4m$

$\vec{u}\ et\ \vec{v}$ colinéaires équivaut à $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Donc : $m = \frac{1}{2}$

Même démarche et on trouve

b) $m = 0$

c) $m \in \left\{\frac{9}{2}\ ;\ -\frac{9}{2}\right\}$

- ❖ **<u>Exercice 35</u> P24**

$$A(4) \quad ; \quad B\left(\frac{15}{2}\right) \quad ; \quad C(-1) \quad et \quad D\left(-\frac{11}{3}\right)$$

1) $\overline{AB} = \frac{15}{2} - 4 = \frac{7}{2}$; $\overline{BC} = -1 - \frac{15}{2} = -\frac{17}{2}$; $\overline{AB} = -\frac{11}{3} - 4 = -\frac{23}{3}$; $\overline{CA} = -1 - 4 = -5$

$\overline{AC} - \overline{AD} = 5 - \left(\frac{-23}{3}\right) = \frac{38}{3}$

$2\overline{OB} - \overline{BC} = 15 - \left(\frac{-17}{2}\right) = \frac{47}{2}$

2) Abscisse x du point M

a) $\overline{AM} = 3$ $\quad$ $équivaut$ à $x - 4 = 3$ $équivaut$ à $x = 7$

b) $2\overline{CM} + \overline{MA} = 1$ $\quad$ $équivaut$ à $2x + 2 + x - 4 = 1$ $équivaut$ à $x = 1$

c) $2\overline{OB} = 3\overline{AM}$ $\quad$ $équivaut$ à $2 + \frac{15}{2} = 3(x-4)$

$Donc$: $x = 9$

d) $0 \leq \overline{CM} \leq 2$ $\quad$ $équivaut$ à $0 \leq x + 1 \leq 2$

$équivaut$ à $\quad 1 \leq x \leq 1$

$équivaut$ à $\quad x = 1$

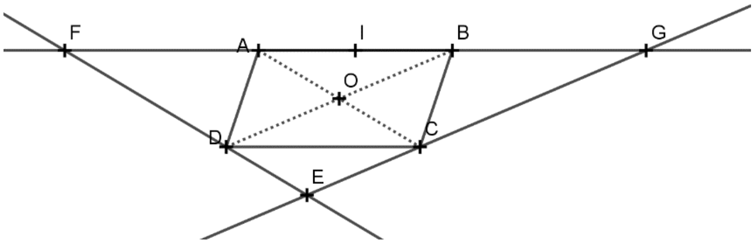
e) $3\overline{AM} = 5 \quad équivaut$ à $\quad 3(x-4) = 5$

$Donc: \; x = \frac{17}{3}$

f) $AM^2 = 4 \quad équivaut$ à $\quad (x-4)^2 = 4$

$équivaut$ à $\; x = 6 \quad ou \quad x = 2$

- <u>Exercice 36</u> P25



1. .

(DF)//(AC) et $(AF)//(DC)$

(DC)//(AB)

De même on montre que $BG \; = \; AB$ 2

1 et 2 $\Rightarrow AF \; = \; BG \; = \; AB$

2.

- (EC)//(DB) par hypothèse

(DE)//(OC)

Donc OCED est un parallélogramme

D'où $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DE}$

O milieu de (AC) , donc $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

- ACDF est un parallélogramme

D'où $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD}$

D'où $\overrightarrow{FE} = 2\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE}$

C a d $\overrightarrow{FE} = 3\overrightarrow{DE}$

3. Soit K le milieu de $[DC]$

Alors les points $I, O\ et\ K$ sont alignés. K, milieu de $[DC]$, $donc\ K\ milieeu\ de\ [EO]$

Car $OCED$ est un parallélogramme.

Les diagonales du parallélogramme OCED se coupent en leur milieu K, donc K, E et O sont alignés.

Ainsi, la droite (EO) est la parallèle à (BC) passant par le milieu K de (DC).

Or I, O, K sont alignés ; Donc I, O et E sont alignés

❖ **<u>Exercice 37</u> P25**

1-

$$x_G = \frac{-3+5+1}{3} = 1$$

$$y_G = \frac{1+3-7}{3} = -1$$

$G(1\ ;\ -1)$

2- $c = AB\ ;\ \ b = AC\ ;\ \ a = BC\ \ ;$

$AB = \sqrt{68}$ $\qquad AC = \sqrt{80}$ $\qquad BC = \sqrt{116}$

$a^2 = 116$ $\qquad b^2 = 80$ $\qquad c^2 = 68$

$GA^2 = 20\ \ ;\ \ \ GB^2 = 32\ \ ;\ \ \ GC^2 = 36$

On a : $GA^2 + GB^2 + GC^2 = 88$

$a^2 + b^2 + c^2 = 264$

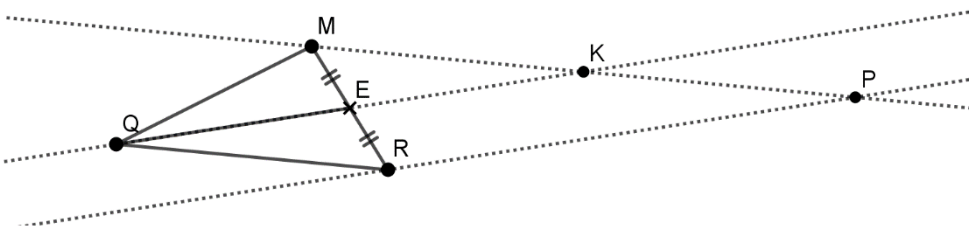
D'où $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

<u>Exercice 38</u> p25

1- $E\binom{3}{6}$ et $F\binom{6}{3}$ en prenant la relation $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$
2- $\overrightarrow{CE}\binom{12}{6}\ et\ \overrightarrow{CF}\binom{6}{3}$
3- On a $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$ donc les points C E et F sont alignés

<u>SITUATION D'EVALUATION</u>

<u>Exercice 39</u>p 25 (Erreur de numérotation)



$\{K\} = (QE) \cap (MP)$

1. On considère le triangle MPR, E est le milieu du côté [MR] et la droite (EK)//(PR). D'après la propriété de la droite des milieux, K est le milieu du segment [MP] donc $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{KP}$
2. On démontre que QKPR est un parallélogramme, on en déduit $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{KP}$

Des résultats 1 et 2 on déduit : $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{QR}$
On peut affirmer donc que cet élève a raison.

ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**

  - De quel évènement parle le texte ?

Une table ronde sur l'ensemble des nombres réels

  - Quels sont les acteurs de cet évènement ?

Un élève de seconde et ses camarades

  - Où se déroule l'évènement ?

Dans un lycée

  - A quel moment se déroule l'évènement (éventuellement) ?

Pas précisé

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

  - Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ?

Ces élèves sont surpris d'entendre que l'ensemble $]-1;\&[\cap\mathbb{Q}$ n'admet ni maximum , ni minimum

  - Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ?

Connaitre et appliquer les règles relatives à l'ensemble des nombres irrationnels

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

  - Que décident de faire les acteurs ?

Les élèves décident de faire des recherches sur l'ensemble des nombres irrationnels

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

L'étude des nombres réels, les valeurs absolues et la démonstration de quelques propriétés feront l'objet de cette leçon.

CORRECTION DES ACTIVITES

❖ **ACTIVITE 1**

1.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle en B donne

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 1^2 + 1^2$

D'où $AC = \sqrt{2}$

2. On suppose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, p et q entiers naturels premiers entre eux tels que $q \neq 0$.

a) $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ équivaut à $2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$

équivaut à $2q^2 = p^2$

b) $q \in IN$, donc $q^2 \in IN$
Ainsi $2q^2$ est un multiple de 2
D'où p^2 est pair (car $p^2 = 2q^2$)

c) Supposons qu'il existe $k \in IN$ tel que $p = 2k + 1$
Alors $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$
$= 2(2k^2 + 2k) + 1$
$k \in IN$, donc $k^2 \in IN\ et\ (2k^2 + 2k) \in IN$
Par conséquent $p^2 = (2k + 1)^2 = 2r + 1 \quad avec \quad r = 2k^2 + 2k$
Donc p^2 est impair.
Ainsi, la relation ® traduit que $2(p^2)$ qui est pair est aussi impair. Absurde !
Donc p est impair.

d) De même, on montre que q est pair.
D'où $\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2p'}{2q'} = \frac{p'}{q'}$
En réitérant le processus, on trouverait $p'\ et\ q'$ premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p'}{q'}$
D'où $2q'^2 = p'^2$
Comme 2 divise $2q'^2$, alors 2 divise p'^2
Donc $p'\ et\ q'$ ne sont pas premiers entre eux
Ce qui contredit l'hypothèse $p'\ et\ q'$ premiers entre eux.
Donc il n'existe pas de nombres entiers naturels $p\ et\ q$ $(q \neq 0)$
Tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Corrigé de l'exercice de fixation
1-Vrai ; 2-Faux ; 3-Vrai

❖ **ACTIVITE 2**
1- a) $a \leq b$ signifie que $b - a \geq 0$
b) $(c - b) + (b - a) = c - b + b - a = c - a$
c) $a \leq b$ signifie que $b - a \geq 0$
$b \leq c$ signifie que $c - b \geq 0$
alors $(b - a) + (c - b) \geq 0$ car la somme de 2 nombres positifs
donc $b - a + c - b \geq 0$
d'où $c - a \geq 0$
c'est-à-dire $c \geq a$

2- a) on a : $b - a = (b + c) - (a + c)$
$a \leq b$ signifie que $b - a \geq 0$
signifie que $(b + c) - (a + c) \geq 0 \qquad car \quad b - a = (b + c) - (a + c)$
signifie que $a + c \leq b + c$
Ainsi si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$

b) $a \leq b \qquad et \qquad c \leq d$
$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$
$b - a \geq 0 \qquad d - c \geq 0$

D'où $(b-a)+(d-c) \geq 0$ somme de nombres positifs.
Soit $(b+d)-(a+c) \geq 0$
D'où $b+d \geq a+c$
Ainsi
Si $a \leq b \quad et \quad c \leq d \quad alors \quad a+c \leq b+d$

3- a) si $0 \leq a \leq b \quad et \quad c \geq 0\,, \quad alors \quad ac \leq bc$
$a \leq b\,,\ alors \quad (b-a) \geq 0$
Soit $c \geq 0\,,\ on \quad a \quad (b-a)c \in IR$
Donc $(b-a)c \geq 0$
C'est-à-dire $bc - ac \geq 0$
Soit $ac \leq bc$

b) $0 \leq a \leq b$ signifie que $(b-a) \geq 0$
$0 \leq c \leq d$ signifie que $(d-c) \geq 0$

Corrigé de l'exercice de fixation

1. $0 \leq a \leq b\,, \quad alors \quad 0 \leq a^2 \leq ab \quad et \quad 0 \leq ab \leq b^2$
Donc $0 \leq a^2 \leq b^2$

2. $a \leq b \leq 0$
Alors $a^2 \geq ab \geq 0$ produit de 2 nombres négatifs.
Et $ba \geq b^2 \geq 0$
D'où $a^2 \geq b^2$
Ainsi si $a \leq b \leq 0 \quad alors \quad b^2 \leq a^2$

3. On suppose que $ab > 0$

$$ab > 0\,, \ alors \quad \frac{1}{ab} > 0$$

$$\frac{1}{ab} \times a \leq b \times \frac{1}{ab}$$

$$d'où \quad \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

❖ **ACTIVITE 3**

$$A = \{-3\,;\ -1\,;5\,;0\,;2\,;3\,;4\,;6\,;1\}$$

1- $-4 \ et -5 \ ;\ 3$
2- 7 et 7,1 ; 6

Corrigé de l'exercice de fixation

$$J =]-1\,;3[$$

1. Trois minorants de J : -2 ; -1,5 ; -1,9
2. Trois majorants de J : 3 ; 3,01 ; 3,001

❖ **ACTIVITE 4**

$A = [-3\,;2]$

1- a- L'ensemble des minorants de A: $]-\infty\,;\,-3]$
b- Le plus grand des minorants de A qui appartient à A est -3
c- C'est le seul

2- a- L'ensemble des majorants de A: $[2\,;\,+\infty[$
3- b- le plus petit des majorants de A est 2

Corrigé de l'exercice de fixation

L'uns des nombres entiers naturels de deux chiffres dans le système décimal est :
$\{10\,;11;12\,;13\,;14\,;15\,;16\,;\,17\,;18\,;19\,;20\,;\ldots;99\}$
Le minimum de cet ensemble est : 10
Son maximum est : 99

❖ **ACTIVITE 5**

$a \in IR$

1- Si $a < 0$, $a \leq -a$
Si $a > 0$, $-a \leq a$

2- La valeur absolue de $\boldsymbol{a}$ est le plus grand des nombres $-a$ et a.

Corrigé de l'exercice de fixation

a) $\left.\begin{array}{l}(\sqrt{10})^2 = 10\\ 3^2 = 9\end{array}\right\}$ $(\sqrt{10})^2 > 3^2$, $donc$ $\sqrt{10} > 3$, $donc$ $|3-\sqrt{10}|$
$= \sqrt{10} - 3$

b) $|\pi - 3| = \pi - 3$

c) $\left|1 - \frac{1}{n}\right| = 1 - \frac{1}{n}$ si $n \geq 1$
$= \frac{1}{n} - 1$ si $0 < n < 1$

❖ **ACTIVITE 6**

a et b $deux$ $nombres$ $reels$

1- $\left.\begin{array}{l}si\ \ a \leq 0\ ,\quad |a|\ est - a\ \ qui\ eest\ positif\\ si\ \ a \geq 0\ ,\quad |a| = a\end{array}\right\}$ $d'où$ $|a|$

2- Si $a = 0$, alors $|a| = 0$
Si $|a| = 0$, alors soit $a = 0$ ou $-a = 0$, c'est-à-dire $a = 0$.
Ainsi $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

3- Si $a \leq 0$, alors $-a \geq 0$
Donc $|a| = -a$ et $|-a| = -a$
D'où $|a| = |-a|$

Si $a \geq 0$, alors $-a \leq 0$
Donc $|a| = a$ et $|-a| = -(-a) = a$

D'où $|a| = |-a|$
Par conséquent $|a| = |-a|$

Corrigé de l'exercice de fixation

1- a) $|x| = 2$ $équivaut$ à $x = 2\ ou\ x = -2$
b) $|x| = |y-2|$ équivaut à $x = y - 2\ ou\ x = -(y-2) = 2 - y$
c) La valeur absolue d'un nombre $a - b$ est le plus des réels $a - b\ ou\ b - a$.

2- a) $|-3{,}1| = 3{,}1$; b) $|\pi| = \pi$; c) $|14 - 26| = 26 - 14$; d) $|\sqrt{3} - 4| = 4 - \sqrt{3}$;
e) $|2 - \sqrt{6}| = \sqrt{6} - 2$; f) $|\sqrt{3} - 3| = 3 - \sqrt{3}$.

Corrigé de l'exercice de fixation

a) $|x-2|\ |2+\sqrt{5}| = \left|(x-2)\left(2+\sqrt{5}\right)\right|$ b) $\left|\frac{5-3\sqrt{3}}{6-\sqrt{2}}\right| = \frac{|5-3\sqrt{3}|}{|6-\sqrt{2}|} = \frac{3\sqrt{3}-5}{6-\sqrt{2}}$

c) $|3x - 5| \leq |3x| + |-5|$

- **ACTIVITE 7**

1- $x_B - x_A = 1 - (-2) = 3$; $x_B - x_C = 1 - 4 = -3$; $x_C - x_A = 4 - (-2) = 6$
$x_M - x_A = x - (-2) = x + 2$.

2- $x_B - x_A > 0$; $x_B - x_C < 0$; $x_C - x_A > 0$; et le signe de $|x+2|$?
$|x_B - x_A| = |3| = 3$; $|x_B - x_C| = |-3| = 3$; $|x_C - x_A| = |6| = 6$; $|x_M - x_A| = |x + 2|$

Corrigé de l'exercice de fixation

a) $d(x\,;y) = d(-5\,;\,-1) = |-5-(-1)| = |-4| = 4$
b) $d(x\,;y) = d(-8\,;\,3) = |-8-3| = |-11| = 11$
c) $d(x\,;y) = d(9\,;\,5) = |9-5| = |4| = 4$

- **ACTIVITE 8**

1- $|x-2| = 3$ équivaut à $x - 2 = 3\ ou\ x - 2 = -3$
équivaut à $x = 5\quad ou\quad x = -1$

2- L'ensemble E des solutions dans l'équation sont $\{5\,;\,-1\}$

Corrigé de l'exercice de fixation

a) $|x-1| = 5$ équivaut à $x - 1 = 5\quad ou\quad x - 1 = -5$
équivaut à $x = 6\quad ou\quad x = -4$
$S_{IR} = \{6\,;\,-4\}$

b) $|x+3|=2$ équivaut à $\quad x+3=2 \quad ou \quad x+3=-2$

équivaut à $\quad x=-1 \quad ou \quad x=-5$

$$S_{IR}=\{-1\,;\,-5\}$$

c) $|2x-5|=-1$

$$S_{IR}=\emptyset \quad \forall a \in IR \quad |a| \geq 0$$

3- $d(x\,;5)=6$ $\quad équivaut$ à $\quad |x-5|=6$

$équivaut$ à $\quad x-5=6 \;\; ou \;\; x-5=-6$

$équation$ à $\quad x=11 \;\; ou \;\; x=-1$

Les valeurs pour lesquelles $\quad d(x\,;5)=6 \quad sont \;\; 11 \;\; et \; -1$

- ❖ **ACTIVITE 9**

1-

2- a) Résoudre graphiquement l'équation $|x-a|=r$, c'est trouver les nombres x tels que la distance de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{x}$ est égale à $\boldsymbol{r}$.

b)

- Si $r<0$, l'équation $|x-a|=r$ n'a pas de solution.
- Si $r=0$, l'équation $|x-a|=0$ a pour solution $x=a$.
- Si $r>0$, l'équation $|x-a|=r$ a pour ensemble de solution $\{a+r\,;a-r\}$.

Corrigé de l'exercice de fixation

a) $|x+2|=5$

L'ensemble des solutions $\{-3\,;7\}$

b) $|x-5|=1$

L'ensemble des solutions $\{4\,;6\}$

c) $|2-x|=5$

L'ensemble des solutions $\{-3\,;7\}$

d) $|x+4|=0$

$|x-(-4)|=0$

L'ensemble des solutions $\{-4\}$

e) $|x-5|=-2$ aucune solution.

- **ACTIVITE 10**

(I): $|x-3| \leq r$

1- $|x-3| \leq r$ $\text{\textit{équivaut}}$ à $-r \leq x-3 \quad ou \quad x-3 \leq r$

$\text{\textit{équivaut}}$ à $3-r \leq x \quad ou \quad x \leq r+3$

$S_I = [3-r\,;\,+\infty[\;\; ou \;\;]-\infty\,;r+3]$

$S_I = [3-r\,;r+3]$

Corrigé de l'exercice de fixation

a) $|x-2| \leq 5$ $\quad [2-5\,;5+2]$

$[-3\,;7]$

b) $|x+7| \leq 3$ $\text{\textit{équivaut}}$ à $|x-(-7)| \leq 3$ $\quad [-7-3\,;\,-7+3]$

$[-10\,;\,-3]$

c) $|x-3| < -1$ $\quad pas\ de\ solution$

d) $|x+4| \leq 0$ $\text{\textit{équivaut}}$ à $|x-(-4)| \leq 0$

$\text{\textit{équivaut}}$ à $x-(-4) = 0$

$\text{\textit{équivaut}}$ à $x = -4$

- **ACTIVITE 11**

$x \in IR$, $\quad |3-7| \leq 3$

2- Résoudre graphiquement limage $|x-a| \leq r$, c'est trouver les nombres x tels que la distance de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{x}$ est inférieure ou égale à $\boldsymbol{r}$.

b)

- $r < 0$ $\quad |x-a| \leq r$ $\quad pas\ de\ solution$
- $r = 0$ $\quad |x-a| < 0$ $\quad seule\ solution\ \boldsymbol{a}$
- $r > 0$ $\quad |x-a| < r$ $\quad [a-r\,;a+r]$

Corrigé de l'exercice de fixation

a) $|x+1| \leq 5$ $\text{\textit{équivaut}}$ à $|x-(-1)| \leq 5$

CORRECTION DES EXERCICES

- **Exercice 1 P38**

1- Vrai ; 2- Faux ; 3- Faux ; 4- Faux

Exercice 2 P38

On sait que $\sqrt{\mathbf{2}}$ est irrationnel.

Démontrons que $1+\sqrt{2}$ est irrationnel.

- Supposons que $1+\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.

C'est-à-dire qu'il existe deux nombres entiers naturels p et q

Tels que $1+\sqrt{2}=\frac{p}{q}$

Alors $\sqrt{2}=\frac{p}{q}-1$

Donc $\sqrt{2}=\frac{p-q}{q}$

Ainsi $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel – Absurde.

Donc $1+\sqrt{2}$ est irrationnel.

$$1+\sqrt{2}=\frac{p}{q} \qquad p\Lambda q=1$$
$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}-1$$
$$\sqrt{2}=\frac{p-q}{q}$$
$$2q^2=(p-q)^2$$
$$=p^2-2pq+q^2$$

$$p^2-2pq+q^2=0$$
$$\Delta'=q^2+q^2$$
$$\Delta'=2q^2$$

$$p_1=\frac{2q+\sqrt{2}q}{1} \qquad \frac{p}{q}=$$
$$p_2=\frac{2q-\sqrt{2}q}{1} \qquad \frac{p}{q}=\frac{q\left(2+\sqrt{2}\right)}{q}$$

Supposons que $1+\sqrt{2}$ est irrationnel.

$$1+\sqrt{2}=\frac{p}{q}$$
$$\sqrt{2}=\frac{p-q}{q}$$
$$2q^2=(p-q)^2$$
$$p-q\ est\ pair$$
$$p-q=2k$$
$$p=q+2k$$

$$\sqrt{2}=\frac{q+2k-q}{q}=\frac{2k}{q}$$
$$\sqrt{2}=\frac{2k}{q}=2\left(\frac{k}{q}\right)$$

On veut démontrer que $1+\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel sachant que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

On suppose que $1+\sqrt{2}$ est rationnel.

C'est-à-dire $1+\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, p et $q$entiers naturels tels que $\frac{p}{q}$ est irréductible.

Alors $\sqrt{2}=\frac{p}{q}-1=\frac{p-q}{q}$

- **<u>Exercice 3</u> P38**

Démontrons que $\sqrt{5}$ n'est pas un nombre rationnel.

Supposons que $\sqrt{5}$ est un nombre rationnel.

Alors il existe deux nombres relatifs $a\ et\ b$ tels que $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}$ étant irréductible.

$\sqrt{5} = \dfrac{a}{b}$ $\qquad a = 0 \quad a^2 = 0$

$5b^2 = a^2$ $\qquad a = 1 \quad a^2 = 1$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$5b^2$	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5

La seule possibilité pour les derniers chiffres de $a\ et\ b$ est 5, par conséquent $a\ et\ b$ seraient multiples de 5, ce qui contredit $\frac{a}{b}$ irréductible donc $\sqrt{5}$ est irrationnelle.

<u>Exercice 4</u>

1- Justifions que si $0 \leq a \leq b\ alors\ \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Soient a et b deux nombres réels tels que $0 \leq a \leq b$

Supposons que $\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0$

On a : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq 0$ car $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \geq 0$

Donc $a - b \geq 0$ c'est-à-dire $a \geq b$ ce qui est contraire à notre hypothèse donc $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \leq 0$ par conséquent $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ d'où si si $0 \leq a \leq b\ alors\ \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

2- Justifions que si $0 \leq a \leq 1\ alors\ a^2 \leq a$

Soit a un nombre réel tel que $0 \leq a \leq 1$

En multipliant chaque membre de cette inégalité par $a \geq 0$, on obtient $a^2 \geq a$ d'où si $0 \leq a \leq 1\ alors\ a^2 \leq a$

- **<u>Exercice 5</u> P38**

1- On dit qu'un nombre réel ***M*** est un majorant de ***E*** si ***M*** est supérieur ou égal à tous les éléments de ***E***.

2- On dit qu'un nombre réel ***m*** est un minorant de ***E*** si ***m*** est inférieur ou égal à tous les éléments de ***E***.

- **<u>Exercice 6</u> P38**

1- F ; 2- F ; 3- V ; 4- V ; 5- V

- **<u>Exercice 7</u> P39**

1- a) $M\ est\ un\ majorant\ de\ F$

b) $m\ est\ un\ minorant\ de\ F$

2- a) $\forall x \in A, \quad x < 5$

b) $\forall x \in A, \ -2 < x$

- **Exercice 8 P39**

1- F ; 2- V ; 3- F ; 4- F ; 5- F ; 6- V

- **Exercice 9 P39**

a) $\forall x \in F\,, \qquad x \leq 4$

b) $\forall x \in F\,, \quad -\sqrt{3} \leq x$

- **Exercice 10 P39**

- Les majorants de $[0\,;1] \cap Q$ $appartient$ à $[1\,;\,+\infty[$
- Les majorants de $[0\,;1] \cap Q$ $appartient$ à $]-\infty\,;0]$

* Les majorants de $]0\,;1[\cap Q$ $appartient$ à $]1\,;\,+\infty[$

* Les minorants de $]0\,;1[\cap Q$ $appartient$ à $]-\infty\,;0[$

Exercice 11 P 39

Ensemble	$]-3\,;2[$	$[-4\,;\,+\infty[$	$[-2\,;4]$	$]-\infty\,;3]$
Ensemble. des majorants.	$[2\,;\,+\infty[$	—	$[4\,;\,+\infty[$	$[3\,;\,+\infty[$
Ensemble. des minorants.	$]-\infty\,;\,-3]$	$]-\infty\,;\,-4]$	$]-\infty\,;\,-2]$	—

- **NB : (Exercice 11 P39)** **dans cet exercice, il est marqué $D = [-\infty\,;3[$**

- **Exercice 12 P39**

1- $\{0\}$
2- Le minimum de IN est 0.

- **Exercice 13 P39**

$A = \{-2\,;1\,;0\,;4\} \qquad B =]-1\,;2[$

- $\begin{cases} le\ minimum\ de\ A\ est\ -2 \\ le\ maximum\ de\ A\ est\ 4 \end{cases}$

- $\begin{cases} le\ minimum\ de\ B\ n'existe\ pas \\ le\ maximum\ de\ B\ n'existe\ pas \end{cases}$

- **Exercice 14 P39**

a) $|\sqrt{3} - 4| = 4 - \sqrt{3} \qquad car\ \sqrt{3} < 4$
b) $|\sqrt{2} - 4| = 4 - \sqrt{2} \qquad car\ \sqrt{2} < 4$
c) Idem que a).
d) $|3 - \pi| = \pi - 3 \qquad car\ 3 < \pi$

- **Exercice 15 P39**

Si $a > b \quad alors\ |a - b| = a - b$
Si $a < b \quad alors\ |a - b| = -(a - b) = b - a$

- **<u>Exercice 16</u> P39**

1- a) les valeurs de x pour lesquelles $\sqrt{(x-4)^2}$ a un sens sont tous les nombres reels.

b) $\sqrt{(x-4)^2} = |x-4| =$ $\begin{cases} x-4 \ si \ x \\ -(x-4) \ si \ x \end{cases}$

2- a) $\sqrt{(x-4)^2} = |x-4| = x-4 \quad pour \quad x \geq 4$

$= -(x-4) \ pour \ x \leq 4$

- **<u>Exercice 17</u> P39**

- $d(A,C) = 3$; $d(C;D) = 4$
- $d(B;D) = 3$; $d(B;C) = 7$

- **<u>Exercice 18</u> P40**

a) $|x+3| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-(-3)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-2\,;\,-4\}$

b) $|x-2| = -3 \ \ ensemble \ des \ solutions \ : \ \emptyset$

c) $|x-4| = 0 \quad \Leftrightarrow \ x = 4$

d) $|x+5| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad |x-(-5)| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-3\,;\,-7\}$

- **<u>Exercice 19</u> P40**

a) $|x-3| \leq 2 \quad équivaut \ à \ \ d(3\,;x) \leq 2$

$équivaut \ à - 2 + 3 \leq x \leq 2 + 3$

$équivaut \ à \ \ 1 \leq x \leq 5$

L'ensemble des solutions est $[1\,;5]$

b) $|1+x| < -2 \ \ l'ensembledes \ solution \ est \ \ \emptyset \ \ car \ \forall x \in IR\,, |x| \geq 0$

c) $|7+x| < 4 \quad équivaut \ à \ \ |x-(-7)| < 4$

$équivaut \ à \ -4-7 < x < 4-7$

$équivaut \ à - 11 < x < -3$

L'ensemble des solutions est $]-11\,;\,-3[$

d) $|x+3| < 3 \ \ equivaut \ à \ \ |x-(-3)| < 3$

$équivaut \ à \ -3-3 < x < 3-3$

$équivaut \ à \ -6 < x < 0$

L'ensemble des solutions est $]-6\,;0[$

- **<u>Exercice</u> 20 P40 $\boldsymbol{Ecrire \ \ d|x-3| = 3}$**

a) $|x+4| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad |x-(-4)| = 2$

$\Leftrightarrow d(-4\,;x) = 2$

Donc $x = -4+2 \ \ ou \ x = -4-2$

C'est-à-dire $x = -2 \ \ ou \ x = -6$

D'où $S_{IR} = \{-2\,;\,-6\}$

b) $|x-3|=-1$ *pas de solution*
c) $|x+5|=-1$ *pas de solution*
d) $|1-x|=3$ *signifie que* $d(1\,;x)=3$
C'est-à-dire $x=1+3$ *ou* $x=1-3$
Donc $x=4$ *ou* $x=-2$
D'où $S_{IR}=\{-2\,;4\}$

<u>Exercice 21</u> P40 **Remarque : utilise la méthode de d) pour a, b et c.**
a) $|x+2|<1 \Leftrightarrow |x-(-2)|<1$
$\Leftrightarrow d(-2\,;x)<1$
$\Leftrightarrow -1+(-2)<x<1+(-2)$
$\Leftrightarrow -3<x<-1$
Donc l'ensemble des solutions est $]-3\,;\,-1[$

b) $|x-3|<2 \Leftrightarrow d(3\,;x)$
$\Leftrightarrow -2+3<x<2+3$
$\Leftrightarrow 1<x<5$
L'ensemble des solutions est]1 ; 5[

c) $|3-x|\leq 3 \Leftrightarrow |x-3|\leq 3$
$\Leftrightarrow d(3\,;x)\leq 3$
$\Leftrightarrow -3+3\leq x\leq 3+3$
$\Leftrightarrow 0\leq x\leq 6$
L'ensemble des solutions est [0 ; 6]

d) $|2-x|\leq 5$ *équivaut* à $|x-2|\leq 5$
équivaut à $d(2\,;x)\leq 5$

$S_{IR}=[-3\,;7]$

<u>Exercice 22</u> P40

Supposons que $]-\infty\,;b[$ admet un maximum M ; alors $M\in\,]-\infty;b[$ et $\forall\, x\in\,]-\infty\,;b[;x\leq M$ donc $M<b$

D'où $2M<M+b$ ou encore $M<\frac{M+b}{2}$

De $M<b$ on montre que $\frac{M+b}{2}<b$ c'est-à-dire $\frac{M+b}{2}\in\,]-\infty\,;b[$ ainsi M n'est pas le maximum de l'intervalle $]-\infty\,;b[$ par conséquent cet intervalle n'admet pas de maximum

<u>Exercice 23</u> P40
Soit a *et* b deux entiers relatifs.
Si $a+b\sqrt{2}=0$, *alors* $b\sqrt{2}=-a.$
- Si $b=0$, *alors* $a=0$

D'où $a+b\sqrt{2}=0 \Rightarrow a=b=0$
- Si $b\neq 0$, *alors* $b\sqrt{2}=-a$ *devient* $\sqrt{2}=\frac{-a}{b}$

Ainsi $\sqrt{2}$ serait le cotient de deux enteirs relatifs, donc rationnel
Ce qui contredit que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Alors $a + b\sqrt{2} = 0$, $alors$ $a = b = 0$.
Conclusion : si $a + b\sqrt{2} = 0$ $alors$ $a = b = 0$.

<u>Exercice 24</u> P40
Soit $m\ et\ n$ deux réels strictement positifs.
Démontre que $\sqrt{(m+n)} < \sqrt{m} + \sqrt{n}$
$\sqrt{(m+n)}$ et $(\sqrt{m} + \sqrt{n})$ sont deux nombres reels positifs.
Je vais donc comparer leurs carrés.
On a : $\left(\sqrt{(m+n)}\right)^2 = m + n$
$(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2 = m + n + 2\sqrt{m} \times \sqrt{n}$
D'où $(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2 - \left(\sqrt{(m+n)}\right)^2 = 2\sqrt{m} \times \sqrt{n} > 0$
Donc $(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2 > \left(\sqrt{(m+n)}\right)^2$
Ainsi $\sqrt{m} + \sqrt{n} > \sqrt{m+n}$

<u>Exercice 25</u> P40
$$A(x) = \frac{x^2}{x+2} \quad pour \quad x \neq -2$$
On a : $|A(x)| = \frac{x^2}{|x+2|}$
Si $|x| < 1$ c'est-à-dire si $-1 < x < 1$
Alors $1 < x + 2 < 3$
Donc $1 < |x + 2| < 3$
D'où $\frac{1}{3} < \frac{1}{|x+2|} < 1$
Par consequent, on aura
$$|A(x)| = \frac{x^2}{|x+2|} < x^2$$
On sait que $\forall x \in IR,\ si|x| < 1,\ alors\ x^2 < |x|$
Donc $|A(x)| = \frac{x^2}{|x+2|} < x^2 < |x|$
C'est-à-dire $|A(x)| < |x|$

<u>Exercice 26</u> P40
$a\ et\ b$ sont des nombres réels

Démontrons que $2ab = a^2 + b^2$
On a : $0 \leq (a - b)^2$, c'est-à-dire $0 \leq a^2 - 2ab + b^2$
Soit $2ab \leq a^2 + b^2$

On a : $(|a| - |b|)^2 \geq 0$
$|a|^2 + |b|^2 - 2|a| \times |b| \geq 0$
Or $|a|^2 = a^2$, $|b|^2 = b^2$ et $|a| \times |b| = |a \times b|$
Donc on a : $a^2 + b^2 - 2|a \times b| \geq 0$
Soit $2|ab| \leq a^2 + b^2$

<u>Exercice 27</u> P40

1- On a : $a = (a - b) + b$

Alors $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$

Donc $|a| \leq |a - b| + |b|$

Ainsi $|a| - |b| \leq |a - b|$

D'après 1)

$|a| - |b| \leq |a - b|$

Si $|a| \geq |b|$ $alors$ $|a| - |b| \geq 0$; $\big||a| - |b|\big| = |a| - |b|$

Donc $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

Si $|a| \leq |b|$, c'est-à-dire $|a| - |b| \leq 0$

Alors $\big||a| - |b|\big| = |b| - |a|$

Donc $|b| - |a| \leq |b - a|$ $en\ appliquant$ 1)

Or $|b - a| = |a - b|$

Donc $|b| - |a| \leq |a - b|$

D'où $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

Par conséquent, pour tous réels $a\ et\ b$

$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

<u>Exercice 28</u> P40

$AB = 1$; $AC = 5$; $BC = 4$

$AB + BC = 1 + 4 = 5 = AC$

$AB + BC = AC$

<u>Exercice 29</u> P40

1- a) $d(A\,;M) = |x + 3|$

b) $d(B\,;M) = |x - 8|$

2- La distance entre **A** et **M** est inférieure ou égale à **5**, s'écrit $|x + 3| \leq 5$

Déterminer les valeurs de $\boldsymbol{x}$ qui satisfont cette inégalité revient à résoudre l'inéquation $|x + 3| \leq 5$

C'est-à-dire $-3 - 5 \leq x \leq -3 + 5$

Soit $-8 \leq x \leq 2$

Les valeurs recherchées sont les nombres réels x tels que $x \in [-8\,;2]$

3- $E = [-8\,;2]$

L'ensemble des majorants de E est $[2\,;\ +\infty[$

L'ensemble des minorants de E est $]-\infty\,;\ -8]$

Le maximum de E est 2

Le minimum de E est -8

<u>Exercice 30</u> P40

$|x| = 1$ équivaut à $x = 1$ ou $x = -1$; $S_{IR} = \{-1\,; 1\}$
$|x - 3| = 0$ équivaut à $x - 3 = 0\,, soit\ \ x = 3$; $S_{IR} = \{3\}$
$|x| + 1 = 3$ équivaut à $|x| = 2$
équivaut à $x = 2$ ou $x = -2$; $S_{IR} = \{2\,;\, -2\}$
$|x + 2| + 2 = 0$ équivaut à $|x + 2| = -2$; $S_{IR} = \emptyset$
$]-\infty\,;\, -3[\, \cup\,]7\,;\, +\infty[$
$|2x - 4| = 6$ équivaut à $|x - 2| = 3$; $S_{IR} = \{5\,;\, -1\}$
$|x + 3| = x + 3$ équivaut à $0 \leq x + 3$; $S_{IR} = [-3\,;\, +\infty[$

<u>Exercice 31</u> P40

1-

x	$-\infty$	-3 $+\infty$	2
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$\lvert x-2\rvert + \lvert x+3\rvert$	$-2x-1$	5	$2x+1$

2- (E) : $|x - 2| + |x + 3| = 4$
Sur $]-\infty\,;\, -3]$
(E) devient $-2x - 1 = 4$, soit $x = \frac{-5}{2}$; $S = \left\{\frac{-5}{2}\right\}$
Sur $[-3\,; 2]$
$(E)\ devient\ \ 5 = 4$; $S = \emptyset$
Sur $[2\,;\, +\infty[$
$(E)\, devient\ \ 2x + 1 = 4\,, soit\ \ x = \dfrac{3}{2}$; $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

$x \in\,]-4\,; 8[$ se traduit par $|x - 4| < 4$
$x \in\,]-\infty\,; 2[\, \cup\, [4\,;\, +\infty[$ se traduit par

<u>Exercice 32</u> P40

a- $|1 - 3x| = 6\ a\ pour\ ensemble\ solution\ S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-5}{3}\ ;\ \frac{7}{3}\right\}$
b- $|2x - 6| = 4\ a\ pour\ ensemble\ solution\ S_{\mathbb{R}} = \{1; 5\}$
c- $|x + 4| \leq 2\ a\ pour\ ensemble\ solution\ \left[-6;-2\right]$
d- $|1 - 5x| < 5\ a\ pour\ ensemble\ solution\ S_{\mathbb{R}} = \left]-\dfrac{4}{5}; \dfrac{6}{5}\right[$

<u>Exercice 33</u> P41

Soit $\boldsymbol{n}$ un entier strictement positif.
Soit $k \in IN^*\ tel\ que\ \ n = k^2$
Alors $2n = 2k^2$
Supposons que $\boldsymbol{2n}$ s'écrire $\boldsymbol{a^2}$, avec $a \in IN^*$
Alors on a : $2k^2 = a^2$
Donc $\sqrt{2} = \frac{a}{k}$
D'où $\sqrt{\mathbf{2}}$ est un nombre rationnel. Contradiction

Donc si $\boldsymbol{n}$ est le carré d'un nombre entier strictement positif, alors $\boldsymbol{2n}$ n'est pas le carré d'un entier.

<u>Exercice 34</u> P41

1- Si $x \in]0\,;3[$ alors un majorant de A est 3
   si $x \in\ ]3\,;\ +\infty[; alors\ un\ majorant\ de\ A\ est\ x$
2- Si $x \in]0\,;3[$ alors un minorant de A est -3
   si $x \in\ ]3\,;\ +\infty[; alors\ un\ minorant\ de\ A\ est -3$

<u>Exercice 35</u> P41

a- L'intervalle $[-3\,;5]$ se traduit par$|x-1| \leq 4$.
b- L'intervalle $]-1;3]$ se traduit par $|x-1| < 2$
c- L'intervalle $]3;6]$ se traduit par $\left|x-\frac{3}{2}\right| < \frac{9}{2}$
d- L'intervalle $[-1\,;5]$ se traduit par $|x-2| \leq 3$

<u>Exercice 36</u> P41. Reformuler la consigne : « traduis chacune des inéquations ci-dessous à l'aide d'intervalles **ou de réunions d'intervalles »**

a) $|x| \leq 2\ signifie\ que\ -2 \leq x \leq 2$
   $signifie\ que\ \ x \in [-2\,;2]$

b) $|x| < 3\ signifie\ que\ \ -3 < x < 3$
   $signifie\ que\ \ x \in]-3\,;3[$

c) $|x+1| \leq 5\ signifie\ que\ -5 \leq x+1 \leq 5$
   $signifie\ que -6 \leq x \leq 4$
   $signifie\ que\ \ x \in [-6\,;4]$

d) $|x+3| < 5\ signifie\ que\ \ -5 < x+3 < 5$
   $signifie\ que\ -8 < x < 2$
   $signifie\ que\ \ x \in]-8\,;2[$

<u>Situation d'évaluation</u>

<u>Exercice 37</u> P41 (au lieu de 38)

$$K = [-3\,;\ -1]$$

a) K est majoré ; l'ensemble des majorants de K est $[-1\,;\ +\infty[$

b) K est minoré ; l'ensemble des minorants de K est $]-\infty\,;\ -3]$

le plus petit des majorants de K est -1 qui appartient à K
donc K admet un maximum qui est -1
le plus grand des minorants de K est -3 qui appartient à K
donc K admet un minimum qui est -3.

LEÇON 3: UTILISATION DES SYMÉTRIES ET TRANSLATIONS

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Pour dégager le contexte, on peut poser les suivantes :
  1) De quel évènement s'agit-il dans ce texte ?
  2) Où se déroule cet évènement ?
  3) Quels sont les acteurs de cet évènement ?

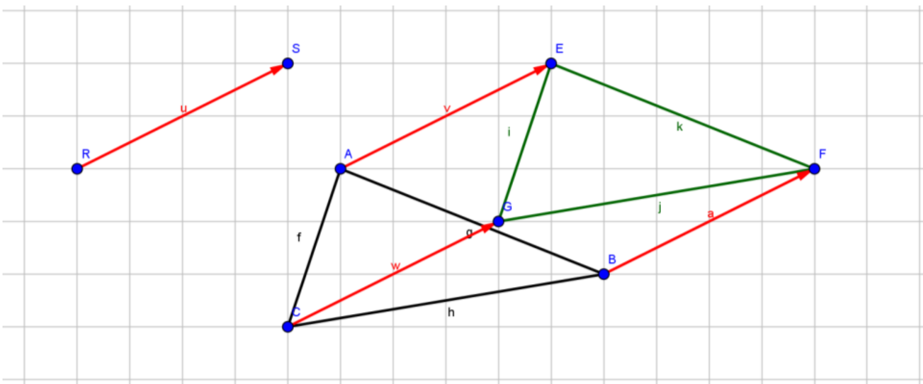
  Réponses attendues

  1) Il s'agit du maire d'une commune qui sollicite un agent des travaux publics pour mener une étude sur la réalisation d'un deuxième pont.
  2) Cet évènement se déroule dans une commune
  3) Les acteurs sont : le maire, l'agent des travaux publics et son fils, puis les élèves de sa classe.
- Pour dégager la circonstance, on peut poser la question suivante :
  Quel est le problème que les acteurs rencontrent-ils ?
  Réponse attendue
  Une partie de la figure est tachée par de l'encre, l'agent sollicite alors son fils à reconstruire entièrement cet angle. Celui-ci pose le problème à toute sa classe. Un élève affirme que ce problème peut être résolu en utilisant les symétries et translations.
- Pour dégager la tâche, on peut la question suivante :
  Que décident de faire ces élèves ?
  Réponse attendue
  Ils décident de s'organiser pour apprendre à construire, à démontrer et à rechercher un ensemble de points à l'aide des symétries et translations.
- Pour faire la synthèse et annoncer les notions mathématiques convoquées par la situation d'apprentissage
  Pour apprendre à construire, à démontrer et à rechercher un ensemble de points, nous allons étudier la leçon titrée « **Utilisation des symétries et translations** » selon le plan suivant :
  - *Connaître la propriété caractéristique des translations*
  - *Construire une figure en utilisant les propriétés des symétries orthogonales, des symétries centrales et des translations*
  - *Démontrer une propriété en utilisant une symétrie ou une translation*
  - *Trouver un ensemble de points en utilisant une symétrie ou une translation*

CORRECTIONS DES ACTIVITES

Activité 1

1.a)



b) soit $\vec{u}$ le vecteur de la translation. On a $t_{\vec{u}}(A)=E \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}=\vec{u}$ $et\, t_{\vec{u}}(B)=F \Leftrightarrow \overrightarrow{BF}=\vec{u}$ soit

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}$

2) $f(M)=M'$ et $f(N)=N'$ avec $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$ soit $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$ donc f est la translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$

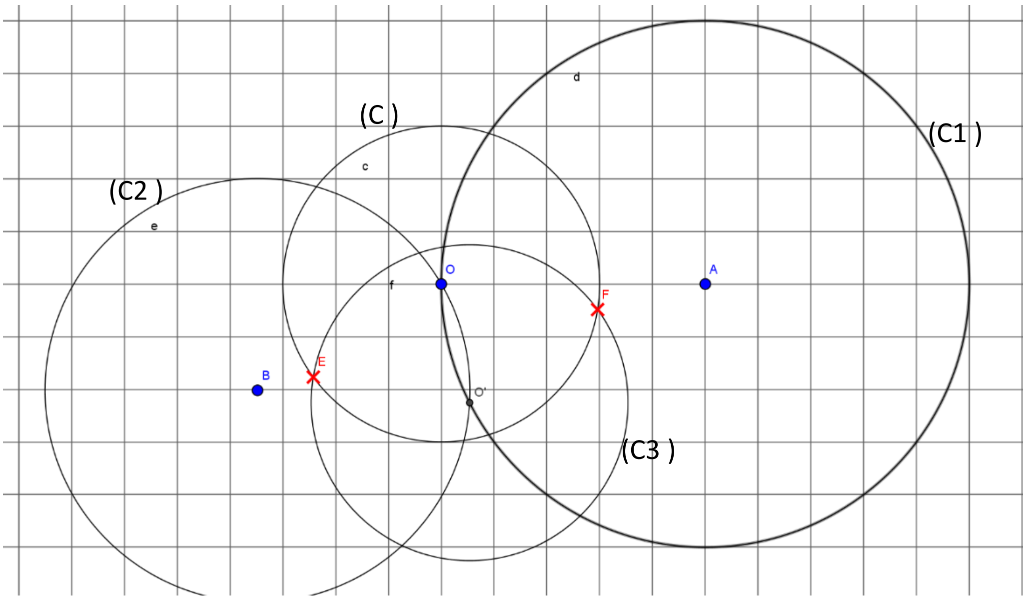
Corrigé de l'exercice de fixation

On a $f(M)=M'$ et $ABM'M$ est un parallélogramme.

$ABM'M$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MM'}$ donc $f(A)=B$ ainsi f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Activité 2

1)-2)



3) Méthode de construction

- Construis les cercles :(C_1) de centre A et de rayon AO et (C_2) de centre B et de rayon BO

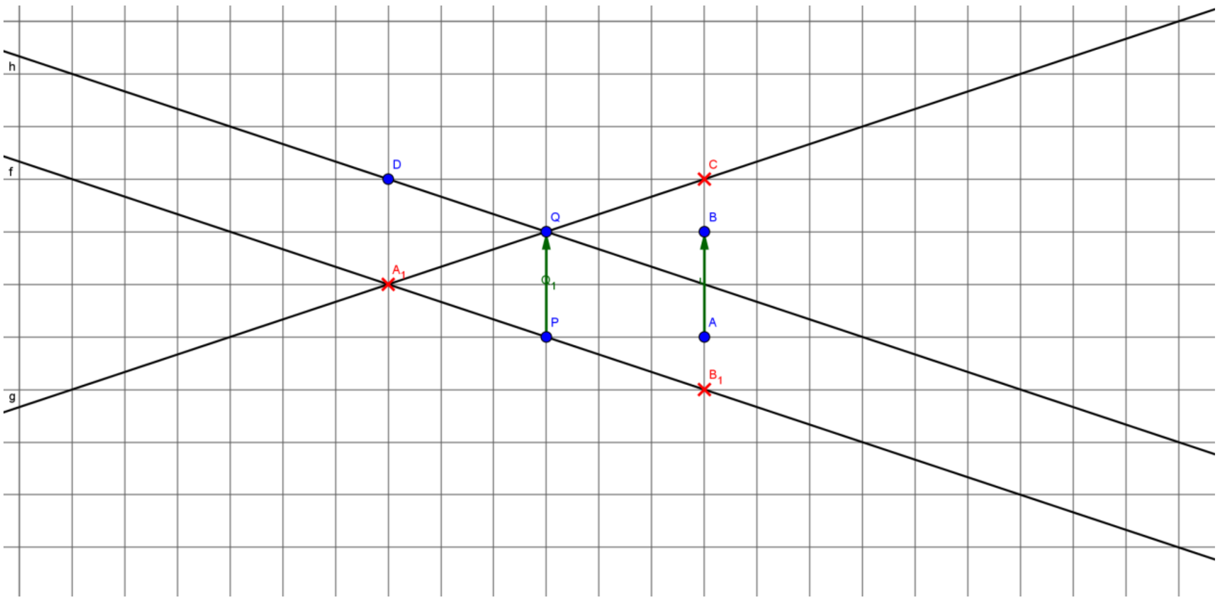
- ces deux cercles (C_1) et (C2) se coupent en O'

- Construis le cercle (C_3) de centre O' et de même rayon que le cercle (C)

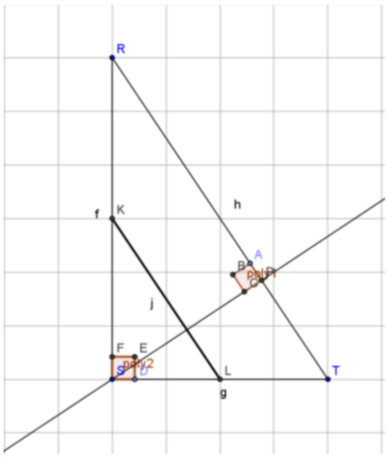
- (C_3) et (C) se coupent aux points E et F qui sont les intersections de (C) et la droite (AB).

Remarque : (C) et (C_3) sont symétriques par rapport à la droite (AB).

Corrigé de l'exercice de fixation



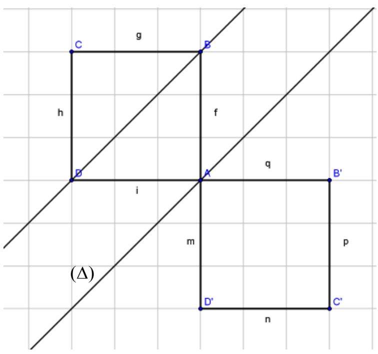
Activité 3



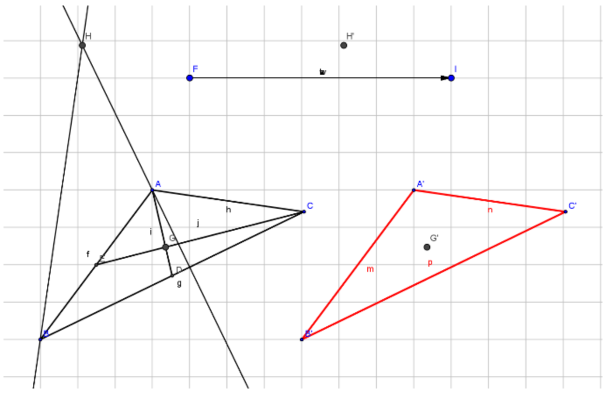
1) Dans le triangle RST, K est le milieu de [RS] et L est le milieu de [ST] donc (KL) // (RT). Comme (RT) ⊥(SP) et (KL) // (RT) donc (KL) ⊥(SP) (1)
   Dans le triangle KSP, K est le milieu de [RS] et (KL) // (RP) donc (KL) passe par le milieu de [SP] (2)
   D'après (1) et (2) la droite (KL) est la médiatrice de [SP]
2) Considérons la symétrie orthogonale d'axe (KL).
   On a : $S_{(KL)}(SL) = (PL)$ et $S_{(KL)}(KS) = (KP)$ or (SL) ⊥(KS) donc (PL) ⊥(KP)

Corrigé de l'exercice de fixation

1. a)



1) a) voir figure
   b) ABCD est un carré donc son symétrique AB'C'D' par rapport à (Δ) est aussi un carré.



$$\overset{t_{\vec{u}}}{\begin{array}{c|c} A & A' \\ B & B' \\ C & C' \\ G & G' \\ H & H' \end{array}} \Leftrightarrow \overset{t_{\vec{u}}}{\begin{array}{c|c} (AB) & (A'B') \\ (AC) & (A'C') \\ (BC) & (B'C') \\ ABC & A'B'C' \end{array}} \text{ donc } \begin{array}{l} (AB)//(A'B') \\ (AC)//(A'C') \\ (BC)//(B'C') \end{array}$$

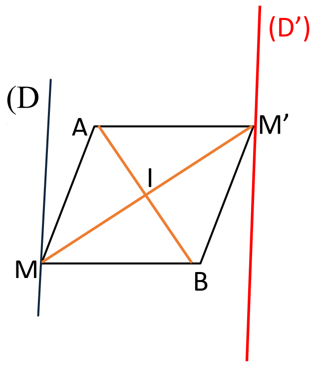
c) Le triangle A'B'C' est l'image par $t_{\vec{u}}$ du triangle ABC, G' et H' sont les images respectives du centre de gravité G et de l'orthocentre H du triangle ABC par $t_{\vec{u}}$ donc G' et H' sont respectivement le centre de gravité et l'orthocentre du triangle A'B'C'.

Activité 4

1- AMBM' est un parallélogramme et I est le milieu de $[AB]$ donc $[AB]$ et $[MM']$ ont le même milieu I. Ainsi S_I (M) = M'. (S_I étant la symétrie centrale de centre I).

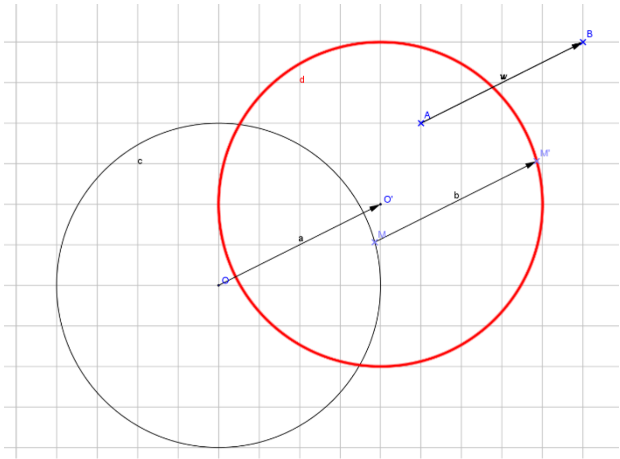
2- On sait que S_I (M) = M' . $M \in (D)$ et $S_I(D) = (D')$ donc $M' \in (D')$

3- $S_I(D) = (D') \Leftrightarrow (D)//(D')$. Lorsque M décrit la droite (D), M' décrit l'image de la droite (D) par S_I. Cette image est la droite (D') parallèle à (D).
Le lieu géométrique de M'est donc la droite (D'), image de la droite (D) par S_I.



4- On construit la droite (D') passant par M' et parallèle à (D).

Corrigé de l'exercice de fixation



1. Voir figure

2. a) voir figure

b) Le lieu géométrique du point M' est le cercle (C') en rouge, image de (C) en noir par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1 P 49

1.A ; 2.C ; 3.B

Exercice 2 P49

1. $t_{\vec{u}}(A) = B \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB}$; il y a un seul vecteur $\vec{u}$
2. $S_{(D)}(A) = B \Leftrightarrow$ (D) est médiatrice de [AB]. il y a une seule droite (D).
3. $S_O(A) = B \Leftrightarrow$ O est le milieu de [AB]. il y a un seul point O.

Exercice 3 P49

a) Un point et un cercle : il existe un seul axe de symétrie :La droite passant par ce point et le centre du cercle et il n'y a pas de centre de symétrie :.

b) Un cercle privé de deux points A et B :
- Si [AB] est une corde autre qu'un diamètre ; L'axe de symétrie est la médiatrice de [AB] et il n'y a pas de centre de symétrie.
- Si [AB] est un diamètre ; Il y a deux axes de symétrie qui sont la médiatrice de [AB] et la droite (AB) . Il y a un centre de symétrie qui est le centre du cercle.

c) Un segment et un point.
- Si le point appartient à la médiatrice de ce segment, alors cette médiatrice est le seul axe de symétrie.
- Sinon, pas d'axe, ni de centre de symétrie.

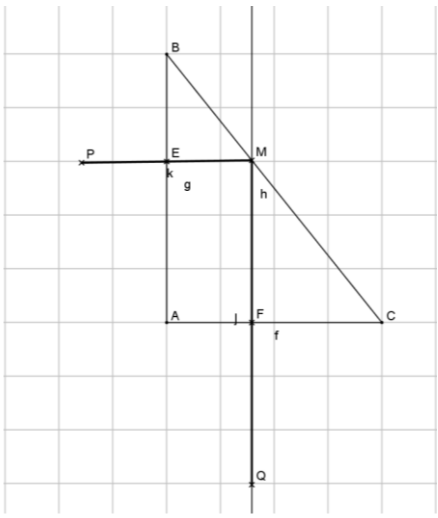
d) Deux droites parallèles et un point :
- Si le point appartient à l'axe médian de ces deux droites parallèles, alors
  - ➢ il y a deux axes de symétries : L'axe médian et la droite perpendiculaire aux droites passant par le point.
  - ➢ Il y a un centre de symétrie : le point.
- Si le point n'appartient pas à l'axe médian de ces deux droites parallèles, alors il y a un seul axe de symétrie : la droite perpendiculaire aux droites passant par le point et il n'y a pas de centre de symétrie.

e) Un cercle et une droite :
- Si la droite passe par le centre du cercle, alors elle est un axe de symétrie et le centre du cercle est centre de symétrie.

- Sinon, toute droite passant par le centre du cercle et perpendiculaire à la droite donnée est axe de symétrie de la figure et la figure ne possède pas de centre de symétrie.

f) Un cercle et deux de ces cordes.
   - Si les deux cordes ont des supports parallèles, alors la droite passant par le centre du cercle et perpendiculaire aux cordes est axe de symétrie et il n'y a pas de centre de symétrie.
   - Sinon , Il n'y a ni axe de symétrie, ni centre de symétrie.

Exercice 4 P49



1) Évaluation de PMQ

donc le triangle PMQ est rectangle en M. Il vient que le triangle PMQ est inscrit dans le cercle (C) de diamètre [PQ] , d'où $M \in (C)$

2)

On a $S_{(AB)}(M) = P$ donc $(MP) \perp (AB)$ et comme $(AC) \perp (AB)$ on a $(AC) // (MP)$ (1)

On a $S_{(AC)}(M) = Q$ donc $(AC) \perp (MQ)$ (2)

D'après (1) et (2) on a $(MP) \perp (MQ)$

2) Comparons AP , AM , AQ

(AB) médiatrice de [MP] donc AP = AM et (AC) médiatrice de [MQ] donc AQ = AM. Finalement on a

AP = AM = AQ

3) A est équidistant des points P , M et Q , or PMQ est rectangle en M donc A est le milieu de l'hypoténuse [PQ]

Exercice 5 P49

1.a) $S_O(C) = (C)$: (C) est globalement invariant par S_O . $S_O([AB]) = [CD]$

b) Démontrons que $S_O(I) = K$

On a $(C) \cap [AB] = \{I\}$ donc $S_O(I) \in (C) \cap [CD]$ or $(C) \cap [CD] = \{K\}$ donc $S_O(I) = K$

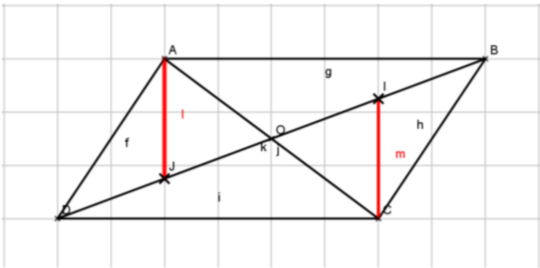
On démontre de manière analogue que $S_O(J) = L$

2) Démontrons que IJKL est un rectangle

On a $J \in (C)$ et $S_O(J) = L$ donc [JL] est diamètre de (C) ; de même [IK] est diamètre de (C). Il vient que $JL = IK$ donc IJKL est un rectangle.

Exercice 6 P49

a)



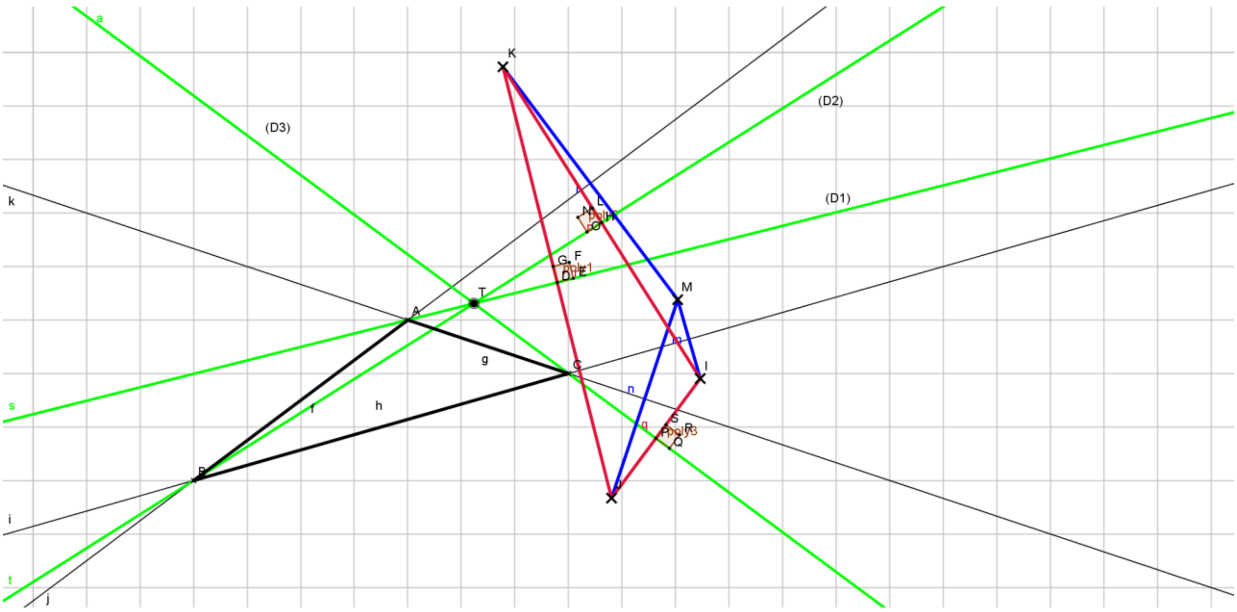
b) ABCD est un parallélogramme de centre O donc OB = OD.

J est le milieu de [OD] et I est le milieu de [OB] donc DJ = JO = OI = IB car OB = OD.

OI = OJ et O, I et J sont alignés donc O est le milieu de [IJ].

[AC] et [IJ] ont le même milieu O donc le quadrilatère AICJ est un parallélogramme d'où AJ = IC

Exercice7 P49



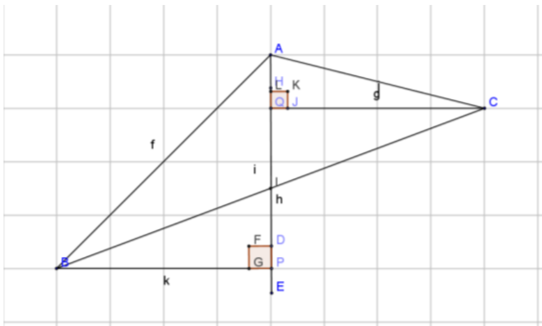
$$\left.\begin{array}{l} S_{(BC)}(M) = I \Leftrightarrow CM = CI \\ S_{(AC)}(M) = J \Leftrightarrow CM = CJ \end{array}\right\} \Leftrightarrow CJ = CI \Leftrightarrow C \in méd[IJ] \left.\begin{array}{l} \\ \\ C \in (D_3)\, et\, (D_3) \perp (IJ) \end{array}\right\} \Leftrightarrow (D_3)\, méd[IJ] \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{(BC)}(M)=I \Leftrightarrow BM=BI \\ S_{(BA)}(M)=K \Leftrightarrow BM=BK \end{array}\right\} \Leftrightarrow BK=BI \Leftrightarrow B\in méd[KI] \left.\begin{array}{l} \\ \\ B\in(D_2)\, et\, (D_2)\perp(KI) \end{array}\right\} \Leftrightarrow (D_2)\, méd[KI] \quad (2)$$

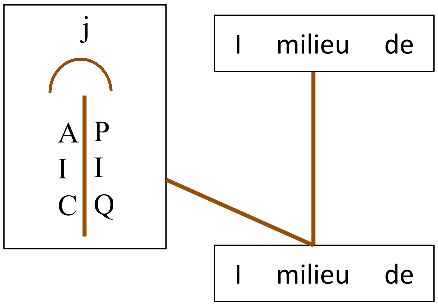
$$\left.\begin{array}{l} S_{(AB)}(M)=K \Leftrightarrow AM=AK \\ S_{(AC)}(M)=J \Leftrightarrow AM=AJ \end{array}\right\} \Leftrightarrow AK=AJ \Leftrightarrow A\in méd[KJ] \left.\begin{array}{l} \\ \\ A\in(D_1)\, et\, (D_1)\perp(KJ) \end{array}\right\} \Leftrightarrow (D_1)\, méd[KJ] \quad (3)$$

D'après (1) , (2) et (3) les droites (D1) , (D2) et (D3) sont les trois médiatrice du triangle IJK donc elles sont concourantes.

<u>Exercice 8 P49</u>



Soit j la projection orthogonale sur (AI), on a :



$$\left.\begin{array}{l} I \text{ milieu de } [BC] \Leftrightarrow S_I(B)=C \\ I \text{ milieu de } [PQ] \Leftrightarrow S_I(P)=Q \end{array}\right\} \Leftrightarrow PB=CQ$$

<u>Exercice 9 P50</u>

1) - On a OI est rayon de (C) et O'I est rayon de (C') donc OI = O'I. De plus (C) et (C') sont tangent en I donc O, I et O' sont alignés. Ainsi I est le milieu de [OO'] soit $S_I(O)=O'$ d'où $S_I(C)=(C')$

$$- \left.\begin{array}{l} (C)\cap(AI)=\{A\} \\ (C')\cap(AI)=\{B\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow S_I(A)=B \Leftrightarrow IA=IB \qquad (1)$$

2) Déterminons les images de A et I par $S_{(\Delta)}$ et Justifions que AI = JB

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} O'IB \text{ est isocèle en } O' \\ (\Delta)\perp(IB) \text{ en } O' \end{array}\right\} \Leftrightarrow (\Delta)\, méd[IB] \Leftrightarrow S_{(\Delta)}(I)=B \\ \left.\begin{array}{l} O'AJ \text{ est isocèle en } O' \\ (\Delta)\perp(IB) \text{ en } O' \end{array}\right\} \Leftrightarrow (\Delta)\, méd[AJ] \Leftrightarrow S_{(\Delta)}(A)=J \end{array}\right\} \Leftrightarrow AI=JB \quad (2)$$

3) D'après (1) et (2) on a : $IA=IB=JB$

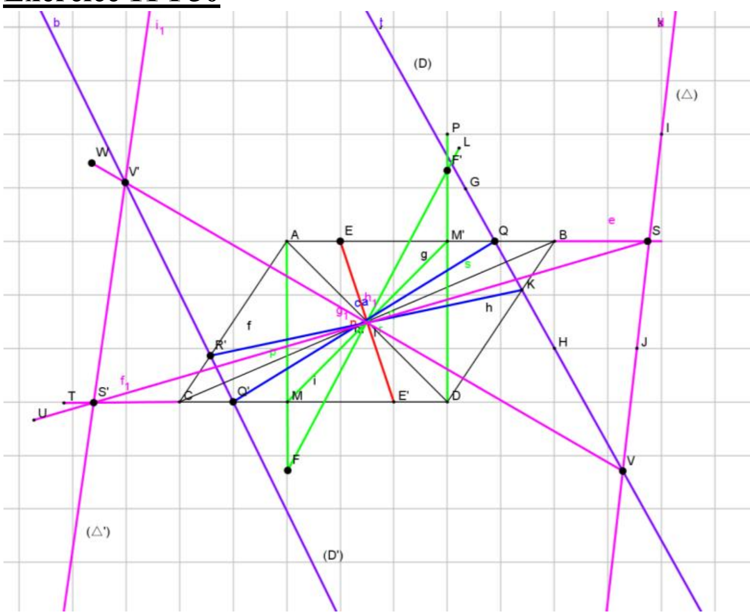
<u>Exercice 10 P50</u>

1) Les images par S_I :

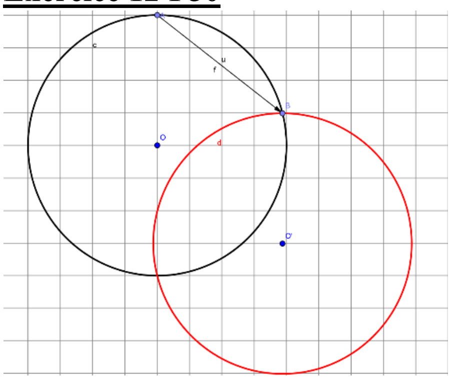
(C)	A	(Δ)	P	Q
(C’)	B	(Δ')	Q’	P’

2) On a : $S_I(P) = Q'$ et $S_I(Q) = P'$ donc [PQ’] et [QP’] ont le même milieu I d’où PQQ’P’ est un parallélogramme.

Exercice 11 P50



Exercice 12 P50



1) Lorsque le point M est en A, le point P est en B.

Lorsque le point M est en B, le point P est tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MP}$

2) La transformation qui applique M sur P est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

3) (C’) est le cercle de centre O’, image du cercle (C) de centre O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

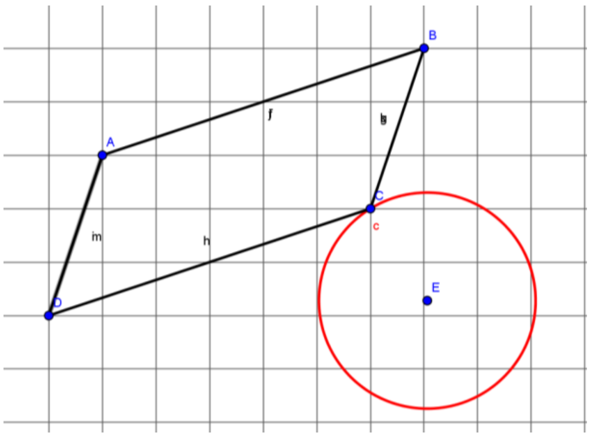
Exercice 13 P50

a) Lorsque (C) décrit une droite (d1), l’ensemble des points D est la droite passant par D et parallèle à (d1)

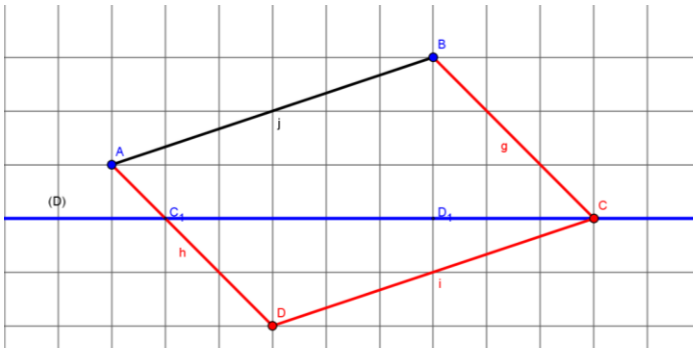
b) Lorsque C décrit un cercle (C), le point D décrit un cercle (C’), image de (C) pat la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$

c) Idem que a), par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$

d) Idem que b), par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$



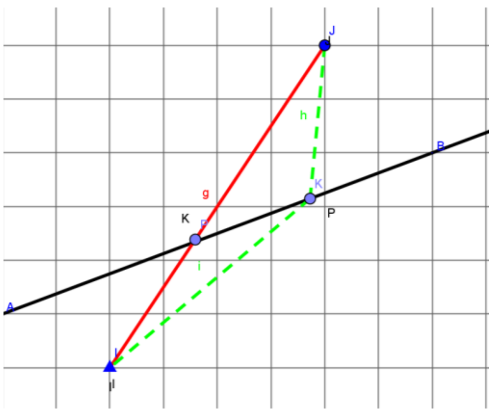
Exercice 14 P50



Lorsque le point C décrit la droite (D), le point D décrit la droite passant par D et parallèle à (D)

Exercice 15 P50

Figure1 : Déterminer, sur la droite (D) un point K afin que IK + KJ soit minimum : Traçons la droite (IJ). Elle coupe la droite (D) en un point que nous appellerons K. Soit P un autre point de la droite (D) , distinct du point K. Nous avons (inégalité triangulaire) : IJ < IP + PJ . Le cas d'égalité n'est vérifié que pour le point K, point situé sur le segment [IJ]. IJ = IK + KJ Donc, quel que soit le point P sur (D) distinct de K, IK + KJ < IP + PJ . La distance IK + KJ est donc minimale.



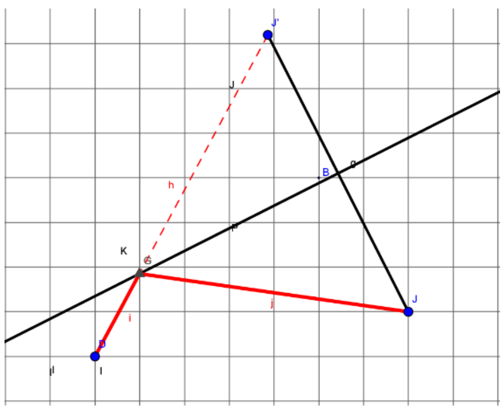
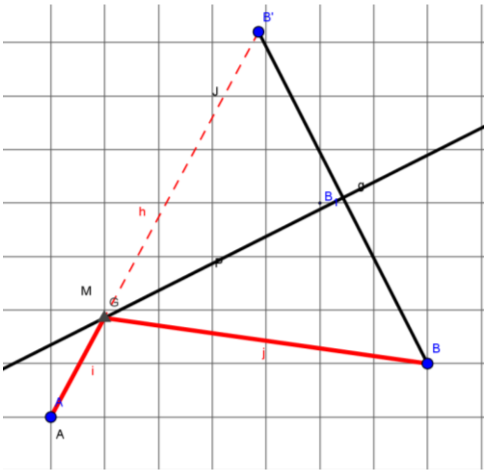


Figure2 : Déterminons, sur la droite (D) un point P afin que IK + KJ soit minimum : Soit J' le symétrique du point J par rapport à la droite (D). Par définition de la symétrie orthogonale, la droite (D) est la médiatrice du segment [JJ']. Soit M un point de la droite (D). Comme M est

sur la médiatrice du segment [JJ’], le point M est équidistant des deux points J et J’ (Tous les points de la médiatrice d’un segment sont équidistants des deux extrémités de ce segment) Donc MJ = MJ’. Nous cherchons donc, sur la droite (D), un point M afin que AM + MB’ soit minimum. D’après la figure1, ce point est le point K intersection de (D) et de la droite (IJ’).

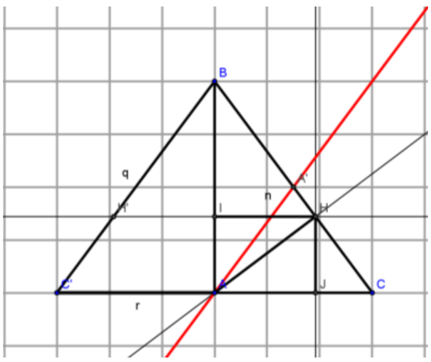
<u>Exercice 16 P51</u>



Déterminons, sur la droite (D) un point M afin que le trajet AM+MB soit le plus court possible : Soit B’ le symétrique du point B par rapport à la droite (D). Par définition de la symétrie orthogonale, la droite (D) est la médiatrice du segment [BB’]. Soit K un point de la droite (D). Comme K est sur la médiatrice du segment [BB’], le point K est équidistant des deux points B et B’ (Tous les points de la médiatrice d’un segment sont équidistants des deux extrémités de ce segment) Donc KB = KB’. Nous cherchons donc, sur la droite (D), un point M afin que AM + MB’ soit minimum. D’après la figure1 de l’exercice 15, ce point est le point M intersection de (D) et de la droite (AB’).

<u>Exercice 17 P51</u>

1) Voir figure



2) Dans le triangle CC’B, A’ est le milieu de [BC] et A est le milieu de [CC’] donc (AA’)//(BC’)
3) a) Justifions que JA = IH’
   On a : $(AI) \perp (IH)$, $(HJ) \perp (AJ)$ et $(AI) \perp (AJ)$ donc AJHI est un rectangle d’où HI = JA (1)
   I est le milieu de [HH’] soit HI = IH’ (2). D’apès (1) et (2) on a : JA = IH’

b) Justifions que : (JI) // (AH’)

on a : JA = IH’ et (JA) // (IH’) donc JAH’I est un parallélogramme d’où (JI) // (AH’).

4) On a : $S_{(AB)}(AH) = (AH')$ et $S_{(AB)}(BC) = (BC')$ or $(AH) \perp (BC)$ donc $(AH') \perp (BC')$

5) On a : $(AH') \perp (BC')$ et (JI) // (AH’) donc $(IJ) \perp (BC')$ or (AA’)//(BC’) donc $(IJ) \perp (AA')$

Exercice 18 P51

1) $t_{\overrightarrow{OO'}}(C) = (C')$

2) a) Justifions que $(AA') \perp (AB)$

On a : OA = OB donc O appartient à la médiatrice de [AB] (1)

O’A = O’B donc O’ appartient à la médiatrice de [AB] (2)

D’apès (1) et (2) (OO’) est la médiatrice de [AB] donc $(OO') \perp (AB)$ (3)

On a $t_{\overrightarrow{OO'}}(A) = (A') \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow (OO')//(AA')$ (4)

D’après (3) et (4) $(AA') \perp (AB)$

b) on a : $t_{\overrightarrow{OO'}}(A) = (A') \Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow OAA'O'$ est un parallélogramme donc $OA = O'A'$ d’où $A' \in (C')$ de plus $(AA') \perp (AB)$ donc le triangle ABA’ est rectangle en A et est inscrit dans le cercle (C’) donc [BA’] est un diamètre de (C’).

3) a) Nature du triangle BM’A’

On a $t(M) = M'$ et $M \in (C)$ donc $M' \in (C')$. Ainsi le triangle BM’A’ est inscrit dans (C’) de diamètre [BA’] donc le triangle BM’A’ est rectangle en M’.

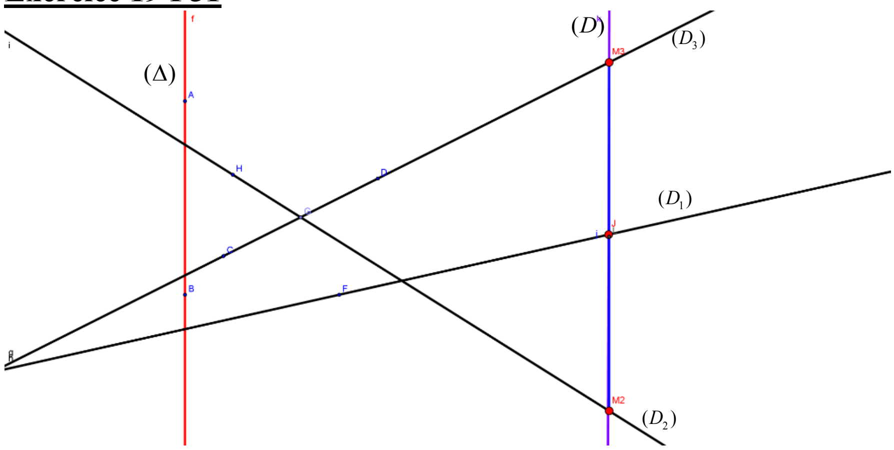
b) On a :

$t(A) = A'$ et $t(M) = M'$ donc $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{M'A'} \Leftrightarrow (MA)//(M'A')$ (1)

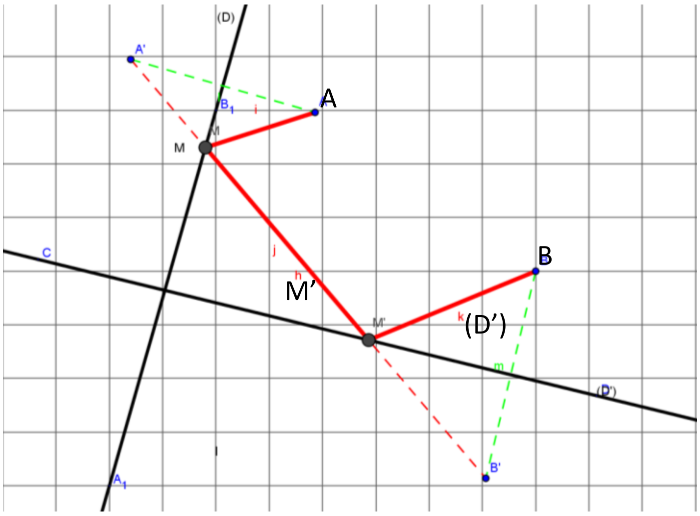
BM’A’ est rectangle en M’ donc $(BM') \perp (M'A')$ (2)

D’après (1) et (2) : $(BM') \perp (MA)$

Exercice 19 P51



Exercice20 P51

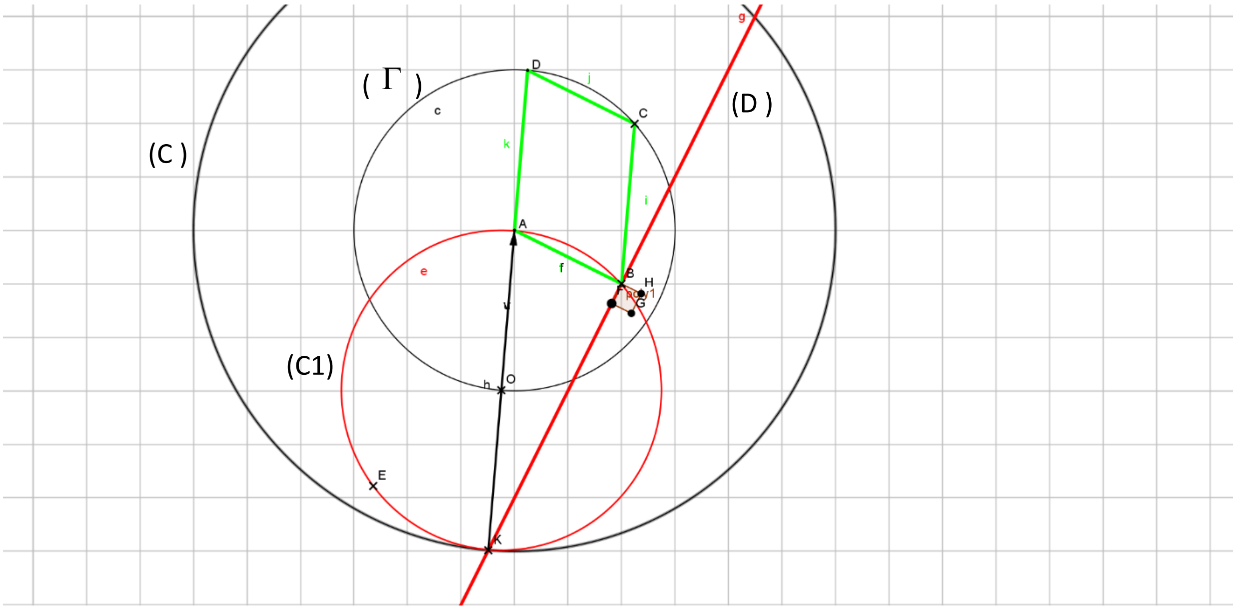


A’ est le symétrique de A par rapport à (D) et B’ est le symétrique de B par rapport à (D’) donc d’après l’exercice 15, La distance AM+MM’+M’B de la figure est la plus petite possible où
M∈ (D) et M’∈ (D').

<u>Exercice 21 P51</u>

S_O , $S_{(DC)}$ et $t_{\overrightarrow{AB}}$ sont respectivement la symétrie centrale, la symétrie orthogonale et la translation qui font passer le carré N°1 au carré N°2

<u>Exercice 22 P51</u>



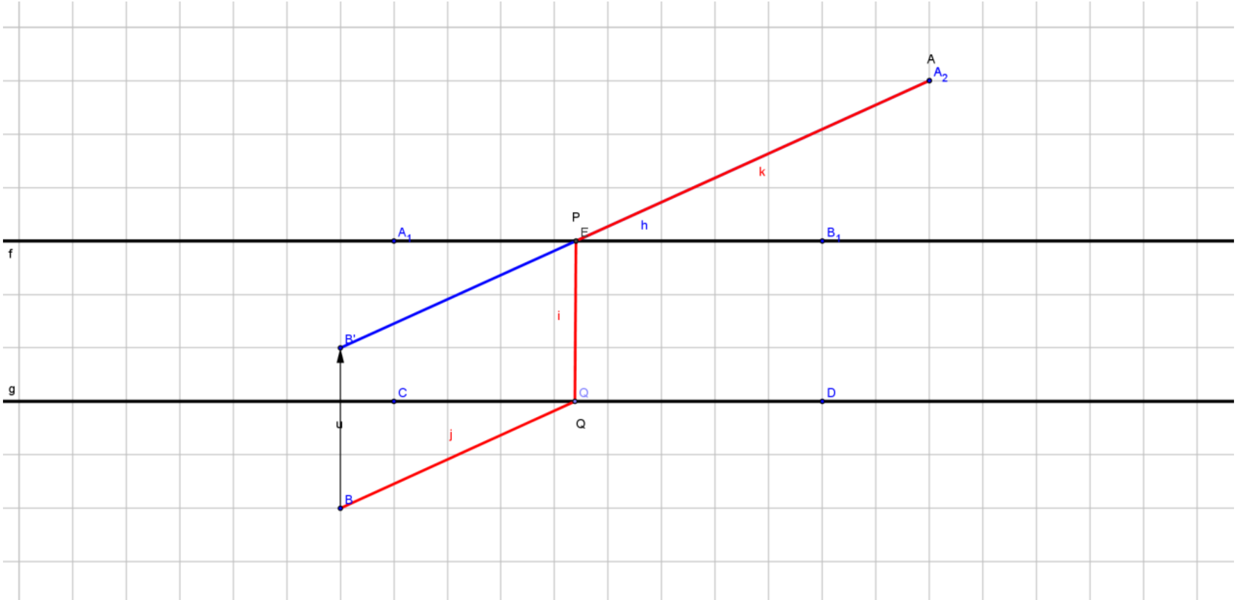
Programme de construction

- Construis la droite (D) passant par B et perpendiculaire à (AB)
- Construis un cercle (C) de centre A et de rayon 2r
- (C) et (D) se coupent en K , (AK) et (Γ) se coupent en O.
- Construis le cercle (C1) de centre O et de rayon r, Les points K , A et B appartient à (C1)
- Par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ le cercle (C1) a pour image (Γ)

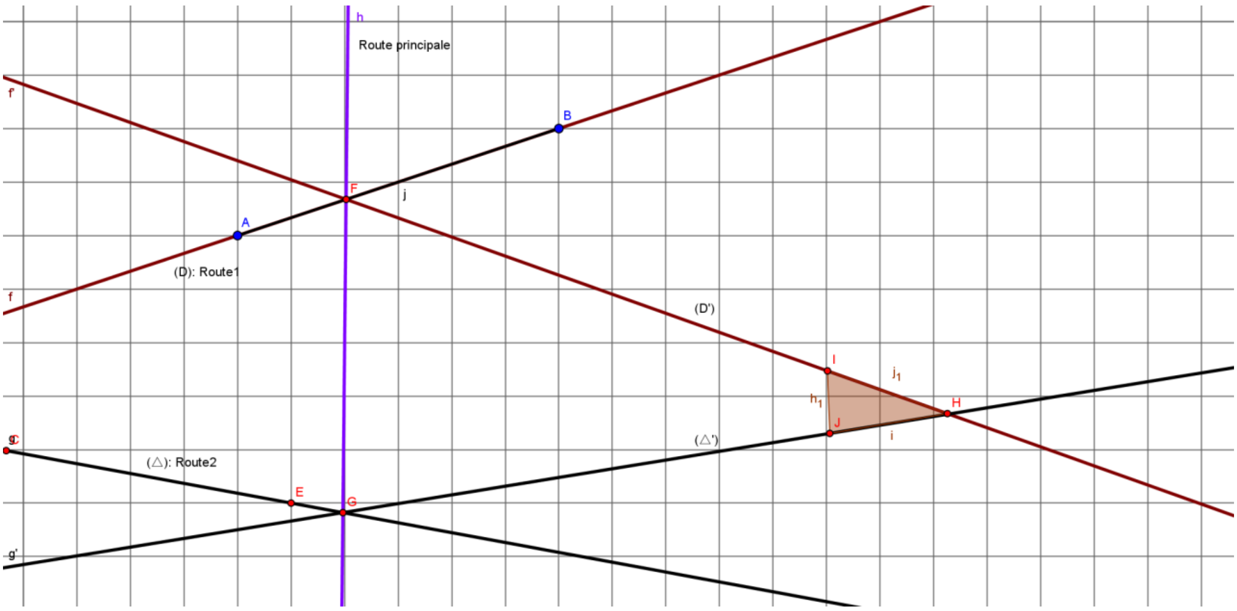
- C et D sont les images respectives de B et A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$

Exercice 23 P51

Soit $\vec{v}$ le vecteur perpendiculaire à la rivière dirigé vers A et de longueur L , et B' l'image de B par la translation de vecteur $\vec{v}$: si le pont va de P à Q, la longueur du trajet vaut AP + PQ + QB = AP + PB' + L. On veut donc rendre AP + PB' le plus petit possible, donc P doit être aligné avec A et B'. Il faut donc que P soit l'intersection de (AB') et de la rive du côté de A.



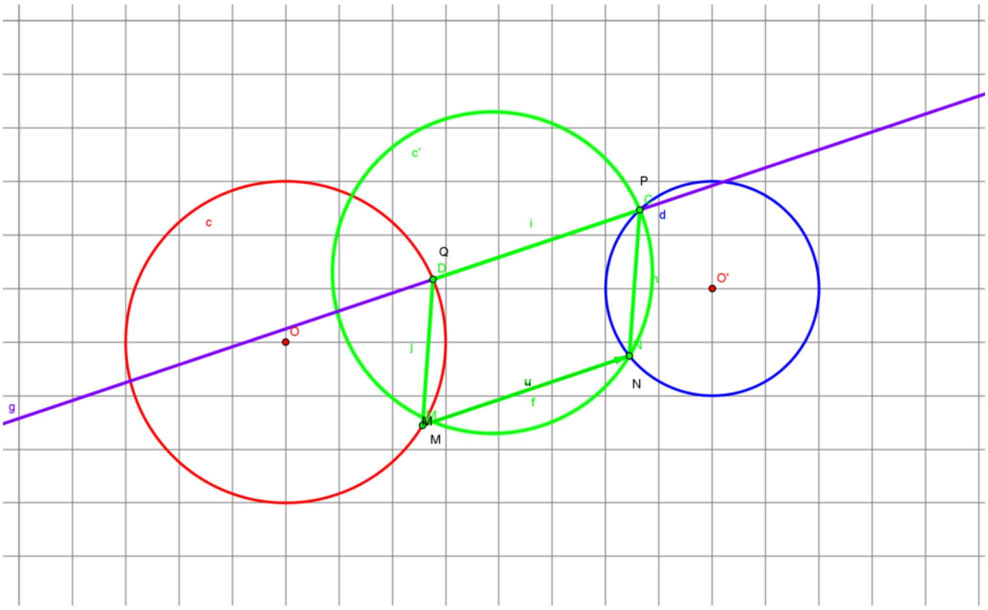
Exercice 24 P52



(D') et (Δ') sont les symétriques respectives des routes secondaires 1 et 2 par la symétrie orthogonale d'axe la route principale.

L’angle tacheté a pour symétrique par rapport à la route principale l’angle $\widehat{THJ}$ donc ils ont la même mesure.

Exercice 25 P52



PROGRAMME DE CONSTRUCTION

- On construis l’image du disque (D) en rouge par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.
- On obtient le disque en vert qui coupe (D’) en N et P
- Par P, on trace la parallèle à (MN), elle coupe (D) en Q.
- Le parallélogramme MNPQ est ainsi obtenu.

<u>Leçon 4</u> : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

<u>SITUATION D'APPRENTISSAGE</u>

- Pour dégager le contexte, on peut poser les questions suivantes :

1) De quoi s'agit-il dans ce texte ?
2) Quels sont les acteurs de ce texte ?

   <u>Réponses attendues</u>

1) Il s'agit de la découverte d'un graphique dans un magazine lors de la préparation d »un exposé sur le réchauffement climatique.
2) Les acteurs sont des élèves de seconde

- Pour dégager la circonstance, on peut poser la question suivante :
  Quelle est la préoccupation de ces acteurs ce texte ?
  <u>Réponse attendue</u>
  Ils souhaitent mieux analyser ce document (le graphique).
- Pour dégager la tâche, on peut poser la question suivante :
  Que décident de faire ces élèves ?
  Réponse attendue
  Ils décident de s'informer sur les généralités des fonctions.
- Pour faire la synthèse et annoncer les notions mathématiques convoquées par la situation d'apprentissage
  Pour mieux analyser ce document, il nous faut étudier la leçon titrée **« Généralité sur les fonctions »**

<u>CORRECTION DES ACTIVITES</u>

<u>Activité</u> 1

1- Ce sont : -3 ; -2,5 ; -2 ; -1,5 ; -1 ; 1; 1,5 et 2.

2- A chaque nombre de l'intervalle $[-3;2]$, on ne peut pas faire correspondre un nombre réel car o n'a pas d'inverse.

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

a) Faux ; b) Vrai ; c) Faux.

<u>Activité 2</u>

Le tableau 1 détermine une fonction d'après la définition d'une fonction. Par contre le tableau 2 ne détermine pas puisque le nombre admet deux images 2 et 6.

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

a) Les images de 0 et 2 par f sont respectivement 3 et 1.
b) Les antécédents de -5 par f sont -1 et 7.

<u>Activité 3</u>

1- Chaque nombre réel admet une ou zéro image par g. Seul le nombre 2 qui ne possède pas d'image.

2- a) -2 et $\frac{1}{3}$ ont pour images respectives par g : $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{6}{5}$

b) L'antécédent de $-\frac{3}{4}$ par g est $-\frac{2}{3}$

Corrigé de l'exercice de fixation

Toutes ces deux relations sont des fonctions.

Activité 4

1- a) Reproduire le graphique

b) Chaque parallèle à la droite coupe le graphique en 0 ou un point.

2- D'après la définition d'une fonction, cette représentation graphique détermine une fonction.

Corrigé de l'exercice de fixation

Le cas b) détermine une fonction

Activité 5

1- $f(-2)=-1;\ f(-1)=0;\ f(0)=\frac{1}{3};\ f(2)=\frac{3}{5}$

2- Les nombres réels différents de -3 et 1 ont une image par f.

Corrigé de l'exercice de fixation

a) Faux ; b) Vrai ; c) Faux ; c) Faux.

Activité 6

1- -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 et 2 ont pour images respectives par f : 8 ; 3 ; 0 ; -1 ; 0 et 3.

2- a) On a : $-1 \leq f(x) \leq 3$

b) On a : $-1 \leq f(x) \leq 8$

c) On a : $-1 \leq f(x) \leq 8$

3- a) On écrit que : $-1 \leq f(x) \leq 8$ et donc : $0 \leq x^2 \leq 9$. Ainsi il existe un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-3;0]$ tels que $f(x)=y$.

b) On écrit que : $-1 \leq f(x) \leq 3$ et donc : $0 \leq x^2 \leq 4$. Ainsi il existe un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;2]$ tels que $f(x)=y$.

4- On conclut que : $f([-3;2])=[-1;8]$

Corrigé de l'exercice de fixation

a) Faux ; b) Vrai ; c) Faux

Activité 7

1- $x = -4$ et $x = -1$
2- $A = \{-4;-1;2;12\}$
3- $I = [0;5]$

Corrigé de l'exercice de fixation

a) Vrai ; b) Faux ; c) Faux

Activité 8

1- Toute parallèle à l'axe des ordonnées coupe le graphique en un ou zéro point, donc il est celui d'une fonction.
2- La plus grande hauteur est 10 mètres lorsque $t = 17$ heures.
3- La plus petite hauteur est 2 mètres lorsque $t = 9$ heures.

Corrigé de l'exercice de fixation

La fonction f atteint : son maximum égal à 8 en $x = 0{,}5$ et son minimum égal à 1 en $x = 7$.

Activité 9

1- La hauteur de l'eau a toujours augmenté sur l'intervalle $[9;17]$.
2- La hauteur de l'eau a toujours diminué sur les intervalles $[0;9]$ et $[17;22]$
3- a) Dresser le tableau de variation de h sachant que la fonction h est décroissante sur les intervalles $[0;9]$ et $[17;22]$, puis croissante sur l'intervalle $[9;17]$. **(Dans le tableau, noter à la première ligne 9 au lieu de 8 et 7 au lieu de 8 ; 2 au lieu de 1 à la deuxième ligne)**
b) On a : $h(1) > h(4)$ et $h(12) < h(17)$.
4- Il n'existe pas de plage horaire sue laquelle la hauteur de l'eau reste constante.

Corrigé de l'exercice de fixation

C'est le cas d)

Activité 10

1- $D_f = \mathbb{R}/\{-6\}$ et $D_g = \mathbb{R}/\{0;-6\}$
2- $\forall x \in \mathbb{R}/\{0;-6\}$, $g(x) = \dfrac{x(x-2)}{x(x+6)} = \dfrac{x-2}{x+6}$
3- Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-6;0[$, x appartient à D_f et à D_g.

Donc : $\forall x \in]-6;0[$, $f(x) = g(x)$.

Corrigé de l'exercice de fixation

a) Les fonctions f et g coïncident sur E
b) Les fonctions f et g égales sur E

c) Les fonctions f et g coïncident sur E (**en prenant** $]-2;+\infty[$)

d) Les fonctions f et g coïncident sur E

Activité 11

1-

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
g(x)	-5	0	3	4	3	0	-5

2- Placer les points du tableau puis les relier.

3- $a \in \{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$; $b = \frac{91}{25}$

Corrigé de l'exercice de fixation

Ceux qui appartiennent à la représentation graphique de f sont A et D.

Activité 12

1- a) Reproduire puis tracer la droite (Δ).

b) Cette ordonnée est 2.

2- a) Tracer la droite (Δ')

b) Ces abscisses sont : - 1,5 et 3.

Corrigé de l'exercice de fixation

1- L'image de 3 par la fonction f est 4.
2- Les antécédents éventuels de 3 par f sont : -2 ; -0,4 et 2,8.

Activité 13

Reproduire la figure pour répondre aux différentes questions.

Corrigé de l'exercice de fixation

On considère que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

- L'image directe de $[1;3]$ par la fonction f est $]-\infty;3]$.
- L'image indirecte de $[-3;3]$ par la fonction f est $[-2;3]$.

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1 P67

Définition organisée : « Soit A et B deux ensembles non vides. On appelle fonction f de A vers B, toute correspondance qui à tout élément de A associe un ou zéro élément de B ».

Exercice 2 P67

a) Faux ; b) Faux ; c) Vrai

Exercice 3 P67

1ère : Faux ; 2ème : Vrai ; 3ème : Faux

Exercice 4 P67

$D_f = \mathbb{R}$; $D_g = \mathbb{R}/\{1\}$; $D_h = [0;+\infty[$; $D_k = \mathbb{R}$

Exercice 5 P68

$D_g = \mathbb{R}^*$; $D_g = [0;+\infty[$; $D_g = \mathbb{R}/\{-3\}$; $D_g = \mathbb{R}$; $D_g = [-1;+\infty[$

Exercice 6 P68

a) $D_f = \mathbb{R}$; b) $D_f = \mathbb{R}/\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$; c) $D_f = \mathbb{R}$; d) $D_f = \mathbb{R}/\{-1;0;1\}$; e) $D_f = \mathbb{R}^*$

Exercice 7 P68

a) Faux ; b) Vrai ; c) Vrai

Exercice 8 P68

1- Les images respectives de -2 et $\sqrt{3}$ par *g* sont9 et 7.
2- L'antécédent de 1 par *g* est 0 ; les antécédents de 3 par *g* sont -1 et 1 ; le nombre 0 n'a pas d'antécédent par *g*.

Exercice 9 P68

1-Il n'est pas possible de calculer les images des nombres -4 ; -3 et -1 par *h* car cela se justifie par la définition de la racine d'un nombre positif (en 3ème).
2-Les images respectives de 0 ; 4 ; 9 et 12 par *h* sont : 2 ; 4 ; 5 et $2\sqrt{3}+2$.

Exercice 10 P68

Les antécédents respectifs de -5 ; 0 ; 3 et 7 par g sont : -3 ; -0,5 ; 1 et 3.

Exercice 11 P68

La figure 3 est la représentation graphique d'une fonction.

Exercice 12 P68

1- Tout point de (C) a ses coordonnées de la forme $(x\,;-2x^2)$. Il suffit de donner cinq valeurs arbitraires à *x* pour les cinq points de (C).
2- Les points qui appartiennent à (C) sont : B ; D et G.

Exercice 13 P68

$a \in \{-7;7\}$

Exercice 14 P68

1- Faux ; 2- Vrai ; 3- Faux

Exercice 15 P69

Pour tout nombre réel *x* élément de l'intervalle $[-2;+\infty[$, $f(x) = x+2$,

donc : *f(x) = g(x).*

Exercice 16 P69

Pour tout nombre réel x élément de l'intervalle $[0;+\infty[$, $h(x)=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$, donc les fonctions h et g sont égales sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Exercice 17 P69

Leçon 5 DROITES ET PLAN DE L'ESPACE

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte ? ***L'évènement parle d'un élève de seconde qui présente à ses amis de classe une photo qu'il a vu dans un document.***
- Quels sont les acteurs de cet évènement ? ***Les acteurs sont les élèves d'une classe de seconde***
- Où se déroule l'évènement ? ***L'évènement se déroule au lycée.***
- A quel moment se déroule l'évènement (éventuellement) ? ***L'évènement se déroule pendant une séance de cours.***

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ? ***Le problème posé est : Identifier des droites parallèles, des plans parallèles.***
- Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ? ***Connaître et appliquer les propriétés relatives aux droites parallèles et aux plans parallèles.***

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Que décident de faire les acteurs ? ***les élèves décident de s'informer sur les positions relatives des droites et des plans de l'espace afin de confirmer les affirmations de leur camarade.***

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

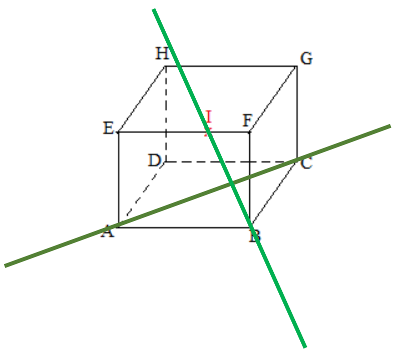
L'étude des positions relatives des droites et des plans de l'espace et la construction des sections planes du solide sont l'objet de la leçon que nous allons découvrir aujourd'hui : Droites et plans de l'espace.

I- ACTIVITES DE DECOUVERTE

1- Notion de droite – Notion de plan

a) Connaître la notion de droite de l'espace

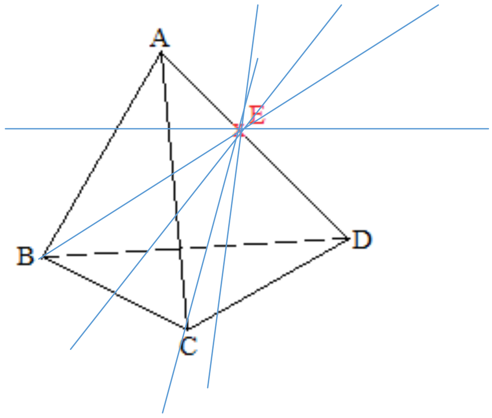
Activité 1



b) **Déterminer une droite de l’espace**

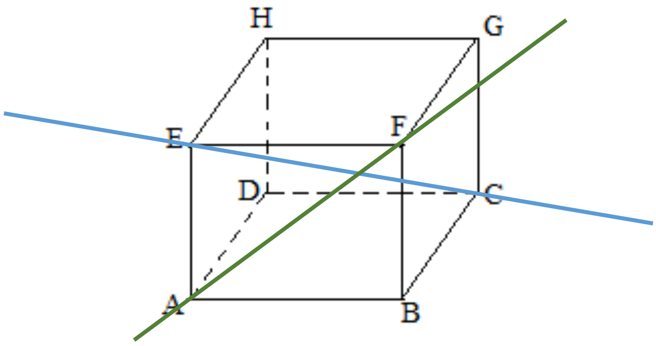
<u>Activité</u> 2

Il existe une droite et une seule passant par les points A et C.



<u>Corrigé de l’exercice de fixation</u>

Les droites passant par le point A dont une arrête du cube est le support sont : (AB) , (AE), (AD).

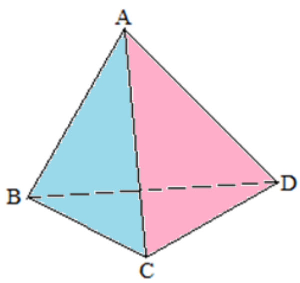


c) <u>Connaître la notion de plan de l’espace</u>

<u>Activité</u> 3

En rouge la surface contenant les points A, C et D.

En bleu la surface contenant les droites (BC) et (AC)

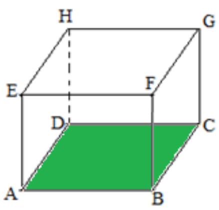


d) <u>Déterminer un plan de l’espace</u>

<u>Activité</u> 4

1- Les plans qui contiennent la droite (BC) sont : (ABC), (BCD), (ADC), (BFG), (CGF), (CBF).
2- Les plans qui passent par les points B, C et G sont : (BCG), (BFG) (FGC).

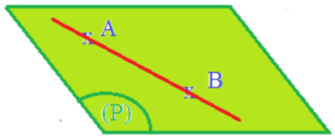
<u>Corrigé de l’exercice de fixation</u>



e) Droite contenue dans un plan

Activité 5

Le plan contenant la droite (AB) est le plan (P).



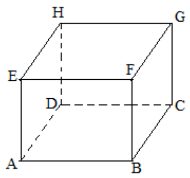
Corrigé de l'exercice de fixation

Le point E appartient au plan (EFG),

Le point F appartient au plan (EFG), donc

la droite (EF) est contenue dans le plan (EFG) et on note

$(EF) \subset (EFG)$.



2- Positions relatives

2-1 Position relative de deux plans de l'espace

Activité 6

1-a) Si les trois points non alignés A, B et C appartiennent à (P) et (Q) alors ces deux plans sont confondus.

b) Si on peut trouver deux points distincts A et B dans (P) et (Q) mais jamais trois points non alignés, alors l'intersection de (P) et (Q) est la droite (AB).
Et on note $(P) \cap (Q) = \{(AB)\}$.

c) Si on ne peut pas trouver de points communs à (P) et (Q), alors ces deux plans sont dits disjoints. Et on note $(P) \cap (Q) = \varnothing$.

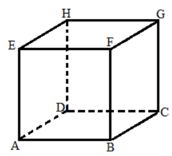
Corrigé de l'exercice de fixation

a) $(ABC) \cap (CDA) = (ABC) = (CDA)$
b) $(AEH) \cap (DHG) = (DH)$
c) $(AEG) \cap (CGH) = \varnothing$.

2-2 Position relative de deux droites de l'espace

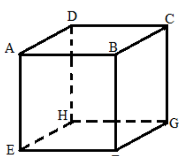
Activité 7

a) Le plan contenant les droites (BF) et (CG) est le plan (FBC).
b) La face BCGF est un parallélogramme, donc les droites (BF) et (CG) sont parallèles.
c) Non il n'existe pas de plan contenant les droites (BD) et (CG).
d) Deux droites de l'espace peuvent être coplanaires ou non coplanaires.



Corrigé de l'exercice de fixation

Considérons le plan formé par les points A, B et C. Le point F n'appartient pas au plan (ABC) donc les droites (AC) et (BF) ne sont pas coplanaires donc elles sont non sécantes.



Astuce : Pour démontrer que deux droites ne sont pas coplanaires, on peut considérer le plan formé par trois points et montrer que le quatrième n'appartient pas à ce plan

Activité 8 (Droite parallèle à une droite et passant par un point donné)

Soit C un point et (D) une droite de l'espace.

- Si C appartient à (D), alors toute droite passant par C et parallèle à (D) est confondue à (D), donc la droite (D) est l'unique droite de l'espace passant par le point A et parallèle à (D).
- Si C n'appartient pas à (D), il existe un unique plan (P) contenant C et (D). Toute droite passant par C et parallèle à (D) est contenue dans le plan (P). Or dans un plan, il existe une et une seule droite passant par un point et parallèle à une droite donnée. Donc dans l'espace, il existe une et une droite passant par le point C et parallèle à la droite (D).

  Corrigé de l'exercice de fixation

  (EFG) étant un plan, alors le point G n'appartient pas à la droite (EF), donc il existe une et une seule droite passant par le point G et parallèle à (EF).

2-3 Position relative d'une droite et d'un plan

Activité 9

> **Astuce**
> -Par deux points distincts A et B de l'espace, il passe une et une seule droite notée (AB)
> -Si A et B sont deux points distincts d'un plan (P), alors le plan (P) contient la droite (AB)

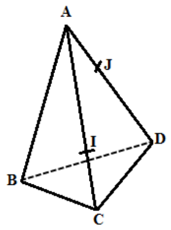
1- Si les deux points A et B de (D) appartiennent au plan (P), alors (P) et (D) ont en commun deux points distincts, et donc les droites (AB) et (D) sont confondues et ainsi la droite (D) est incluse dans (P).

2- Si un seul point A de (D) appartient à (P).
Le plan (P) contient une droite (D') passant par le point A. Les droites (D) et (D') ont le point A en commun, et A appartient à (P) donc $(D)\cap(P)=\{A\}$.

3- Soit (D') une droite incluse dans le plan (P). Si (D) et (P) n'ont pas de point en commun, alors (D) et (D') sont disjoints et non coplanaires alors (D) et (P) sont disjoints car (D) est non coplanaire à toute droite du plan (P).

Corrigé de l'exercice de fixation

$(AC)\cap(ABD)=\{A\}$



a) $(IJ)\cap(BCD)=\varnothing$

b) $(IJ)\cap(ADC)=\{(IJ)\}$

Activité 10 **(Caractérisation d'une droite et d'un plan de l'espace)**

1- Si (D) est inclue dans (P), alors (D) et (P) ont en commun deux points distincts A et B. Les droites (D) et (AB) sont donc confondues et donc parallèles.
2- (D) est strictement parallèle à (P).
Soit A un point de (P).
   a) A étant un point de (P) et (D) et (P) étant strictement parallèles, alors le point A n'appartient pas à (D) et donc le point A et la droite (D) définissent un plan (Q).
   b) Le point A appartient à la fois aux plans (P) et (Q) donc les plans (P) et (Q) sont sécants suivants une droite (Δ) passant par A.
   c) Puisque (D) est parallèle à (P) et $(\Delta)\subset(P)$ donc (D) est parallèle à toute droite de (P) et en particulier à (Δ).
3- On suppose que (P) contient une droite (Δ) parallèle à (D).
   a) (Δ) et (D) étant parallèles par hypothèse, alors ces deux droites définissent un plan (R).
   b) La droite (Δ) est inclue dans le plan (P) par hypothèse.
   Le plan (R) est défini par les droites (Δ) et (D) qui sont parallèles. Donc la droite (Δ) appartient à la fois à (R) et à (P) d'où $(P)\cap(R)=\{(\Delta)\}$
   c) $(\Delta)\subset(P)$ et (D) est parallèle à (Δ) donc (D) est parallèle à (P).

Astuce
Pour démontrer qu'une droite (D) est parallèle à un plan (P), il suffit de démontrer que ce plan contient une droite (Δ) qui est parallèle à (D).

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

La base de la pyramide SABCD est carrée. De plus I et J sont les milieux respectifs des côtés [AS] et [BS], donc d'après la réciproque de la propriété de Thalès, (IJ) est parallèle à (AB). Ainsi on a : (AB) est contenue dans le plan (ABC) et (IJ) est parallèle à (AB) donc la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC).

<u>Activité 11</u> (Diverses déterminations d'un plan)

1- a) Par hypothèse le point A n'appartient pas à la droite (D) par contre les points B et C sont sur la droite (D). donc les points A, B et C sont non alignés et déterminent par conséquent un plan (P) et ce plan est unique.
b)Trois points distincts et non alignés définissent un unique plan qui les contient.

2- a) Par hypothèse le point A n'appartient pas à la droite (D) donc le point A et la droite (D) définissent un unique plan (Q).

b)Les droites (D) et (Δ) sont sécantes donc elles sont coplanaires. Or la droite (D) est contenue dans le plan (Q) donc la droite (Δ) est aussi contenue dans le plan (Q).

c) Deux droites sécantes définissent un unique plan qui les contient.

3- a) Par hypothèse A est un point de (Δ) et puisque (Δ) et (D) sont parallèles, alors le point A et la droite (D) définissent un unique plan (R) qui les contient.

b)D'après la question précédente le plan (R) contient la droite (D). Or les droites (Δ) et (D) sont parallèles donc elles sont coplanaires de plus A est un point commun au plan (R) et à la droite (Δ) donc la droite (Δ) est inclue dans le plan (R).

c) Deux droites parallèles et disjointes définissent un unique plan qui les contient.

Corrigé de l'exercice de fixation

1- le point H n'appartient pas à la droite (AB) donc le point H et la droite (AB) détermine un unique plan.
2- les droites (HD) et (AD) sont sécantes en D donc elles déterminent un plan.
3- Les droites (HG) et (AB) sont parallèles et disjointes donc elles déterminent un plan.

2-4 Parallélisme dans l'espace

Activité 12 (Théorème du toit)

1- Par hypothèse les plans (P) et (Q) sont sécants et (D) est leur intersection.

A est un point de (D) et soit (D') la parallèle à (Δ) passant par le point A. les droites sécantes (D) et (D') déterminent un plan et comme la droite (D) est contenue dans (P) et (Q), alors la droite (D') est aussi contenue dans (P) et dans (Q).

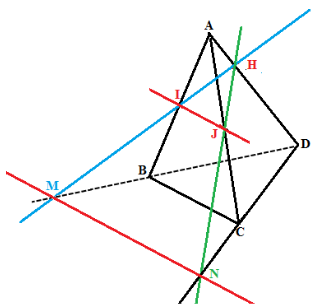
2- Par hypothèse la droite (Δ) est parallèle à (P) et (Q). De plus (D') la parallèle à (Δ) passant par le point A or (D') est contenue dans (P) et dans (Q), d'où (D') = (D) (*car la droite* (D) *est la droite d'intersection des plans (P) et (Q*)). Ainsi la droite (Δ) est parallèle à la droite (D), intersection de (P) et (Q).

Astuce
Si une droite est parallèle à deux plans sécants, elle est parallèle à leur droite d'intersection.

Corrigé de l'exercice de fixation

Considérons les plans (DMN) et (HMN).

On sait que (BC) ⊂ (DMN) et I et J milieux respectifs de [AB] et [AD] alors d'après réciproque de la propriété de Thalès (IJ) // (BC), donc (IJ) est parallèle au plan (DMN). On sait de plus que (IJ) ⊂ (HMN) donc (IJ) est parallèle au plan (HMN). De plus (DMN)∩(HMN) = $\{(MN)\}$ donc (IJ) // (MN).



Activité 13

1- Si (P_1) et (P_2) sont confondues, alors tout plan (P) sécant à (P_1) suivant une droite est aussi sécant à (P_2) suivant cette même droite d'où la conclusion.
2- On suppose que les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles et disjoints.

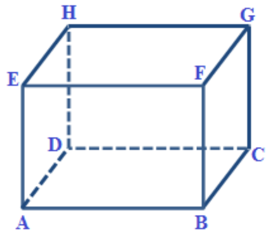
On sait par hypothèse que (P_1) et (P_2) sont parallèles et supposons que le plan (P) est parallèle à (P_1) donc il est aussi parallèle à (P_2) ce qui est absurde car (P) est sécant à (P_2).

3- a) $(D_1) \subset (P_1)$ et $(D_2) \subset (P_2)$ et par hypothèse (P_1) et (P_2) sont parallèles, donc (D_1) et (D_2) sont parallèles. Par conséquent les droites (D_1) et (D_2) sont coplanaires.
b)Les plans (P_1) et (P_2) étant parallèles et disjoints, il n'existe aucun point commun à ces deux plans et par conséquent les droites (D_1) et (D_2), contenues respectivement dans (P_1) et (P_2), sont parallèles et disjointes ce qui est absurde car (D_1) et (D_2) sont sécantes en A.

c) Conclusion : Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

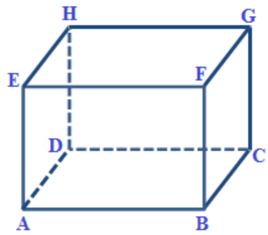
<u>**Corrigé de l'exercice de fixation**</u>

- On sait que ABCDEFGH est cube donc les plans (EHG) et (ADC) sont parallèles.
- $(AEG) \cap (EHG) = \{(EG)\}$ et $(AEG) \cap (ADC) = \{(AC)\}$
  Donc (EG) // (AC) .



3- <u>Section d'un solide par un plan</u>

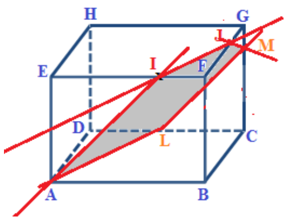
<u>**Activité**</u> **14**



a) On sait que le point I est un point de l'arête [EF] et le point J est un point de l'arête [FG] donc la droite $(IJ) \subset (EFG)$ et de plus $(IJ) \subset (AIJ)$ donc $(EFG) \cap (AIJ) = \{(IJ)\}$

b) Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles, donc le plan (AIJ) les coupe suivant deux droites parallèles. Or la droite (IJ) est la droite d'intersection des plans (AIJ) et (EFG) et le point A est commun aux plans (AIJ) et (ABC) donc la droite d'intersection des plans (AIJ) et (ABC) est la parallèle à (IJ) passant par le point A.

c)

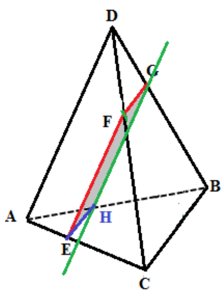


<u>Astuce</u>
Pour déterminer la section d'un plan (P) avec un solide (S), on détermine l'intersection du plan (P) avec chaque face du solide (S), on trace ensuite les segments obtenus inclus dans ce solide (S). On obtient ainsi la section plane du solide (S) avec le plan (P).

<u>**Corrigé de l'exercice de fixation**</u>

a) Par hypothèse la droite (EF) est parallèle à (AD) et la droite (HG) est parallèle à (AD) donc d'après le théorème du toit, les droites (EF) et (GH) sont parallèles et par conséquent la droite (GH) est contenue dans le plan (EFG).

b) Voir construction



Leçon 6 : POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Pour dégager le contexte, on peut poser les questions suivantes :
  1) De quel évènement s'agit-il dans ce texte ?
  2) Où se déroule cet évènement ?
  3) Quels sont les acteurs de cet évènement ?

  Réponses attendues

  1) Il s'agit du partage d'une parcelle par un jeune fonctionnaire entre ses quatre fils après avoir hérité de son père.
  2) Cet évènement se déroule en campagne
  3) Les acteurs sont : le jeune fonctionnaire, ses quatre fils, les élèves de ta classe.
- Pour dégager la circonstance, on peut poser la question suivante :
  Quel est le problème posé par ce texte ?
  Réponse attendue
  Le père affirme qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle la somme des aires de ces deux carrés vaut les trois quarts de l'aire du carré ABCD. Curieux, ces enfants veulent savoir la véracité de cette affirmation en sollicitant leurs camarades de classe.
- Pour dégager la tâche, on peut la question suivante :
  Que décident de faire ces élèves ?
  Réponse attendue

  Ils décident d'approfondir leurs connaissances sur les polynômes et les fractions rationnelles.

- Pour faire la synthèse et annoncer les notions mathématiques convoquées par la situation d'apprentissage.
  En vue d'approfondir vos connaissances, nous allons étudier la leçon titrée « **Polynômes et fractions rationnelles** » selon le plan suivant :
  - *Connaître la définition d'un polynôme – Connaître la définition du degré d'un polynôme*
  - *Connaître la définition du zéro d'un polynôme*
  - *Connaître la propriété relative au produit de polynômes*
  - *Connaître la propriété relative à la somme de polynômes*
  - *Connaître la propriété relative à l'égalité de deux polynômes*
  - *Connaître les produits remarquables*
  - *Reconnaître le théorème fondamental relatif à la factorisation par* $x-\alpha$
  - *Factoriser un polynôme par* $x-\alpha$ *(*α *étant un zéro) et rechercher les zéros en utilisant la méthode de la division euclidienne ou des coefficients indéterminés*
  - *Ecrire la forme canonique d'un polynôme du second degré*
  - *Factoriser un polynôme du second degré en utilisant la forme canonique*
  - *Etudier le signe d'un polynôme du second degré*
  - *Connaître la définition d'une fraction rationnelle*
  - *Transformer les fractions rationnelles par la méthode d'identification*

CORRECTION DES ACTIVITES

Activité 1

a) $p(x) = -2-3x+x^3$

b) Le terme constant est – 2

c) Les coefficients des termes de degré 1 et de degré 2 sont respectivement : -3 et 0
d) Le coefficient du monôme de plus haut degré est 1
e) Le degré du polynôme p est 3.

Corrigé de l'exercice de fixation

a) Polynôme de degré 2

Activité 2

a) Les images respectives de -1 ; 0 ; 2 et 3 par q sont : - 20 ; - 24 ; - 36 et 0.
Le nombre 3 a pour image 0 par q.

b) Les solutions de l'équation sont : $-\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

Corrigé de l'exercice de fixation

Les zéros de p sont : - 2 et 1.

Activité 3

1- a) $P(x)\times Q(x)=15x^3-19x^2+18x-8$

b) $P(x)\times Q(x)$ est la somme algébrique de monômes. Il a pour degré 3

2- $d^0\left(PQ\right)=d^0\left(P\right)+d^0\left(Q\right)$

3- Lorsque P et Q sont des polynômes non nuls, le degré du produit PQ est égal à la somme des degrés de P et Q.

Corrigé de l'exercice de fixation

$d^0\left(PQ\right)=d^0\left(P\right)+d^0\left(Q\right)=4+5=9$

Activité 4

1- a) $\left(P+Q\right)(x)=-2x^3+6x^2+4x-5$; $\left(P+R\right)(x)=-x^3+5x^2+5x-6$;
$\left(P+S\right)(x)=4x^2+3x+3$

b) $d^0\left(P+Q\right)=3$; $d^0\left(P+R\right)=3$; $d^0\left(P+S\right)=2$

2- $d^0\left(P+Q\right)=d^0\left(P\right)$; $d^0\left(P+Q\right)\leq d^0\left(Q\right)$; $d^0\left(P+R\right)=d^0\left(P\right)$
$d^0\left(P+R\right)=d^0\left(R\right)$, $d^0\left(P+S\right)\leq d^0\left(P\right)$; $d^0\left(P+S\right)\leq d^0\left(S\right)$

3- Le degré de la somme de deux polynômes est inférieur ou égal au plus des degrés de P et de Q.

Corrigé de l'exercice de fixation

a) Faux ; b) Vrai

Activité 5

1- a) On a : $b=0$ et $a+b=0$

b) On a : *a = b = 0, donc* pour tout nombre réel *x, ax+b = 0* si *a = b =0*

2- a) On a : $c=0$; $a-b+c=0$ et $4a+2b+c=0$

b) On a : $a = b = c = 0$, donc pour tout nombre réel x, $ax^2 + bx + c = 0$ si $a = b = c = 0$

3- a) Les coefficients du polynôme p sont : $a-a'$; $b-b'$ et $c-c'$

b) Le polynôme peut être nul, donc on a : $a-a' = 0$; $b-b' = 0$ et $c-c' = 0$. D'où : $a = a'$; $b = b'$ et $c = c'$.

c) Si les coefficients des termes de même degré des polynômes f et g sont identiques, alors $f(x) = g(x)$.

4- a) $a = 5$; $b = -6$ et $c = 8$ b) $a = 1$; $b = -9$ et $c = -1$

Corrigé de l'exercice de fixation

$a = 5$; $b = -6$ et $c = 8$

Activité 6

1- a) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

b) $(a+b)^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

$(a-b)^3 = (a-b)(a^2-2ab+b^2) = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

c) $(a+b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$; $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

2- $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$; $(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$;

$(x+y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$; $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$

Corrigé de l'exercice de fixation

a) $(x+2)^3 = x^3+3\times x^2\times 2+3\times x\times 2^2+2^3 = x^3+6x^2+12x+8$;

b) $(x-3t)^3 = x^3-3\times x^2\times 3t+3\times x\times(3t)^2-(3t)^3 = x^3-9x^2t+27t^3$;

c) $(x-2)^3 = x^3-6x^2+12x-8$

Activité 7

1- a) $f(-4)=0$; $f(-3)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=36$

b) $P(x)=(x+3)(x-2)$; $\mathrm{Q}(x)=(x+4)(x-2)$; $\mathrm{R}(x)=(x+4)(x+3)$

c) $d^0(P)=d^0(Q)=d^0(R)=2$

2- a) Effectuer les divisions euclidienne demandées, on obtient :

Dividende	$f(x)$	$f(x)$
Diviseur	$x-3$	$x-2$
Quotient	$x^2+8x+22$	$x^2+7x+12$
Reste	-60	0

b) On a :

- $f(x)=(x-3)(x^2+8x+22)-60$, donc : $g(x)=x^2+8x+22$ et $h(x)=-60$
- $f(x)=(x-2)(x^2+7x+12)$, donc : $g(x)=x^2+7x+12$ et $h(x)=0$

Corrigé de l'exercice de fixation

a) $P(x)=(x+1)(x-6)$, donc *P(x)* est divisible par *x +1*

b) $P(x)=(x-2)(x^2-2x+4)$, donc *P(x)* est divisible par *x +2.*

Activité 8

1- Le polynôme $x\mapsto x-3$ est de degré 1, or P a pour degré 3 en tant produit de polynômes, donc il existe un polynôme Q de degré 2 tel que : $P(x)=(x-3)Q(x)$

2- a) $(x-3)Q(x)=ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c$. Par identification, on a : $a=1$; $b-3a=11$; $c-3b=-67$; $-3c=21$. On détermine les valeurs de a, b et c et on obtient : $Q(x)=3x^2+20x-7$

b) Effectuer la division euclidienne pour retrouver *Q(x)*

3- $P(x)=3(x-3)(3x^2+20x-7)$

Corrigé de l'exercice de fixation

On vérifie que : $P(2)=0$, on utilise la méthode des coefficients indéterminés pour une façon et la méthode de la division euclidienne pour la deuxième façon afin d'obtenir le polynôme du second que l'on factorise par la suite. Dans les deux cas, on a :

$P(x)=(x-2)(x^2+5x-6)$

Activité 9

1- $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{b^2}{4a^2}$; $\beta=-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$

2- En posant : $\alpha=\dfrac{b}{2a}$, on obtient la forme souhaitée.

Corrigé de l'exercice de fixation

(b) $\to(1)$; (d) $\to(2)$; (c) $\to(3)$; $(a)\to(4)$.

Activité 10

1- • Pour le premier cas, oui puis que *P(x)* sera de la forme $P(x)=a(x-\alpha)^2$

• Pour le deuxième cas, oui puis que dans les crochets, il s'agira de la différence deux carrés.

• Pour le premier troisième cas, non puis que dans les crochets, il s'agira de la somme de deux carrés.

2- Si $\beta=0$, alors P a un zéro double ; si $\beta<0$, alors P a deux zéros distincts ; si $\beta>0$, alors P n'a aucun zéro.

3- P se factorise si $\beta=0$ ou si $\beta<0$.

Corrigé de l'exercice de fixation

a) b) ; c) ; d).

Activité 11

1- le polynôme $ax+b$: est nul en $-\frac{b}{a}$; a même signe que *(-a)* sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{b}{a}\right[$; a même signe que *a* sur l'intervalle $\left]-\frac{b}{a};+\infty\right[$

2- Dresser le tableau de signe de ax+b.

Corrigé de l'exercice de fixation

a) P est nul en 1,5 ; strictement positif sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right[$ et strictement négatif sur l'intervalle $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.

b) Q est nul en $\frac{4}{3}$; strictement négatif sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{4}{3}\right[$ et strictement positif sur l'intervalle $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$.

c) R est nul en 0 ; strictement négatif sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et strictement positif sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d) S est nul en 1 ; strictement positif sur les intervalles $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$.

e) T est nul en $-\frac{33}{4}$; strictement négatif sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{33}{4}\right[$ et strictement positif sur l'intervalle $\left]\frac{33}{4};+\infty\right[$

Activité 12

Ecrire : $R(x)=-3x^2+9x+12$

1- a) $p(x)=-2\left[(x-1)^2+5\right]$; $Q(x)=4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$;

$R(x)=-3\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right]$

b) $Q(x)=4\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$; $R(x)=-(x-4)(x+1)$

2- Dresser les tableaux de signe pour parvenir aux conclusions suivantes :

- Le polynôme est strictement négatif sur $\mathbb{R}$

- Le polynôme Q est nul en 0,75 et strictement positif sur les intervalles $\left]-\infty;\frac{3}{4}\right[$ et $\left]\frac{3}{4};+\infty\right[$.

- Le polynôme R est nul en – 1 et 4 ; strictement négatif sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]4;+\infty[$; strictement positif sur l'intervalle $]-1;4[$.

Corrigé de l'exercice de fixation

a) $P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$. Le polynôme est strictement négatif sur $\mathbb{R}$

b) $P(x)=2(x-2)(x-1)$. Le polynôme P est nul en 2 et 1 ; strictement positif sur les intervalles $]-\infty;1[$ et $]2;+\infty[$; strictement positif sur l'intervalle $]1;2[$.

c) **Ecrire** $P(x)=-x^2+8x-16$. Le polynôme P est nul en 4 ; strictement négatif sur les intervalles $]-\infty;4[$ et $]4;+\infty[$.

Activité 13

1- P et Q sont des polynômes de degrés respectifs 2 et 1
2- Celles qui sont le quotient de deux polynômes sont : F ; L et G.

Corrigé de l'exercice de fixation

- La fonction *f* est le quotient des polynômes $x\mapsto x^2-2x+5$ et $x\mapsto 1$

- La fonction *g* est le quotient des polynômes $x\mapsto x^3-4x^2+x+5$ et $x\mapsto x^2-1$

-La fonction *h* est la somme de deux fractions rationnelles.

- La fonction *k* est le quotient des polynômes $x\mapsto 3$ et $x\mapsto x+2$

Activité 14

Les valeurs de a, b et c sont respectivement : 1 ; 1 et – 7.

Corrigé de l'exercice de fixation

Les valeurs de a, b et c sont respectivement : 1 ; 7 et 23.

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1 P105

1- Les fonctions qui sont des polynômes sont *f* et j de degrés respectifs 4 et 5.
2- Le polynôme *A* a pour degré 4 et pour coefficient du terme de plus haut degré – 1.
   Le polynôme *B* a pour degré 3 et pour coefficient du terme de plus haut degré 1.

Exercice 2 P105

a) Le coefficient du terme en x^2 est 2
b) Le terme constant est – 1.

Exercice 3 P 105

1- Le coefficient du terme de degré du polynôme P est – 4 et son terme constant est - 12
2- $P(x) = -4x^3 + +6x^2 + 22x - 12$

Exercice 4 P 105

a) Le degré et le terme constant sont respectivement : 4 et - 34
b) Le degré et le terme constant sont respectivement : 1 et - 5
c) Le degré et le terme constant sont respectivement : 12 et - 27

Exercice 5 P 105

Des zéros de P sont : 2 ; - 5 et π

Exercice 6 P 105

$d^0(P)$	$d^0(Q)$	$d^0(PQ)$
8	20	28
15	22	37
48	1970	2018

Exercice 7 P105

a) $d^0(PQ) = d^0(P) \times d^0(Q) = 3 \times 2 = 6$; b) $d^0(PQ) = 6$; c) $d^0(PQ) = 8074$

Exercice 8 P105

a) $d^0(FG) = 4$; $FG(x) = -x^4 - 3x^3 + x^2 + 9x + 6$;
b) $d^0(FG) = 8$; $FG(x) = -24x^8 - 6x^5 + 36x^4 - 30x^3 + 12x^2 - 8x$

Exercice 9 P105

a) $d^0(P+Q) = 3$; b) $d^0(P+Q) \leq 2$; c) $d^0(P+Q) = 2$

Exercice 10 P105

a) $d^0(P+Q) = 2$; b) $d^0(P+Q) = 2$; c) $d^0(P+Q) = 2$

Exercice 11 P106

$(P+Q)(x) = 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$
$(P-Q)(x) = -3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 12x + 4$

Exercice 12 P106

Pour tout nombre réel x, on a : $H(x) = P(x)$

Exercice 13 P 106

a) *a= b = 1 ; b) a = 5 et b = -2*

Exercice 14 P 106

a = -1 ; b = 3 ; c = -5 ; d = -10 et e = -1 ou a = 1 ; b = -3 ; c = 5 ; d = -10 et e = -1

Exercice 15 P 106

Les polynômes qui sont sous forme factorisée sont : a) et c)

Exercice 16 P 106

En numérotant les expressions de la colonne de 1 à 4 et celles de la colonne 2 de a à d, on a : 1.c ; 2. d ; 3.b et 4.a

Exercice 17 P 106

1.c ; 2. a ; 3.d ; 4.b

Exercice 18 P 106

a) $(x-2)^2$; b) $(x+1)^2$; c) $(x-2)^2$; d) $\left(2x-\sqrt{5}\right)\left(2x+\sqrt{5}\right)$;

e) $(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$; f) $(3x+1)\left(9x^2-3x+1\right)$;

g) $\left(\frac{2}{5}x-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{25}x^2+\frac{1}{10}x+\frac{1}{16}\right)$; h) $\left(2x+6+3\sqrt{2}\right)\left(x-3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$;

i) $(5x-1)^2$; j) $(11x-2)(x+2)$; k) $-2(x-3)^2$; l) $(x+3)\left(x^2-3x+9\right)$;

m) $(x-2)^3$; n) $(x+1)^3$.

Exercice 19 P 106

a) P (1) = 0, donc 1 est un zéro de P
b) – 2 n'est pas un zéro de P
c) – 5 est un zéro de P.

Exercice 20 P 106

Ceux qui sont des zéros de ce polynôme sont : - 2 et 4.

Exercice 21 P 106

a.2 ; b.6 ; c.7 ; d.5 ; e.3 ; f.1 ; g.4

Exercice 22 P 106

a) $\alpha = 4$; b) $\alpha = 16$; c) $\alpha = -15$; d) $\alpha = 4$

e) Reformulation de la consigne « $\alpha(x+2)^2-5=x^2+4\alpha x-1$ » ; $\alpha=1$

Exercice 23 P 106

a) $(x+1)^2-4$; b) $(x-3)^2-11$; c) $(x-5)^2-20$; d) $(x+6)^2-31$;
e) $(x-2)^2-4$; f) $(x-7)^2-40$

Exercice 24 P 107

$p(x)=2\left(x+2-\sqrt{6}\right)\left(x+2+\sqrt{6}\right)$; $q(x)=-\left(x-1-\sqrt{6}\right)\left(x-1+\sqrt{6}\right)$

$r(x)=(x-1)(3x+4)$; $t(x)=\frac{1}{3}\left(x+3-\sqrt{6}\right)\left(x+3+\sqrt{6}\right)$.

Exercice 25 P107

$A(x)=(x-1)(5x+1)$; $B(x)=(3x+1)(x+1)$; $D(x)=x(5-4x)$

$E(x)=-\left(x-2-\sqrt{5}\right)\left(x-2+\sqrt{5}\right)$

Exercice 26 P 107

- Le polynôme : $x\mapsto a(x)$ est nul en $-\frac{1}{5}$ et 1, il est strictement positif sur les intervalles $\left]-\infty;-\frac{1}{5}\right[$ et $]1;+\infty[$, puis strictement négatif sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{5};1\right[$

- Le polynôme : $x\mapsto b(x)$ est nul en $-\frac{1}{3}$ et - 1, il est strictement positif sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, puis strictement négatif sur l'intervalle $\left]-1;-\frac{1}{5}\right[$

- Le polynôme : $x\mapsto c(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

- Le polynôme : $x\mapsto d(x)$ est nul en $\frac{5}{4}$ et 0, il est strictement négatif sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $\left]\frac{5}{4};+\infty\right[$, puis strictement positif sur l'intervalle $\left]0;\frac{1}{5}\right[$.

- Le polynôme : $x\mapsto e(x)$ est strictement négatif sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27 P 107

Se référer à **l'exercice 24** pour la factorisation

• Le polynôme : $x \mapsto p(x)$ est nul en $2-\sqrt{5}$ et $2+\sqrt{5}$, il est strictement positif sur les intervalles $\left]-\infty;2-\sqrt{5}\right[$ et $\left]2+\sqrt{5};+\infty\right[$, puis strictement négatif sur l'intervalle $\left]2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\right[$

• Le polynôme : $x \mapsto q(x)$ est nul en $1-\sqrt{6}$ et $1+\sqrt{6}$, il est strictement négatif sur les intervalles $\left]-\infty;1-\sqrt{6}\right[$ et $\left]1+\sqrt{6};+\infty\right[$, puis strictement positif sur l'intervalle $\left]1-\sqrt{6};1+\sqrt{6}\right[$

• Le polynôme : $x \mapsto r(x)$ est nul en $-\frac{4}{3}$ et 1, il est strictement positif sur les intervalles $\left]-\infty;-\frac{4}{3}\right[$ et $\left]1;+\infty\right[$, puis strictement négatif sur l'intervalle $\left]-\frac{4}{3};1\right[$

• Le polynôme : $x \mapsto s(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

• Le polynôme : $x \mapsto t(x)$ est nul en $-3-\sqrt{6}$ et $-3-\sqrt{6}$, il est strictement positif sur les intervalles $\left]-\infty;-3-\sqrt{6}\right[$ et $\left]-3+\sqrt{6};+\infty\right[$, puis strictement négatif sur l'intervalle $\left]0;\frac{1}{5}\right[$.

<u>Exercice 28 P 107</u>

a) On a : P (1) = 0
b) Par la méthode des coefficients indéterminés, on obtient :
   a = 1 ; b = 6 et *c = -6*

<u>Exercice 29 P 107</u>

On a *: a = - 1 ; b = 0* et *c = -2*

<u>Exercice 30 P 107</u>

Par la méthode de la division euclidienne, on obtient :

a = 1 ; b = 6 et *c = -6*

<u>Exercice 31 P 107</u>

Par la méthode de la division euclidienne, on obtient :

a = -1 ; b = 0 et *c = -2*

<u>Exercice 32 P 107</u>

a) Faux ; b) Vrai ; c) Faux

<u>Exercice 33 P 107</u>

Les fonctions qui sont des fractions rationnelles sont : f ; g et l

$D_f = D_g = \mathbb{R}$; $D_l = \mathbb{R}/\{-1;1\}$

Exercice 34 P 107

a) On a : $v(x) = (x+2)(6x-17)+35$

b) *a = 6 ; b = -17* et *c = 35*

Exercice 35 P 107

1-

	Quotient	Reste
a)	$2x^2 - x + 3$	$4x-3$
b)	$\frac{3}{2}x$	$\frac{1}{2}x-4$
c)	$\frac{9}{2}$	$\frac{35}{2}$
d)	$\frac{7}{2x}$	$11+\frac{14}{x}$

2- On a : $f(x) = (2x-3)\left(\frac{m}{2}x+\frac{3m+10}{4}\right)+3\left(\frac{3m+10}{4}-1\right)$. On résout l'équation $3\left(\frac{3m+10}{4}\right)-1=0$ puisque le reste de cette division euclidienne doit être nul pour que *f(x)* soit factorisable par *2x-3.* On trouve : $m=-\frac{26}{9}$

Exercice 36 P 108

Par la méthode de la division euclidienne, on a : *a = -3 ; b = -8* et *c = 26*

Exercice 37 P 108

a) Pour tout nombre réel *x* différent de -2, $v(x) = \frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$

b) On obtient : *a = 6 ; b = -17* et *c = 35.*

Exercice 38 P 108

Pour tout nombre réel *x* différent de -1 et de 0, $f(x) = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$

On trouve : *a = -1* et *b = 3*

Exercice 39 P 108

1- $L(-2)=0 \Leftrightarrow 4a=0$, donc : *a = 0*

2- $L(x)=3(x+2)(x-2)$ et son second est 2.

Exercice 40 P 108

1- a) $f(x)=-8x^2+6x+5$

b) $f(x)=-(2x+1)(4x-5)$

c) $f(x)=-8\left[\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{49}{64}\right]$

2- a) • $f(x)=-8x^2+6x+5$ et $f(0)=5$;

• $f(x)=-(2x+1)(4x-5)$ et $f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{5}{9}$

• $f(x)=-8\left[\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{49}{64}\right]$ et $f\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{49}{8}$

• $f(x)=-8x^2+6x+5$ et $f(1+\sqrt{2})=10\sqrt{2}-13$

b) $f(x)=-8\left[\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{49}{64}\right]$. La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{3}{8}\right[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{3}{8};+\infty\right[$

c) $f(x)=0 \Leftrightarrow (2x+1)(4x-5)=0$. Les solutions de l'équation sont : $-\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{4}$.

d) $f(x)=5 \Leftrightarrow -8x^2+6x+5=5$. Les solutions de l'équation sont : $\frac{3}{4}$ et 0.

e) $f(x)=-(2x+1)(4x-5)$. La fonction *f* est nulle en $-\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{4}$. Elle est strictement négative sur les intervalles $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{5}{4};+\infty\right[$, puis strictement positive sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right[$

Exercice 41 P 108

1- $Q(x)=x^2-4x+3$

2- $Q(x)=(x-2)^2-1$

3- $Q(x)=(x-3)(x-1)$

4- $S=]1;3[$

5- $Q(x)=4 \Leftrightarrow (x-2)^2-1=4$. Les solutions de l'équation sont : $2-\sqrt{5}$ et $2+\sqrt{5}$.

6- $Q(x)>0 \Leftrightarrow x^2-4x+3>3$. $S=]-\infty;0[\cup]4;+\infty[$

Exercice 42 P 108

a) $g(x)=-2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}\right]$

b) $g(x)=-2\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

c) La fonction g est nulle en $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$. Elle est strictement négative sur les intervalles $\left]-\infty;\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right[$ et $\left]\frac{3+\sqrt{7}}{2};+\infty\right[$, puis strictement positive sur l'intervalle $\left]\frac{3-\sqrt{7}}{2};\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right[$

<u>Exercice 43 P 108</u>

a) Les solutions de l'équation sont : -3 et 0
b) Les solutions de l'équation sont : 1 et 2
c) Les solutions de l'équation sont : -2 et 3
d) L'équation n'a aucune solution

<u>Exercice 44 P 108</u>

a) $S=\left]-\infty;-\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right[\cup\left]-\frac{5-\sqrt{13}}{2};+\infty\right[$

b) $S=\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

c) L'équation n'a aucune solution

d) $S=\mathbb{R}$

e) Inéquation a) répétée

f) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

<u>Exercice 45 P 108</u>

1- a) $A(x)=(x-5)^2-27$

b) Le polynôme A est strictement décroissant sur l'intervalle $]-\infty;5]$ et strictement croissant sur l'intervalle $[5;+\infty[$. De plus *A (5) = -27*, donc le polynôme A atteint sa valeur minimale égale à -27 en 5 sur $\mathbb{R}$.

2- a) $B(x)=-2(x-2)^2+9$. Le polynôme B est strictement croissant sur l'intervalle $]-\infty;2]$ et strictement décroissant sur l'intervalle $[2;+\infty[$. De plus B (2) = 9, donc le polynôme B son maximum égal à 9 sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 46 P 108</u>

Soit $f(x)=x^2-(2+\sqrt{2})x+\sqrt{8}$. On a : $f(1)=\sqrt{2}-1$ et $f(2)=0$, donc Amine a raison car 2 est une solution de l'équation (E).

Exercice 47 P 108

a) $P_m(x)=\left(m+3\right)\left[\left(x+\dfrac{3m+1}{m+3}\right)^2-\dfrac{2(4m^2+m-1}{\left(m+3\right)^2}\right]$

b) $4m^2+m-1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\,ou\quad m=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

c) • Cas où $m=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$, on a : $x_0=\dfrac{1+3\sqrt{17}}{5-\sqrt{17}}$

• Cas où $m=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$, on a : $x_0=\dfrac{1-3\sqrt{17}}{5+\sqrt{17}}$

Exercice 48 P 108

1- $h(x)=2\left(x-1\right)^2+1$

2- a) $g(x)=\left(x-1\right)^2+1$

b) on a : $f(x)\geq g(x)$, donc $f(x)\geq\left(x-1\right)^2+1\geq 1$

3- On sait que : $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$, donc $g(1)\leq f(1)\leq h(1)$, d'où : $f(1)=1$.

3- Soit $f(x)=ax^2+bx+c$. On a : $f(1)=1$ et $f(11)=181$, donc : $a+b+c=1$ et $121a+11b+c=181$. On obtient : $a=\dfrac{17+c}{11}$ et $b=-\dfrac{61+2c}{11}$.

Comme a = *1,8*, on a $\dfrac{17+c}{11}=1{,}8$ et c = *2,8*. On obtient : $b=\dfrac{-6-12\times 2{,}8}{11}=-3{,}6$

D'où : $f(x)=1{,}8x^2-3{,}6x+2{,}8$

Exercice 49 P 108

a) • $x^2-x-6=\left(x+2\right)\left(x-3\right)$; • $2x^2+3x-2=\left(2x-1\right)\left(x+2\right)$

b) $D_h=\mathbb{R}/\left\{-2;\dfrac{1}{2};3\right\}$

c) $x\in D_h$, $h(x)=0\Leftrightarrow 2\left(2x-1\right)+x\left(x-3\right)=0$. La solution de l'équation est 1.

Exercice 50 P 108

a) $3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{4}{3}=3\left(x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}\right)-\dfrac{4}{3}=3x^2+2x-1$

b) $3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

c) $D_u=\mathbb{R}/\left\{-1;\dfrac{1}{3}\right\}$. $\forall x\in D_u$, $u(x)=\dfrac{1}{x+1}$

Exercice 51 P 108

1- On a : $f(x)=(x-1)^2(x-2)+3x-2$, donc : a = 1 ; b = -2 ; c = 3 et d = -2

2- $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^3+(a-2)x^2+(1-2a+b)x+a-b}{(x-1)^2}$. Par identification, on résout le système et on trouve : a =-2 ; b = 11 et c = 9

Exercice 52 P109

1- On a : $1^{2018}-1=1-1=0$, donc $x^{2018}-1$ est divisible par *x – 1*
2- On a : *k =15*
3- On a : $P(x)=a(x+2)(x-1)(x-3)$. Or P (-1) = 16, donc a = 2.

D'où : $P(x)=2(x+2)(x-1)(x-3)$

4- $Q(x)=(x^2-8x+1)(2x^2+3)+2x-1$

Exercice 53 P 109

$\forall x\in\mathbb{R}/\{-2;5\}$, $f(x)=\frac{(x+1)(x+4)}{2x+5}$

La fonction *f* est nulle en -1 et – 4. Elle est strictement négative sur les intervalles $]-\infty;-4[$ et $\left]-\frac{5}{2};-1\right[$, puis strictement positive sur les intervalles $\left]-4;-\frac{5}{2}\right[$ et $]-1;+\infty[$.

Exercice 54 P 109

1- On a : $A(x)=10x+10x-x^2=20x-x^2$
2- On a : $100-(20x-x^2)=20x-x^2$. Or *x* est compris entre 0 et 10, donc : $x=10-5\sqrt{2}$.

Exercice 55 P 109

1- On utilise la propriété de Pythagore pour les longueurs LK, KJ, IJ et IL et comme les côtés opposés de ce quadrilatère ont la même longueur, on conclut que IJKL est un parallélogramme.
2- **Le nombre réel *x* désigne quelle longueur. Aucune information sur *x* sur la figure en plus.**

Exercice 56 P 110

Soit *x* le nombre de couvertures de cahiers et le prix d'une couverture. On a :

$xy=21600$ et $(x+30)(y-20)=xy+2400$.

On résout le système suivant : $\begin{cases} y=\frac{21600}{x} \\ -x^2-150x+32400=0 \end{cases}$

Après calculs, on trouve : *x = 120 et y = 180*

Donc : il y a 120 couvertures pour 180F l'unité.

Leçon 7 : ANGLES INSCRITS

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Pour dégager le contexte, on peut les questions suivantes :
  1) De quel évènement s'agit-il dans ce texte ?
  2) Où se déroule cet évènement ?
  3) Quels sont les acteurs de cet évènement ?

  <u>Réponses attendues</u>

  1) Il s'agit des élèves de 2^{nde} C_2 qui font des recherches
  2) Cet évènement se déroule dans une salle multimédia du foyer d'un lycée
  3) Les acteurs sont : les élèves de la classe de 2^{nde} C_2.
- Pour dégager la circonstance, on peut poser la question suivante :
  Quel est le problème posé par ce texte ?
  <u>Réponse attendue</u>
  Cette classe découvre que l'on peut établir une relation entre les longueurs des côtés, l'aire, les angles et le rayon du cercle circonscrit à un triangle ABC à partir de la formule de l'aire d'un triangle connue depuis la classe de $6^{ème}$.
- Pour dégager la tâche, on peut poser la question suivante :
  Que décident de faire les élèves de la classe voisine
  <u>Réponse attendue</u>
  Ils décident de s'organiser pour faire des recherches à leur tour.
- Pour faire la synthèse et annoncer les notions mathématiques convoquées par la situation d'apprentissage.
  Pour améliorer la formule de l'aire du triangle que nous avons connue depuis la classe de $6^{ème}$, nous allons étudier la leçon titrée « ANGLES INSCRITS » selon le plan suivant :
  - *Connaître la relation entre un angle inscrit et un angle au centre associé*
  - *Connaître la propriété relative aux mesures d'un angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente et de l'angle au centre associé*
  - *Connaître la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc ou deux arcs de même longueur*
  - *Connaître la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant deux arcs de même extrémités*
  - *Connaître la propriété relative à la bissectrice d'un angle inscrit et l'arc que cet angle intercepte*
  - *Connaître la propriété relative au calcul des aires, des longueurs et des mesures d'angles en utilisant les formules d'aires ou le théorème des sinus*
  - *Construire un arc capable d'un angle de mesure donnée*

CORRECTION DES ACTIVITES

Activité 1

1- Les angles AOM et AOM' sont supplémentaires, donc:

$mes AOM + mes A0M' = 180^0$. D'où : $mes AOM = 180^0 - mes A0M'$.

Comme le triangle AOM est isocèle en O, donc les angles AMO et OAM ont la même mesure, d'où : $2mes AMO + mes A0M = 180^0$. On obtient :

$2mes AMO + 180^0 - mes A0M' = 180^0$. Ainsi: $mes AOM' = 2mes AMO$

2- • Cas où M' appartient à l'arc AB.

Réaliser une figure correspondant aux données.

On a : $mes\,AOM' + mes\,M'OB = mes\,AOB$. Comme les angles inscrits AMM' et $M'MB$ ont pour angles au centre associés respectifs AOM' et $M'OB$, on a :

$mes\,AOM' = 2mes\,AMM'$ et $mes\,M'OB = 2mes\,M'MB$

Donc : $mes\,AOB = 2(mes\,AMM' + mes\,M'MB) = 2mes\,AMB$

- Cas où M' n' appartient pas à l'arc AB.

Réaliser une figure correspondant aux données.

On a : $mes\,AOB + mes\,B0M' = mes\,AOM'$.

Donc : $mes\,AOB = mes\,AOM' - mes\,BOM'$. Comme les angles inscrits AMM' et $M'MB$ ont pour angles au centre associés respectifs AOM' et $M'OB$, on a :

$mes\,AOM' = 2mes\,AMM'$ et $mes\,M'OB = 2mes\,M'MB$

Donc : $mes\,AOB = 2(mes\,AMM' - mes\,M'MB) = 2mes\,AMB$

3- On suppose que M appartient à l'arc AB.

Réaliser une figure correspondant aux données.

a) On a : $mes\,AMB = mes\,AMM' + mes\,M'MB$. Or les angles inscrits AMM' et $M'MB$ ont pour angles au centre associés respectifs AOM' et BOM', donc :

$mes\,AMM' = \frac{1}{2}mes\,AOM'$ et $mes\,M'MB = \frac{1}{2}mes\,BOM'$

Ainsi : $mes\,AMB = \frac{1}{2}(mes\,AOM' + mes\,BOM')$

b) On a : $mes\,AMB = \frac{1}{2}(360° - mes\,AOB) = 180° - \frac{1}{2}mes\,AOB$

4- Cas où le segment $[AB]$ est un diamètre.

$mes\,AMB = \frac{1}{2}(mes\,AOM' + mes\,BOM')$. Or les angles AOM' et BOM' dont supplémentaires, donc : $mes\,AOM' + mes\,BOM' = 180°$.

D'où : $mes\,AMB = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$ (Résultat connu d'avance)

__**Corrigé de l'exercice de fixation**__

a) Le point E doit appartenir au grand arc FG pour que l'angle inscrit GEF intercepte l'arc FG. Ce qui permettra d'obtenir ce résultat. (**Revoir la figure**)

b) Si l'angle inscrit EFH intercepte le grand arc EH, alors

$$mes\,EFH = 180° - \frac{1}{2} mes\,EDH$$

c) Si l'angle inscrit KEG intercepte l'arc KG, alors $mes\,KDG = 2 \times mes\,KEG$

Activité 2

1- a) Réaliser la figure demandée

b) La bissectrice de l'angle AOB le partage en deux angles de même mesure, donc :

$2mes\,AOT = mes\,AOB$

c) On a : $mesTAB = 90° - mes\,IAO$. Or le triangle AOB est isocèle en O. Donc les angles IAO et IBO ont la même mesure. D'où :

$$mes\,AOB = 180° - 2mes\,IAO = 2(90° - mes\,IAO) = 2mesTAB$$

2- a) Les points T, A et T' sont alignés et B un point n'appartenant pas à la droite (AT), donc : $mesTAB + mesT'AB = 180°$

b) On a : $mesT'AB = 180° - mesTAB = 180° - \frac{1}{2} mes\,AOB$.

Corrigé de l'exercice de fixation

$$mesTAB = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$$

Activité 3

1- a) On a : $mes\,AMB = 180° - \frac{1}{2} mes\,AOB = mes\,ANB$

b) On a : $mes\,AMB = \frac{1}{2} mes\,AOB = mes\,ANB$

c) On a : $mesTAB = \frac{1}{2} mes\,AOB = mes\,AMB$

2- Soit R le rayon du cercle (C). Comme les arcs ont la même longueur, donc on a :

$$\frac{\pi R \times mes\,AOB}{180°} = \frac{\pi R \times mesCOD}{180°}$$. D'où : $mes\,AOB = mesCOD$

Corrigé de l'exercice de fixation

Les angles PAQ et MBN ont la même mesure.

Activité 4

1- Réalise la figure demandée.

2- On a : $mes\,AMB + mes\,ANB = \frac{1}{2}mes\,AOB + 180° - \frac{1}{2}mes\,AOB = 180°$,

donc les angles AMB et ANB sont supplémentaires.

Corrigé de l'exercice de fixation

a) Réaliser une figure

b) Les angles EMF et ENF sont supplémentaires.

Activité 5

On a : $mes\,BAC = \frac{1}{2}mes\,AOB = mes\,TBC = mes\,IOB$, donc les arcs IC et IB ont la même longueur.

Corrigé de l'exercice de fixation

Revoir le codage des angles.

Les arcs AI et IX, d'une part et les arcs JC et JX, d'autre part ont la même mesure.

Activité 6

1- Réaliser une figure dans chacun des cas.

2- • Dans le premier de figure, on a : $CH = AC\sin BAC$

• Dans le deuxième cas de figure, on a : $CH = AC\sin BAC$, où $\sin BAC = 1$

• Dans le troisième cas de figure, en admettant que $\sin BAC = \sin CAH$ puis que les angles BAC et CAH sont supplémentaires, on a :
$CH = AC\sin BAC$

Dans tous les trois cas de figures, on a : $CH = AC\sin BAC$.

3- On a : $S = \frac{1}{2}AB \times CH = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin BAC = \frac{1}{2}bc\sin BAC$

4- $S = \frac{1}{2}ac\sin ABC$; $S = \frac{1}{2}ab\sin ACB$

Corrigé de l'exercice de fixation

1) Aire (ABC) = $\frac{1}{2}AB \times AC \times \sin BAC = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{4}$

2) Aire (ABC) = $\frac{1}{2}AB \times BC \times \sin ABC = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

3) Aire (ABC) = $\frac{1}{2}BC \times AC \times \sin ACB = \frac{1}{2} \times 7 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

Activité 7

1- On a : $S = \frac{1}{2}bc\sin BAC = \frac{1}{2}ac\sin ABC = \frac{1}{2}ab\sin ACB$

2- $2S = bc\sin BAC = ac\sin ABC = ab\sin ACB$. En prenant l'inverse de chaque membre des égalités puis les multiplier par *abc,* on obtient :

$$\frac{a}{\sin BAC} = \frac{b}{\sin ABC} = \frac{c}{\sin ACB} = \frac{abc}{2S}$$

3- a) Les points B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon *R*, donc *OB* = *R* = *OC*. D'où le triangle est isocèle en O.

b) La droite (OH) étant une hauteur du triangle OBC isocèle en O, est aussi la bissectrice de l'angle BOC.

L'angle inscrit BAC intercepte l'arc BC, donc :

$$mes\,BAC = \frac{1}{2}mes\,BOC = mes\,BOH$$

c) Dans le triangle BOH rectangle en H, on a :

$$\sin BAC = \sin BOH = \frac{BH}{OB} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}, \text{ donc : } \frac{\sin BAC}{a} = \frac{1}{2R}$$

D'où : $\dfrac{a}{\sin BAC} = 2R$.

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

a) Faux ; b) Vrai

<u>Activité 8</u>

L'énoncé de cette activité est à revoir car il semble qu'il y a des confusions

1- Réaliser une figure
2-

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

a) Faux ; b) Vrai ; c) Faux

<u>COORECTION DES EXERCICES</u>

<u>Exercice 1 P 120</u>

- Dans le premier cas : « si AMB intercepte l'arc AB, alors $mes\,AMB = \frac{1}{2}mes\,AOB$
- Dans le premier cas : « si AMB intercepte le grand arc AB, alors $mes\,AMB = 180° - \frac{1}{2}mes\,AOB$
- Dans le premier cas : « si AMB intercepte l'arc AB, alors $mes\,AMB = \frac{1}{2}mes\,AOB$

<u>Exercice 2 P 120</u>

- Dans le premier cas de figure : $\alpha = 139°$
- Dans le deuxième cas de figure : $\alpha = 43°$

Exercice 3 P 120

1- La mesure de l'angle au centre est :
   a) 72° ; b) 102° ; c) 2θ
2- La mesure de l'angle inscrit est :
   a) 64° ; b) 24° ; c) $\frac{1}{2}\theta$

Exercice 4 P 120

$mesFEG$	$mesGFR$	$mesSFG$
40°	20°	160°
144°	72°	108°
88°	44°	136°

Exercice 5 P 120

La propriété est la suivante : « Des angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure »

Exercice 6 P 121

Les angles PAQ et MBN ont la même mesure.

Exercice 7 P 121

Dans le premier cas : $mesBAC = 28°$; dans le second cas : $mesBAC = 30°$

Exercice 8 P 121

BCN et NDB ; OBC, OND, ACB ; DON et BOC

Exercice 9 P 121

$mesPRQ = 95°$

Exercice 10 P 121

AI et IX ; JC et JX

Exercice 11 P 121

Les angles UPE et ULE interceptent le même arc UE, donc : t.

Exercice 12 P 121

a) Vrai ; b) Vrai ; c) Vrai

Exercice 13 P 121

a) Faux ; b) Vrai ; c) Faux

Exercice 14 P 121

a) Pour $\theta = 60°$,tracer en couleur l'arc BC et son symétrique par rapport à la droite (BC).

b) Pour $\theta = 120°$, tracer en une autre couleur l'arc BC et son symétrique par rapport à la droite (BC).

Exercice 15 P 121

1- c) ; 2- a)

Exercice 16 P 121

a) S = 6 ; b) $S \approx 12,26$; c) $S \approx 12,26$ (**Erreur : prendre AB = 6)**

Exercice 17 P 122

On a : $\sin ABC = \dfrac{2S}{AB \times BC}$ donc : $mes\, ABC = 49°$

Exercice 18 P 122

- On a : $AB = \dfrac{12 \times \sin 60°}{\sin 45°}$, donc $AB = 6\sqrt{6} \approx 14,70$
- On a : $BC = \dfrac{12 \times \sin 75°}{\sin 45°}$, $AB = 6\left(1+\sqrt{3}\right) \approx 16,39$
- On a : $R = \dfrac{AB}{2\sin 60°}$, donc : $R = 3\sqrt{2} \approx 4,24$
- On a : $S = \dfrac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin BAC$, donc : $S = 18\left(3+\sqrt{3}\right) = 85,18$

Exercice 19 P 122

Réaliser les constructions demandées.

Exercice 20 P 122

Réaliser la figure demandée

Exercice 21 P122

a) $mes\, ACB = 38°$; b) $mes\, ACB = 110°$; c) $mes\, ACB = 49°$

Exercice 22 P 123

$mes\, PRT = 45°$

Exercice 23 P 122

On a : $S = \dfrac{1}{4} \times a^2\sqrt{3}$ et $R = \dfrac{1}{3} \times a\sqrt{3}$

Exercice 24 P 122

On a : $mes\, DAE = 110°$; $mes\, AED = 30°$; $mes\, ACB = 30°$

$mes\, ABC = 40°$

Exercice 25 P 122

a) - Les angles AIB et CID sont opposés par le sommet I, donc ils ont la même mesure.

- Les angles BAI et IDC interceptent le même arc BC, donc ils ont la même mesure.
- De même les angles ABI et ICD interceptent le même AD, donc ils ont la même mesure.

b) Les angles IDC et EDK sont opposés par le sommet ; donc ils ont la même mesure.

Comme les angles EDK et KFG interceptent le même arc EG, donc ils ont également la même mesure.

D'où : $mes BAI = mes IDC = mes EDK = mes KFG$

Exercice 26 P 122

a) –Les ars AB et AC sont sous-tendus par des cordes de même longueur, donc ils ont la même longueur. Comme les angles inscrits AMB et AMC interceptent deux arcs de même longueur, d'où ils ont la même mesure. Ainsi la demi-droite $[MA)$ est la bissectrice de l'angle BMC

- Les ars AB et AC ayant la même longueur, les angles au centre AOB et AOC ont la même mesure et Ainsi la demi-droite $[OA)$ est la bissectrice de l'angle BOC.

b) - les angles inscrits BAC et BMC sont tels que A est un point de l'arc BC et M un point du grand arc BC, donc ils sont supplémentaires.

- De même on justifie que les angles ABM et ACM sont supplémentaires.

Exercice 27 P 123

1- $mes ROS = \dfrac{360°}{5} = 72°$
2- Réaliser la construction de ce pentagone régulier
3- $mes RVS = \dfrac{72°}{2} = 36°$
4- Le pentagone régulier a ses cinq côtés de même longueur, donc le triangle RVS est isocèle en R puis il a deux côtés de même longueur.
5- $mes VRS = 180° - 2 \times 36° = 108°$

Exercice 28 P 123

a) Réaliser une figure
b) Dans le triangle BB'C rectangle en C, on a : $\sin BB'C = \dfrac{BC}{2R} = \dfrac{a}{2R}$
c) Les angles BAC et $BB'C$ interceptent le même arc BC, ils ont la même mesure et les mêmes sinus.
d) On a : $\dfrac{a}{\sin BAC} = \dfrac{abc}{2A}$ et $\sin BAC = \dfrac{a}{2R}$, donc : $A = \dfrac{abc}{4R}$

Exercice 29 P 123

On justifie que les points O et C sont symétriques par rapport à la droite (AB) et on fait allusion aux arcs capables.

On a : $mes\,AOB = 80°$ et $mes\,ASB = 140°$.

Pas de raison pour que ces parents se plaignent puis que chacun peut l'écran sous l'angle de 140°.

<u>Leçon</u> 8 : ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

SITUATION D'APPRENTISSAGE

1- Pour faire dégager **le contexte**, on peut poser les questions du genre :
a) De quel évènement s'agit –il dans ce texte :
b) Où se déroule cet évènement ?
c) A quel moment se déroule cet évènement ?
d) Quels sont les acteurs de cet évènement ?

<u>Réponses attendues</u>

a) Il s'agit de la loterie qui décide d'organiser un jeu dans le cadre de ses activités.
b) Il se déroule au siège de la loterie nationale (ou à la télévision RTI).
c) Il se déroule lors d'une émission télévisée
d) Les acteurs sont l'élève de 2^e C et son voisin.

2- Pour faire dégager **la circonstance**, on peut poser la question suivante :
Quel est le problème que le texte pose- t-il ?

<u>Réponse attendue</u>

Un élève de 2^e C ayant suivi cette émission s'étonne et affirme que la plus petite somme d'argent a été obtenue parce que la roue a été tournée d'une part ……la roue s'immobilise est négatif.

3- Pour faire dégager **la tâche**, on peut poser la question du genre : Comment décident-ils de résoudre le problème posé par le texte ?

<u>Réponse attendue</u>

Les élèves de la classe de 2^e C décident de s'informer sur les angles orientés et d'approfondir leurs connaissances sur les lignes trigonométrie.

4- Pour **la synthèse** et annoncer les notions mathématiques convoquées par la situation d'apprentissage :
Pour s'informer sur les angles orientés et approfondir les connaissances sur les lignes trigonométriques, nous allons étudier la leçon : « **Angles orientés et trigonométrie** » selon le plan suivant :

- ***Connaître la définition de la mesure d'un angle en radian*** - ***Convertir des mesures d'angles de degrés en radian et inversement*** - ***Connaître la définition d'un angle orienté*** - ***Reconnaître deux angles orientés opposés*** - ***Connaître la définition de la mesure principale d'un angle orienté dans une configuration donnée***	- ***Connaître la définition du cercle trigonométrique*** - ***Connaître la définition du cosinus, du sinus d'un angle orienté*** - ***Connaître la définition de la tangente d'un angle orienté*** - ***Connaître la propriété relative à la tangente d'un angle orienté*** - ***Placer sur le cercle trigonométrique le point image d'un angle orienté dont on connaît la mesure principale.***

<u>ACTIVITES DE DECOUVERTE</u>

1) • **<u>Réponses aux questions de l'activité 1</u>**

1- a) Le cercle (C) a pour périmètre 2π

b) Les arcs AB et BC ont pour longueurs respectives π et $\frac{\pi}{2}$.

2- a) On réalise la figure pour colorier l'arc intercepté par l'angle au centre MON .

b) L'arc MN a pour longueur $\dfrac{\pi\alpha}{180^0}$.

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

a) Faux ; b) Vrai ; c) Faux

2) • Réponses aux questions de **l'activité 2**

1- Tableau de correspondance

x mesure de l'angle en degrés	α mesure de l'angle en radian
180	π

D'où : $\dfrac{x}{180} = \dfrac{\alpha}{\pi}$

2- $x = \dfrac{180\alpha}{\pi}$

3- Ce qui correspond à : $\dfrac{180^0}{\pi} \simeq 57,32^0$

4- Tableau de correspondance

Mesures (en degré)	30	60	90	120	135	150
Mesures (en radian)	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$

5- • $\dfrac{7\pi}{12}$ correspond à : $\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^0 \times \dfrac{7\pi}{12} = 105^0$; • 165^0 correspond à : $\dfrac{\pi}{180^0} \times 165^0 = \dfrac{11\pi}{12}$

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

Mesures (en degré)	60	20	270	112,5
Mesures (en radian)	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{9}$	$\dfrac{3\pi}{2}$	$\dfrac{5\pi}{8}$

3) **Réponses aux questions de l'activité 3**

1- a) Vrai ; b) Faux ; c) Faux

2- On réalise la figure demandée

a) Faux ; b) Vrai ; c) Faux ; d) Vrai.

4) • **Réponses aux questions de l'activité 4**

1- Les angles orientés ont pour sens de parcours respectifs : M vers N et N vers M.

2- Les arcs MN et NM ont la même longueur.

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AB}\right)$

5) • **Réponses aux questions de l'activité 5**

a) On réalise la figure demandée

b)

c) • $Mes\left(\vec{u};\vec{v}\right)=mes\,AOB$ si le sens de parcours sur le cercle (C) est de M vers N de l'arc MN est le sens direct.

• $Mes\left(\vec{u};\vec{v}\right)=-mes\,AOB$ si le sens de parcours sur le cercle (C) est de M vers N de l'arc MN est le sens indirect.

3- Cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

- $Mes\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$ si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
- $Mes\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\pi$ si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

a) $Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{4}$; b) $Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{\pi}{2}$; c) $Mes\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{DC}\right)=\frac{\pi}{4}$;

d) $Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CA}\right)=\pi$

6) • Réponses aux questions de l'activité 7

Pour les questions 1 ; 2 et 3, on réalise la figure puis on la complète au fur et à mesure

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

a) Faux ; b) Vrai ; c) Vrai.

7) • Réponses aux questions de l'activité 8

1- $\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\overline{OP}$; $\sin\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\overline{OQ}$

2- $M\left(\overline{OP};\overline{OQ}\right)$ ou $M\left(\cos\alpha;\sin\alpha\right)$

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

8) • Réponses aux questions de l'activité 9

1- Le point M appartient au cercle trigonométrique, donc : OM =1, d'où : $OM^2=1$

2- On a : $M\left(\cos\alpha;\sin\alpha\right)$ et $OM^2=1$, donc : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

3- • $-1\le\cos\alpha\le1$; • $-1\le\sin\alpha\le1$.

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

Les points A et D appartiennent au cercle trigonométrique.

9) • Réponses aux questions de l'activité 10

1- $\tan\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)=\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

2- $\tan\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)=\overline{AT}$

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

11) • **Réponses aux questions de l'activité 10**

Pour tout nombre réel α de l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right[/ \left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$, on a :

$$1+\tan^2\alpha=1+\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

a) Vrai ; b) Faux ; c) Vrai

CORRECTIONS DES EXERCICES

Exercice 1 P 140

1.d ; 2.a ; 3.c

Exercice 2 P 140

On multiplie chaque mesure en degrés par $\dfrac{\pi}{180^0}$ pour obtenir la mesure en radian, puis on simplifie lorsque cela est possible.

Exercice 3 P 140

On multiplie chaque mesure en radian par $\dfrac{180^0}{\pi}$ pour obtenir la mesure en degré, puis on simplifie lorsque cela est possible.

Exercice 4 P 140

a) Vrai ; b) Vrai ; c) Faux ; d) Faux.

Exercice 5 P 140

Figure 4

Exercice 6 P 141

1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Vrai ; 4. Faux

Exercice 7 P 141

Ceux qui sont la mesure principale en radian d'un angle orienté sont : $-\frac{5\pi}{8}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{8}$

Exercice 8 P 141

$Mes\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=-\frac{2\pi}{5}$; $Mes\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{4\pi}{5}$

Exercice 9 P 141

$Mes\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{\pi}{2}$; $Mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}\right)=\pi$; $Mes\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right)=\frac{\pi}{2}$

Exercice 10 P 141

1. Vrai ; 2.c ; 3.a) ; 4 Faux

Exercice 11 P 141

Réaliser la construction dans chacun des cas

Exercice 12 P 141

1- Vrai ; 2. C ; 3.d ; 4. Faux

Exercice 13 P 141

L'énoncé est à revoir

Exercice 14 P 142

a) Vrai ; b) Vrai ; c) Faux ; d) Faux

Exercice 15 P 142

Réaliser une figure pour placer les points images

Exercice 16 P 141

Réaliser une figure pour placer les points images

Exercice 17 P 142

1.d ; 2.a) ; 3.b)

Exercice 18 P 142

a) Faux ; b) Faux ; c) Faux

Exercice 19 P 142

a) Faux ; b) Faux ; c) Vrai ; d) Faux

Exercice 20 P 142

Utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer l'angle α .

Exercice 21 P 142

1. F ; 2.V ; 3. F ; 4.V ; 5. F

<u>Exercice 22 143</u>

1.F ; 2.V ; 3.F ; 4.V ; 5.F

<u>Exercice 23 P 143</u>

1- a) On a : $\begin{cases} \sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right) < 0 \\ \sin^2\left(\dfrac{9\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\dfrac{9\pi}{5}\right) \end{cases}$, donc : $\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right) = -\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

b) $\cos\left(\dfrac{9\pi}{5}\right) = \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) = \cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{5}$;

$\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right) = \sin\left(2\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) = \sin(-\dfrac{\pi}{5}) = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2- a) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\tan x = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

<u>Exercice 24 P 143</u>

- On a : $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AE}\right) + \left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AC}\right)$, donc : $Mes\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{5} = -\dfrac{11\pi}{15}$

- On a : $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$, donc : $Mes\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{11\pi}{15} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{37\pi}{30}$.

Comme $-\dfrac{37\pi}{30} = \dfrac{-60\pi + 23\pi}{30} = -2\pi + \dfrac{23\pi}{30}$, donc : $Mes\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{23\pi}{30}$.

<u>Exercice 25 P143</u>

1- $Mes\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BO}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$

1- On a : $\left(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BC}\right)$, donc : $Mes\left(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{AD}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$

2- a) $Mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{AD}\right) = \pi + mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{DA}\right) = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$.

Or $\dfrac{7\pi}{6} = \dfrac{12\pi - 5\pi}{6} = 2\pi - \dfrac{5\pi}{6}$, donc : $Mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{AD}\right) = -\dfrac{5\pi}{6}$

b) $Mes\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DC}\right) = \pi + mes\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC}\right) = \pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$.

Or $\frac{3\pi}{2} = \frac{4\pi - \pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2}$, donc : $Mes\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DC}\right) = -\frac{\pi}{2}$

3- $Mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{DC}\right) = Mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{AD}\right) + Mes\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{DC}\right) = -\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{6} = -\frac{4\pi}{3}$

Or $-\frac{4\pi}{3} = \frac{-6\pi + 2\pi}{3} = -2\pi + \frac{2\pi}{3}$, donc : $Mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{AD}\right) = \frac{2\pi}{3}$

Exercice 26 P 143

1- $\cos x = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; 2- $x = -\frac{5\pi}{12}$

Exercice 27 P 144

Pour tout nombre réel x, on a :

$$\left(\cos x + 2\sin x\right)^2 + \left(2\cos x - \sin x\right)^2 = \cos^2 x + 4\sin^2 x + 4\cos^2 x + \sin^2 x + 4\cos x\sin x - 4\cos x\sin x$$

$$\left(\cos x + 2\sin x\right)^2 + \left(2\cos x - \sin x\right)^2 = 5(\cos^2 x + \sin^2 x) = 5\times 1 = 5$$

Exercice 28 P 144

a) Multiplier chaque mesure en degré par $\frac{\pi}{180°}$

b) Multiplier chaque mesure en radian par $\frac{180°}{\pi}$

Exercice 29 P 144

a) Sur le cercle trigonométrique, on trace la droite d'équation *y = 0,1.* Elle coupe le cercle en deux points images.

b) On utilise la calculatrice en mode radian pour déterminer une valeur approchée des solutions de l'équation $\sin x = 0{,}1$ dans l'intervalle $\left[0;\pi\right]$.

Exercice 30 P 144

a) Sur le cercle trigonométrique, on trace la droite d'équation $x = -\frac{5}{6}$. Elle coupe le cercle en deux points images.

b) On utilise la calculatrice en mode radian pour déterminer une valeur approchée des solutions de l'équation $\cos x = -\frac{5}{6}$ dans les intervalles $\left[0;\pi\right]$ et $\left[-\pi;0\right]$

Exercice 31 P 144

$Mes\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right) = -\frac{\pi}{2}$; $Mes\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}\right) = -\frac{\pi}{2}$; $Mes\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{CO}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 32 P 144

$Mes\left(\overrightarrow{NM};\overrightarrow{MP}\right)=\pi+Mes\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP}\right)=\frac{2\pi}{3}$; $Mes\left(\overrightarrow{PN};\overrightarrow{PI}\right)=\frac{\pi}{6}$; $Mes\left(\overrightarrow{NI};\overrightarrow{PM}\right)=-\frac{\pi}{3}$

<u>Exercice 33 P 144</u>

$Mes\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{4}$; $Mes\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{2}$; $Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}\right)=\pi$; $Mes\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CE}\right)=-\frac{\pi}{6}$;

$Mes\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{DC}\right)=\pi+mes\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}\right)=\frac{11\pi}{12}$; $Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CE}\right)=\frac{\pi}{4}$

<u>Exercice 34 P 144</u>

a) $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\pi-\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)-\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)$

b) $Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC'}\right)$; $Mes\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=Mes\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC'}\right)$

c) Déduire la relation demandée.

<u>Exercice 35 P 144</u>

1- a) $Mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right)=\pi$

b) Le triangle AOB est isocèle en O donc $Mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\pi-2mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right)$

b) L'angle orienté inscrit a pour angle orienté au centre l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OD}\right)$, donc :

$Mes\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OD}\right)=2Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right)$

2- $Mes\left(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OC}\right)=2Mes\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AC}\right)$

3- $Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AO}\right)+Mes\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(mes\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OD}\right)+mes\left(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OC}\right)\right)$

$Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\ Mes\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$, donc : $Mes\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)=2Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

<u>Exercice 36 P 144</u>

Réaliser la figure pour répondre aux questions

<u>Exercice 37 P 145</u>

Réaliser la figure pour répondre aux questions

<u>Exercice 38 P 145</u>

$\bullet E=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\bullet F=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$F=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}=0$$

$$\bullet G=-\sin\frac{\pi}{6}-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}=-1$$

Exercice 39 P 145

1) $\cos x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $\cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

2) a) $\cos x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

Exercice 40 P 145

1- a) On a : $(\cos x-\sin x)^2=\cos^2 x+\sin^2 x-2\cos x\sin x=1-2\cos x\sin x$

b) Pour tout nombre réel *x*, $(\cos x-\sin x)^2\geq 0$; donc $1-2\cos x\sin x\geq 0$;

d'où : $\cos x\sin x\leq\frac{1}{2}$

2- a) $(\cos x+\sin x)^2=\cos^2 x+\sin^2 x+2\cos x\sin x=1+2\cos x\sin x$

b) Pour tout nombre réel *x*, $(\cos x+\sin x)^2\geq 0$; donc $1+2\cos x\sin x\geq 0$;

d'où : $\cos x\sin x\geq-\frac{1}{2}$.

De 1-b) et 2- a) on a : $-\frac{1}{2}\leq\cos x\sin x\leq\frac{1}{2}$

Donc $\cos x\sin x$ est borné.

3) Résoudre le reste des questions

Exercice 41 P 145

1) On a : $u^2-v^2\leq u^2+v^2$, donc : $\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\leq 1$

On a : $\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}+1=\frac{2u^2}{u^2+v^2}$. Or $\frac{2u^2}{u^2+v^2}>0$, donc : $\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\geq-1$

Ainsi : $-1\leq\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\leq 1$

2) a) On a : $\sin^2 x = 1 - \left(\dfrac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}\right)^2 = \dfrac{4u^2v^2}{\left(u^2 + v^2\right)^2}$, donc : $\sin x = -\dfrac{2|uv|}{u^2 + v^2}$

b) Dans ce cas $\sin x = \dfrac{2uv}{u^2 + v^2}$ et $-1 \leq \dfrac{2uv}{u^2 + v^2} \leq 1$, donc on ne peut pas calculer la valeur de *sinx*.

<u>Exercice 42 P 145</u>

Reproduire la figure pour représenter la position de l'aventurier.

LECON 9 : STATISTIQUES

Pour faire dégager le contexte, on peut poser les questions suivantes :

1- De quel évènement s'agit-il dans ce texte ?
2- Où se déroule cet évènement ?
3- A quel moment se déroule cet évènement ?
4- Quels sont les acteurs de cet évènement ?

Réponses attendues

1- Il s'agit de l'organisation d'un devoir de niveau par le conseil d'enseignement de mathématiques pour trois classes de $2^{ème}$ C.
2- Il se déroule au lycée moderne de Bouaflé.
3- Cet évènement se déroule dans le cadre des activités dudit CE.
4- Des professeurs de math du lycée moderne de Bouaflé et les élèves.
   - Pour faire dégager la circonstance, on peut poser la question suivante :

Quel problème les acteurs rencontrent-ils dans ce texte ?

Réponse attendue

Pour mieux comprendre et interpréter les résultats obtenus dans le tableau.

- Pour faire dégager la tâche, on peut poser la question du genre.

Que décident de faire les élèves de la $2^{ème}$ C ?

Réponse attendue

Ils décident de faire des calculs et construire des diagrammes.

- Pour faire la synthèse et annoncer les notions mathématiques convoquées par la situation d'apprentissage.
- Pour faire des calculs et construire des diagrammes, nous allons étudier la leçon « Statistiques » selon le plan suivant :

- Identifier l'effectif cumulé – la fréquence cumulée.
- Construire les polygones des effectifs cumulés et des fréquences cumulées.
- Identifier la médiane d'une série statistique.
- Déterminer la médiane d'une série statistique par lecture graphique puis par calcul.
- Connaitre la formule de l'écart moyen et interpréter l'écart moyen.
- Connaitre la formule de la variance, de l'écart type puis interpréter la variance et l'écart type.

Activités de découverte

Activité 1

1- Tableau des fréquences en pourcentage.

Nombres de romans	0	2	3	4	5	6	7	8	10
Fréquence (en %)	4	5	6	6	9	11	6	3	2

Nombre de romans lus	0	2	3	4	5	6	7	8	10
Fréquence (en %)	4	5	6	6	8	11	6	2	2

2- Le nombre d'(é) ayant lu :

- Au plus 3 romans est 15
- Au plus 5 romans est 29
- Au moins 7 romans est 10
- Au moins 6 romans est 21

3- Le pourcentage d'(é) ayant lu :

- Au plus 3 romans est 30%
- Au plus 5 romans est 58%
- Au moins 7 romans est 20%
- Au moins 6 romans est 42%

<u>Corrigé de l'exercice de fixation.</u>

a) L'effectif cumulé croissant de la modalité 15 est 25.
b) La fréquence cumulée de la modalité 16 est 0,72.
c) Tableau des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées croissantes.

Age	14	15	16	17
'ECC'	10	25	42	54
'FCC'	0,19	0,47	0,78	1

<u>Activité 2</u>

1)

Nombre d'heures	[1 ;3[	[3 ;5[	[5 ;7[	[7 ;9[	[9 ;11[	Total
Effectifs	2	6	4	7	9	28
'E,C,C'	2	8	12	19	28	

2) Dans un repère orthogonal, on place les points de coordonnées (1 ;0) ;(3 ;2) ; (5 ;8) ; (7 ;12) ;(9 ;19) ;(11 ;28) puis on relie les extrémités des segments obtenues
3) Tableau des fréquences et des fréquences cumulées croissantes

Nombre d'heures	[1 ;3[	[3 ;5[	[5 ;7[	[7 ;9[	[9 ;11[	
fréquence	0 ;07	0 ;21	0 ;14	0 ;25	0 ;32	
Fréquence cumulé croissante	0 ;07	0 ;29	0 ;43	0 ;68	1	

4) Dans un repère orthogonal, on place les points de coordonnées (1 ;0) ; (3 ;0,07) ; (5 ;0,29) ; (7 ;0,43) ; (9 ;0,68) ; (11 ;1) et on relie les extrémités des segments.

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>.

1-

- Pour le polygone des effectifs cumulés croissants, les coordonnées des sommets sont (0 ;0) ; (10 ;5) ;(20 ;11) ; (30 ;18) ; (40 ;21) ;(50 ;22).
- Pour le polygone des effectifs cumulés décroissants, les coordonnées des sommets sont (50 ;0) ; (40 ;1) ;(30 ;4) ; (20 ;11) ; (10 ;17) ;(0 ;22).

2- Dans un repère orthogonal, on place les points de coordonnées (0 ;0) ; (10 ;22) ;(20 ;0,49) ; (30 ;0,81) ; (40 ;0,95) ;(50 ;1).

On relie ces points à l'aide d'une règle.

<u>Activité 3</u>

Sur chacun des intervalles donnés, on représente la fonction f.

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>.

Dans un repère orthogonal, on place les points de coordonnées (13 ;50) ; (14 ;42) ;(15 ;30) ; (16 ;14) ; (17 ;0) et on les relie à l'aide d'une règle.

<u>Activité 4</u>

- Pour S_1, une valeur est 9
- Pour S_2, une valeur est 7
- Pour S_3, une valeur est 7,5
- Pour S_4, une valeur est 36

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>.

Bonne réponse : c)

<u>Activité 5</u>

3- On utilise le graphique pour déterminer l'abscisse du point d'ordonnée 14 du polygone.
4- $M_e \epsilon [7;9[$

Les effectifs cumulés croissants respectifs de 7 et de 9 sont 12 et 19.

$$M_e = 7 + (9-7)\frac{(14-12)}{7} = 7 + \frac{4}{7} = \frac{53}{7}$$

La médiane est environ 7,6.

- Corrigé de l'exercice de fixation.
  $M_e \epsilon [10;20[$

Les effectifs cumulés croissants de 10 et 20 sont respectivement 5 et 11.

$$M_e = 10 + (20-10)\frac{(11-5)}{11-5} = 10 + 10 = 20$$

Activité 6

a) $\bar{x} = 10$
b) Tableau

Note (x)	Effectif(n)	$x - \bar{x}$	$n \mid x - \bar{x} \mid$
6	1	4	4
8	2	2	4
12	1	2	2
13	1	3	3
16	1	6	6
	Total(N) : 6	Total : 17	Total(D) : 19

c) $e = \frac{D}{N} = \frac{19}{6} = 3{,}16$
d) En moyenne, les valeurs de cette série se situent à 3,16 de la moyenne 10.

Corrigé de l'exercice de fixation.
$\bar{x} = \frac{205}{19} = 10{,}78$
$e = \frac{1}{19}[4|6-10{,}78| + 6|11-10{,}78| + 5|12-10{,}78| + 3|13-10{,}78| + |16-10{,}78|]$
$e \simeq 2{,}02$

Les notes se situent à 2,02 de la moyenne 10,78, en moyenne.

Activité 7

a) $\bar{x} = \frac{100}{10} = 10$
b) Tableau

Note (x)	Effectif(n)	$(x-\bar{x})^2$	$n\,(x-\bar{x})^2$
5	2	25	50
6	1	16	16
8	1	4	4
10	1	0	0
12	2	4	8
13	2	1	2
16	1	36	36
	Total(N) : 10		Total(D) : 116

c) $V=\frac{D}{N}=\frac{116}{10}=1{,}16;\ \sqrt{V}=1{,}077$

Corrigé de l'exercice de fixation.

3.a ; 2.c ; 1.b

CORRECTIONS DES EXERCICES

Exercice 1 P 156

- L'effectif cumulé croissant de la modalité 10 est 15.
- 18 est l'effectif cumulé croissant de la modalité 11.
- 18 est l'effectif cumulé croissant de la modalité 7.
- 15 est l'effectif cumulé croissant de la modalité 10.
- 14 est l'effectif cumulé croissant de la modalité 9.

Exercice 2 P 156

Classes	[0 ;15[	[15 ;30[	[30 ;45[	[45 ;60[
Effectifs	8	15	4	7
''E,C,C''	0,23	0,67	0,79	11
''F.C.D''	1	0,77	0,33	0 ,21

- La fréquence cumulée croissante de la classe [30 ; 45[est 0,79.
- 0,67 est la fréquence cumulée croissante de la classe [15 ; 30[.
- 1 est la fréquence cumulée croissante de la classe [45 ; 60[.
- 1 est la fréquence cumulée décroissante de la classe [0 ; 15[.
- 0,44 est la fréquence cumulée croissante de la classe [15 ; 30[.

Exercice 3 P 156

Modalités	0	2	3	4	5	6	7	8	10

Effectifs	4	5	6	6	8	11	6	2	2
Fréquences en %	8	10	12	12	16	22	12	4	2
ECC	4	9	15	21	29	40	46	48	50
‘’FCC’’	8	18	30	42	58	80	92	96	100

Modalités	0	2	3	4	5	6	7	8	10
Effectifs	4	5	6	6	8	11	6	2	2
Fréquences en	8	10	12	12	16	22	12	4	4
ECD	50	46	41	35	29	21	10	4	2
FCD	100	92	82	70	58	42	20	8	4

Exercice 4 P 157

Modalités	[120 ;140[	[140 ;160[	[160 ;180[	[180 ;200[	[200 ;220[
‘‘E.C.C’’	6	10	20	28	40
‘‘F.C.D’’	1	0,85	0,75	0,5	0,3

Exercice 5 P 157

a) $M_e = 11$
b) $M_e = 11$
c) $M_e = 50{,}1$
d) $M_e = 7$

Exercice 6 P 156

$M_e = 10$

Exercice 7 P 157

$M_e = 169$

Exercice 8 P 157

Tableau des ‘ECC’

Taille	3	4	5	6	7	8	9	10	12
ECC	10	90	185	203	224	239	244	246	250

Exercice 9 P 157

Tableau des ‘ECD’

Temps	0 ;1	1 ;2	2 ;3	3 ;4	4 ;5	5 ;6
‘’ECD’’	125	105	60	16	5	2

Exercice 10 P 157

Tableau des fréquences cumulées croissantes.

Notes	5	7	8	9	10	12	13	14	16	18
FCC	0 ,03	0,12	0,24	0,41	0,58	0,70	0,82	0,88	0,97	1

Exercice 11 P 157

Tableau des fréquences cumulées décroissantes

Temps (min)	[0 ;10[	[10 ;20[	[20 ;30[	[30 ;40[	[40 ;50[
''F.C.D''	1	0,66	0,43	0,23	0,10

Exercice 12 P 157

Dans un repère orthogonal, on place les points de coordonnées (0 ;0) ; (15 ;19) ; (30 ;29) ; (45 ;53) ;(60 ;80) ; (75 ;100), puis on les relie à l'aide d'une règle.

Exercice 13 P 158

On dressera le tableau des ''ECC'' et des ''ECD'' puis on construira ces deux représentations dans un même repère orthogonal.

Exercice 14 P 158

$$M_e = 9$$

Exercice 15 P 158

$$M_e = 10$$

Exercice 16 P 158

Pour S_1 : $M_e = \frac{1}{2}(8+8) = 8$

Pour S_2 : $M_e = \frac{1}{2}(5+6) = 5,5.$

Pour S_3 : $M_e = \frac{1}{2}(3+4) = 3,5.$

Pour S_4 : $M_e = \frac{1}{2}(5+6) = 5,5.$

Exercice 17 P 158

$M_e = 115 + (135 - 115)\frac{(22,5-16)}{32-16} = 123,125$

50% des salaires est en dessous de 123,125 et 50% est au-dessus.

Exercice 18 P 158

- Pour S_1 : $e = \frac{4,5+3,5+2,5+1,5+0,5+0,5+1,5+2,5+3,5+4,5}{10}$

  $e = 2,5$
- Pour S_2 : $e = \frac{45+35+25+15+5+5+15+25+35+45}{10}$

  $e = 25$

Exercice 19 P 158

1- $e_m = \frac{15|4-8,66|+12|8-8,66|+13|9-8,66|+20|11-8,66|+5|16-8,66|}{65}$

$e_m = 3,288$

En moyenne, les notes se situent à 3,29 de la moyenne 8,66.

Exercice 20 P 158

$e_m = 2,0625$

Exercice 21 P 158

a) $\bar{x}_A = 10$; $\bar{x}_B = 10$;

b)

- Pour l'élève A :

$V_A = \frac{1}{5}[(3-10)^2 + (12-10)^2 + (8-10)^2 + (17-10)^2 + (10-10)^2]$

$V_A = \frac{106}{5} = 21,2$

- Pour l'élève B :

$V_A = \frac{1}{5}[2(10-10)^2 + 12(11-10)^2 + (8-10)^2]$

$V_A = \frac{6}{5} = 1,2$

c)

- Pour l'élève A :

$\sigma_A = \sqrt{V_A} = 4,604$

- Pour l'élève B :

$\sigma_B = \sqrt{V_B} = 1,095$

d) $V_A > V_B$; $\sigma_A > \sigma_B$. On sait que $\sigma = V^2$.

Les notes de l'élève B sont moins dispersées que celles de l'élève A : L'élève B est régulier que l'élève A.

Exercice 22 P 158

1- $M_e = 41$

2- $\bar{P} = 41$

1- $e_m = \frac{22}{12} = 1{,}833$

En moyenne, les pointures se situent à 1,8 de la moyenne 41.

Exercice 23 P 158

1- Tableau des ''E.C.C'' et des ''E.C. D''

Age	14	15	16	17	18	19	20
''E.C.C''	130	334	605	921	1119	1196	1210
''E.C. D''	1210	1080	876	605	289	91	14

2- $M_e = 16$

Exercice 24 P 159

1- $\bar{x} \simeq 405$

2- $V = \frac{1}{8} \times 54244 \simeq 6750{,}5$

3- $\sigma = \sqrt{V} = 82{,}34$

Exercice 25 P 159

$M_e = 102{,}5$

Exercice 26 P 159

Réaliser les digrammes demandés

Exercice 27 P 159

Réaliser les constructions demandées

Exercice 28 P 159

Effectuer les calculs demandés

Exercice 30 P 159

1- a) $\bar{x} = 10{,}30$
   b) $M_e = 11{,}25$

2- La fréquence cumulée décroissante de la classe [5 ; 10[est 38.

3- Le deuxième critère n'est favorable à cette classe, ce qui élimine les élèves de

Leçon 10 PRODUIT SCALAIRE

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte ? ***Le texte parle d'une opération « coup de balai »***
- Quels sont les acteurs de cet évènement ? ***Les acteurs sont les élèves d'une classe de seconde***
- Où se déroule l'évènement ? ***L'évènement se déroule dans un établissement scolaire.***

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ? ***Le problème posé est : Déplacer un solide soumis à deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$.***
- Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ? ***Ils se demandent s'ils ont la force nécessaire pour déplacer le solide.***

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Que décident de faire les acteurs ? ***les élèves décident de s'organiser pour déterminer l'intensité de la force $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$***

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

Nous allons découvrir la définition du produit scalaire, les propriétés du produit scalaire et les relations métriques dans un triangle dans la leçon que nous allons découvrir aujourd'hui : Produit scalaire.

I/ Activités de découvertes et évaluations des acquis

Activité 1

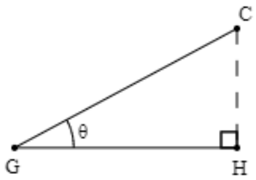
a) - Si $0° \leq mes\widehat{BGC} < 90°$ alors la force $\vec{F}$ amplifie le mouvement du wagonnet car le travail de la force $\vec{F}$ sera positif.

- Si $90° < mes\widehat{BGC} \leq 180°$ alors la force $\vec{F}$ s'oppose au mouvement du wagonnet car le travail de la force $\vec{F}$ sera négatif.

- Si $mes\widehat{BGC} = 90°$ alors la force $\vec{F}$ n'a aucun effet sur le mouvement du wagonnet car le travail de la force $\vec{F}$ est nul.

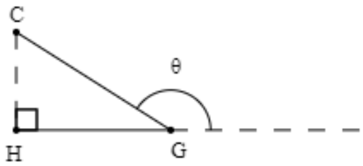
b) Pour calculer le travail de la force $\vec{F}$, il suffit de connaître GH. Pour calculer GH, on distinguera deux cas :

1ercas : $0 \leq \theta \leq 90°$



On a : $\cos\theta = \dfrac{GH}{GC}$ donc $GH = GC \times \cos\theta = \left\|\vec{F}\right\| \cos\theta$ d'où $GH = 500\cos\theta$. Dans ce cas le travail de la force $\vec{F}$ est $W(\vec{F}) = 40000\cos\theta$

$2^{è}$cas : $90° \leq \theta \leq 180°$



On a : $\cos(\pi - \theta) = \dfrac{GH}{GC}$ donc

$GH = GC \times (-\cos\theta) = -\left\|\vec{F}\right\| \cos\theta$ d'où $GH = -500\cos\theta$

Dans ce cas le travail de la force $\vec{F}$ est $W(\vec{F}) = -40000\cos\theta$

Des deux cas ci – dessus, on déduit le tableau suivant :

θ	$0°$	30°	45°	90°	120°	150°
$W(\vec{F})$ en Joule	40000	34641,01	28284,27	0	−20000	−31641,01

J'évalue mes acquis

Les bonnes réponses sont : b) et c)

Activité 2

1) a) On a : $\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$ et $\vec{v}.\vec{u} = \left\|\vec{v}\right\| \times \left\|\vec{u}\right\| \times \cos(\vec{v};\vec{u})$

Or $\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| = \left\|\vec{v}\right\| \times \left\|\vec{u}\right\|$ et $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \cos(\vec{v};\vec{u})$ donc $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

b) $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls alors $-1 \leq \cos(\vec{u};\vec{v}) \leq 1$ et $\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| > 0$. On en déduit que $-1 \times \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \cos(\vec{u};\vec{v}) \leq 1 \times \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$.

Ainsi on a : $-\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \leq \vec{u}.\vec{v} \leq \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$.

2) • D'après la question précédente, pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ on a :

$-\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \leq \vec{u}.\vec{v} \leq \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$ donc $\left|\vec{u}.\vec{v}\right| \leq \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$ car $\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$ est positif.

• Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et $\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| = 0$ donc on peut écrire $\left|\vec{u}.\vec{v}\right| \leq \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$

On peut donc conclure que pour tous vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ on a : $\left|\vec{u}.\vec{v}\right| \leq \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$.

3) a) Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls colinéaires de même sens alors $\text{Mes}(\vec{u};\vec{v}) = 0$ donc $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \cos(0) = 1$. Dans ce cas, $\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$.

b) Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls colinéaires de sens contraires alors $\text{Mes}(\vec{u};\vec{v}) = \pi$ donc $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \cos(\pi) = -1$. Dans ce cas, $\vec{u}.\vec{v} = -\left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\|$

Remarque : Ces deux formules restent valables lorsque l'un des deux vecteurs est nul.

J'évalue mes acquis :

a) Faux b) Faux c) Vrai

Activité 3

1) Si $\vec{u} = \vec{v}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{u}\right\|^2$

Remarque : $\vec{u}.\vec{u}$ se note $\vec{u}^2$

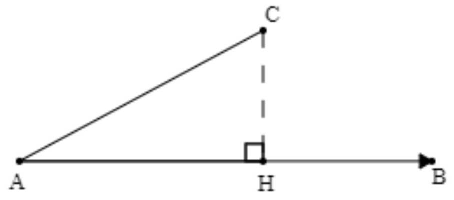
2) Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{u} = 0^2 = 0$ car $\|\vec{0}\| = 0$

J'évalue mes acquis :

Les affirmations qui sont correctes sont : a) et c)

Activité 4

1er cas



On a ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

ACH étant un triangle rectangle en H, on a :

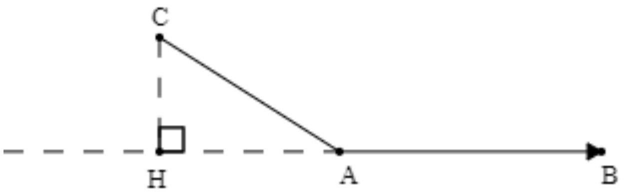
$\cos \widehat{BAC} = \cos \widehat{HAC} = \dfrac{AH}{AC}$ donc

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \dfrac{AH}{AC} = AB \times AH$.

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens alors

$AB \times AH = \overline{AB} \times \overline{AH}$. Il s'en suit que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$

2è cas



On a ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$.

Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{HAC}$ sont supplémentaires alors

$\cos \widehat{BAC} = -\cos \widehat{HAC}$

ACH étant un triangle rectangle en H, on a : $\cos \widehat{HAC} = \dfrac{AH}{AC}$ donc

$\cos \widehat{BAC} = -\dfrac{AH}{AC}$. Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de sens contraires alors

$\overline{AB} \times \overline{AH} = AB \times AH$. Il s'en suit que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$

J'évalue mes acquis

Les réponses correctes sont : a) et d)

Activité 5

A/

1) a) On a : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ car $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

b) On a : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(-\dfrac{\pi}{2}) = 0$ car $\cos(-\dfrac{\pi}{2}) = 0$

2) On a :

$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0 \quad car \quad \|\vec{u}\| \neq 0 \quad et \quad \|\vec{v}\| \neq 0$

$\Leftrightarrow Mes(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{2} \quad ou \quad Mes(\vec{u}\,;\vec{v}) = -\dfrac{\pi}{2}$

3) a) Si $(D)\perp(D')$ alors $Mes(\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{2}$ *ou* $Mes(\vec{u};\vec{v})=-\frac{\pi}{2}$, donc $\vec{u}.\vec{v}=0$ d'après la question précédente.

b) Si $\vec{u}.\vec{v}=0$ alors $\cos(\vec{u};\vec{v})=0$ car $\vec{u}\neq\vec{0}$ *et* $\vec{v}\neq\vec{0}$.

Or $\cos(\vec{u};\vec{v})=0$ signifie que $Mes(\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{2}$ *ou* $Mes(\vec{u};\vec{v})=-\frac{\pi}{2}$ donc $\vec{u}\perp\vec{v}$ et par la suite $(D)\perp(D')$.

c) On a :

$$(D)\perp(D')\Leftrightarrow\vec{u}\perp\vec{v}$$
$$\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$$

B/ Si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=0$ car $\|\vec{u}\|=0$

Si $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=0$ car $\|\vec{v}\|=0$

J'évalue mes acquis.

a) Vrai b) Vrai c) Faux

Activité 6

1) a) On a :

- $(k\vec{u}).\vec{v}=\|k\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(k\vec{u},\vec{v})$
$=|k|\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(k\vec{u},\vec{v})$
- $\vec{u}.(k\vec{v})=\|\vec{u}\|\times\|k\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},k\vec{v})$
$=|k|\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},k\vec{v})$

b) 1^er^ cas : $k>0$

On a alors:

- $(k\vec{u}).\vec{v}=k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(k\vec{u},\vec{v})$
$=k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ car $\cos(k\vec{u},\vec{v})=\cos(\vec{u},\vec{v})$ lorsque $k>0$
- $\vec{u}.(k\vec{v})=k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},k\vec{v})$
$=k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ car $\cos(\vec{u},k\vec{v})=\cos(\vec{u},\vec{v})$ lorsque $k>0$
- $k(\vec{u}.\vec{v})=k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

On peut conclure que si $k>0$ alors $(k\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$.

2^è^ cas : $k<0$

On peut remarquer que si $k<0$ alors : $(k\vec{u};\vec{v})=(\vec{u};k\vec{v})=(\vec{u};\vec{v})+\pi$ donc $\cos(k\vec{u};\vec{v})=\cos(\vec{u};k\vec{v})=\cos((\vec{u};\vec{v})+\pi)=-\cos(\vec{u};\vec{v})$. On en déduit :

$(k\vec{u}).\vec{v} = |k|\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(k\vec{u},\vec{v})$

- $= -k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times(-\cos(\vec{u},\vec{v}))$

  $= k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

$\vec{u}.(k\vec{v}) = |k|\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},k\vec{v})$

- $= -k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times(-\cos(\vec{u},\vec{v}))$

  $= k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

- $k(\vec{u}.\vec{v}) = k\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$

On peut conclure que si $k<0$ alors $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$.

2) • Si $k=0$ alors $k\vec{u}=\vec{0}$ et $k\vec{v}=\vec{0}$ donc $(k\vec{u}).\vec{v}=0$, $\vec{u}.(k\vec{v})=0$ *et* $k(\vec{u}.\vec{v})=0$. Ce qui prouve que $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$.

On a :

- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \overline{OA}\times\overline{OC'}$
- $\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} = \overline{OA}\times\overline{OB'}+\overline{OA}\times\overline{B'C'} = \overline{OA}(\overline{OB'}+\overline{B'C'}) = \overline{OA}\times\overline{OC'}$

On peut conclure que : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.

3) a) D'après la question précédente, $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u'}+\vec{v'}) = (\vec{u}+\vec{v}).\vec{u'}+(\vec{u}+\vec{v}).\vec{v'}$

Comme $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ alors $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{u'} = \vec{u'}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u'}.\vec{u}+\vec{u'}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{u'}+\vec{v}.\vec{u'}$ et

$(\vec{u}+\vec{v}).\vec{v'} = \vec{v'}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{v'}.\vec{u}+\vec{v'}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v'}+\vec{v}.\vec{v'}$

On en déduit que : $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u'}+\vec{v'}) = \vec{u}.\vec{u'}+\vec{v}.\vec{u'}+\vec{u}.\vec{v'}+\vec{v}.\vec{v'} = \vec{u}.\vec{u'}+\vec{u}.\vec{v'}+\vec{v}.\vec{u'}+\vec{v}.\vec{v'}$.

b) On a :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$$
$$= \vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}$$
$$= \vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$$

c) on a :

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$$
$$= \vec{u}.\vec{u}-\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}$$
$$= \vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$$

d) On a :

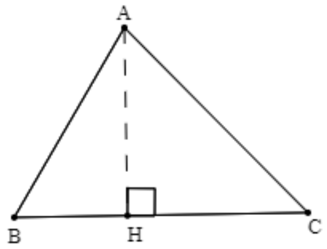
$$(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}.\vec{u}-\vec{v}.\vec{v}$$
$$= \vec{u}^2-\vec{v}^2$$

J'évalue mes acquis

On a :

a) Vrai b) Faux c) Faux d) Faux

Activité 7



1) On a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$ d'où

$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$

$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2) On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\\ &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}^2 - \overline{BH} \times \overline{BC}\end{aligned}$$

3) On $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}).(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})$ donc

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$.

Comme $(AH) \perp (HC)$ *et* $(HB) \perp (AH)$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC} = 0$ *et* $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AH} = 0$. Il s'en suit que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}^2 + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$.

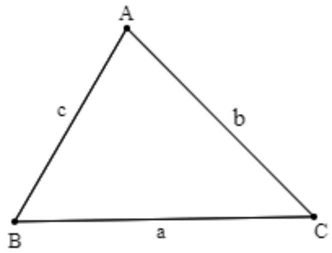
4) On a :

- ABC triangle rectangle $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ $(car \ (AB) \perp (AC))$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2$ d'après la question 1)
- ABC triangle rectangle $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 - \overline{BC} \times \overline{BH} = 0$ d'après la question 2)
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 = \overline{BC} \times \overline{BH}$
- ABC triangle rectangle $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}^2 + \overline{HB} \times \overline{HC} = 0$ d'après la question 3)
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH}^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$

J'évalue mes acquis

01) Vrai 02) Vrai 03) Faux

Activité 8



1) On a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ donc d'après la question 1) de l'activité 7, $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos BAC$ donc

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos BAC$

2) D'après la question 1), on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos BAC$

3) En s'inspirant de la question 2), on a :

a) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

b) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

J'évalue mes acquis

1) EFG est un triangle. D'après le théorème d'Al Kashi :

$EF^2 = GE^2 + GF^2 - 2GE \times GF \times \cos G$

$FG^2 = EF^2 + EG^2 - 2EF \times EG \times \cos E$

$EG^2 = FE^2 + FG^2 - 2FE \times FG \times \cos F$

2) ABC est un triangle. D'après le théorème d'Al Kashi :

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \times \cos B$

$= 64 + 91 - 2 \times 8 \times 9 \times \cos 60°$ $\qquad AC^2 = 73 \Rightarrow AC = \sqrt{73}$

$= 73$

3) ABC est un triangle. D'après le théorème d'Al Kashi :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos BAC$

$13 = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos BAC$

$\cos BAC = \frac{1}{2} \quad donc \quad mes BAC = 60°$

Activité 9

1) On a : $\|\vec{i}\| = 1; \quad \|\vec{j}\| = 1 \quad et \quad \vec{i}.\vec{j} = 0$ car $\vec{i} \perp \vec{j}$ et la base $(\vec{i}; \vec{j})$ est normée.

2) On a :

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = (x\vec{i} + y\vec{j}).(x'\vec{i} + y'\vec{j})$ donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = xx'\vec{i}^2 + xy'\vec{i}.\vec{j} + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\vec{j}^2$.

Or $\|\vec{i}\| = 1; \quad \|\vec{j}\| = 1 \quad et \quad \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$ donc $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = xx' \times 1^2 + yy' \times 1^2 = xx' + yy'$

$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 = x^2 + y^2$ (d'après ce qui précède) donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

J'évalue mes acquis

Les bonnes réponses sont : a) et c)

Activité 10

1) On a : $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} x_A - x \\ y_A - y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} x_B - x \\ y_B - y \end{pmatrix}$

2) (C) est le cercle de diamètre $[AB]$

$M \in (C) \Leftrightarrow (MA) \perp (MB)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$

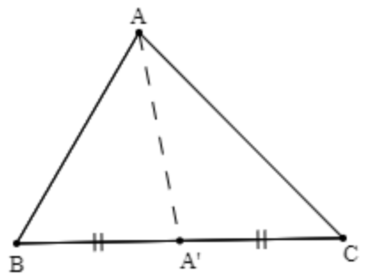
$\Leftrightarrow (x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) = 0$

$(x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) = 0$ est une équation du cercle (C).

J'évalue mes acquis

Les bonnes réponses sont : a) et c)

Activité 11



On a : $AB^2 + AC^2 = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B})^2 + (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C})^2$

$(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B})^2 = AA'^2 + A'B^2 + 2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'B}$

$(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C})^2 = AA'^2 + A'C^2 + 2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'C}$

Par suite :

$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + A'B^2 + A'C^2 + 2\overrightarrow{AA'}.(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C})$

Or A' est le milieu du segment $[BC]$ donc $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$ et

$A'B = A'C = \dfrac{BC}{2}$ donc $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + (\dfrac{BC}{2})^2 + (\dfrac{BC}{2})^2 + 2\overrightarrow{AA'}.\vec{0}$

$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

2) On sait que : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ donc

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)\\ &= \frac{1}{2}(2AA'^2 + \frac{BC^2}{2} - BC^2) \quad (d'après\ \ la\ \ question\ 1))\\ &= \frac{1}{2}(2AA'^2 - \frac{BC^2}{2})\\ &= AA'^2 - \frac{BC^2}{4}\end{aligned}$$

J'évalue mes acquis

1) ABC est un triangle et A' est le milieu du segment $[BC]$. D'après le théorème de la médiane, $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$ donc $\dfrac{BC^2}{2} = AB^2 + AC^2 - 2AA'^2$. On en déduit que :

$BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - 4AA'^2 = 16$ donc $BC = 4$

2) On a aussi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \dfrac{BC^2}{4}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{17}{2} - \dfrac{16}{4} = \dfrac{9}{2}$.

II/ Je m'exerce

Exercice 1

a) Faux b) Vrai c) Vrai

Exercice 2

Les égalités qui sont vraies sont : a) ; c) et d)

Exercice 3

Les égalités qui sont vraies sont : a) et d)

Exercice 4

a) Vrai b) Faux c) Faux

Exercice 5

Les expressions qui sont des carrés scalaires sont : a) ; c) ; d) e) et g)

Exercice 6

a) Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens alors : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = 3 \times 4 = 12$

b) Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires alors : $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = -3 \times 4 = -12$

Exercice 7

1) Faux 2) Faux 3) Faux 4) Vrai

Exercice 8

1) a) Vrai b) Vrai c) Faux

2) Toutes les égalités données sont fausses

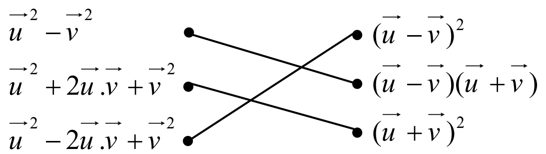
Exercice 9

a) Vrai b) Faux c) Faux d) Vrai

Exercice 10

1) B 2) A 3) D 4) C

Exercice 11



!

$A = 30$ $\quad$ $B = 55$ $\quad$ $C = 67$ $\quad$ $D = -11$

Exercice 13

On a :

a) $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times \cos C$

b) $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \times \cos B$

c) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos A$

Exercice 14

NB : Il faut lire dans l'exercice ***ABC est un triangle*** et pour les questions il lire ***AB*** $= \cdots$

a) Faux $\quad$ b) Vrai $\quad$ c) Faux

Exercice 15

a) Faux $\quad$ b) Vrai $\quad$ c) Vrai

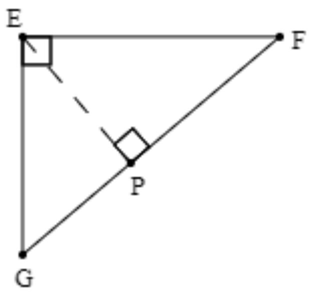
Exercice 16

a) $\vec{u}$ et $\vec{u} + 2\vec{v}$ $\quad$ b) $\vec{u} - \vec{v}$ et $2\vec{u} + \vec{v}$ $\quad$ c) $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Exercice 17

1) Vrai $\quad$ 2) Vrai $\quad$ 3) Faux

Exercice 18



a) $EF^2 + EG^2 = FG^2$

b) $GP \times GF = EG^2$

c) $EF^2 = FP \times FG$

d) $EP^2 = PG \times PF$

Exercice 19

L'égalité correcte est b).

Exercice 20

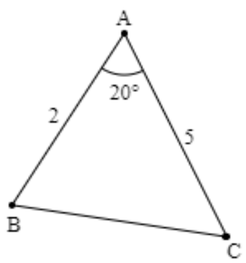
a) Vrai $\quad$ b) Faux

Exercice 21

On a :

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times(-6) + 3\times(-3) = -27$
- $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-9\\-6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -3\times(-9) + (-3)\times(-6) = 45$
- $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 6\times 9 + 3\times 6 = 72$

Exercice 22

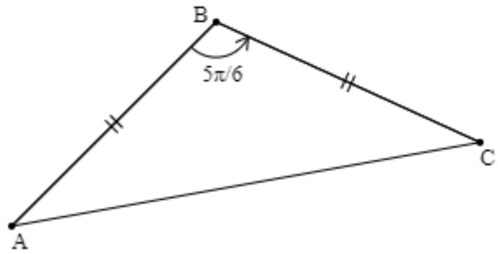


ABC est un triangle. D'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos A$$
$$= 4 + 25 - 2 \times 2 \times 5 \cos 20°$$
$$= 29 - 20 \cos 20°$$
$$= 10.20614$$

On en déduit que : $BC = 3{,}19$

Exercice 23



Les angles orientés $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$ sont opposés par le sommet donc $\text{Mes}(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = \text{Mes}(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB}) = \frac{5\pi}{6}$. Or dans le triangle ABC ci – contre, $mes B = Mes(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$ donc $mes B = \frac{5\pi}{6}$

ABC étant un triangle, d'après le théorème d'Al Kashi :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \times \cos B$$
$$= 16 + 16 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos \frac{5\pi}{6}$$
$$= 32 - 32(-\frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$= 32 + 16\sqrt{3}$$

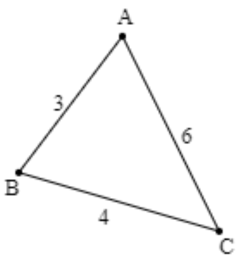
Donc $AC = \sqrt{32 + 16\sqrt{3}} = 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

Exercice 24

NB : - Ecrire ***ABC est un triangle*** au début de l'exercice

- Pour la question b) prendre $\boldsymbol{AC = \sqrt{3}}$

a) ABC est un triangle. D'après le théorème d'Al Kashi :



- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos A$ donc

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$$
$$= \frac{9 + 36 - 16}{2 \times 3 \times 6}$$
$$= \frac{29}{36}$$

On en déduit que : $mes A = 36°$

- De même on a : $\cos B = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \times BC} = \frac{9 + 16 - 36}{2 \times 3 \times 4} = \frac{-11}{24}$ donc $mes B = 117°$
- De même on a : $\cos C = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA \times CB} = \frac{36 + 16 - 9}{2 \times 6 \times 4} = \frac{43}{48}$ donc $mes C = 27°$

b) En se référant à la question a), on a :

- $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC} = \dfrac{6+3-2}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}} = \dfrac{7}{2\sqrt{18}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{12}$ donc $mes A = 34°$
- $\cos B = \dfrac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \times BC} = \dfrac{6+2-3}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{12}$ donc $mes B = 44°$
- $\cos C = \dfrac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA \times CB} = \dfrac{2+3-6}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{6}}{12}$ donc $mes C = 102°$

Exercice 25

Pour commencer, démontrons que pour tous vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ on a : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

On a : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$

On a : $(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 = 2\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|(\cos(\vec{u};\vec{v}) - 1)$.

Or $\cos(\vec{u};\vec{v}) - 1 \le 0$ et $2\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| \ge 0$ donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \le 0$. Comme on sait que $\|\vec{u}+\vec{v}\| \ge 0$ *et* $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \ge 0$ on déduit de ce qui précède que pour tous vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ on a : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (1)

En appliquant (1) aux vecteurs $(\vec{u}+\vec{v})$ et $\vec{w}$, on a : $\|(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}\| \le \|\vec{u}+\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$. Or $\|\vec{u}+\vec{v}\| \le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ donc il s'en suit que : $\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\| \le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

Exercice 26

On a :

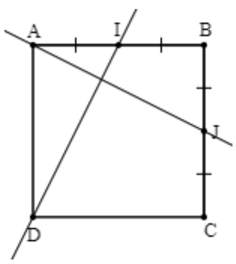
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) \\ &= \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} \\ &= \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{AI}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} \\ &= AI^2 + \overrightarrow{AI}.\vec{0} + (-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}).(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})\end{aligned}$$

car si I est le milieu de $[BC]$ alors

$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Par suite $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2$

Exercice 27



a) On a : $\|\vec{u}\| = \left\|\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}\right\| = \left|\frac{1}{a}\right|\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{a}\times a = 1$ et

$\|\vec{v}\| = \left\|\frac{1}{a}\overrightarrow{AD}\right\| = \left|\frac{1}{a}\right|\|\overrightarrow{AD}\| = \frac{1}{a}\times a = 1$. De plus $\vec{u} \perp \vec{v}$ (car $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$)

donc $(A, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé.

On a : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ *car* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AJ} = a\vec{u} + \frac{a}{2}\vec{v}$. Ainsi

$\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u},\ \vec{v})$.

On a : $\overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{DI} = \frac{a}{2}\vec{u} - a\vec{v}$ d'où $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ -a \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u},\ \vec{v})$.

De tout ce qui précède, on a : $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$ donc $(AJ) \perp (DI)$

b) On a :

$$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI} = (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}).(-\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$$

$$= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$$

Comme $(AB) \perp (\mathrm{AD})$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = 0$ donc

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$ d'où $(AJ) \perp (DI)$.

Exercice 28

Soit O le centre du rectangle $ABCD$. O est donc le milieu des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.

Ainsi, on a : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ et $OA = OB = OC = OD$

Pour tout point M du plan, on a :

- $MA^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2$

$$= MO^2 + OA^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA} + MO^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC}$$

$$= 2MO^2 + OA^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$$

$$= 2MO^2 + OA^2 + OB^2 \text{ car } 2\overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = 0 \text{ puisque } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

- de même on établit que: $MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + OB^2 + OD^2$

Comme $OA = OB = OC = OD$ alors $2MO^2 + OA^2 + OB^2 = 2MO^2 + OB^2 + OD^2$ d'où $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

Exercice 29

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -10 + 10 = 0$ donc $(AB) \perp (CD)$

Exercice 30

a) On a : $\vec{u}.\vec{v} = 3 \times (-5) + (-2) \times 1 = -17$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

Comme $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-17}{\sqrt{13} \times \sqrt{26}} \simeq -0.984$ donc

$\text{Mes}(\vec{u},\vec{v}) \simeq -157°$ (Faire une figure)

b) De même on a : $\vec{u}.\vec{v} = -7, \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{2} \quad et \quad \|\vec{v}\| = 7$ donc $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{-7}{\sqrt{2}\times 7} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. On en tire que $\text{Mes}(\vec{u},\vec{v}) = 135°$ (Faire une figure)

c) $\vec{u}.\vec{v} = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{v}$. On en tire que $\text{Mes}(\vec{u},\vec{v}) = 90°$ (Faire une figure)

Exercice 31

a) On a :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ donc $\|\overrightarrow{AB}\| = 2\sqrt{5}, \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{29} \quad et \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -2$

$\cos BAC = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} = \dfrac{-1}{\sqrt{145}}$ donc $\text{Mes}\, BAC = 94°$

b) On a :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$. On en tire que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Etant donné que $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \quad et \quad \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ alors $\text{Mes}\, BAC = 90°$.

Exercice 32

Soit $M(x;y)$ un point du plan. $M \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

a) On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+3\\y-4\end{pmatrix}$

$M \in (C) \Leftrightarrow (x-2)(x+3)+(y-5)(y-4) = 0$

On en déduit que : $x^2+y^2+x-9y+14=0$ est une équation du cercle *(C)*.

b) On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y+2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-6\\y+7\end{pmatrix}$

$M \in (C) \Leftrightarrow (x+1)(x-6)+(y+2)(y+7) = 0$

On en déduit que : $x^2+y^2-5x+9y+8=0$ est une équation du cercle *(C)*.

Exercice 33

a) On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB\times AC\times\cos BAC = 5\times 3\times\cos 65°$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} \simeq 6,34$

b) On a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

c) On a : $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{BC}^2 = 25+9-2\times 5\times 3\times\cos 65°$. On en tire que $BC = \sqrt{34-30\cos 65°} \Rightarrow BC \simeq 4,6$

Exercice 34

a) On a :

- $(2\vec{u}+\vec{v})^2.(2\vec{u}-\vec{v})^2 = (4\vec{u}^2+\vec{v}^2+4\vec{u}.\vec{v})\times(4\vec{u}^2+\vec{v}^2-4\vec{u}.\vec{v})$
$= (4\times 16+1+4\times 2)\times(4\times 16+1-4\times 2)$
$= 4161$

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}+\vec{v})^2-(\vec{u}-\vec{v})^2$

$$\begin{aligned}&=(\vec{u}+\vec{v}+\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}-\vec{u}+\vec{v})\\&=2\vec{u}.2\vec{v}\\&=4\vec{u}.\vec{v}\\&=8\end{aligned}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-6\vec{v})&=\vec{u}^2-6\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{v}-6\vec{v}^2\\&=16-6\times2+2-6\times1\\&=0\end{aligned}$$

On a : $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-6\vec{v})=0$ donc les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-6\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 35

a) On a :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2&=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}\\&=4+9+2\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})\\&=13+12\cos\frac{\pi}{3}\\&=19\end{aligned}$$

Donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{19}$

b) On a :

$$\begin{aligned}\|\vec{F_1}+\vec{F_2}\|^2&=\|\vec{F_1}\|^2+\|\vec{F_2}\|^2-2\vec{F_1}.\vec{F_2}\\&=40000+90000+2\|\vec{F_1}\|.\|\vec{F_2}\|\cos(\vec{u},\vec{v})\\&=190000\end{aligned}$$

L'intensité de la force $\vec{F_1}+\vec{F_2}$ est environ *436N*.

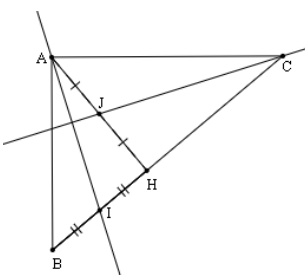
Exercice 36

a) D'après l'exercice 34, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=4\vec{u}.\vec{v}$ donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=4xx'+4yy'$

b) On a : $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})\perp(\vec{u}-\vec{v})&\Leftrightarrow(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=0\\&\Leftrightarrow\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=0\\&\Leftrightarrow\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2\\&\Leftrightarrow\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|\quad car\quad\|\vec{u}\|\geq0\quad et\quad\|\vec{v}\|\geq0\end{aligned}$$

Exercice 37



a) On a : $\vec{AI}=\vec{AJ}+\vec{JI}$

ABH est un triangle, I est le milieu de $[BH]$ et J est le milieu de $[AH]$ donc d'après la propriété de la droite des milieux, on a : $\overrightarrow{JI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{aligned}&\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{JI}\\&\overrightarrow{JI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\&\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\end{aligned}\right\}\ \text{donc}\ \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB})$$

b) On a :

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{CJ}$$

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ})\quad(1)$$

On a : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{AH}.(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HJ})=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HJ}$.

Or $(AH)\perp(CH)$ et $\overrightarrow{HJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CJ}=0+\overrightarrow{AH}.(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AH})=-\frac{1}{2}AH^2$ (2)

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AJ})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ}$

Or $(AB)\perp(CA)$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$ donc

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}=0+\overrightarrow{AB}.(\frac{1}{2}\overrightarrow{AH})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}).\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}(AH^2+\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AH})$$

Comme $(HB)\perp(AH)$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}AH^2$ (3)

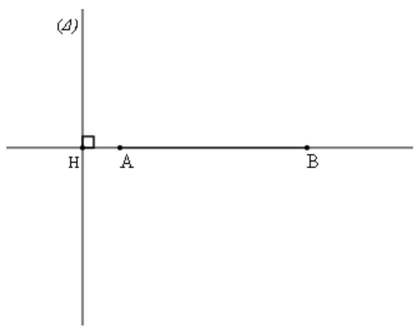
(1), (2) *et* (3) impliquent que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}AH^2+\frac{1}{2}AH^2)=0$ donc $(AI)\perp(CJ)$.

Exercice 38

a) Désignons par H le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB). On obtient alors :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-5\Leftrightarrow\overline{AB}\times\overline{AH}=-5$ donc

$$\overline{AH}=\frac{-5}{\overline{\overline{AB}}}=\frac{-5}{AB^2}\overline{AB}=-\frac{1}{5}\overline{AB}.$$

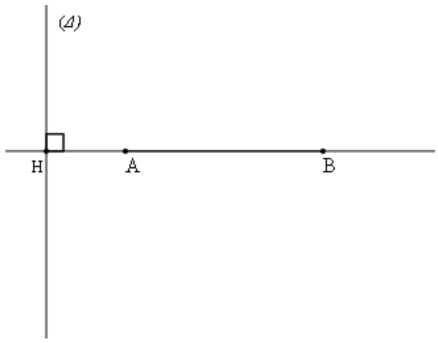


L'ensemble des points M cherchés est la droite (Δ) passant par H et perpendiculaire à la droite (AB).

b) On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}=10\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-10$

En adoptant la démarche de la question a), on obtient

$$\overline{AH}=-\frac{2}{5}\overline{AB}$$



Exercice 39

1) On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 35\sqrt{3}$

2) ABCD étant un losange de centre H, ses diagonales sont perpendiculaires en H qui est le projeté orthogonal de B sur (AC). Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AC} = AH \times AC = 2 \times 4 = 8$

3) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4\times 1 + (-2)\times 2 = 4-4 = 0$

Exercice 40

1) Il faut écrire $2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

On a : $AB^2 - BC^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB})$ et

$CD^2 - AD^2 = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AC}$ donc

$$\begin{aligned}
AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2 &= \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}).\overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}) \\
&= \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}) \\
&= \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) \\
&= 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}
\end{aligned}$$

$AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

2) Il faut écrire les diagonales (AC) et (BD).

Les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 &\Leftrightarrow AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2
\end{aligned}$$

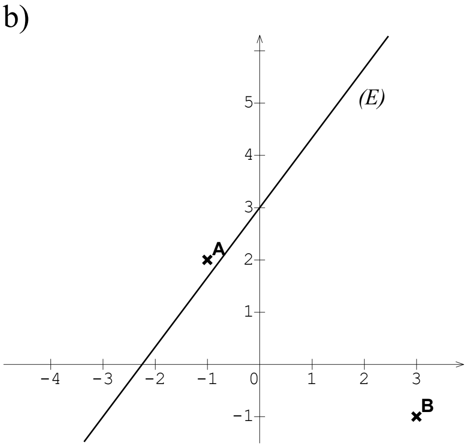
Exercice 41

Ecrire : Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 1 \Leftrightarrow 4x - 3y + 9 = 0$. $4x - 3y + 9 = 0$ étant l'équation d'une droite dans le plan alors l'ensemble (E) est la droite d'équation $4x - 3y + 9 = 0$.

b)



c) • On détermine le point H projeté orthogonal du point M sur la droite (AB). On a alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = 1 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{1}{AB^2}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

On a $AB^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = 25$

• On place le point H tel que : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{25}\overrightarrow{AB}$

• L'ensemble (E) est la droite passant par E et perpendiculaire à la droite (AB).

2) a) On a : $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1-x\\2-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}3-x\\-1-y\end{pmatrix}$. $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-1$

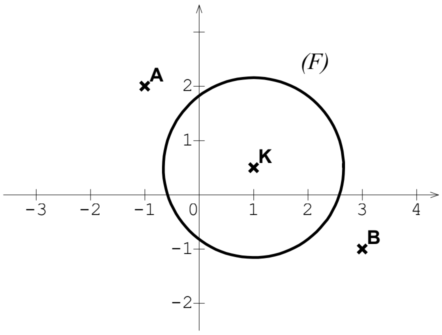
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-1\Leftrightarrow(-1-x)(3-x)+(2-y)(-1-y)=-1$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-y-4=0$$

b)

$$M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-1$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-y-4=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-4=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{21}{4}$$

Donc (F) est le cercle de centre $K(1;\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{21}}{2}$

c)



d)

$$M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-1$$
$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=-1$$
$$\Leftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$$

Comme I est le milieu du segment [AB] alors : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{IA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

donc $M\in(F)\Leftrightarrow MI^2+(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}).(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=-1$.

$$M\in(F)\Leftrightarrow MI^2-\frac{1}{4}AB^2=-1$$
$$\Leftrightarrow MI^2-\frac{25}{4}=-1$$
$$\Leftrightarrow MI^2=\frac{21}{4}$$
$$\Leftrightarrow MI=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

(F) est le cercle de centre $I(1;\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{21}}{2}$ *

Exercice 42

1) On a :

- $W(\vec{R}) = \vec{R}.\overrightarrow{AB} = 0$ car $\vec{R} \perp \overrightarrow{AB}$
- $W(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} = P \times AB \times \cos(\vec{P}, \overrightarrow{AB})$

Donc $W(\vec{P}) = P \times AB \times \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -P \times AB \sin x$ d'où $W(\vec{P}) = -4000 \sin xJ$

- $W(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F \times AB$ car $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens.

Donc $W(\vec{F}) = 2150J$.

2) On a : $g(x) = W(\vec{R}) + W(\vec{P}) + W(\vec{F})$ donc $g(x) = 2150 - 4000 \sin x$

3) Pour que le mouvement soit possible, il faut $g(x) > 0$ c'est – à – dire $\sin x < 0.5375$

On en déduit que : $x_{max} \simeq 39°$

Leçon 10 EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- **Faire dégager le contexte**

Pour cela on peut poser les questions du genre :

- De quel évènement parle le texte ? ***Le texte parle de l'excursion d'un groupe d'élèves dans la ville de Soubré à la découverte du nouveau barrage hydroélectrique.***
- Quels sont les acteurs de cet évènement ? ***Les acteurs sont un groupe d'élèves de Gagnoa et le chauffeur d'un autre véhicule de Soubré.***
- Où se déroule l'évènement ? ***L'évènement se déroule sur l'axe Gagnoa – Soubré***

- **Faire dégager la (ou les) circonstance(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Quel(s) problème(s) se pose(nt) dans cet évènement ? ***Le problème posé est : Les élèves veulent savoir à quelle distance et à quelle l'heure les deux véhicules vont se rencontrer.***
- Quelle(s) difficulté(s) rencontre(nt) les acteurs de cet évènement ? ***Les élèves ne parviennent pas à s'accorder sur les réponses au problème posé***

- **Faire dégager la (ou les) tâche(s)**

Pour cela on peut poser les questions du genre

- Que décident de faire les acteurs ? ***Ils décident de voir le professeur de mathématiques afin qu'il leur donne les outils nécessaires pour résoudre le problème.***

- **Faire la synthèse et annoncer des notions mathématiques convoquées par la situation (le professeur)**

Nous allons donner les définitions d'une équation et d'une inéquation puis résoudre des équations et des inéquations dans $\mathbb{R}$

I/ Activités de découvertes et évaluations des acquis

Activité 1

1) L'inconnue est x

2) a) Les deux membres de l'équation (E) sont : $\frac{2x}{x-1}$ et $\frac{x^2}{3x-2}$

b) $\frac{2 \times 0}{0-1} = \frac{0^2}{3 \times 0-2} = 0$ donc 0 vérifie l'équation (E).

3) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x^2}{3x-2}$

J'évalue mes acquis

a) ; b)   et   c)

Activité 2

Remarques

1) b) Ajouter avant la consigne ceci : « **On admet que (E_1) admet deux solutions** »

c) Ajouter avant la consigne ceci : « **On admet que (E) admet deux solutions** »

1) a) C'est l'ajout de $2018x$ à chaque membre de l'équation (E) pour passer à l'équation (E_1).

b) $(-3)^2 = 9$ et $3^2 = 9$ donc (-3) et 3 sont les solutions de l'équation (E_1).

c) $(-3)^2 - 2018 \times (-3) = 9 - 2018 \times (-3)$

$3^2 - 2018 \times 3 = 9 - 2018 \times 3$ donc (-3) et 3 sont les solutions de l'équation (E).

2) a) C'est le produit de chaque membre de l'équation (E') par $(x^2 + 2)$.

b) $-1 + 2 = 1$ et $2 \times (-1) + 3 = -2+3 = 1$ donc $-1 + 2 = 2 \times (-1) + 3$ d'où -1 est la solution de l'équation (E_1').

$\frac{-1+2}{(-1)^2+2} = \frac{1}{3}$ et $\frac{2\ (-1)+3}{(-1)^2+2} = \frac{1}{3}$ donc $\frac{-1+2}{(-1)^2+2} = \frac{2\ (-1)+3}{(-1)^2+2}$ d'où -1 est la solution de l'équation (E').

J'évalue mes acquis

a) $2x - 4 = x$

b) $x^2 = x$

c) $2|x| = 2+|x|$

d) $x^2 - 4x = -4$

Activité 3

1) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $D_g = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}$

2) Pour que l'équation $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ ait un sens, il faut que les fonctions f et g soient simultanément définies c'est – à – dire : $x \in D_f \cap D_g$ donc $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}; 1\right\}$.

3) $\frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{3x-2} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}; 1\right\}$ et $2x\,(3x - 2) = x^2\,(x - 1)$

On a :

$$2x\,(3x-2) = x^2\,(x-1) \Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\,(x^2 - 7x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left[\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 4\right] = 0$$

$\Leftrightarrow \; x\,[(x - \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2})\,(x - \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2})] = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}$ ou $x = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}$

Les valeurs de x vérifiant les contraintes et qui vérifient l'équation (E) sont 0 ; $\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}$ et $\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}$

J'évalue mes acquis

On a :

$x^3 + 2x^2 - 3x = 2x^3 - 5x^2 \;\Leftrightarrow\; x^3 - 7x^2 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow\; x\,(x^2 - 7x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow\; x\,[(x - \frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} + 3)] = 0$

$\Leftrightarrow\; x\,[(x - \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2})\,(x - \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2})] = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ 0\,;\; \frac{7+\sqrt{37}}{2}\;;\; \frac{7-\sqrt{37}}{2} \right\}$

On a :

- pour résoudre l'équation (E_2), il faut : $x - 1 \neq 0$ et $(x-1)^2 \neq 0$ c'est – à – dire $x \neq 1$
- $\frac{8}{x-1} = \frac{2}{(x-1)^2} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}\; et\; 8(x-1)^2 = 2(x-1)$

$8\,(x-1)^2 = 2\,(x-1) \;\Leftrightarrow\; 2(x-1)\,(4x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow\; (4x - 5) = 0$ ou $x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow\; x = \frac{5}{4}\;\; ou\; x = 1$

La valeur 1 ne respecte pas la contrainte donc $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{5}{4}\right\}$

Activité 4

a) $|1 - 2x| = 3 \;\Leftrightarrow 1 - 2x = 3$ ou $1 - 2x = -3$

$S_{\mathbb{R}} = \{-1\,;2\}$

b) $|5x + 2| = |3x - 4| \;\Leftrightarrow\; 5x + 2 = 3x - 4$ ou $5x + 2 = -3x + 4$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-3\,;\,\frac{1}{4}\right\}$

c) Il faut $2x - 1 \geq 0$ c'est – à – dire $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$|x| = 2x - 1 \Leftrightarrow \ x \in [\frac{1}{2} ; +\infty[$ et $x = 2x - 1$ ou $x \in [\frac{1}{2} ; +\infty[$ et $x = - 2x + 1$.

On a

$x = 1$ ou $x = \frac{1}{3}$. Or $\frac{1}{3} \notin [\frac{1}{2} ; +\infty[$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{1\}$

J'évalue mes acquis.

$(E_1) \Leftrightarrow |3x - 5| = x + 2$

Il faut $x + 2 \geq 0$ c'est – à – dire $x \in [-2 ; +\infty[$ pour que l'équation ait un sens.

$|3x - 5| = x + 2 \Leftrightarrow x \in [-2 ; +\infty[$ et $3x - 5 = x + 2$ ou $x \in [-2 ; +\infty[$ et $3x - 5 = - x - 2$

On a $x = \frac{7}{2}$ ou $= \frac{3}{4}$. Comme ces nombres appartiennent à $[-2 ; +\infty[$ alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{3}{4} ; \frac{7}{2}\right\}$

$(E_2) : |1 - 2x| = |x + 2| \Leftrightarrow 1 - 2x = x + 2$ ou $1 - 2x = -x - 2$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ 3 ; -\frac{1}{3} \right\}$

Activité 5

1) a) ; c) ; e)

2) a) on a : $\frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$. Comme $-2 \leq -\frac{1}{2}$ alors $-\frac{1}{2}$ vérifie l'inéquation (I)

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$

J'évalue mes acquis

a) et c)

Activité 6

1-a) L'ajout de $-50x^2$ à chaque membre de l'inéquation (I) permet d'obtenir l'inéquation (I_1) : $2x \leq x - 3$

b) $d(x) = x + 3$; $d(x) \leq 0$ sur $]- \infty ; -3]$

c) (I_1) : $2x \leq x - 3 \Leftrightarrow x \leq -3$

$S_{\mathbb{R}} =]- \infty ; -3]$

d) (I) et (I_1) sont équivalentes donc elles ont les mêmes solutions.

2) $\frac{x-1}{2} - 1 \geq \frac{x+2}{3} \Leftrightarrow 6\,[\frac{(x-1)}{2} - 1] \geq 6\,\frac{(x+2)}{3}$

$\Leftrightarrow \quad 3\,(x-1) - 6 \;\geq 2\,(x+2)$

J'évalue mes acquis

a) $2x - 4 \leq x$ b) $x^2 \geq x$ c) $2|x| < |x| + 1$

d) $x^2 - 2\,x > -1$

Activité 7

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) Pour que l'inéquation ait un sens il faut $x \in D_f \cap D_g$ donc il faut $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$

3) (I) $\Leftrightarrow \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2x}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$=1$		0		1		$+\infty$
$x+1$		-	0	+		+		+	
x		-		-	0	+		+	
$x - 1$		-		-		-	0	+	
$\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}$		-	$\Vert$	+	0	-	$\Vert$	+	

$S_{\mathbb{R}} = \,]-\infty\,;-1[\;\cup\;[0\,;\;1[$

J'évalue mes acquis

(I_1): $x^2 - 4 \leq (5x+6)\,(x-2) \quad \Leftrightarrow (x+2)(x-2) \leq (5x+6)(x-2)$

$\Leftrightarrow \; -4\,(x+2)\,(x+1) \leq 0$

$\Leftrightarrow \; (x+2)\,(x+1) \geq 0$

On dresse le tableau de signes du polynôme $(x+2)\,(x+1)$ et on conclut que l'ensemble des solutions de (I_1) est : $S_{\mathbb{R}} = \,]-\infty\,;-2] \cup [-1\,;+\infty[$

L'inéquation (I_2) a un sens si $x+2 \neq 0$ et $x-1 \neq 0$ c'est – à – dire $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$, $(I_2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{(x+2)(x-1)} \leq 0$

On dresse le tableau de signes de la fraction rationnelle $\dfrac{3}{(x+2)(x-1)}$ et on conclut que l'ensemble des solutions de (I_2) est : $S_{\mathbb{R}} = \,]-2\,;\,1[$.

Activité 8

a) $|x+7| < 3 \Leftrightarrow -3 < x + 7 < 3$

$\Leftrightarrow -10 < x < -4$; $S_{\mathbb{R}} =]-10\,;-4[$.

b) $|x| \leq |3x-4| \Leftrightarrow (x)^2 \leq (3x-4)^2$

$\Leftrightarrow (3x-4)^2 - x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (4x-4)(2x-4) \geq 0$

On dresse le tableau de signes du polynôme $(4x-4)(2x-4)$ et on conclut que l'ensemble des solutions est : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty\,;1] \cup [2\,;+\infty[$

c) Pour que l'inéquation ait un sens, il faut que $|x| \neq 0$ c'est – à – dire $x \neq 0$ donc $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\frac{|x-1|}{|x|} \geq 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq (2x)^2$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x+1) \leq 0$

On dresse le tableau de signes du polynôme $(3x-1)(x+1)$ et en tenant compte de la condition $x \neq 0$, on conclut que l'ensemble des solutions est : $S_{\mathbb{R}} = [-1\,;0[\cup]\,0\,;\frac{1}{3}]$

J'évalue mes acquis

a) $|2x+3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x + 3 \leq 5$

$\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1$

$S_{\mathbb{R}} = [-4\,;1]$

b) $|7-2x| \leq |3x+4| \Leftrightarrow (7-2x)^2 \leq (3x+4)^2$

$\Leftrightarrow (7-2x)^2 - (3x+4)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (-5x+3)(x+11) \leq 0$

On dresse le tableau de signes du polynôme $(-5x+3)(x+11)$ et on conclut que l'ensemble des solutions est : $S_{\mathbb{R}} =]-\infty;\ -11] \cup \left[\frac{3}{5};\ +\infty\right[$

c) $|2x+3| \leq x-1$; si $x \in]-\infty;\ -1[$ alors l'inéquation n'a pas de solution car

$x - 1 < 0$ or $|2x + 3| \geq 0$

si $x \in [\,1\,;+\infty[$ alors : $|2x + 3| \leq x - 1 \Leftrightarrow (2x + 3)^2 \leq (x - 1)^2$

$\Leftrightarrow (2x + 3)^2 - (x - 1)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (3x + 2)(x + 4) \leq 0$

$S_{\mathbb{R}} = [-4\ ; -\frac{2}{3}] \cap [\,1\,;+\infty\,[= \emptyset.$

d) $|2x - 3| \leq x + 1$

Si $x \in\ ]-\infty; -1[$ alors $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

Si $x \in [\,-1\,;+\infty[$ alors :

$|2x - 3| \leq x + 1 \Leftrightarrow (2x - 3)^2 \leq (x + 1)^2$

$\Leftrightarrow (2x - 3)^2 - (x + 1)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (3x - 2)(x - 4) \leq 0$

$S_{\mathbb{R}} = [\,\frac{2}{3}\ ;\ 4] \cap [-1\,;+\infty\,[= [\,\frac{2}{3}\ ;\ 4\,]$

II/ Je m'exerce

Exercice 1

1) F 2) V 3) V.

Exercice 2

A) V B) V C) V D) F.

Exercice 3

$(x + \sqrt{2}) = 0$	$S = \{\,2\,\}$
$(3 - x) = 1$	$S = \{\,\sqrt{2}\,;1\}$
$x\,(3x + 2)\,) = 0$	$S = \{-\sqrt{2}\,\}$
$(x - \sqrt{2})(1 - x) = 0$	$S = \left\{-\frac{2}{3}\ ;0\right\}$

Exercice 4

Ceux qui sont solutions de l'équation (E) sont : $-\frac{6}{5}$ et 1.

Exercice 5

a) $3x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 7) = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{0 \,;\, \frac{7}{3}\right\}$

b) $(x + 3)^2 = (x + 3)(2x - 7) \Leftrightarrow (x + 3)^2 - (x + 3)(2x - 7) = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(10 - x) = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \{-3 \,;\, 10\}$

Exercice 6

a) Il faut $3x + 4 \neq 0$ et $1 + 2x \neq 0$ donc l'équation a un sens si $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{4}{3} \,;\, -\frac{1}{2}\right\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{4}{3} \,;\, -\frac{1}{2}\right\}$, on a :

$\frac{1-2x}{3x+4} = \frac{x+1}{1+2x} \Leftrightarrow (1 + 2x)(1 - 2x) = (x + 1)(3x + 4)$

$\Leftrightarrow (1 + 2x)(1 - 2x) - (x + 1)(3x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow 7x^2 + 7x + 3 = 0$

Or $7x^2 + 7x + 3 = 7(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$ et $7(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ donc l'équation

$7x^2 + 7x + 3 = 0$ n'a pas de solutions.

b) L'ensemble de validité de cette équation est : $\mathbb{R}\backslash\left\{-2 \,;\, -\frac{1}{3}\right\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-2 \,;\, -\frac{1}{3}\right\}$:

$\frac{x+\sqrt{2}}{x+2} = \frac{x-1}{3x+1} \Leftrightarrow (1 + 3x)(x + \sqrt{2}) = (x - 1)(x + 2)$

$\Leftrightarrow (1 + 3x)(x + \sqrt{2}) - (x - 1)(x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 0$

Or $2x^2 + 3x\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 2(x + \frac{3\sqrt{2}}{4})^2 + \frac{23+16\sqrt{2}}{16}$ et $2(x + \frac{3\sqrt{2}}{4})^2 + \frac{23+16\sqrt{2}}{16} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ donc
$2x^2 + 3x\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} = 0$ n'a pas de solution

Exercice 7

a) $|x+3| = 2 \Leftrightarrow x + 3 = 2$ ou $x + 3 = -2$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -5$

$S_{\mathbb{R}} = \{-5\,;\,-1\}$

b) $|2x-3| = |x-4| \Leftrightarrow 2x - 3 = x - 4$ ou $2x - 3 = -x + 4$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \frac{7}{3}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-1\,;\,\frac{7}{3}\right\}$

c) $3 + |x+3| = 9 \Leftrightarrow |x+3| = 6$

$\Leftrightarrow x + 3 = 6$ ou $x + 3 = -6$

$S_{\mathbb{R}} = \{-9\,;\,3\}$

d) $|x-10| = -2$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ car $|x-10| \geq 0$

$S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

Exercice 8

a) $|3x-2| = x + 6$

- Si $x \in]-\infty\,;\,-6[$ alors $|3x+2| = x + 6$ n'a pas de solutions car dans ce car $x + 6 < 0$ alors que $|3x-2| \geq 0$

- Si $x \in [-6\,;\,+\infty[$ alors :

$|3x-2| = x + 6 \Leftrightarrow 3x - 2 = x + 6$ ou $3x - 2 = -x - 6$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 4$

On a : $-1 \in [-6;\,+\infty[$ et $4 \in [-6;\,+\infty[$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{-1\,;\,4\}$

b) $\sqrt{(2x-3)^2} = 3 - 2x$

- Si $x \in]\frac{3}{2}\,;+\infty[$ alors $\sqrt{(2x-3)^2} = 3 - 2x$ n'a pas de solutions ce car $3 - 2x < 0$ alors que $\sqrt{(2x-3)^2} \geq 0$

- Si $x \in]-\infty\,;\frac{3}{2}]$ alors :

$\sqrt{(2x-3)^2} = 3 - 2x \Leftrightarrow (2x-3)^2 = (3-2x)^2$ ce qui est vraie donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty\,;\,\frac{3}{2}]$

c) $|x-4| - |x+6| = 10$

Calculons $|x-4|$ - $|x+6|$ sans le symbole de valeur absolue

x	$-\infty$	-6		4		$+\infty$
$x+6$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$	
$\|x-4\|$	$-x+4$		$-x+4$	0	$x-4$	
$\|x+6\|$	$-x-6$	0	$x+6$		$x+6$	
$\|x-4\|$ - $\|x+6\|$	10		$-2x-2$		-10	

-Si $x \in]-\infty\ ;-6]$ alors $|x-4|$ - $|x+6| = 10$ est vraie.

Donc $S_1 =]-\infty\ ;-6]$

-Si $x \in [-6\ ;\ 4]$ alors $|x-4|$ - $|x+6| = 10 \quad \Leftrightarrow \quad -2x-2 = 10$

$\Leftrightarrow \quad x = -6$.

$S_2 = \{-6\}$

-Si $x \in [4\ ;+\infty[$ alors $|x-4|$ - $|x+6| = 10$ n'a pas de solutions.

$S_{\mathbb{R}} = \mathbf{S_1} = \cup\ S_2 =]-\infty\ ;-6]$.

d) $|x(x-2)| + |x^2-4| = 0 \Leftrightarrow |x(x-2)| = -|x^2-4|$

Comme $|x(x-2)| \geq 0\ \ et\ \ -|x^2-4| \leq 0$ alors l'équation $|x(x-2)| = -|x^2-4|$ n'a du sens que lorsque $|x(x-2)| = 0\ \ et\ \ -|x^2-4| = 0$ c'est – à – dire $x \in \{0\ ;2\}$ et

$x \in \{-2\ ;2\}$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{0\ ;2\} \cap \{-2\ ;2\} = \{2\}$

Exercice 9

a) c) et d)

Exercice 10

1-V 2-V 3-V

Exercice 11

Il n'y a pas d'équations équivalentes dans cette liste

Exercice 12

a) $x^2 - 16 > x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)(x+4) - (x-4) > 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-4)(x+3) > 0$

$S_{\mathbb{R}}$=]- ∞ ; -3 [∪] 4 ; +∞ [

b) $5\,(x^2 + 1)(x - 2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2) \geq 0$ car $(x^2 + 1) \geq 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \quad x \geq 2$

$S_{\mathbb{R}}$= [2 ; +∞ [

c) $(3x - 2)^2 - 5 \leq 3x\,(3x - 4) \ \Leftrightarrow \ 9\,x^2 - 12x - 1 \leq 9\,x^2 - 12\,x$

$\Leftrightarrow$ $-1 \leq 0$ ce qui est vrai donc $S_{\mathbb{R}}$ =ℝ.

d) $(x^2 - 4)(3 - x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)(x + 2)(3 - x) > 0$

x	$-\infty$		-2		2		3		$+\infty$
$x + 2$		-	0	+		+		+	
$x - 2$		-		-	0	+		+	
$3 - x$		+		+		+	0	-	
$(x - 2)(x + 2)(3 - x)$		+	0	-	0	+	0	-	

$S_{\mathbb{R}}$ =]- ∞ ; -2[⋃]2 ; 3[

e) $x\,(x - 2)(\,3 - x) \geq 0$

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
x		-	0	+		+		+	
$x - 3$		-		-		-	0	+	
$2 - x$		+		+	0	-		-	
$x\,(x - 2)(3 - x)$		+	0	-	0	+	0	-	

$S_{\mathbb{R}}$ =]- ∞ ; 0] ∪ [2 ; 3]

Exercice 13

a) L’ensemble de validité de l’inéquation est: ℝ\{0; 1 }.

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0;\ 1\}$:

$$\frac{x+3}{x-1} - \frac{x+1}{x} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x\,(x+3) - (x-1)(x+1) - 2x\,(x-1)}{x\,(x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2x^2+5x+1}{x\,(x-1)} < 0$$

On dresse le tableau de signes de la fraction rationnelle $\frac{-2x^2+5x+1}{x\,(x-1)} = \frac{-2(x-\frac{5-\sqrt{33}}{4})(x-\frac{5+\sqrt{33}}{4})}{x(x-1)}$ et on conclut que l'ensemble des solutions est :

$S_{\mathbb{R}}$ = $]-\infty\,;\frac{5-\sqrt{33}}{4}[\,\cup\,]0\,;\,1[\,\cup\,]\frac{5+\sqrt{33}}{4}\,;+\infty\,[$

b) L'ensemble de validité de l'inéquation est: $\mathbb{R}\backslash\{\,0\,;\,-3\,\}$

$\frac{x^2-4}{x} < \frac{x-1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{x^3+2x^2-3x-12}{x\,(x+3)} < 0$ (pas de racine évidente donc impossible à résoudre avec les habiletés de 2ndeC)

c) L'ensemble de validité de l'inéquation est: $\mathbb{R}\backslash\{\,1\,;\,-1\,\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\,1\,;\,-1\,\}$

$$\frac{x+1}{x-1} < \frac{2x}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-1} - \frac{2x}{x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x^2+4x+1}{(x+1)\,(x-1)} < 0$$

On dresse le tableau de signes de la fraction rationnelle $\frac{-x^2+4x+1}{(x+1)\,(x-1)} = \frac{(-x+2-\sqrt{5})(x-2-\sqrt{5})}{(x+1)(x-1)}$ et on conclut que l'ensemble des solutions est :

$S_{\mathbb{R}}$ = $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]2-\sqrt{5}\,;\,1[\,\cup\,]2+\sqrt{5}\,;+\infty\,[$

d) L'ensemble de validité de l'inéquation est: $\mathbb{R}\backslash\{\,0\,;\,-1\,\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{\,0;\,-1\,\}$

$$2 - \frac{3}{x} < \frac{2}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-3}{x} - \frac{2}{x+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x^2-3x-3}{x\,(x+1)} < 0$$

On dresse le tableau de signes de la fraction rationnelle $\frac{2x^2-3x-3}{x\,(x+1)}$ et on conclut que l'ensemble des solutions est :

$S_{\mathbb{R}}$= $]\frac{3-\sqrt{33}}{4}$; 0[∪]0 ; $\frac{3+\sqrt{33}}{4}$ [

Exercice 14

a) L'ensemble de validité de l'inéquation est: $\mathbb{R}\backslash\{-1\,;\,1\,\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;\,1\,\}$:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x}{(x-1)\,(x+1)} \leq 0$$

On dresse le tableau de signes de la fraction rationnelle $\frac{4x}{(x+1)\,(x-1)}$ et on conclut que l'ensemble des solutions est : $S_{\mathbb{R}}$ =]-∞ ; -1[∪ [0 ; 1[

b) $(x-1)\,(x+3) \leq 0$

On dresse le tableau de signes du polynôme (x - 1)(x + 3) et on conclut que l'ensemble des solutions est : $S_{\mathbb{R}}$= [-3 ; 1]

c) $(2x+5)\,(x+3) \geq 0$

On dresse le tableau de signes du polynôme $(2x+5)\,(x+3)$ et on conclut que l'ensemble des solutions est : $S_{\mathbb{R}}$ =]- ∞ ; -3] ∪ [$\frac{-5}{2}$; +∞ [

Exercice 15

a) $16\,|x-4| \leq 2 \;\Leftrightarrow\; |x-4| \leq \frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow\; -\frac{1}{8} \leq x-4 \leq \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{31}{8} \leq x \;\leq \frac{33}{8}$$

$S_{\mathbb{R}} = [\frac{31}{8}\,;\,\frac{33}{8}]$

b) $|2x-3| \leq 4 \;\Leftrightarrow\; -4 \leq 2x-3 \leq 4$

$$\Leftrightarrow\; \frac{-1}{2} \leq x \;\leq \frac{7}{2}$$

$S_{\mathbb{R}} = [\,\frac{-1}{2}\,;\,\frac{7}{2}\,]$

c) $4 \leq |2x+6| \leq 6 \iff |2x+6| \geq 4$ et $|2x+6| \leq 6$

Posons (I_1) : $|2x+6| \geq 4$ et (I_2) : $|2x+6| \leq 6$

(I_1) : $|2x+6| \geq 4 \iff 2x+6 \geq 4$ ou $2x+6 \leq -4$

$\iff x \geq -1$ ou $x \leq -5$

$S_1 =]-\infty\,;-5] \cup [-1\,;+\infty[$

(I_2) : $|2x+6| \leq 6 \iff -6 \leq 2x+6 \leq 6$

$\iff -6 \leq x \leq 0$

$S_2 = [-6\,;\,0]$

$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cap S2 = [-6\,;-5] \cup [-1\,;\,0]$

d) $1 < |2-x| < 3 \iff |2-x| > 1$ et $|2-x| < 3$

Posons (I_1) : $|2-x| \geq 1$ et (I_2) : $|2-x| \leq 3$

$I_1)$: $|2-x| > 1 \iff 2-x > 1$ ou $2-x < -1$

$\iff x < 1$ ou $x > 3$

$S_1 =]-\infty\,;1[\cup]3\,;+\infty[$

(I_2) : $|2-x| < 3 \iff -3 < 2-x < 3$

$\iff -1 < x < 5$

$S_2 =]-1\,;\,5[$

$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cap S_2 =]-1\,;1[\cup]3\,;\,5[$

Exercice 16

a) $|2x-3| \geq x-1 \iff 2x-3 \geq x-1$ ou $2x-3 \leq -x+1$

$\iff x \geq 2$ ou $x \leq \frac{4}{3}$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty\,;\frac{4}{3}] \cup [2\,;+\infty[$

b)

$|x^2 - 7x + 12| \leq x^2 - 3x - 10$

On a : $x^2 - 3x - 10 = (x + 2)(x - 5)$.

Pour tout $x \in]-\infty ;\ -2] \cup [5 ;\ +\infty[$, $x^2 - 3x - 10 \geq 0$ et pour tout $x \in]-2 ; 5[$,

$x^2 - 3x - 10 < 0$

- Si $x \in]-2 ;\ 5[$ alors $|x^2 - 7x + 12| \leq x^2 - 3x - 10$ n'a pas de solutions.

- Si $x \in]-\infty ; -2] \cup [5 ; +\infty[$ alors :

$|x^2 - 7x + 12| \leq x^2 - 3x - 10 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 \leq x^2 - 3x - 10$ et

$x^2 - 7x + 12 \geq -x^2 + 3x + 10$

Posons (I_1) : $x^2 - 7x + 12 \geq -x^2 + 3x + 10$

et (I_2) : $x^2 - 7x + 12 \leq x^2 - 3x - 10$

(I_1) : $x^2 - 7x + 12 \geq -x^2 + 3x + 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 10x + 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad (x - \frac{5 - \sqrt{21}}{2})(x - \frac{5 + \sqrt{21}}{2}) \geq 0$$

$S_1 =]-\infty ; -2] \cup [\frac{5 + \sqrt{21}}{2} ; +\infty[$

(I_2) : $x^2 - 7x + 12 \leq x^2 - 3x - 10 \quad \Leftrightarrow \quad 4x \geq 22$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{11}{2}$$

$S_2 = [\frac{11}{2} ; +\infty[$

$S_{\mathbb{R}} = \mathbf{S_1} \cap \mathbf{S_2} = [\frac{11}{2} ; +\infty[$

c) L'ensemble de validité de l'inéquation est: $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

$\left|\frac{x-1}{3x+2}\right| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 \leq 4\,(3x + 2)^2$

$$\Leftrightarrow \quad 7x^2 + 10x + 3 \geq 0$$

$\Leftrightarrow \quad (x+1)(7x+3) \geq 0$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty\,; -1] \cup [-\frac{3}{7}\,; +\infty[$

Exercice 17

1) $4 - (x-3)^2 = 4 - (x^2 - 6x + 9)$

$4 - (x-3)^2 = 4 - x^2 + 6x - 9$

$4 - (x-3)^2 = -x^2 + 6x - 5$. Or $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ donc $f(x) = 4 - (x-3)^2$

$f(x) = (5-x)(x-1)$

2) $f(x) > 0 \Leftrightarrow \quad (5-x)(x-1) > 0$

A l'aide d'un tableau de signes, on a: $S_{\mathbb{R}} =]1\,;\,5[$

3) Graphiquement, $f(x) > 0$ est l'ensemble des nombres dont les images par f sont strictement supérieures à zéro.

On obtient : $]1\,;\,5[$

Exercice 18

Soient x , $x+1$ et $x+2$ trois nombres entiers consécutifs.

On a: $(x+2)^2 + x(x+1) = 301 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 5x + 4 = 301$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 5x - 297 = 0$

$\Leftrightarrow \; 2\,[(x + \frac{5}{4})^2 - (\frac{49}{4})^2] = 0$

$\Leftrightarrow (x-11)(x + \frac{27}{2}) = 0$

On obtient : $x = 11$

Conclusion : ces trois nombres entiers naturels consécutifs sont : 11 , 12 et 13.

Exercice 19

1) $A(x) = |x+2| + |2x-3| - x + 3$.

x	$-\infty$ \quad -2		$\frac{3}{2}$ \quad $+\infty$
$x + 2$	$-$ \quad 0	$+$	$+$
$2x - 3$	$-$	$-$ \quad 0	$+$
$\|2x-3\|$	$-2x + 3$	$-2x + 3$	$2x - 3$
$\|x+2\|$	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$A(x)$	$-4x + 4$	$-2x + 8$	$2x + 2$

- Sur $]-\infty\,;-2]$, $A(x) = -4x + 4$

- Sur $[-2\,;\frac{3}{2}]$, $A(x) = -2x + 8$

- Sur $[2\,;+\infty[$, $A(x) = 2x + 2$

2) - Sur $]-\infty\,;-2]$, $A(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

Comme $1 \notin]-\infty\,;-2]$ alors $S_1 = \emptyset$.

- Sur $[-2\,;\frac{3}{2}]$, $A(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4$

Comme $4 \notin [-2\,;\frac{3}{2}]$ alors $S_2 = \emptyset$.

-Sur $[2\,;+\infty[$, $A(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$

Comme $-1 \notin [2\,;+\infty[$, alors $S_3 = \emptyset$.

$S_{\mathbb{R}} = \mathbf{S_1} \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$.

3)

- Sur $]-\infty\,;-2]$, $A(x) < 0 \Leftrightarrow -4x + 4 < 0$

$\Leftrightarrow x > 1$

$S_1 =]-\infty\,;-2] \cap]1\,;+\infty[= \emptyset$.

-Sur $[-2\,;\frac{3}{2}]$, $A(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 8 < 0$

$\Leftrightarrow x > 4$

$S_2 = [-2\ ;\ \frac{3}{2}\ ] \cap\ ]\ 4\ ;+\infty\ [= \emptyset.$

-Sur $[\ 2\ ;+\infty\ [$, $A(x) < 0 \Leftrightarrow 2x + 2 < 0$

$\Leftrightarrow x < -1$

$S_3 = [\ 2\ ;+\infty\ [\ \cap\ ]-\infty\ ;-1\ [= \emptyset.$

$S_{\mathbb{R}} = \mathbf{S_1} \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset.$

Exercice 20

a) $|x-4| = x^2 - 4$

Si $x \in\ ]-2\ ;2[$ alors x^2-4 est strictement négatif donc l'équation n'a pas de solution

Si $x \in\ ]-\infty\ ;\ -2] \cup [2\ ;\ +\infty[$ alors :

$|x-4| = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = x - 4$ ou $x^2 - 4 = -x + 4$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0\ \ ou\ x^2 + x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1;\ x = 0\ ;\ \frac{-1-\sqrt{33}}{2}\ \ ou\ \ \frac{-1+\sqrt{33}}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-1-\sqrt{33}}{2}\ ;\ \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \right\}$

b) L'ensemble de validité de l'équation est: $\mathbb{R}\backslash\{1\ ;2\ \}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\ ;2\ \}$:

$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow (2x+1)(x-2) = (x+1)(x-1)$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{3-\sqrt{13}}{2}\ ;\ \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right\}$

c) $|2x-5| = -6$, $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

d) $(x^2-3x-1)(x+1) - x^2 + 1 = x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 5x + 1 = 0$

(pas de solution évidente). On ne peut pas résoudre cette équation avec les habiletés de 2^{nde}C

e) $|x-4| = |x^2-4| \Leftrightarrow x^2 - 4 = x - 4$ ou $x^2 - 4 = -x + 4$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0\ \ ou\ x^2 + x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1;\ x = 0\ ;\ \frac{-1-\sqrt{33}}{2}\ \ ou\ \ \frac{-1+\sqrt{33}}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-1-\sqrt{33}}{2} ; 0 ; 1 ; \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \right\}$

f) $|x+1| + 2\,|2-x| + |x| - 2x + 1 = 0$

Ecrire l'expression $|x+1| + 2\,|2-x| + |x| - 2x + 1$ sans symbole de valeur absolue

- Sur $]-\infty ; -1]$, $|x+1| + 2\,|2-x| + |x| - 2x + 1 = 0 \iff -6x + 4 = 0$

$\iff x = \frac{2}{3}$

Comme $\frac{2}{3} \notin]-\infty ; -1]$ alors $S_1 = \emptyset$.

- Sur $[-1 ; 0]$, $|x+1| + 2\,|2-x| + |x| - 2x + 1 = 0 \iff -4x + 6 = 0$

$\iff x = \frac{3}{2}$

Comme $\frac{3}{2} \notin [-1 ; 0]$ alors $S_2 = \emptyset$.

- Sur $[0 ; 2]$, $|x+1| + 2\,|2-x| + |x| - 2x + 1 = 0 \iff -2x + 6 = 0$

$\iff x = 3$

Comme $3 \notin [0 ; 2]$ alors $S_3 = \emptyset$

- Sur $[2 ; +\infty[$, $|x+1| + 2\,|2-x| + |x| - 2x + 1 = 0 \iff 2x - 2 = 0$

$\iff x = 1$

Comme $1 \notin [2 ; +\infty[$ alors $S_4 = \emptyset$

$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = \emptyset$

Exercice 21

a) L'ensemble de validité de l'inéquation est: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$:

x	$-\infty$ -1	0	$+\infty$
$\|x\|$	$-x$	$-x$	x
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$\|x\| - \frac{1}{\|x+1\|}$	$-x + \frac{1}{x+1}$	$-x - \frac{1}{x+1}$	$x - \frac{1}{x+1}$

- Sur $]-\infty ; -1[$, $|x| - \frac{1}{|x+1|} \leq 2x - 1 \iff -x + \frac{1}{x+1} \leq 2x - 1$

$$\iff \frac{-3x^2-2x+2}{x+1} \leq 0$$

$$\iff \frac{-3(x+\frac{1-\sqrt{7}}{3})\left(x+\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)}{x+1} \leq 0$$

On dresse le tableau de signes de la fraction rationnelle $\frac{-3(x+\frac{1-\sqrt{7}}{3})\left(x+\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)}{x+1}$ et on conclut que l'ensemble des solutions est :

$S_1 = \left[\frac{-1-\sqrt{7}}{3} ; -1\right[$

-Sur $]-1; 0]$, $|x| - \frac{1}{|x+1|} \leq 2x - 1 \iff -x - \frac{1}{x+1} \leq 2x - 1$

$$\iff \frac{-3x^2-2x}{x+1} \leq 0$$

$$\iff \frac{x\ (3x+2)}{x+1} \geq 0$$

On dresse le tableau de signes de la fraction rationnelle $\frac{x\ (3x+2)}{x+1}$ et on conclut que l'ensemble des solutions est : $S_2 =]-1 ; -\frac{2}{3}] \cup \{0\}$

-Sur $[0 ; +\infty[$, $|x| - \frac{1}{|x+1|} \leq 2x - 1 \iff x - \frac{1}{x+1} \leq 2x - 1$

$$\iff \frac{x^2}{x+1} \geq 0$$

On dresse le tableau de signes de la fraction rationnelle $\frac{x^2}{x+1}$ et on conclut que l'ensemble des solutions est : $S_3 = [0 ; +\infty[$

$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [\frac{-1-\sqrt{7}}{3} ; -1[\cup]-1 ; -\frac{2}{3}] \cup [0 ; +\infty[$

b) $|2-x| \leq |x| \iff (2-x)^2 \leq x^2$

$$\iff 4x - 4 \geq 0$$

$$\iff x \geq 1$$

$S_{\mathbb{R}} = [1 ; +\infty[$

c) L'ensemble de validité de l'inéquation est: $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$:

$$\frac{(x-1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{2x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x} < 0 \text{ ou } (x+1)^2 = 0$$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty; 0[$

d) L'ensemble de validité de l'inéquation est: $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$:

$$\frac{|x|-2}{|x+1|} \geq |x-1| \Leftrightarrow |x| \geq |x-1||x+1| + 2$$

$$\Leftrightarrow |x| \geq |x^2-1| + 2$$

On écrira l'expression $|x| \geq |x^2-1| + 2$ sans le symbole de valeur absolue

Ainsi on a :

- Sur $]-\infty ; -1]$, $|x| \geq |x^2-1| + 2 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \leq 0$
- Sur $[-1 ; 0]$, $|x| \geq |x^2-1| + 2 \Leftrightarrow -x^2 + x + 3 \leq 0$
- Sur $[0 ; 1]$, $|x| \geq |x^2-1| + 2 \Leftrightarrow -x^2 - x + 3 \leq 0$
- Sur $[0 ; 1]$, $|x| \geq |x^2-1| + 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \leq 0$

Aucune des quatre inéquations n'a de solution donc $S_{\mathbb{R}}=\emptyset$

Exercice 22

1) $f(x) = 3x^2 + 10x + 8$

2) $f(x) = (3x+4)(x+2)$

3)

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (3x+4)(x+2) = 0$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-2 ; -\frac{4}{3}\right\}$

b) $f(x) = 3x^2 \Leftrightarrow 10\,x + 8 = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{4}{5} \right\}$

c) $f(x) = 8 \Leftrightarrow 3x^2 + 10\,x = 0$

$\Leftrightarrow x\,(3x + 10) = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ 0\,;\, -\frac{10}{3} \right\}$

d) $f(x) \leq (x+2)(1-x) \Leftrightarrow (3x+4)(x+2) \leq (x+2)(1-x)$

$\Leftrightarrow \quad (4x+3)(x+2) \leq 0$

On dresse le tableau de signes du polynôme $(4x+3)(x+2)$ et on conclut que l'ensemble des solutions est : $S_{\mathbb{R}} = [-2\ ;\ -\frac{3}{4}]$

Exercice 23

$f(x) = \sqrt{(2x+1)(x-5)}$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $(2x+1)(x-5) \geq 0$

$D_f = \ ]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}] \cup [5\,;+\infty[$

$g(x) = \sqrt{x\,(1-x)}$

$x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $x\,(1-x) \geq 0$

$D_g = [0\,;1]$

$h(x) = \sqrt{-\frac{2x}{x-4}}$

$x \in D_h \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $\frac{-2x}{x-4} \geq 0$

$D_h = [0\,;4]$

Exercice 24

a) $x^2 + 5x + 9 \leq x\,(x-1) + 12 \quad \Leftrightarrow x^2 + 5x + 9 \leq x^2 - x + 12$

$\Leftrightarrow \quad 6x \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \ ]-\infty\,;\,\frac{1}{2}]$

b) $2 < |x+3| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < |x+3|$ et $|x+3| < 3$

Posons (I_1) : $2 < |x+3|$ et (I_2) : $|x+3| < 3$

(I_1) : $2 < |x+3| \quad \Leftrightarrow \quad x+3 > 2$ ou $x+3 < -2$

$\Leftrightarrow \quad x > -1$ ou $x < -5$

$S_1 = \left]-\infty\,;-5\right[\cup \left]-1\,;+\infty\right[$

(I_2) : $|x+3| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x+3 < 3$

$\Leftrightarrow \quad -6 < x < 0$

$S_2 = \left]-6\,;0\right[$

$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cap S_2 = \left]-6\,;-5\right[\cup \left]-1\,;0\right[$

Exercice 25

Choix des inconnues

Soients :

x le nombre de place à 1500 fcfa.

y le nombre de place à 2000 fcfa.

z le nombre de place à 2500 fcfa

-Le nombre de places à 2000f cfa est le double du nombre de places à 2500f cfa :

$$y = 2z.$$

-Le nombre de places à 1500f cfa est la moitié du nombre total de places.

$$x = \frac{1}{2}(x+y+z).$$

-La recette totale est de 946000f cfa : $1500x + 2000y + 2500z = 946000$

Résolution

On a :

$$\begin{cases} 1500x + 2000y + 2500z = 946000 \\ x = \frac{1}{2}(x+y+z) \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x + 20y + 25z = 9460 \\ x - y - z = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15 \times 3z + 20 \times 2z + 25z = 9460 \\ x = 3z \\ y = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 86 \\ y = 172 \\ x = 258 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 110z = 9460 \\ x = 3z \\ y = 2z \end{cases}$$

Conclusion : Il y a 258 places à 1500f cfa, 172 places à 2000f cfa et 86 places à 2500f cfa.

Exercice 26

Soit x la distance parcourue par le cycliste.

Les temps mis respectivement pour parcourir le premier tiers, le deuxième tiers et le troisième tiers du trajet sont : $\frac{\frac{1}{3}x}{30}$, $\frac{\frac{1}{3}x}{20}$ et $\frac{\frac{1}{3}x}{15}$.

On a : $\frac{\frac{1}{3}x}{30} + \frac{\frac{1}{3}x}{20} + \frac{\frac{1}{3}x}{15} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{30} + \frac{x}{20} + \frac{x}{15} = 27$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9x}{60} = 27$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 180.$$

Conclusion : La distance parcourue par le cycliste est 180 Km.

Exercice 27

Soit v_1 le volume de la première substance et v_2 le volume de la deuxième substance.

Le mélange des deux substances donne dix litres donc $v_1 + v_2 = 10$

Le mélange des deux substances contient 18% de vinaigre se traduit par :

$\frac{20}{100}v_1 + \frac{10}{100}v_2 = \frac{18}{100}(v_1 + v_2)$

On obtient le système $\begin{cases} v_1 + v_2 = 10 \\ 0{,}2v_1 + 0{,}1v_2 = 0{,}18 \times 10 \end{cases}$ à résoudre

La résolution du système donne $v_1 = 8$ et $v_2 = 2$

Le volume de la première substance est huit litres

Exercice 28

Soit x le nombre d'ordinateurs fabriqués.

Contrat A : le salaire mensuel en fonction de x est : $208000 + 16000\,x$.

Contrat B : le salaire mensuel en fonction de x est : $445900 + 5200\,x$.

Pour que le contrat B soit le plus avantageux il faut que :

$445900 + 5200\,x > 208000 + 16000\,x \quad \Leftrightarrow \quad 10800\,x < 237900$

$$\Leftrightarrow \quad x < \frac{2379}{108} < 23$$

Le nombre d'ordinateur fabriqués par mois doit être inférieur à 23 pour que le contrat B soit le plus avantageux.

Exercice 29

1) Soit $A(x)$ l'aire de l'allée en m^2 en fonction de x.

$A(x) = 2x(x + 1) - x^2$

$A(x) = x^2 + 2x$.

2) L'aire de l'allée ne doit pas excéder 35m^2 revient à $A(x) \leq 35$.

$A(x) \leq 35 \Leftrightarrow x^2 + 2x \leq 35$.

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 35 \leq 0$.

3) $x^2 + 2x - 35 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)^2 - 36 \leq 0$. (en utilisant la forme canonique).

$\Leftrightarrow \quad (x + 1)^2 - 6^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad (x + 7)(x - 5) \leq 0$

x	$-\infty$	-7	0	5	$+\infty$
$x + 7$	-	+	+	+	
$x - 5$	-	-	-	+	
$(x + 7)(x - 5)$	+	-	-	+	

Comme $x > 0$ alors $0 < x \leq 5$

Leçon 12 : HOMOTHETIES

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Pour dégager le contexte ; on peut poser les questions suivantes :
  1) De quel évènement s'agit-il dans ce texte ?
  2) Où se déroule cet évènement ?
  3) Quels sont les acteurs de cet évènement ?

  Réponses attendues

  1) Il s'agit d'un travail de maison que le professeur d'art plastique a confié aux élèves.
  2) L'évènement se déroule dans une salle de classe
  3) Les acteurs sont le professeur et ses élèves, puis leur professeur de mathématiques
- Pour dégager la circonstance, on peut poser la question suivante :
  Quel est le problème posé par le texte ?
  Réponse attendue
  Les élèves sont amenés à réaliser un protocole de construction selon un programme de deux semaines.
- Pour dégager la tâche, on peut poser la question suivante :
  Que décident de faire les élèves pour mieux réussir ce travail ?
  Réponse attendue
  Ils proposent à leur professeur de mathématique de les instruire sur les caractéristiques et propriétés des figures géométriques homothétiques.
- Pour faire la synthèse et annoncer les notions mathématiques convoquées par la situation d'apprentissage.
  Pour mieux réussir le travail demandé, nous allons étudier la leçon
  intitulée « HOMOTHETIES » selon le plan suivant :
  - *Connaître la définition d'une homothétie – Construire l'image d'un point par une homothétie en utilisant la définition*
  - *Connaître la propriété fondamentale de l'homothétie*
  - *Connaître la propriété relative aux points invariants par une homothétie*
  - *Connaître les propriétés relatives aux images de figures simples par une homothétie*
  - *Connaître la propriété relative à la multiplication des longueurs et des aires par les homothéties*
  - *Connaître la propriété relative à la conservation du parallélisme des droites par une homothétie*
  - *Connaître la propriété relative à la conservation de l'orthogonalité des droites par une homothétie*
  - *Connaître la propriété relative à la conservation du milieu d'un segment*
  - *Connaître la propriété relative à la conservation des angles orientés*
  - *Caractériser une homothétie*

CORRECTION DES ACTIVITES

Activité 1

1- Réaliser une figure

2- $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{B'C'} = 2\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{C'D'} = 2\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{D'E'} = 2\overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{A'E'} = 2\overrightarrow{AE}$

L'application du plan dans lui-même qui transforme (*F*) en (*F'*) est une homothétie de centre O et de rapport *k.*

Corrigé de l'exercice de fixation

a) *B* est l'image de *A* par l'homothétie de centre *K* et de rapport - *3* ;

b) *V* est l'image de U par l'homothétie de centre C et de rapport *2* ;

c) *C* est l'image de *K* par l'homothétie de centre *J* et de rapport $-\dfrac{1}{2}$;

d) *O* est l'image de *H* par l'homothétie de centre *M* et de rapport *4 ;*

Activité 2

1- $h(\mathrm{M}) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$; $h(\mathrm{N}) = N' \Leftrightarrow \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$

2- On a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} = k(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) = k\overrightarrow{MN}$

Corrigé de l'exercice de fixation

a) $\overrightarrow{EF} = -5\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{GH} = -5\overrightarrow{CD}$; c) $\overrightarrow{HE} = -5\overrightarrow{DA}$

Activité 3

$h(\mathrm{M}) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

1- Si *k = 1,* on a : $h(\mathrm{M}) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$, donc *M' = M.* Ainsi : *h (M) = M.*

2- Si *k* est différent de 1, on a : $h(\mathrm{M}) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM}$, donc : $(1-k)\overrightarrow{OM} = \vec{O}$.
D'où : M = O. Ainsi : *h* (O) = O.

Corrigé de l'exercice de fixation

Si *k* est différent de 1, on a : $h(\mathrm{M}) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OM}$, donc : $(1-k)\overrightarrow{OM} = \vec{O}$.
D'où : *M = O.*

Activité 4

1- a) D'après la propriété fondamentale de l'homothétie, on a : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Or les points *A* et *B* sont distincts, donc les points *A'* et *B'* le sont aussi.

b) Les points *A, B* et *M* sont alignés, donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, d'où il existe un nombre réel α tel que : $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$

c) D'après la propriété fondamentale de l'homothétie, on a : $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$.
Or $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$, donc : $\overrightarrow{A'M'} = k(\alpha\overrightarrow{AB}) = k\alpha\left(\dfrac{1}{k}\overrightarrow{A'B'}\right) = \alpha\overrightarrow{A'B'}$

d) On a : $M \in (D) \Leftrightarrow h(M) \in h(D)$ d'après 1) b) et c), donc : $h(D) \subset h(A'B')$.

2- a) Les points *A', B'* et *M'* sont alignés, donc les $\overrightarrow{A'M'}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires, d'où il existe un nombre réel β tel que : $\overrightarrow{A'M'} = \beta\overrightarrow{A'B'}$.

b) D'après la propriété fondamentale de l'homothétie, on a : $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$, donc :
$\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{A'M'}$

c) On a : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{A'M'} = \frac{1}{k}\left(\beta\overrightarrow{A'B'}\right) = \frac{1}{k}\left[\beta\left(k\overrightarrow{AB}\right)\right] = \beta\overrightarrow{AB}$

d) $h(\mathrm{M}) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

e) On a : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, donc : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$ .D'où *M'* admet un antécédent par *h* dans la droite *(AB)*

3- Soit *(D')* l'image de la droite *(D)* par l'homothétie *h*. On a : (*D) = (AB)* et *(D') = (A'B')*.
D'après la propriété fondamentale de l'homothétie, on a : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, donc les droites *(D)* et (*D'*) sont parallèles.

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

- Les images respectives des droites *(EF), (EG)* et (*FG*) sont *(AB), (AC)* et *(BC)*.
- Les paires de droites parallèles sont : *(AB)* et (*EF*), (AC) et *(EG), (BC)* et *(FG)*.

<u>Activité 5</u>

1- a) D'après la propriété fondamentale de l'homothétie, on a : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, comme les points A et B sont distincts, donc les points A' et B' sont aussi distincts.
b) On a : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, donc : $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = \left\|k\overrightarrow{AB}\right\|$, d'où : $A'B' = |k|\,AB$

2- a) Le point M appartient au segment $[AB]$ s'il existe un nombre *t* de l'intervalle $[0;1]$ tel que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$
b) On sait que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, donc : $\frac{1}{k}\overrightarrow{A'M'} = t(\frac{1}{k}\overrightarrow{A'B'})$ (d'après la propriété fondamentale de l'homothétie). D'où : $\overrightarrow{A'M'} = t\overrightarrow{A'B'}$. Ainsi le point *M'* appartient au segment $[AB]$.

3- a) Le point *Q* appartient au segment $[AB]$ s'il existe un nombre *t* de l'intervalle $[0;1]$ tel que : $\overrightarrow{A'Q} = t\overrightarrow{A'B'}$. On obtient : $k\overrightarrow{AN} = t(k\overrightarrow{AB})$, soit $\overrightarrow{AN} = t\overrightarrow{AB}$, donc il existe un point N appartenant à $[AB]$.
b) De ce qui précède, l'image de $[AB]$ par *h* est le segment $[A'B']$.

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

a) Les segments $[EF]$ et $[EG]$ ont pour images respectives par cette homothétie $[AB]$ et $[AC]$

b) AB = 16 cm et *AC = 12 cm*

<u>Activité 6</u>

1- Réaliser la figure demandée
2- a) Placer le point *M*
b) M est un point de la demi- droite $[AB)$ s'il existe un nombre réel *t* positif tel que : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Rightarrow \frac{1}{k}\overrightarrow{A'M'} = t\left(\frac{1}{k}\overrightarrow{A'B'}\right)$. Donc : $\overrightarrow{A'M'} = t\overrightarrow{A'B'}$.

D'où le point *M'* appartient à la demi-droite $[A'B')$.

3- a) *N'* est un point de la demi- droite $[A'B')$ s'il existe un nombre réel *t* positif tel que : $\overrightarrow{A'N'} = t\overrightarrow{A'B'}$

b) On a : $\overrightarrow{A'N'} = t\overrightarrow{A'B'} \Rightarrow k\overrightarrow{AN} = t\left(k\overrightarrow{AB}\right)$ (d' après la propriété fondamentale de l'homothétie). Donc : $\overrightarrow{AN} = t\overrightarrow{AB}$.

D'où il existe un point N appartient à la demi-droite $[AB)$ tel que *h (N) = N'*.

c) L'image de la demi-droite $[AB)$ par une homothétie *h* est la demi-droite $[A'B')$.

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

Les images respectives des demi-droites $[EF)$ et $[FG)$ par cette homothétie sont les demi-droites $[AB)$ et $[BC)$.

<u>Activité 7</u>

1- a) Le point *M* appartient au cercle *(C)* signifie que *IM = r*.

On a : $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{I'M'}$ (d'après la propriété fondamentale de l'homothétie). Donc :

$IM = \frac{1}{|k|}I'M'$. D'où : $I'M' = |k| \times IM = |k|r$

b) On a : $I'M' = |k|r$, donc le point *M'* appartient au cercle *(C')* de centre *I'* et de rayon $|k|r$.

2- a) Le point *N'* appartient au cercle *(C')* signifie que $I'N' = |k|r$

On a : $\overrightarrow{I'N'} = k\overrightarrow{IN}$, donc : *h (N) = N'*

b) On a : $\overrightarrow{I'N'} = k\overrightarrow{IN} \Rightarrow I'N' = |k|\,IN$, donc : $|k|\,IN = |k|r$. D'où : $IN = r$

Ainsi le point *N* appartient au cercle *(C)*.

3- L'image du cercle (C) par *h* est le cercle *(C')*.

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

L'image du cercle (C) par *h* est le cercle de centre E et de rayon 6 cm.

<u>Activité 8</u>

1- D'après la propriété fondamentale de l'homothétie, on a : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$

Donc : $A'B' = |k| \times AB$; $A'C' = |k| \times AC$; $B'C' = |k| \times BC$

2- On a : $A' = \frac{1}{2} \times A'B' \times A'C' = \frac{1}{2} \times |k| \times AB \times |k| \times AC = k^2\left(\frac{1}{2} \times AB \times AC\right) = k^2 \times A$

<u>Corrigé de l'exercice de fixation</u>

a) Faux ; b) Faux ; c) Vrai

Activité 9

a) L'image d'une droite (D) par une homothétie est une droite (D') qui est parallèle à *(D)*. Donc : $(D_1) // (D'_1)$ et $(D_2) // (D'_2)$

b) On a : $(D_1) // (D_2)$, or $(D_1) // (D'_1)$ et $(D_2) // (D'_2)$, donc : $(D'_1) // (D'_2)$.

Corrigé de l'exercice de fixation

ABCD est un rectangle, donc : (AB) // (CD). On a : *h ((AB)) = (RS)* et *h (CD) = (TQ)* et comme toute homothétie conserve le parallélisme de droites, donc : *(RS) // (TQ)*.

Activité 10

a) L'image d'une droite (D) par une homothétie est une droite *(D')* qui est parallèle à *(D)*. Donc : $(D_1) // (D'_1)$ et $(D_2) // (D'_2)$

b) $\bullet (D_1)//(D_2)$ et $(D_1)//(D'_1) \Rightarrow (D_2)//(D'_1)$

$\bullet (D_1)//(D_2)$ et $(D_2)//(D'_2) \Rightarrow (D_1)//(D'_2)$

Donc : $(D'_1)//(D'_2)$

Corrigé de l'exercice de fixation

1- *ABC* est un triangle inscrit dans un cercle de diamètre $[AB]$, donc le triangle *ABC* est rectangle en *C*. D'où : $(AC) \perp (BC)$.

2- On a : *h (AC) = (KI)* et *h (BC) = (LI)*. Comme toute homothétie conserve l'orthogonalité, donc : $(KI) \perp (LI)$

Activité 11

Le point *I* est le milieu du segment $[AB]$, donc $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

On a : $\overrightarrow{I'A'} + \overrightarrow{I'B'} = k(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = \vec{0}$, donc le point *I'* est le milieu du segment $[A'B']$.

Corrigé de l'exercice de fixation

B est le milieu du segment $[BQ]$ car toute homothétie conserve le milieu d'un segment.

Activité 12

1- On sait que si kk' est strictement positif, $(k\vec{u}; k'\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$. Donc si *k = k'*, on a également $(k\vec{u}; k\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v})$. D'où : $(k\overrightarrow{AB}; k\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

2- D'après la propriété fondamentale de l'homothétie, $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$, donc :
$(\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}) = (k\overrightarrow{AB}; k\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Toute homothétie conserve les angles orientés.

Corrigé de l'exercice de fixation

$(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG})=\left(\overrightarrow{EU};\overrightarrow{EV}\right)$; $(\overrightarrow{GF};\overrightarrow{GE})=\left(\overrightarrow{UV};\overrightarrow{VE}\right)$; $(\overrightarrow{FE};\overrightarrow{FG})=\left(\overrightarrow{UE};\overrightarrow{UV}\right)$

Activité 13

1- Les points *O, B* et *C* sont alignés et deux à deux distincts, donc les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires (sans être égaux), d'où il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OB}$

2- $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OB}$, donc il existe une unique homothétie de centre *O* qui transforme B en *C*.

Corrigé de l'exercice de fixation

Le point *R* est l'image de *F* par l'homothétie de centre *E* et de rapport $\frac{5}{3}$.

Activité 14

1- $h(A)=B \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}=k\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}\right)$$

Donc : $\overrightarrow{BO}=\frac{k}{1-k}\overrightarrow{AB}$

D'où il existe un unique point *O* tel que : $\overrightarrow{BO}=\frac{k}{1-k}\overrightarrow{AB}$

2- Il existe une unique homothétie de rapport *k* non nul et différent de 1 qui transforme *A* en *B*.

Corrigé de l'exercice de fixation

$h(\mathrm{R})=S \Leftrightarrow \overrightarrow{OS}=3\overrightarrow{OR}$ et $\overrightarrow{SO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{SR}$

Réaliser une figure pour placer le point *O*.

Activité 15

1- D'après la propriété fondamentale de l'homothétie, on a : $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$, donc les droites *(AB)* et *(A'B')* sont parallèles.
Les points *A, B, A'* et *B*' sont tels que : $A\neq B$ et $A'\neq B'$, donc l'homothétie n'est pas l'identité du plan, il résulte que $k\neq 1$, donc $\overrightarrow{A'B'}\neq\overrightarrow{AB}$

2- a) Dans ce cas le quadrilatère *ABB'A'* est un trapèze et les droites *(AA')* et *(BB')* sont sécantes en un point O.
b) Les points *O, A* et *A*'sont deux à deux distincts et alignés, donc il existe une unique homothétie de centre *O* de rapport non nul et différent de 1 qui transforme *A* en *A'*.
c) $h(\mathrm{A})=A' \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{OB'}=k\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)$.

Donc : $\overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB}$. D'où : *h (B) = B'*

3- a) On a : $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$. Les points *A, B, A'* et *B*'sont alignés et $\overrightarrow{A'B'}\neq\overrightarrow{AB}$ donc :
$\overline{A'B'}=k\overline{AB}$ et $k=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$
L'homothétie est déterminée par son rapport, un point et son image.

b) *h (A) = A'* et $k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

Donc : $\overline{A'B'} = k\overline{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Par l'égalité de Chasles $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$.

Donc : *h (B) = B'*

Il existe une homothétie qui transforme A en A' et B en B'.

Corrigé de l'exercice de fixation

1- *h (A) = C* et *h (B) = D*. Réaliser une figure, puis tracer les droites *(AC)* et *(BD*) qui se coupent en O, centre de l'homothétie.

2- $k = \frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = 2$

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1 P 206

1- Faux ; 2- Vrai ; 3- Faux

Exercice 2 P 206

a) *B* est l'image de *A* par l'homothétie de centre *K* et de rapport *– 3*.
b) V est l'image de *U* par l'homothétie de centre *C* et de rapport *2*.
c) *C* est l'image de *K* par l'homothétie de centre *J* et de rapport *– 0,5*.
d) *A* est l'image de *G* par l'homothétie de centre *M* et de rapport *3*.
e) *K* est l'image de *G* par l'homothétie de centre *D* et de rapport *0,75*.
f) *O* est l'image de *H* par l'homothétie de centre *M* et de rapport *4*.

Exercice 3 P 206

a) $\overrightarrow{KJ} = -2\overrightarrow{KR}$; b) $\overrightarrow{GF} = 3\overrightarrow{GE}$; c) $\overrightarrow{OQ} = 6\overrightarrow{OP}$

Exercice 4 P 206

1- $\overrightarrow{AC} = -5\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$, donc : *h (C) = B*

2- $\overrightarrow{AC} = -5\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -5\overrightarrow{AB}$, donc : $\overrightarrow{BC} = 6\overrightarrow{BA}$. D'où : h (A) = C

Exercice 5 P 206

On construit les points *A'* et *B'* tels que : $\overrightarrow{CA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ en utilisant la propriété de Thalès dans le triangle.

Exercice 6 P 206

Placer le point *A'* tel que : $\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

Exercice 7 P 206

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, donc : *h (C) = E* où *h* est l'homothétie de centre *A* et de rapport $\frac{3}{2}$.

<u>Exercice 8 P 206</u>

L'image de la droite *(AB)* par *h* est la droite *(A'B'*), donc : *(AB)// (A'B')* car l'image d'une droite *(D)* par une homothétie est une droite *(D').*

<u>Exercice 9 P 206</u>

1- $k = \frac{5}{2}$; 2- $k = \frac{2}{3}$; 3- $k = \frac{3}{5}$

<u>Exercice 10 P 206</u>

$k = \frac{2}{5}$

<u>Exercice 11 P 207</u>

Construire les images *A'* et *B'* de deux points *A* et *B* de la droite *(D),* puis tracer la droite *(A'B').*

<u>Exercice 12 P 207</u>

Réaliser une figure

<u>Exercice 13 P 207</u>

Réaliser une figure

<u>Exercice 14 P 207</u>

1- Faux ; 2- Faux ; 3- Vrai

<u>Exercice 15 P 207</u>

Construire le point *K* tel que : $\overrightarrow{PK'} = 3\overrightarrow{MK}$ (d'après la propriété fondamentale de l'homothétie).

<u>Exercice 16 P 207</u>

(AC) // (BC') et $C' \in (IC)$. On trace la parallèle à la droite *(AC)* passant par *B*, elle coupe la droite *(IC)* en *C'*.

<u>Exercice 17 P 207</u>

(AP) // (A'P') et $\mathrm{P'} \in (OP)$.On trace la parallèle à la droite *(AP)* passant par *A',* elle coupe la droite *(OP)* en *P'*.

<u>Exercice 18 P 207</u>

(A'N') // (AN) et $\mathrm{N'} \in (ON)$.On trace la parallèle à la droite *(AN)* passant par *A'*, elle coupe la droite *(ON*) en *N'*.

Exercice 19 P 207

a) *(AB) // (A'B')* et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, donc il existe une seule homothétie h telle que :

h (A) = A' et *h (B) = B'*. D'où les droites (AA') et (BB') sont sécantes en un point I.

De plus *h (C) = (C'),* donc *h (O) = O'*. Il résulte que les droites *(AA'), (BB')* et (*OO'*) sont concourantes en I

b) $h([AB]) = [A'B']$. On a : h (A) = B' et h (B) = A'. on obtient toujours :

(AB) // (A'B') et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. De plus *h (C) = (C'),* donc *h (O) = O'*
On a toujours le même résultat que précédemment.

Exercice 20 P 207

1- a) L'image de la droite (AB) par *h* est la parallèle à *(AB)* qui passe par *D = h (B).*
Donc : *h (AB) = (AD).*
b) (AB)// (DC) et $h(A) \in (AI)$. Or les points *A, I* et *K* sont alignés et *(AB) // DK).*
Donc : *h (A) = K*

2- a) *h (BC) = (AD)*

b) *h (BC) = h (BJ) = (AD)*, (BC) // (AD) et $J \in (AI)$, donc : *h (J) = A*

3- On a : *h (I) = I, h (A) = K* et *h (J)= A*, donc : $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{IJ}$ (d'après la propriété fondamentale de l'homothétie)

Donc : $IJ \times IK = \frac{1}{|k|} \times AI \times |k| \times AI = AI^2$

Exercice 21 P 207

1- $\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$, donc : $k = \frac{3}{2}$
2- Construire l'image A'B'C' du triangle ABC par *h*
3- *A'B'= A'C'= B'C'= 7,5 cm*

Exercice 22 P 208

1- Réaliser une figure
2- L'image d'un segment par une homothétie est un segment. Donc :
$h([MN]) = [M'N']$
3- L'image d'une droite (D) par une homothétie est une droite *(D')* qui est parallèle à *(D).* Donc : *(MN) // (M'N').*
4- L'image d'une demi-droite par une homothétie est une demi-droite. Donc :
$h([MN)) = [M'N')$

Exercice 23 P 208

1- a) Soit *h (I) = M*, on a : *h (J) = Q*, donc : *(MQ) // (IJ)* et $M \in (IH)$. D'où : *M = P.*
Ainsi *h (I) = P*
b) *h (I) = P* et *h (J) = Q*, donc : *h (IJ) = (PQ)*

2- a) Soit *h (O) = M*, on a : *h (J) = Q*, donc : *(MQ) // (OJ*) et $M \in (OH)$.

D'où : *M = A* et *h (O) = A*.

On a : $h(O) = A \Leftrightarrow \overrightarrow{HA} = k\overrightarrow{HO}$. Or le point *O* est le milieu du segment $[AH]$ puis que le quadrilatère obtenu est un rectangle, donc : k = *2*

b) On a : *h (I) = P* et *h (J) = Q*, donc les points *I* et *J* sont les milieux des segments $[HP]$ et $[HQ]$.

Exercice 24 P 208

1- L'image d'une droite (D) par une homothétie est une droite (D') qui est parallèle à (D). Comme *h (BD) = (B'D')*, donc : *(BD) // (B'D')*

2- Toute homothétie conserve le milieu d'un segment, donc i est le milieu du segment $[BD]$. On a : $h\,([BD]) = [B'D']$. Comme $K \in [B'D']$ et $K \in (AI)$, on a : *h (I) = K*, d'où *K* est le milieu de $[B'D']$.

3- On a : $\overrightarrow{B'F} = \overrightarrow{ED'}$, donc : $\overrightarrow{B'F} = \overrightarrow{ED'} \Leftrightarrow \overrightarrow{B'K} + \overrightarrow{KF} = \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{KD'}$.Comme *K* est le milieu de $[B'D']$, on a : $\overrightarrow{B'K} = \overrightarrow{KD'}$. Il résulte que $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{EK}$ et *K* est le milieu de $[EF]$

Exercice 25 P 208

1- a) L'image de (AB) par *h* passe par le point *C* et parallèle à *(AB),* donc : *h (AB) = (DC)*

b) $k = \frac{1}{3}$

2- a) L'image de la droite (AD) passe par C et parallèle à (AD). Comme *(AD) // (d)* et $C \in (d)$, donc : *h (AD) = (d)*

b) *h (A) = C ; h (AD = (d)* et $I \in (d)$, (d) // (AD) et $I \in (OD)$, donc : *h (D) = I*

3- a) De même que 2- b), on justifie que *h (C) = J*

b) *h (D) = I et h (C)= J*. D'après la propriété fondamentale de l'homothétie, on a :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$$

Exercice 26 P 208

Se référer au corrigé de l'exercice 23 (Exercice répété)

Exercice 27 P 208

De : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$; $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$, on obtient les égalités vectorielles suivantes : $\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$

Donc il existe une homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ qui transforme ABC en $A'B'C'$.

Exercice 28 P 208

1- $h(O) = E$; $h(O') = F$

2- Le milieu de $[AB]$ a pour image B par h.

3- Les points O', O et le milieu de $[AB]$ sont alignés. Comme l'homothétie conserve l'alignement des points, donc les points E, B et F sont alignés.

Exercice 29 P 209

Réaliser la figure demandée.

Leçon 13 : ETUDE DE FONCTIONS ELEMENTAIRES

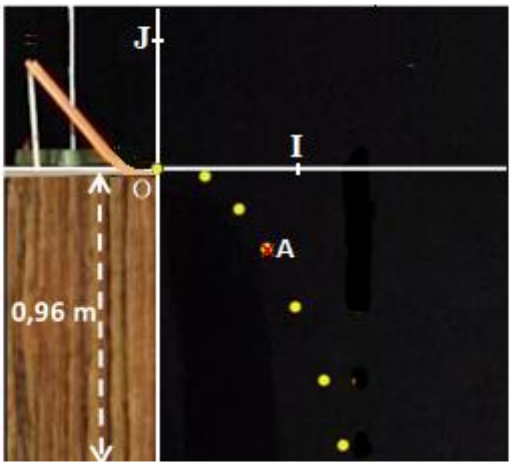
☞ Exercices profondément modifiés :

Exercice 41

Pour gérer rationnellement l'eau courante, une famille remplit quotidiennement une cuve cubique d'arête 0,69 m et utilise entièrement le contenu pour ses besoins journalier.
Le père de famille qui aurait voulu que le coût hors taxes de leur consommation trimestrielle soit 6 061,1 FCFA comme celui du voisin, ne cesse de se plaindre. Embêté, son fils s'est informé sur la facturation de la compagnie de distribution d'eau :
« Pour un client ayant souscrit pour un usage domestique, le tarif toute taxes exclues est le suivant :
• Jusqu'à 9 m^3, le client paie un forfait de 2 115 FCFA ;
• les cubages consommés après 9 m^3 jusqu'au $18^{ème}$ m^3, sont facturés à 235 FCFA le m^3 ;
• les cubages consommés au-delà de 18 m^3, sont facturés à 367,3 FCFA le m^3. »
Pour éclairer son père, il a besoin qu'on l'aide à contrôler le coût de leur facture et à estimer la consommation de leur voisin.
1) Estime par le calcul, le montant hors taxes d'une facture trimestrielle d'eau que paie cette famille.
2) Estime graphiquement le nombre de m^3 d'eau consommée par le voisin de cette famille. Prendre en abscisse 0,5 cm pour 1 m^3 et en ordonnées 1 cm pour 1000 FCFA.

Exercice 42

Dans une classe de seconde scientifique, la chronophotographie ci-dessous a été réalisée lors d'une expérience de physique. Il s'agit de l'étude du mouvement d'une bille qui lâchée dans une gouttière, en ressort avec une vitesse initiale non nul pour décrire une trajectoire plane parabolique de sommet O, point où la bille quitte la gouttière.



Le point O est situé à 0,96 m du sol. L'image comporte le repère orthonormé (O ; I ; J), d'axes horizontal et vertical, l'unité étant le mètre. L'examen de l'image a permis aux élèves de se rendre compte que la bille est passée par le point A(0,9 ;-0,54) ; l'axe (OJ) délimite le pied du support de la gouttière.

Après la classe, ils souhaitent qu'on les aide à utiliser leurs connaissances en mathématiques pour situer le point de chute de la bille.
Détermine la distance entre le point de chute de la bille et le pied du support de la gouttière.

I- Situation d'apprentissage

Proposition de présentation de la situation d'apprentissage :

Question d'appropriation de la situation :

	Questionnement	Réponses
CONTEXTE	A quel spectacle a assisté un élève à l'espace des jeux ?	A l'espace des jeux de la ville, un élève a assisté à un spectacle de lancer de balles.
CIRCONSTANCE	Indique les informations que les élèves de sa classe ont reçues.	• le souffleur est à 1,10 m du sol ; • la chronophotographie de la balle ; • $f(t)$=-4,9t^2+5,6t où $f(t)$ est l'altitude en mètre du ballon, t le temps écoulé en seconde.
	Informés, quel(s) sentiment(s) animent les élèves de la classe ?	Les élèves sont confiants (*les élèves se disent avoir toutes les informations pour décrire l'évolution du ballon*).
TACHE(S)	Animé par ce sentiment, que désirent-ils connaître ?	Connaitre la hauteur maximale atteinte par le ballon.

Proposition de la synthèse :

De retour de l'espace de jeu, avec la chronophotographie de la balle observée et les informations reçues, les élèves sont confiants qu'ils pourront déterminer la hauteur maximale atteinte par le ballon. Pour cexécuter efficacement cette taaache, il est necessaire d'étudier des fonctions usuelles et élémentaires.
Elles seront étudier dans la leçon titrée : « **ETUDE DE FONCTIONS ELEMENTAIRES** ».

II- Activités

1- Fonctions affines par intervalles

Activité 1 : ***Identifier une fonction affine par intervalle à partir de son expression ;***

Etudier le sens de variations des fonctions élémentaires ;
Représenter une fonction affine par intervalle.

1) a) Pour $x < 4$, c'est-à-dire $x \in]-\infty\ ;4[$, la consommation y est une fonction affine.

Pour $4 \leq x \leq 9$, c'est-à-dire $x \in [4\ ;9]$, la consommation y est une fonction affine.

Pour $x > 9$, c'est-à-dire $x \in]9\ ;+\infty[$, la consommation y est une fonction affine.

b) La température extérieure est de 6°C correspond à $x = 6$; or $6 \in [4\ ;9]$, donc c'est l'expression $y = 0{,}5x + 0{,}5$ qui sera utilisée :

$y = 0{,}5 \times \mathbf{6} + 0{,}5$, d'où $y = 3{,}5$.

Ainsi, pour une température ambiante de 6°C, la consommation de gaz est 3,5 kg.

2) a) f est définie sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;4[$, $[4\ ;9]$ et $]9\ ;+\infty[$;

donc $D_f =]-\infty\ ;4[\cup [4\ ;9] \cup]9\ ;+\infty[$.

b) $-3 \in]-\infty\ ;4[$, donc $f(-3) = -0{,}25 \times (-3) + 3{,}5$ c'est-à-dire $f(-3) = 4{,}25$.

$0 \in]-\infty\ ;4[$, donc $f(0) = -0{,}25 \times 0 + 3{,}5$ c'est-à-dire $f(0) = 3{,}5$.

$4 \in [4\ ;9]$, donc $f(4) = 0{,}5 \times 4 + 0{,}5$ c'est-à-dire $f(4) = 2{,}5$.

$9 \in [4\ ;9]$, donc $f(9) = 0{,}5 \times 9 + 0{,}5$ c'est-à-dire $f(9) = 5$.

$10 \in]9\ ;+\infty[$, donc $f(10) = 5$.

$13 \in]9\ ;+\infty[$, donc $f(13) = 5$.

3) a) f est **strictement décroissante** sur l'intervalle $]-\infty;4[$.

f est **strictement croissante** sur l'intervalle $[4;9]$.

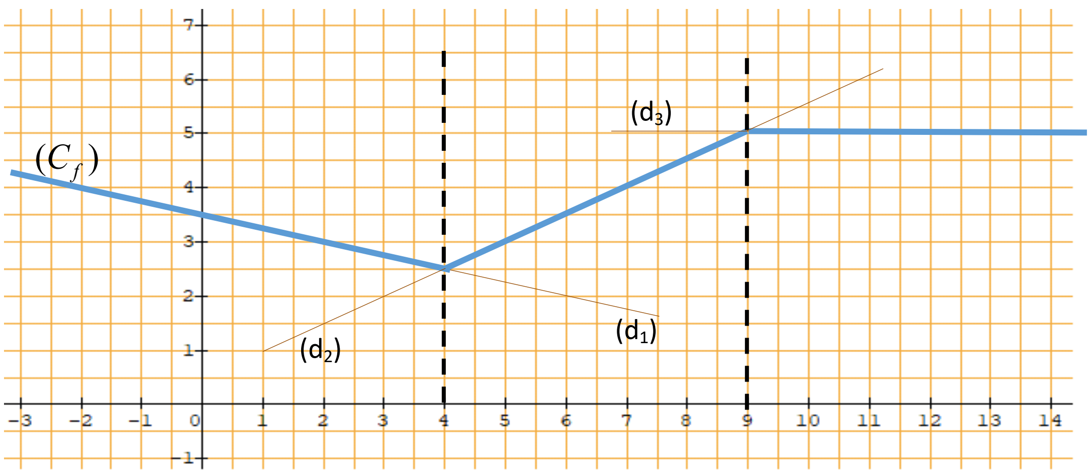
f est **constante** sur l'intervalle $]9;+\infty[$.

b)

x	$-\infty$		4		9		$+\infty$
Variations de $f(x)$		↘	2,5	↗	5	→	

4) (C_f) est obtenue à partir des droites « (d_1) : $y = -0{,}25x + 3{,}5$ », « (d_2) : $y = 0{,}5x + 0{,}5$ » et « (d_3) : $y = 5$ » en conservant leurs parties respectivement relatives aux intervalles $]-\infty\ ;4[$, $[4\ ;9]$ et $]9\ ;+\infty[$.

(C_f) est en bleu sur le graphique.

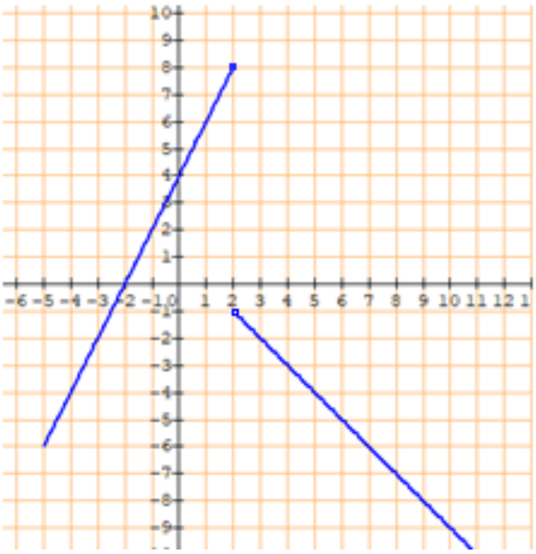


J'évalue mes acquis :

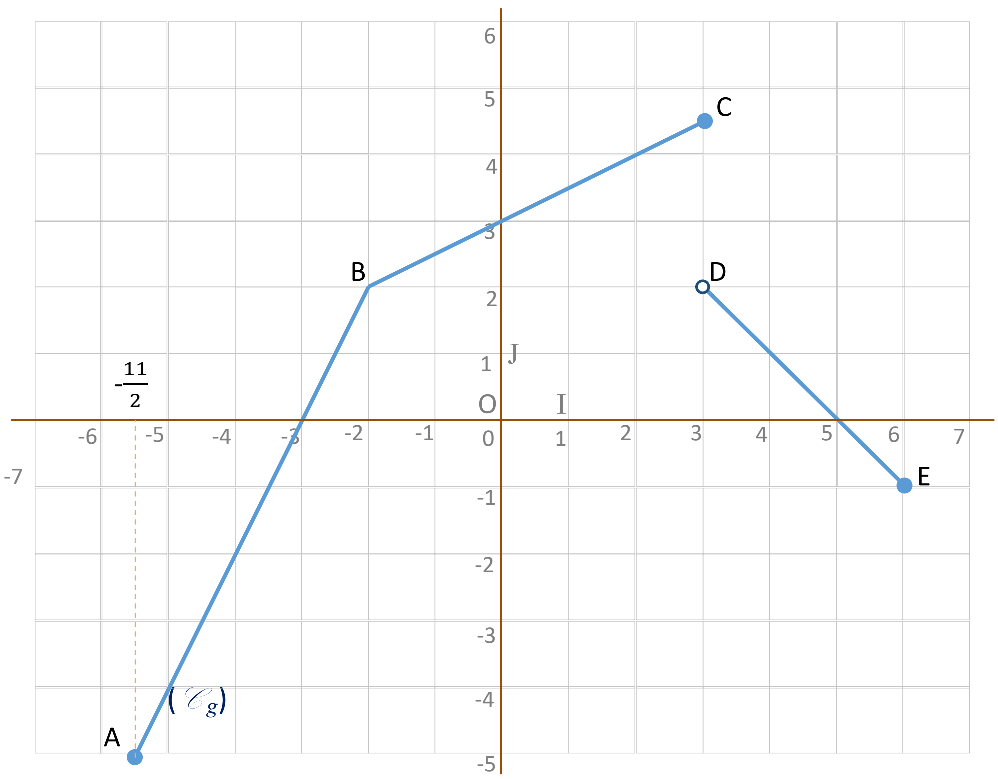
1)-b).

2) f est strictement croissante sur [-5 ;2] et f est strictement décroissante sur]2 ;+∞[.

3)



<u>Activité 2 :</u> ***Identifier une fonction affine par intervalles à partir de son expression***



1)

Segments constituant la courbe ($\mathscr{C}_g$)	[AB]	[BC]	[DE] privé de D
Intervalles des abscisses correspondant	$[-\frac{11}{2};-2]$	[-2;3]	]3;6]

2) a), b), c)

	Droite (AB)	Droite (BC)	Droite (DE)
Ordonnée à l'origine	6	3	5
Coefficient directeur	2	$\frac{1}{2}$	-1
Equation	y=2x+6	$y=\frac{1}{2}x+3$	y=-x+5
Expression de g(x)	g(x)=2x+6	$g(x)=\frac{1}{2}x+3$	g(x)=-x+5

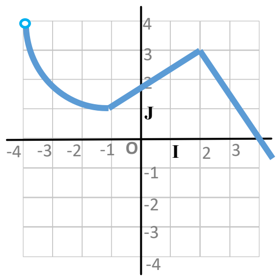
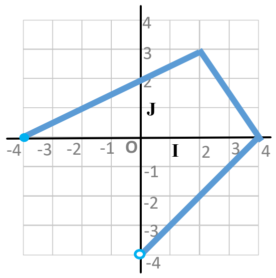
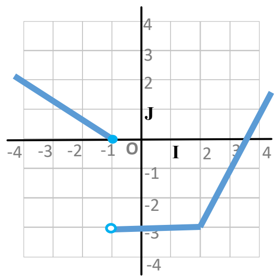
3) $\begin{cases} Pour\ \ x \in \left[-\frac{11}{2};-2\right],\ \ g(x) = 2x+6\,; \\ Pour\ \ x \in [-2;3],\ \ \ g(x) = \frac{1}{2}x+3\ ; \\ Pour\ \ x \in]3;6],\ \ \ \ g(x) = -x+5\,. \end{cases}$

g est une fonction affine par intervalles.

J'évalue mes acquis : Réponse : C

<u>Exercice</u>

Indique le graphique sur lequel est représentée une fonction affine par intervalles.

		
A	*B*	*C*

2- <u>Fonction valeur absolue</u>

<u>Activité 3</u>:

Donner le sens de variations, dresser le tableau de variations et représenter la fonction valeur absolue.

1) a) D_g=IR.

b) $g(x)=|x|$.

2) Pour $x\in]-\infty;0]$, g(x)=x.

Pour $x\in[0;+\infty[$, g(x)=-x.

Ainsi, la fonction valeur absolue est une fonction affine par intervalles.

3) a) g est croissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$ (à justifier).

b)

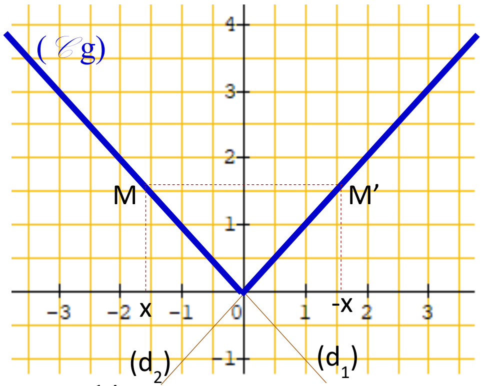
x	$-\infty$ 0 $+\infty$
g	↘ 0 ↗

4) Pour tout $x\in$IR, $|x|\geq 0$, c'est-à-dire $g(x)\geq 0$; donc g admet le nombre 0 pour minimum.

g(0)=0, donc ce minimum est atteint en 0.

5) ($\mathscr{C}$g) est obtenue à partir des droites « (d$_1$) : $y=-x$ » et « (d$_2$) : $y=x$ » en conservant leurs parties respectivement relatives aux intervalles]-∞ ;0] et [0 ;+∞[.

($\mathscr{C}$g) est en bleu sur le graphique.



6) En plus de la vérification graphique, on a :

Pour tout point M(x ;f(x)) appartenant à ($\mathscr{C}$g) son image par $S_{(OJ)}$ est M'(-x ;f(x)), c'est-à-dire M'(-x ;f(-x)) car |-x|=|x|.

M'(-x ;f(-x)) appartient à ($\mathscr{C}$g).

Ainsi, chaque point de la courbe ($\mathscr{C}$g) a pour image par $S_{(OJ)}$, un point de ($\mathscr{C}$g) ; d'où l'axe des ordonnées (OJ) est un axe de symétrie de la courbe ($\mathscr{C}$g).

J'évalue mes acquis : Réponses : a) ; b) ; d).

<u>Activité 4</u>: ***Etudier le sens de variations, dresser le tableau de variations et représenter la fonction*** $x \longmapsto |ax+b|$ **.**

1) a) D_h =IR.

b)

x	-∞ +∞	0 2
Signe de $-2x+4$	+	-
Expression de $|-2x+4|$ sans le symbole "valeur absolue"	$-2x+4$	$2x-4$

c) Pour x∈]-∞;2], h(x)=-2x+4.

Pour x∈[2;+∞[, h(x)=2x-4.

Ainsi, la fonction h est une fonction affine par intervalles.

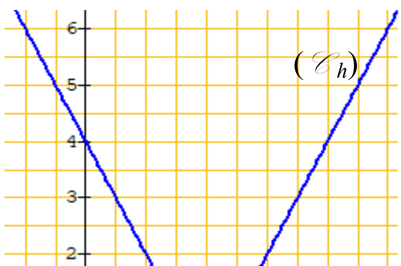
2) a) h est décroissante sur l'intervalle]-∞;2] et croissante sur [2;+∞[(*à justifier avec les coefficients directeurs*).

b)

x	-∞ +∞	2
h(x)	↘	0 ↗

3) ($\mathscr{C}_h$) est obtenue à partir des droites « (d$_1$) : $y=-2x+4$ » et « (d$_2$) : $y=2x-4$ » en conservant leurs parties respectivement relatives aux intervalles]-∞ ;2] et [2 ;+∞[.

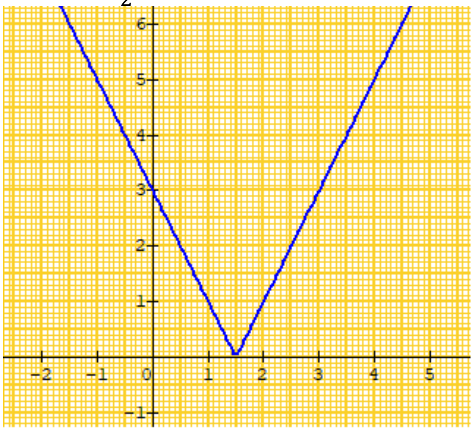
($\mathscr{C}_h$) est en bleu sur le graphique.



J’évalue mes acquis :

Pour $x \in]-\infty;\frac{3}{2}]$, g(x)=2x-3.

Pour $x \in [\frac{3}{2};+\infty[$, g(x)=-2x+3.



3- <u>Fonction partie entière</u>

<u>Activité 5</u> : ***Identifier la partie entière d’un nombre réel***
Calculer la partie entière d’un nombre réel

a)

Calcul et nombre affiché à la calculatrice	$\frac{4,5}{0,6} = 7,5$	$\frac{25}{1,6} = 15,625$	$\frac{20}{0,5} = 40$
Encadrement par deux entiers consécutifs	**7**≤ 7,5 <**8**	**15**≤ 15,625 <**16**	**40**≤ 40 <**41**
Nombre de bouteilles identiques entièrement pleines	**7**	**15**	**40**

b) Le nombre de bouteilles entièrement pleines est le **<u>plus grand</u>** nombre entier qui est **<u>plus petit</u>** ou égal au nombre affiché.

2)

Nombre	*-3,45*	-52,9	-6
Encadrement par deux entiers consécutifs	**-4**≤ -3,45 <**-3**	**-33**≤ -32,6 <**-32**	**-6**≤ -6 <**-5**
Le plus grand entier qui est plus petit ou égal au nombre donné est	-4	-33	-6

J’évalue mes acquis :

1) -9≤ -8,29<-8 donc E(-8,29)=9.
-3≤ -2,973<-2 donc E(-2,973)=-3.
89≤ 89,99<90 donc E(89,99)=89.

179≤ 179<180 donc E(179)=179.

2) a) [-2 ;-1[; b) [0 ;1[; b) [7 ;6[.

<u>Activité 6</u> : ***Représenter les fonctions partie entière***

Donner le sens de variations de la fonction partie entière sur un intervalle.

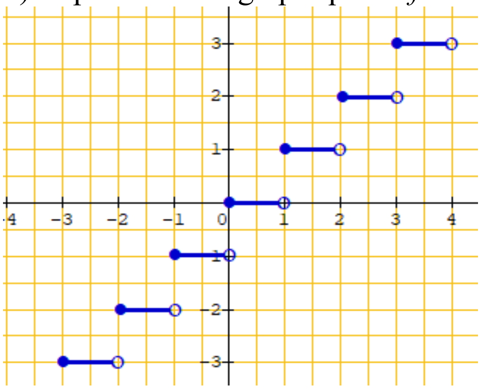
1) a) D_f =IR.

b)

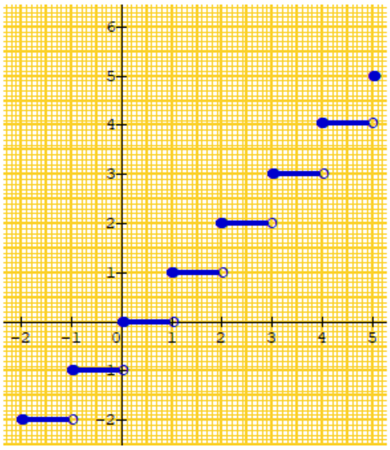
x appartient à l'intervalle	[-3;-2[	[-2;-1[	[-1;0[	[0;1[	[1;2[	[2;3[	[3;4[
E(x) est égal à	-3	-2	-1	0	1	2	3

2) La fonction partie entière (f) est constante sur chacun des intervalles [-3;-2[; [-2;-1[; [-1;0[; [0;1[; [1;2[; [2;3[et [3;4[.

3) Représentation graphique de f sur l'intervalle [-3;4[:



J'évalue mes acquis :



4- <u>Etude et représentation des fonctions élémentaires</u> :

4-1 <u>La fonction carré</u>

<u>Activité 7 :</u>

1) D_f =IR.

2) Soit u et v deux nombres réels tels que $u < v$.

a) Soit $u\in[0;+\infty[$ et $v\in[0;+\infty[$:

si $u < v$, alors $u^2 < v^2$;

si $u < v$, alors $f(u) < f(v)$.

Interpréter : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

b) Soit $u\in]-\infty;0]$ et $v\in]-\infty;0]$:

si $u < v$, alors $u^2 > v^2$;

si $u < v$, alors $f(u) > f(v)$.

Interpréter : f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

3)

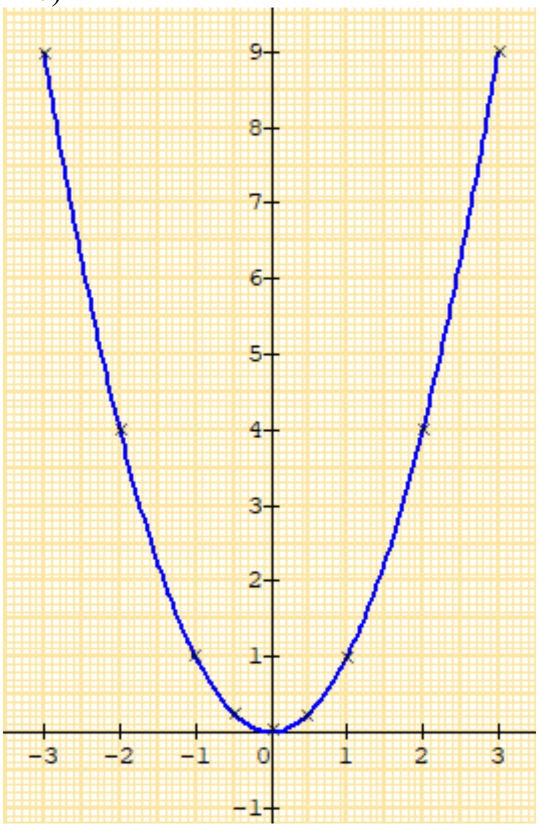
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

4) Pour tout $x \in IR$, $x^2 \geq 0$, c'est-à-dire $f(x) \geq 0$; donc f admet le nombre 0 pour minimum. $f(0)=0$, donc ce minimum est atteint en 0.

5) a)

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9

b)



6) En plus de la vérification graphique, on a :

Pour tout point M(x ;f(x)) appartenant à ($\mathscr{C}_f$) son image par $S_{(OJ)}$ est M'(-x ;f(x)), c'est-à-dire M'(-x ;f(-x)) car $(-x)^2=x^2$.

M'(-x ;f(-x)) appartient à ($\mathscr{C}_f$).

Ainsi, chaque point de la courbe ($\mathscr{C}_f$) a pour image par $S_{(OJ)}$, un point de ($\mathscr{C}_f$); d'où l'axe des ordonnées (OJ) est un axe de symétrie de la courbe ($\mathscr{C}_f$).

J'évalue mes acquis :

1-Faux ; 2-Faux ; 3-Vrai.

4-2 <u>La fonction inverse</u>

<u>Activité 8:</u>

1) D_g =IR*, c'est dire D_g =]-∞ ;0[∪]0 ;+∞[.

2) Soit u et v deux nombres réels tels que $u < $ v.

a) Lorsque u et v appartiennent à l'intervalle $]0;+\infty[$, comparer $g(u)$ et g(v).
Interpréter le résultat.

b) Lorsque u et v appartiennent à l'intervalle $]-\infty;0[$, comparer $g(u)$ et g(v).
Interpréter le résultat.

2) Soit u et v deux nombres réels tels que $u < v$.

a) Soit $u \in]0;+\infty[$ et $v \in]0;+\infty[$:

si $u < v$, alors $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$;

si $u < v$, alors $g(u) > g(v)$.

Interpréter : g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

b) Soit $u \in]-\infty;0[$ et $v \in]-\infty;0[$:

si $u < v$, alors $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$;

si $u < v$, alors $g(u) > g(v)$.

Interpréter : g est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

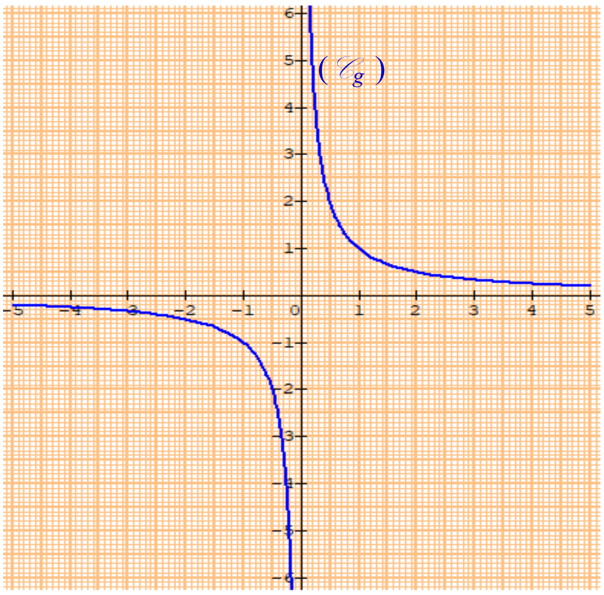
3)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

4) a)

x	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	1	2	3	4	5
$g(x)$	-0,2	-0,25	$-\frac{1}{3}$	-0,25	-1	-2	-5	$\times$	5	2	1	0,5	$\frac{1}{3}$	0,25	0,2

b)



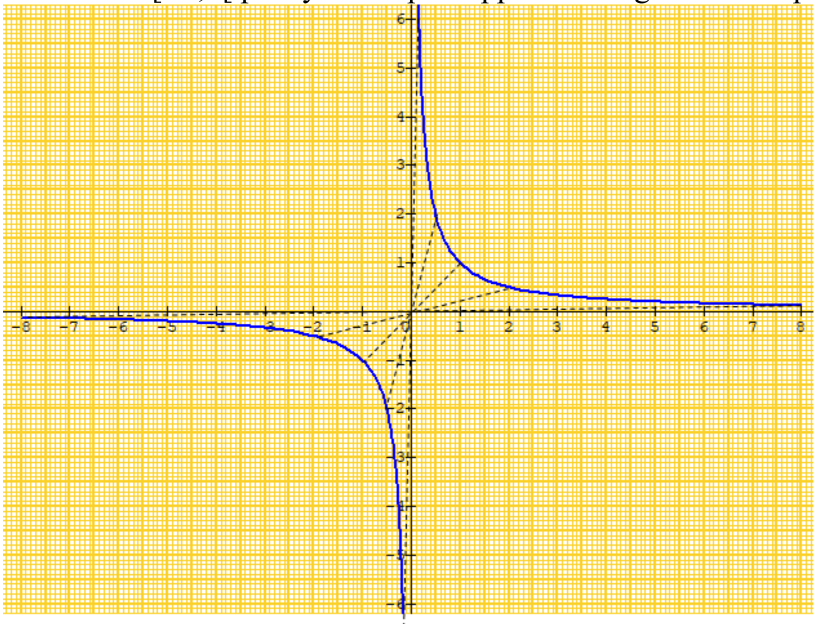
c) En plus de la vérification graphique, on a :
Pour tout point M(x ;g(x)) appartenant à ($\mathscr{C}_g$) son image par S_O est M'(-x ;-g(x)), c'est-à-dire M'(-x ;g(-x)) car g(-x)=$\frac{1}{-x}$.
M'(-x ;g(-x)) appartient à ($\mathscr{C}_g$).
Ainsi, chaque point de la courbe ($\mathscr{C}_g$) a pour image par S_O, un point de ($\mathscr{C}_g$); d'où l'origine O du repère est un centre de symétrie de la courbe ($\mathscr{C}_g$).

J'évalue mes acquis :

a)

x	-8	0	$+8$
$g(x)$	$-0{,}125$ ↘	‖	↘ $0{,}125$

b) Après avoir construit la branche de courbe de g sur l'intervalle]0 ;8], on obtient celle de l'intervalle [-8 ;0[par symétrie par rapport à l'origine O du repère.



4-3 <u>La fonction racine carrée</u>

<u>Activité 9:</u>

1) a) $g(x)=\sqrt{x}$.

b) $D_g=[0\ ;+\infty[$.

2) Soit $u\in[0;+\infty[$ et $v\in[0;+\infty[$:

si $u < v$, alors $\sqrt{u} < \sqrt{v}$.

si $u < v$, alors $g(u) < g(v)$.

Ainsi, g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

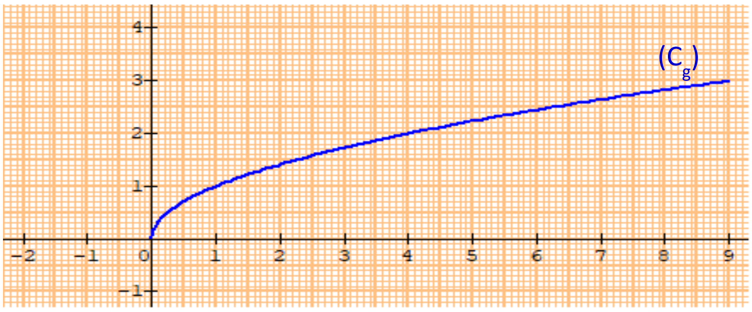
3)

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0 ↗	

4) a)

x	0	0,25	1	2	3	4	6	9
Arrondi d'ordre 1 de $g(x)$	0	0,5	1	1,4	1,7	2	2,4	3

b)

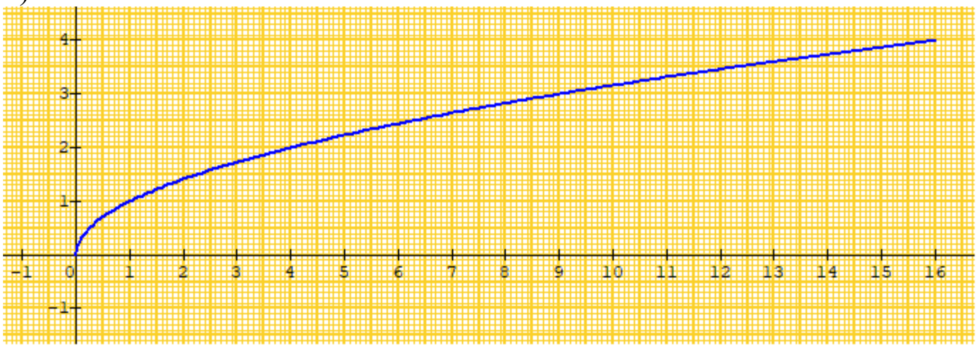


J'évalue mes acquis :

a)

x	0	16
$g(x)$	0 $\nearrow$	4

b)



4-4 La fonction cube

Activité 10:

1) D_h =IR.

2) Etude du sens de variation de la fonction h sur D_h .

a) Il suffit de développer et réduire l'expression $(u\text{-v})(u^2+uv+v^2)$ pour obtenir $u^3\text{-}v^3$.

b) Il suffit de développer et réduire l'expression $(u+\frac{\text{v}}{2})^2+\frac{3\text{v}^2}{4}$ pour obtenir u^2+uv+v^2.

c) Soit u et v deux nombres réels tels que u < v.

Il suffit de comparer $h(u)$ et $h(\text{v})$ en étudiant le signe de leur différence.

En effet, pour tout $x\in$IR, on a $h(u)\text{-}h(\text{v}) = u^3\text{-}v^3$, c'est-à-dire $h(u)\text{-}h(\text{v}) = (u\text{-v})(u^2+uv+v^2)$;

c'est-à-dire encore $h(u)\text{-}h(\text{v}) = (u\text{-v})[(u+\frac{\text{v}}{2})^2+\frac{3\text{v}^2}{4}]$.

Pour tous réels u et v tels que u < v, on a d'une part $(u+\frac{\text{v}}{2})^2+\frac{3\text{v}^2}{4} > 0$ et d'autre part $u\text{-v}<0$.

Donc, pour tous réels u et v tels que u<v, on a : $(u\text{-v})[(u+\frac{\text{v}}{2})^2+\frac{3\text{v}^2}{4}] > 0$, c'est-à-dire $h(u)\text{-}h(\text{v})>0$,

c'est-à-dire encore $h(u)>h(\text{v})$.

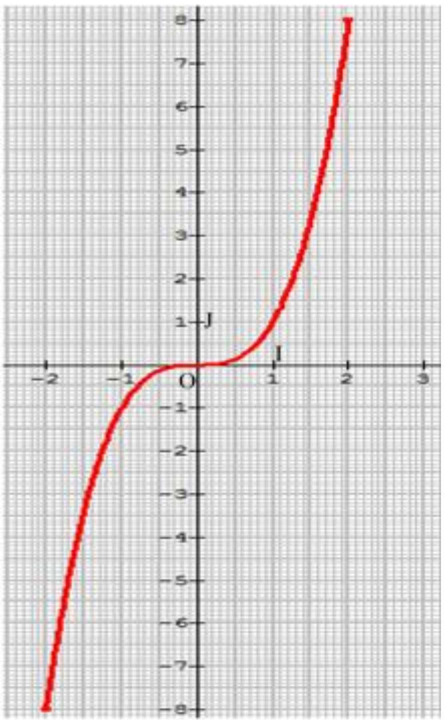
d) Pour tous réels u et v tels que u<v, on a $h(u)>h(\text{v})$, donc h est strictement croissante sur IR.

e)

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	$\nearrow$	

3) a) b) c)

d)



J'évalue mes acquis :

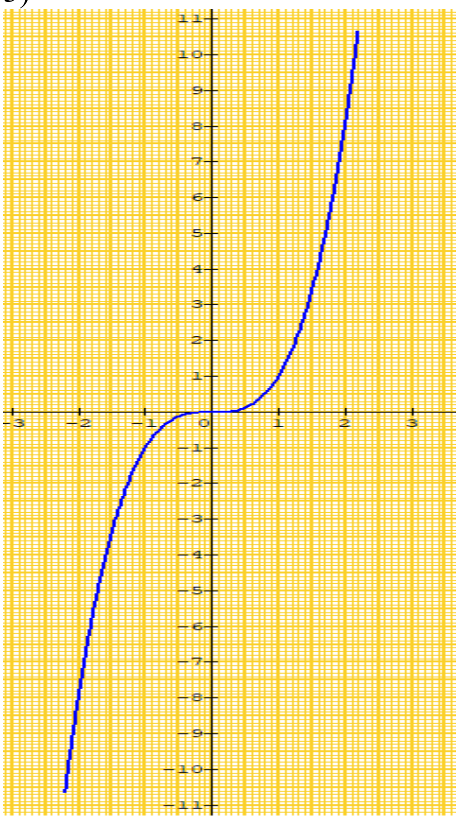
1) On sait que $\sqrt{2} < \sqrt{5}$;

donc $h(\sqrt{2}) < h(\sqrt{5})$ car la fonction cube (h), est strictement croissante sur IR.

2) Les point A(3 ; 27) et B(-3 ;-27) sont symétrique par rapport à l'origine du repère.

Comme A$\in$(C) à la courbe (C) de centre de symétrie l'origine du repère, le point B appartient également à (C).

3)



5- <u>Utiliser les fonctions élémentaires pour étudier les fonctions du type</u> :

$$x \longmapsto ax^2 \quad \text{et} \quad x \longmapsto \frac{a}{x} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}^*$$

5-1 Etude de la fonction $x \longmapsto ax^2$ avec $a \neq 0$

<u>Activité 11</u> :

1) $D_h = \mathbb{R}$.

2) **On pose $a > 0$**

a) $u < v$

	u et v appartiennent à l'intervalle $]-\infty;0]$	u et v appartiennent à l'intervalle $[0;+\infty[$
Comparaison de u^2 et v^2	$u^2 > v^2$	$u^2 < v^2$
Comparaison de au^2 et av^2	$au^2 > av^2$	$au^2 < av^2$

b) h est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$; h est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

c)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

3) **On pose $a < 0$**

a) $u < v$

	u et v appartiennent à l'intervalle $]-\infty;0]$	u et v appartiennent à l'intervalle $[0;+\infty[$
Comparaison de u^2 et v^2	$u^2 > v^2$	$u^2 < v^2$
Comparaison de au^2 et av^2	$au^2 < av^2$	$au^2 > av^2$

b) h est strictement croissante sur $]-\infty;0]$; h est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

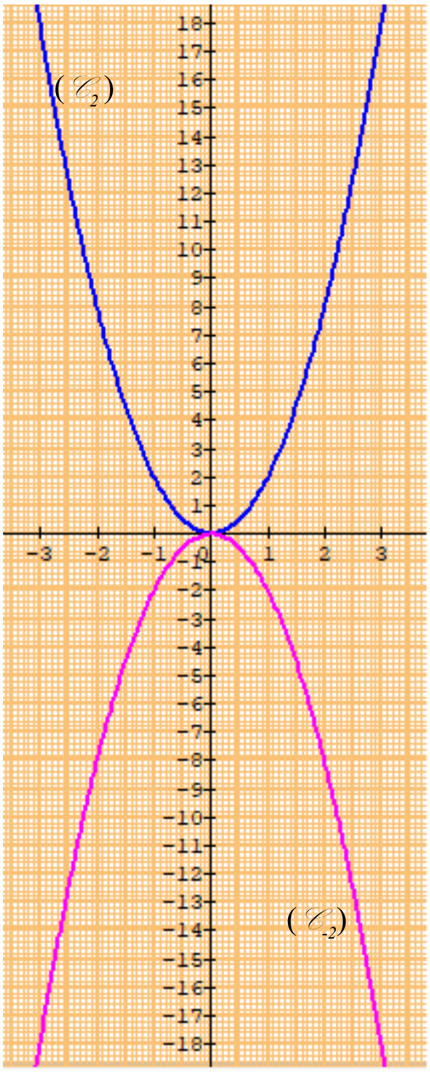
4) a) Pour $a = 2$,

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
$h(x)$	18	8	2	0,5	0	0,5	2	8	18

Pour $a = -2$,

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
$h(x)$	-18	-8	-2	-0,5	0	-0,5	-2	-8	-18

b)

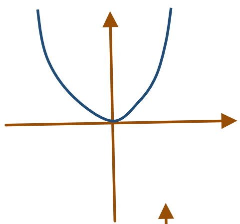


5) La fonction *h* a le même sens de variation, le même sommet et le même axe de symétrie que la fonction carrée.
Lorsque $a>0$, la fonction *h* a le même sens de variation que la fonction carrée.
Lorsque $a<0$, la fonction *h* et la fonction carrée ont des sens de variations contraires.

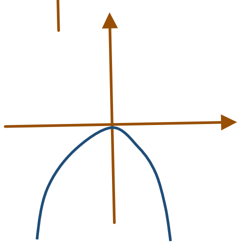
J'évalue mes acquis :

Pour comparer l'allure des fonctions du type $x \longmapsto ax^2$, il suffit de connaître le signe du coefficient a.

• Les fonctions $x \longmapsto \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$ et $x \longmapsto (2-\sqrt{2})x^2$ ont la même allure, celle de la fonction carrée.
Voici une esquisse de leur allure :



• Les fonctions $x \longmapsto -3x^2$ et $x \longmapsto (3-\pi)x^2$ ont la même allure, l'allure contraire de la fonction carrée.
Voici une esquisse de leur allure :



5-2 Etude de la fonction $x \longmapsto \frac{a}{x}$ avec $a \neq 0$

<u>Activité 12</u> :

1) D_k =IR*, c'est-à-dire D_k =]-∞ ;0[∪]0 ;+∞[.

2) **On pose $a > 0$**

a) u<v

	u et v appartiennent à l'intervalle]-∞;0[	u et v appartiennent à l'intervalle]0;+∞[
Comparaison de $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$	$\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$	$\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$
Comparaison de $\frac{a}{u}$ et $\frac{a}{v}$	$\frac{a}{u} > \frac{a}{v}$	$\frac{a}{u} > \frac{a}{v}$

b) k est strictement décroissante sur]-∞;0[; k est strictement décroissante sur]0;+∞[.

c)

x	-∞	0	+∞
$k(x)$	↘	||	↘

3) **On pose $a < 0$**

a) u<v

	u et v appartiennent à l'intervalle]-∞;0[	u et v appartiennent à l'intervalle]0;+∞[
Comparaison de $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{v}$	$\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$	$\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$
Comparaison de $\frac{a}{u}$ et $\frac{a}{v}$	$\frac{a}{u} < \frac{a}{v}$	$\frac{a}{u} < \frac{a}{v}$

b) k est strictement croissante sur]-∞;0[; k est strictement croissante sur]0;+∞[.

c)

x	-∞	0	+∞
$k(x)$	↗	||	↗

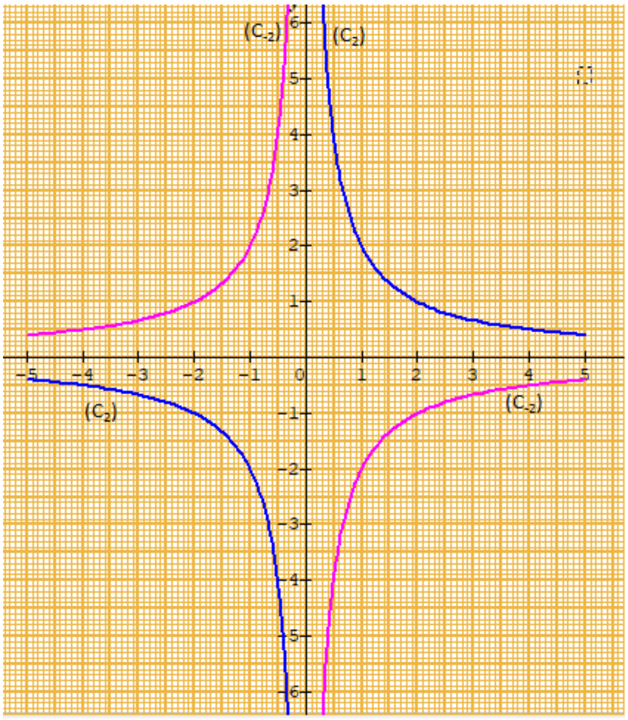
4) a) Pour a = 2,

x	-5	-4	-3	-2	-0,5	0	0,5	1	2	3	4	5
$k(x)$	-0,4	-0,5	$-\frac{2}{3}$	-1	-4	╳	4	2	1	$\frac{2}{3}$	0,5	0,4

Pour a = -2,

x	-5	-4	-3	-2	-0,5	0	0,5	1	2	3	4	5
$k(x)$	0,4	0,5	$\frac{2}{3}$	1	4	╳	-4	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	-0,5	-0,4

b)

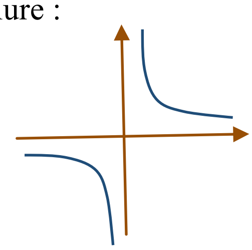


5) La fonction k a le même centre de symétrie que la fonction inverse.
Lorsque $a>0$, la fonction k a le même sens de variation que la fonction inverse.
Lorsque $a<0$, la fonction k et la fonction inverse ont des sens de variations contraires.

J'évalue mes acquis :

Pour comparer l'allure des fonctions du type $x \longmapsto \frac{a}{x}$, il suffit de connaître le signe de a.
On a :
Avec $\frac{2}{5x} = \frac{\frac{2}{5}}{x}$, on a : $a=\frac{2}{5}$ positif;
Avec $\frac{\sqrt{6}}{x}$, on a : $a=\sqrt{6}$ positif;
$\frac{6}{(3-2\sqrt{5})x}$ c'est à dire $\frac{\frac{6}{3-2\sqrt{5}}}{x}$, on a : $a=\frac{6}{3-2\sqrt{5}}$ négatif ;
$\frac{3{,}2-\pi}{11x}$ c'est à dire $\frac{\frac{3{,}2-\pi}{11}}{x}$, on a : $a=\frac{3{,}2-\pi}{11}$ positif.

Les fonctions $x \longmapsto \frac{2}{5x}$, $x \longmapsto \frac{\sqrt{6}}{x}$ et $x \longmapsto \frac{3{,}2-\pi}{11x}$ ont la même allure, celle de la fonction inverse.
NB : Voici une esquisse de leur allure :



Exercices

1- Exercices de fixation

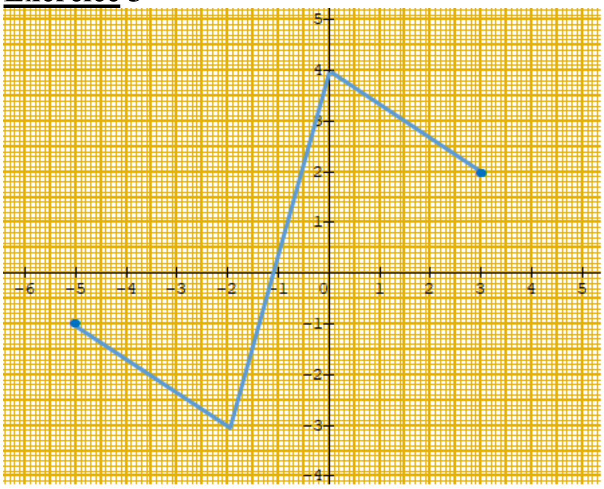
Identifier/reconnaître une fonction affine par intervalle

Exercice 1 : 2) ; 3) ; 4).

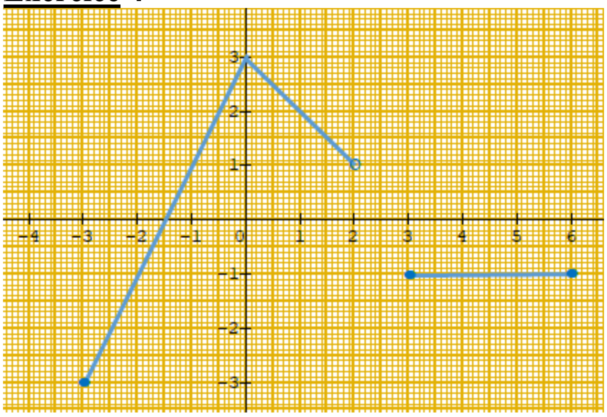
Exercice 2 : 2) ; 3).

Représenter une fonction affine par intervalles

Exercice 3



Exercice 4



Etudier le sens de variations, dresser le tableau de variations, construire la courbe représentative de la fonction élémentaire $x \longmapsto |x|$

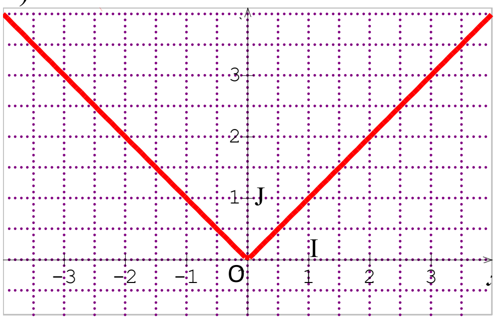
Exercice 5

1) q est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$q(x)$		↘	0	↗	

3)



Représenter la fonction $x \longmapsto |ax+b|$ avec $a\neq 0$

Exercice 6

1) IR.

2)

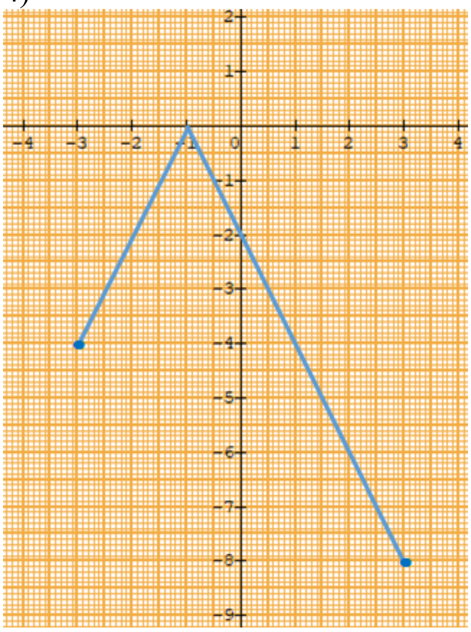
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$	

$$\begin{cases} Pour\ \ x\in]-\infty;-1],\ \ h(x) = 2x+2 \\ Pour\ \ x\in[-1;+\infty[,\ \ h(x) = -2x-2 \end{cases}.$$

3) Dresser le tableau de variations de h sur l'intervalle [-3 ;3].

x	-3		-1		$+3$
$h(x)$	-4	↗	0	↘	-8

4)



Reconnaitre les fonctions élémentaires

Exercice 7 : x^3 ; E(x) ; -3 ; x; $\sqrt{x}$; x^2 ; $|x|$; $\frac{1}{x}$.

Exercice 8 : (C$_q$) : $q(x) = x$; (C$_h$) : $h(x) = \sqrt{x}$; (C$_m$) : $m(x) = \frac{1}{x}$; (C$_p$) : $p(x) = |x|$; (C$_g$) : $g(x) = x^3$; (C$_t$) : $t(x) = -2$; (C$_w$) : $w(x) = E(x)$; (C$_f$) : $f(x) = x^2$.

Identifier la partie entière d'un nombre réel
Calculer la partie entière d'un nombre réel

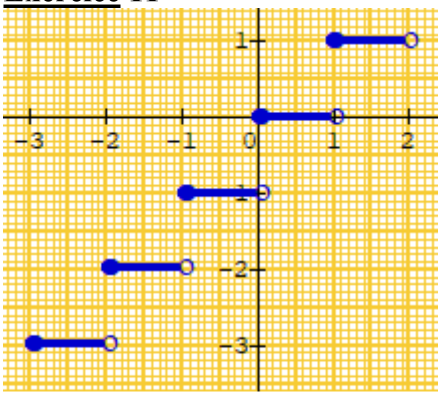
Exercice 9 : 1-V ; 2-V ; 3-F ; 4-V ; 5-V ; 6-V.

Exercice 10

$0 \leq \frac{1}{2} < 1$ donc E($\frac{1}{2}$)=0 ; $-6 \leq -\frac{42}{7} < -5$ donc E($-\frac{42}{7}$)=-6 ; $100 \leq 10^2 < 101$ donc E(10^2)=100 ; $-1 \leq -10^{-3} < 0$ donc E(-10^{-3})=-1 ; $-7 \leq \frac{1}{2} < -6$ donc E($-\frac{45}{7}$)=-7 ; $2 \leq \sqrt{5} < 3$ donc E($\sqrt{5}$)=2 ; $-10 \leq -\frac{555}{56} < -9$ donc E($-\frac{555}{56}$) ; $-3 \leq 1-\sqrt{10} < -2$ donc E($1-\sqrt{10}$)=-3 .

Représenter la fonction élémentaire $x \longmapsto$ E(x)

Exercice 11



Etudier le sens de variations, dresser le tableau de variations, représenter les fonctions élémentaires $x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto x^3$; $x \longmapsto \frac{1}{x}$; $x \longmapsto \sqrt{x}$

Fonction carré

Exercice 12 : 1-Vrai ; 2-Faux ; 3-Faux ; 4-Vrai ; 5-Vrai.

Exercice 13

• Si u∈[-8 ;0] et v∈[-8 ;0] tel que u<v, alors $u^2>v^2$, c'est-à-dire g(u)>g(v) ;
donc g est strictement décroissante sur [-8 ;0].

• Si u∈[0 ;8] et v∈[0 ;8] tel que u<v, alors $u^2<v^2$, c'est-à-dire g(u)<g(v) ;
donc g est strictement croissante sur [0 ;8].

Exercice 14 :

g est strictement décroissante sur [-4 ;0] et g est strictement croissante sur [0 ;-1].

x	-4 16	0	- 1
$q(x)$	↘	0	↗

Fonction inverse

Exercice 15

• Si u∈[-6 ;0[et v∈[-6 ;0[tel que u<v, alors $\frac{1}{u}>\frac{1}{v}$, c'est-à-dire k(u)>k(v) ;

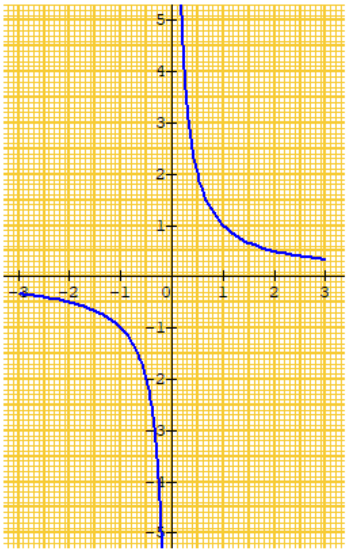
donc k est strictement décroissante sur [-6 ;0[.

• Si u∈]0 ;6] et v∈]0 ;6] tel que u<v, alors $\frac{1}{u}>\frac{1}{v}$, c'est-à-dire k(u)>k(v) ;
donc k est strictement décroissante sur]0 ;6].

<u>Exercice</u> 16 : k est strictement décroissante sur [-10 ;0[.

x	-10	0
$\frac{1}{x}$	-0,1 ↘	‖

<u>Exercice</u> 17



x	-3		0		+3
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	↘	‖	↘	$\frac{1}{3}$

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
$k(x)$	$-\frac{1}{3}$	-0,5	-1	-2	╳	2	1	0,5	$\frac{1}{3}$

Fonction racine carrée

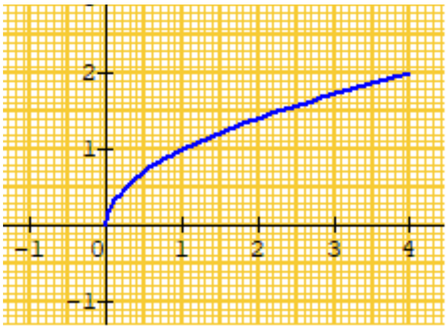
<u>Exercice</u> 18 : h est strictement croissante sur [0 ;16].

x	0	16
$h(x)$	0 ↗	4

<u>Exercice</u> 19 : g est strictement croissante sur [0 ;4].

x	0	4
$g(x)$	0 ↗	2

x	0	0,5	1	2	3	4
Arrondi d'ordre 1 de g(x)	0	0,7	1	1,4	1,7	2



Utiliser les fonctions élémentaires pour étudier les fonctions

<u>Exercice</u> 20

1) a) u et v étant deux nombres positifs tels que u<v, on a :

$u^2 < v^2$,

$-\frac{2}{3}\times u^2 > v^2\times(-\frac{2}{3})$,

c'est-à-dire g(u)>g(v).

Interprétation : g est strictement décroissante sur [0 ;+∞[.

b) Si u et v appartiennent à [-6 ;0] tels que u<v, on a :

$u^2 > v^2$,

$-\frac{2}{3}\times u^2 < v^2\times(-\frac{2}{3})$,

c'est-à-dire g(u)<g(v).

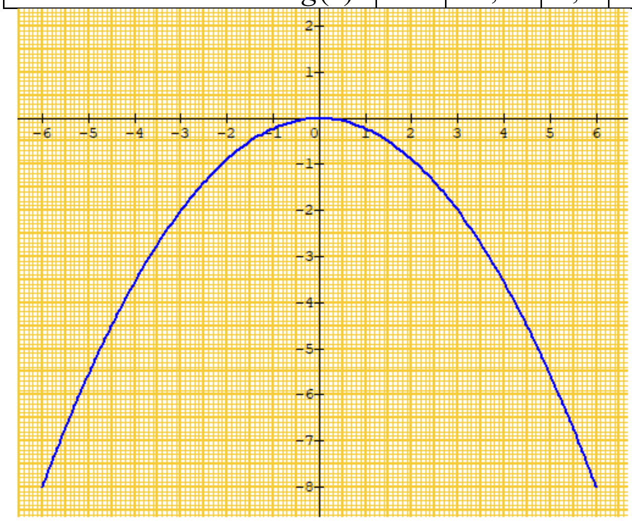
D'où g est strictement croissante sur [-6 ;0].

2)

x	-6		0		6
g(x)			0		
	-8	↗		↘	-8

3)

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Arrondi d'ordre 1 de g(x)	-8	-5,6	-3,6	-2	-0,9	-0,2	0	-0,1	-0,9	-2	-3,6	-5,6	-8



<u>Exercice</u> 21

1) IR*, c'est-à-dire]-∞ ;0[∪]0 ;+∞[.

2) a) Si u∈]-∞ ;0[et v∈]-∞ ;0[tel que u<v,

alors $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$,

alors $(-\frac{5}{2})\times\frac{1}{u} < \frac{1}{v}\times(-\frac{5}{2})$ car $-\frac{5}{2} < 0$,

c'est-à-dire h(u)<k(v) ;

donc h est strictement croissante sur]-∞ ;0[.

b) Si u∈]0 ;+∞[et v∈]0 ;+∞[tel que u<v,

alors $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$,

alors $(-\frac{5}{2})\times\frac{1}{u} < \frac{1}{v}\times(-\frac{5}{2})$ car $-\frac{5}{2} < 0$, c’est-à-dire h(u)<k(v) ;

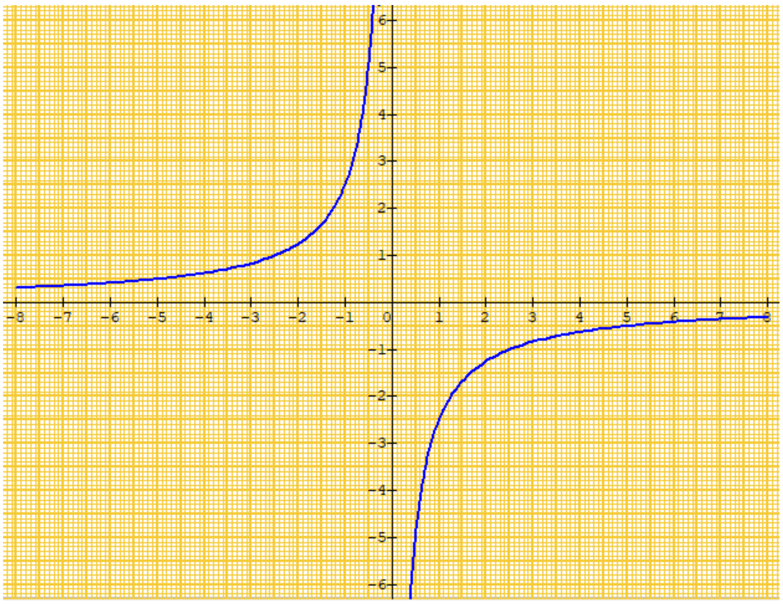
donc h est strictement croissante sur l’intervalle]0 ;+∞[.

3)

x	-8		0		8
$f(x)$	$\frac{5}{16}$	↗	‖	↗	$-\frac{5}{16}$

4)

x	-8	-5	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	5	8
Arrondi d’ordre 1 de h(x)	0,3	0,5	1,25	2,5	5	╳	-5	-2,5	-1,25	-0,5	-0,3



2- Exercices de renforcement/approfondissement

Exercice 22 : La position des courbes, les unes par rapport aux autres nous permet de conjecturer ceci :

Si x∈]0 ;1[, alors $x^3<x^2<x<\sqrt{x}<\frac{1}{x}$.

Si x∈]1 ;+∞[, alors $\frac{1}{x}<\sqrt{x}<x<x^2<x^3$.

Si x=1, alors $x^3=x^2=x=\sqrt{x}=\frac{1}{x}=1$.

NB : On admettra ces résultats (Elles peuvent se démontrer).

Exercice 23

x	-2 $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$			0 $\frac{9}{2}$
$f(x)$	↘	0	↗	

x	0		5
g(x)	0	↗	

Exercice 24 : Le plan est muni d’un repère orthonormé (O ;I ;J).

On considère f et g, les fonctions numériques définies sur [-2;2] par :

$$f(x) = x|x| \quad \text{et} \quad g(x) = x^3.$$

1) $\begin{cases} Pour\ \ x \in [-2;0], & f(x) = -x^2 \\ \\ Pour\ \ x \in [0;2], & f(x) = x^2 \end{cases}$.

2) a) Si u et v appartiennent à [0 ;2] tels que u<v, alors :

$u^2 < v^2$,

$u^2 < v^2$,

c'est-à-dire f(u)<f(v).

Donc f est strictement croissante sur [0 ;2].

b) Si u et v appartiennent à [-2 ;0] tels que u<v, on a :

$u^2 > v^2$,

$-u^2 < -v^2$,

c'est-à-dire f(u)<f(v).

D'où f est strictement croissante sur [-6 ;0].

3) a)

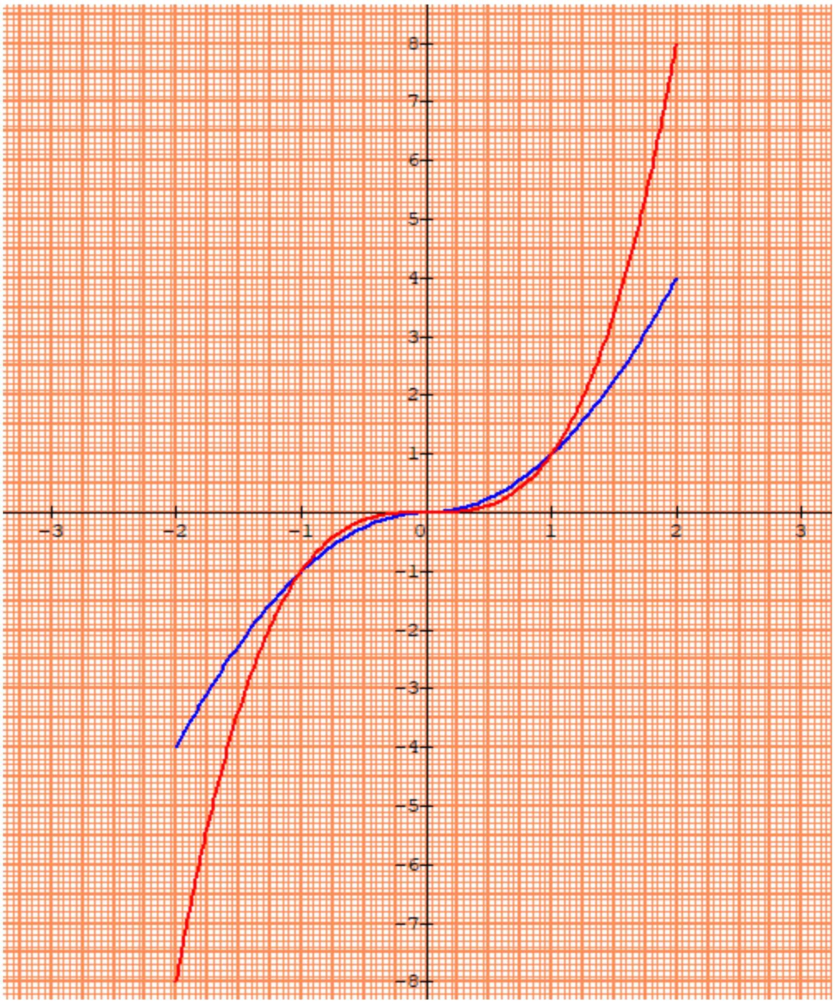
x	-2		0		2
$f(x)$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4

b)

x	-2		2
$g(x)$	-8	$\nearrow$	8

4)

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	-4	-2,25	-1	-2,5	0	2,5	1	2,25	4
$g(x)$	-8	-3,375	-1	-,125	0	0,125	0	3,375	8



5) Ainsi : si $x \in]-2\ ;-1[\cup]0\ ;1[$, alors $f(x) > g(x)$;

si $x \in]-1\ ;0[\cup]1\ ;2[$, alors $f(x) < g(x)$;

si $x \in \{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}$, alors $f(x) = g(x)$.

Exercice 25

1) Pour tout nombre réel non nul x, on a :

$$\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{x} = \frac{(x-1)-(x-2)}{x} = \frac{x-1-x+2}{x} = \frac{1}{x}.$$

2) Il suffit d'étudier le signe de $\frac{1}{x}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	-	||	+

Ainsi, si $x \in]-\infty\ ;0[$, alors $\frac{x-1}{x} < \frac{x-2}{x}$.

si $x \in]0\ ;+\infty[$, alors $\frac{x-1}{x} > \frac{x-2}{x}$.

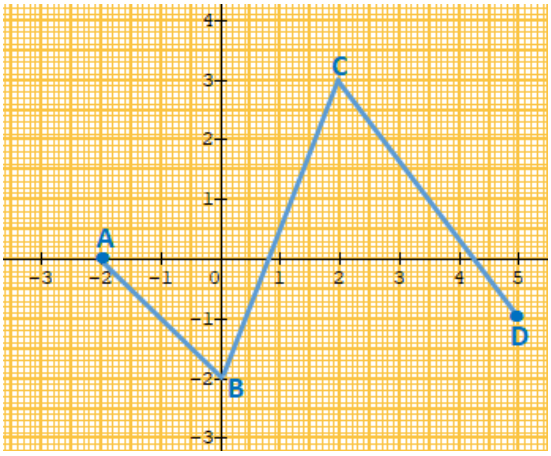
Exercice 26 : 1) F ; 2) V ; 3) V ; 4) V ; 5) F ; 6) F.

Détermination de l'expression d'une fonction affine par intervalles

Exercice 27

1) $D_h = [-2\ ;5]$.

2)



3) *Nous allons utiliser des équations de droites.*
NB : Toute droite de coefficient directeur a et passant par un point A(x_A,y_A) admet une équation de la forme y-y_A=a(x-x_A).
Soit A(-2 ;0) ; B(0 ;-2) ; C(2 ;3) et D(5 ;-1).
La droite (AB) a pour coefficient directeur $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$=-1 et passe par A(-2 ;0) ; elle admet pour équation y-0=-1(x+2), c'est-à-dire $\boldsymbol{y=-x-2}$.
La droite (BC) a pour coefficient directeur $\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{5}{2}$ et passe par B(0 ;-2) ; elle admet pour équation $y+2=\frac{5}{2}(x-0)$, c'est-à-dire $\boldsymbol{y=\frac{5}{2}x-2}$.
La droite (CD) a pour coefficient directeur $\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}$=-2 et passe par C(2 ;3) ; elle admet pour équation y-3=-2(x-2), c'est-à-dire $\boldsymbol{y=-2x+7}$.

Finalement : $\begin{cases} h(x) = -x-2 & si\ x\in]-2;0] \\ h(x) = \frac{5}{2}x-2 & si\ x\in[0;2] \\ h(x) = -2x+7 & si\ x\in[2;5] \end{cases}$.

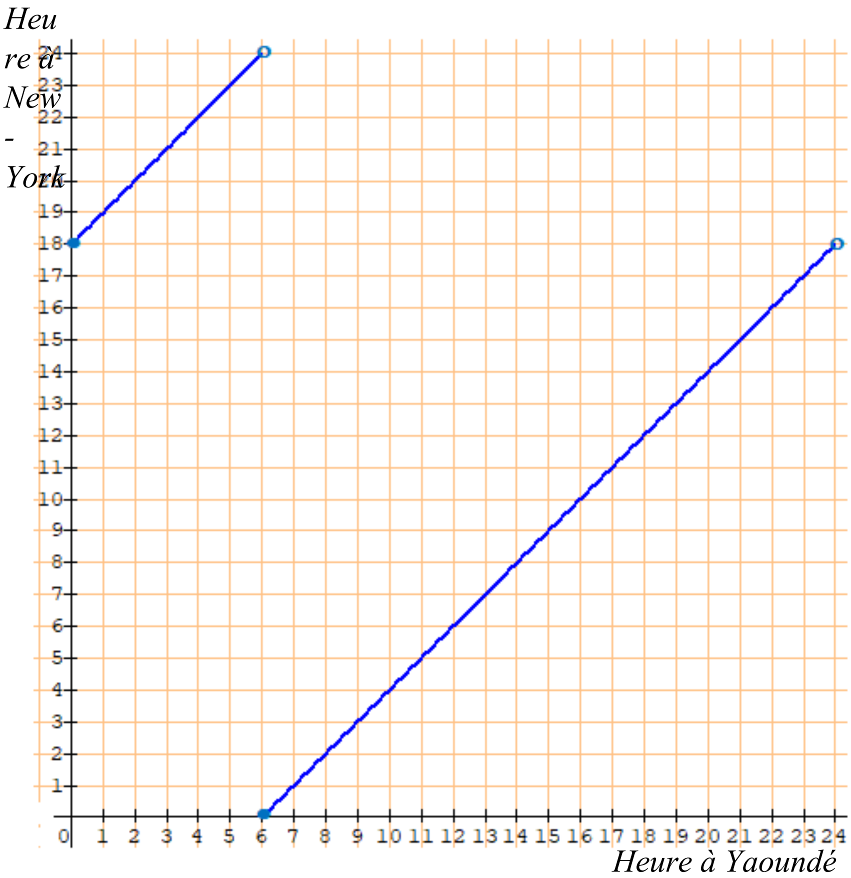
<u>Exercice</u> 28

1)

Heure à Yaoundé	15 h	19 h	23 h	00 h	01 h	05 h	**06 h**
Heure à New-York	**09 h**	**13 h**	**17 h**	**18 h**	**19 h**	**23 h**	00 h

2) a) D_f=[0 ;24[.
b) $f(t) = t + 18\ \ si\ t\in[0;6[$; $f(t) = t-6\ \ si\ t\in[6;24[$.

3)



Fonctions dont l'expression contient des valeurs absolues

<u>Exercice</u> 29

1) a) IR.

b) Il s'agit de déterminer l'expression de $k(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

x	$-\infty$ -1	2	$+\infty$
Signe de $4-2x$	+	+ 0	-
$\|4-2x\|$	$4-2x$	$4-2x$	$-4+2x$
Signe de $x+1$	- 0	+	+
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$
$k(x)$	4	$-2x+2$	$2x-6$

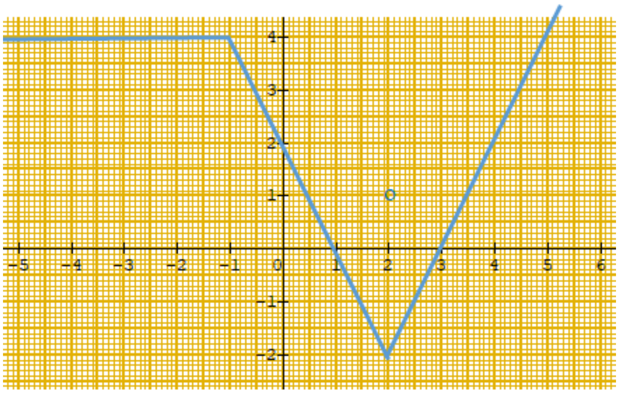
Ainsi : $\begin{cases} k(x) = 4 & si\ x \in]-\infty; -1] \\ k(x) = -2x+2 & si\ x \in [-1; 2] \\ k(x) = 2x-6 & si\ x \in [2; +\infty[\end{cases}$

2) a) k est constante sur $]-\infty; -1]$; k est strictement décroissante sur $[-1; 2]$ et k est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

b)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$k(x)$	4	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

3)



<u>Exercice</u> 30

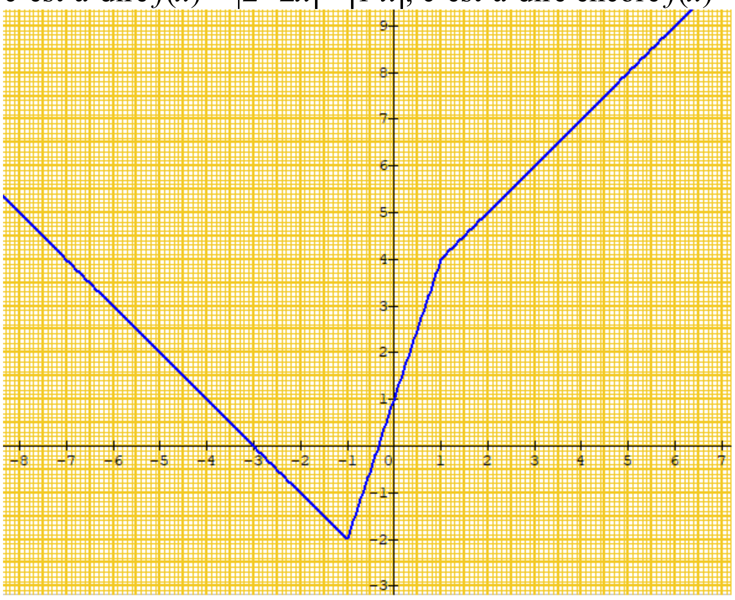
1) a) IR .

b) Il s'agit de déterminer l'expression de $h(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

x	$-\infty$ -2	1	$+\infty$
Signe de $1-x$	+	+ 0	-
$\|1-x\|$	1-x	1-x	-1+x
Signe de $2+2x$	- 0	+	+
$\|2+2x\|$	-2-2x	2+2x	2+2x
$h(x)$	-x-3	$3x+1$	$x+3$

Ainsi : $\begin{cases} h(x) = -x-3 & si\ x \in]-\infty; -1] \\ h(x) = 3x+1 & si\ x \in [-1; 1] \\ h(x) = x+3 & si\ x \in [1; +\infty[\end{cases}$

2) La fonction f est définie sur IR et on a $f(x) = \sqrt{(2+2x)^2} + \sqrt{(1-x)^2}$,
c'est-à-dire $f(x) = |2+2x| - |1-x|$, c'est-à-dire encore $f(x) = h(x)$.



Fonctions dont l'expression contient la fonction partie entière

<u>Exercice</u> 31

1) a) D_m=IR.

b) $m(-2)$= -2-E(-2), c'est-à-dire $m(-2)$= 0.
$m(-1)$= -1-E(-1), c'est-à-dire $m(-1)$= 0.
$m(-1,5)$= -1,5-E(-1,5), c'est-à-dire $m(-1,5)$= -1,5-(-2) c'est-à-dire $m(-1,5)$= 0,5 .
$m(-23,4)$= -23,4-E(-23,4), c'est-à-dire $m(-23,4)$= -23,4-(-24) c'est-à-dire $m(-23,4)$= 0,6.

m(6,8)= 6,8-E(6,8), c'est-à-dire *m*(6,8)= 6,8-6 c'est-à-dire *m*(6,8)= 0,8 .
m(1,7)= 1,7-E(1,7), c'est-à-dire *m*(1,7)= 1,7-1 c'est-à-dire *m*(1,7)= 0,7 .
m(-2)= 2-E(2), c'est-à-dire *m*(2)= 0.

2) a) Soit *n* un nombre entier relatif et *x* un nombre réel.

- x∈[n ;n+1[⇔ n≤x<n+1.

Par définition, on a : E(x)=n.

Ainsi, **si x∈[n ;n+1[alors** ***m*(x)= x-n**.

- Réciproquement, si *m*(x)= x-n, alors *x*-n= *x* - E(*x*) , c'est-à-dire E(x)=n.

Ainsi, **si *m*(x)= x-n**, **alors** n≤x<n+1, c'est-à-dire **x∈[n ;n+1[**.

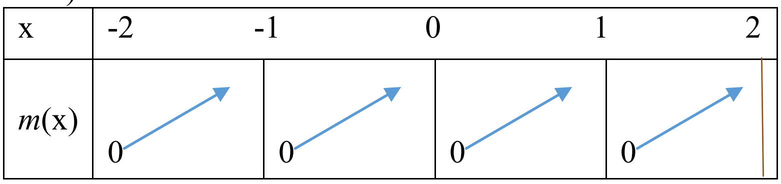
- Finalement, $x \in [n;n+1[\Leftrightarrow m(x) = x - n$.

c) D$_m$ est la réunion de tous les intervalles de la forme [n ;n+1[, où n∈ℤ.
Sur chacun de ces intervalles [n ;n+1[, on a *m*(x)=x-n, expression d'une fonction affine ; ainsi, *m* est une fonction affine par intervalles.

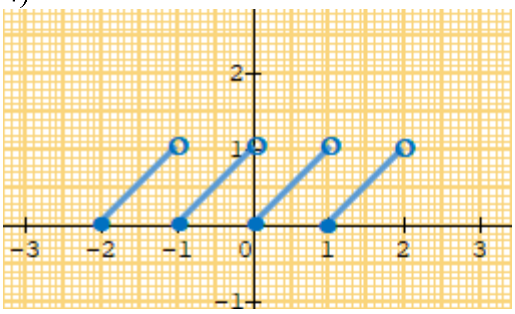
3) a)

x appartient à	[-2;-1[	[-1;0[	[0;1[	[1;2[
Expression de m(*x*)	x+2	x+1	x	x-1

b)



4)



5) a) -2 ; -1 ; 0 et 1.

b) *m*(*x*)=0 ⇔ *x*-E(*x*)=0
m(*x*)=0 ⇔ E(*x*)=*x*
m(*x*)=0 ⇔ *x*∈ℤ.

Donc dans IR, l'ensemble des solutions est l'équation m(x)=0 est l'ensemble ℤ des nombres entiers relatifs.

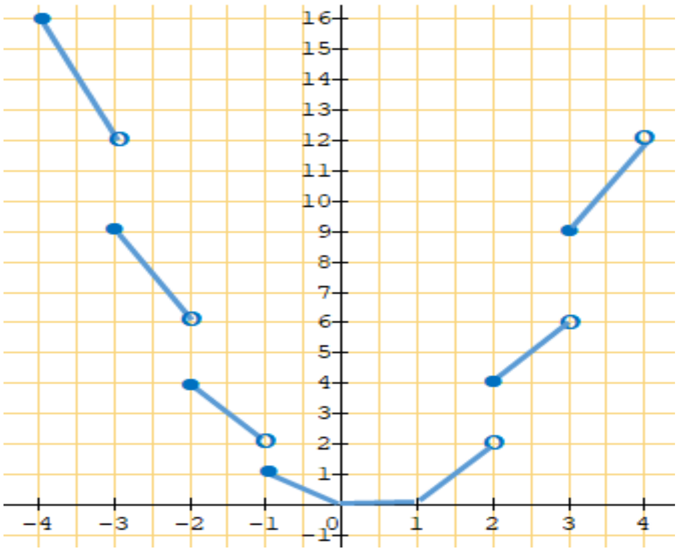
<u>Exercice 32</u>

1) Sachant que E(-4)=-4, E(-1,8)=-2, E(0)=0, E(0,5)=0 , E(2,4)=2, E(3)=3, E(3 5)=3, on obtient g(-4)=16 ; g(-1,8)=3,6 ; g(0)=0 ; g(0,5)=0 ; g(2,4)=4,8 ; g(3)=9 ; g(3,5)=10,5.

2) si x∈[-4 ;-3[alors *g*(x)= -4x ;
si x∈[-3 ;-2[alors *g*(x)= -3x ;
si x∈[-2 ;-1[alors *g*(x)= -2x ;
si x∈[-1 ;0[alors *g*(x)= -x ;
si x∈[0 ;1[alors *g*(x)= 0 ;
si x∈[1 ;2[alors *g*(x)= x ;
si x∈[2 ;3[alors *g*(x)= 2x ;
si x∈[3 ;4[alors *g*(x)= 3x.

Donc la fonction g est une fonction affine par intervalles.

3) g est strictement décroissante sur [-4 ;-3[;
g est strictement décroissante sur [-3 ;-2[;
g est strictement décroissante sur [-2 ;-1[;
g est strictement décroissante sur [-1 ;0[;
g est constante sur [0 ;1[;
g est strictement croissante sur [1 ;2[;
g est strictement croissante sur [2 ;3[;
g est strictement croissante sur [3 ;4[.
4)



Raisonnement

Exercice 33

1) On a : $-2 \leq a < b \leq 5$.

Etape 1 : -7≤a-5<b-5≤0 car lorsqu'on ajoute un même nombre à chaque membre d'une inégalité, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

Etape 2 : $49 \geq (a-5)^2 > (b-5)^2 \geq 0$ car la fonction carrée est strictement décroissante sur]-∞ ;0].

Etape 3 : $50 \geq (a-5)^2+1 > (b-5)^2+1 \geq 1$ car lorsqu'on ajoute un même nombre à chaque membre d'une inégalité, on obtient une nouvelle inégalité de même sens.

2) On peut conclure que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle [-2 ;5].

Exercice 34

a) Avec a=2 et b=3, on a : a et b sont strictement positifs et $a<b$;
donc $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (Car la fonction inverse est strictement décroissante sur]0,+∞[).

b) Avec a=-5 et b=-4, on a : a et b sont strictement négatifs et $a<b$;
donc $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (Car la fonction inverse est strictement décroissante sur]-∞ ;0[).

c) Avec a=2 et b=-1, on a : a>0 et b<0 ;
donc $\frac{1}{a} > 0$ et $\frac{1}{b} < 0$; d'où $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

d) Avec a=π-2 et b=-1, on a : a>0 et b<0 ;
donc $\frac{1}{a} > 0$ et $\frac{1}{b} < 0$; d'où $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

e) Avec a=-0,012 et b=-0,0012, on a : a et b sont strictement négatifs et $a<b$;
donc $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (Car la fonction inverse est strictement décroissante sur]0,+∞[).

Exercice 35

La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles]-∞ ;0[et]0 ;+∞[.

• La fonction inverse étant strictement décroissante sur [1 ;6] :
Si $x\in[1\,;6]$ c'est-à-dire $1\le x\le 6$, alors $\frac{1}{6}\le\frac{1}{x}\le 1$ c'est-à-dire $\frac{1}{x}\in[\frac{1}{6}\,;1]$.

• La fonction inverse étant strictement décroissante sur]0 ;5] :
Si $x\in]0\,;5]$ c'est-à-dire $0<x\le 5$, alors $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{5}$ c'est-à-dire $\frac{1}{x}\in[\frac{1}{5}\,;+\infty[$.

• On a $]-2\,;\frac{1}{4}]-\{0\} =]-2\,;0[\cup]0\,;\frac{1}{4}]$.

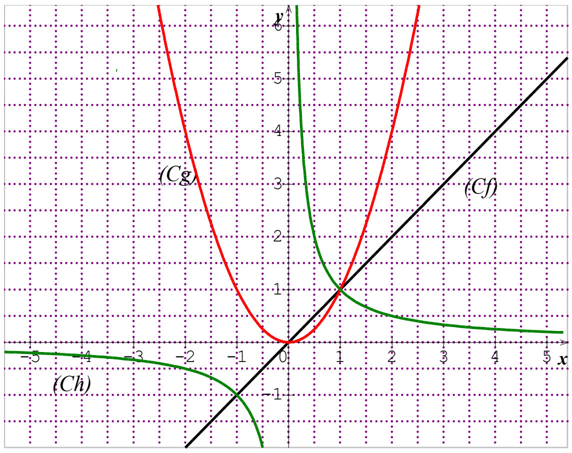
- La fonction inverse étant strictement décroissante sur]-2 ;0[:
  Si $x\in]-2\,;0[$ c'est-à-dire $-2<x<0$, alors $-\frac{1}{2}>\frac{1}{x}$ c'est-à-dire $\frac{1}{x}\in]-\infty\,;-\frac{1}{2}[$.
- La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0\,;\frac{1}{4}[$:
  Si $x\in]0\,;\frac{1}{4}[$ c'est-à-dire $0<x<\frac{1}{4}$, alors $\frac{1}{x}>4$ c'est-à-dire $\frac{1}{x}\in]4;+\infty[$.

Finalement, si $x\in]-2\,;\frac{1}{4}]-\{0\}$, alors $\frac{1}{x}\in]-\infty\,;-\frac{1}{2}[\cup]4;+\infty[$.

• Si $x>2$, alors $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\frac{1}{x}\in]0;\frac{1}{2}[$.

• Si $x<-3$, alors $\frac{1}{x}>-\frac{1}{3}$ c'est-à-dire $\frac{1}{x}\in]-\frac{1}{3};+\infty[$.

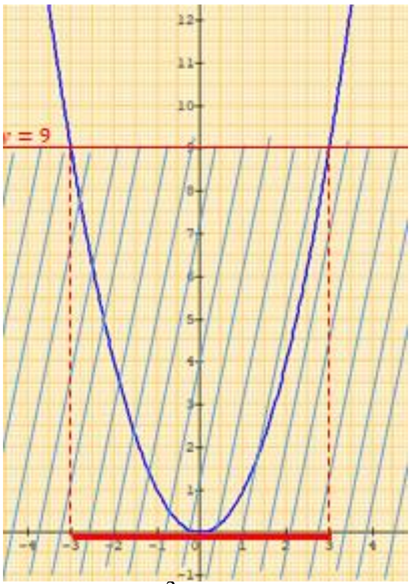
<u>Exercice</u> 36



		Appréciation	Justification
1)	Si $x>2$ alors $x^2>4$	Vrai	La fonction carrée (g) est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
2)	Si $x^2>4$ alors $x>2$	Faux	Contre-exemple : $(-3)^2>4$ et pourtant l'inégalité « $-3>2$ » est fausse.
3)	Si $0<x<1$ alors $x^2<x$	Vrai	Sur l'intervalle]0 ;1[, la courbe de la fonction g est au-dessous de celle de la fonction *f*. ou La fonction carrée (g) est strictement croissante sur]0 ;1[.
4)	Si $x<-1$ alors $x<\frac{1}{x}$	Vrai	Sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$, la courbe de la fonction *f* est au-dessous de celle de la fonction *h*.
5)	Si $-1<x<2$ alors $1<x^2<4$	Vrai	L'image directe de]-1 ;2[par g est l'intervalle]1 ;4[.
6)	Si $\frac{1}{x}>-\frac{1}{2}$ alors $x<-2$	Faux	Contre-exemple : $\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$ et pourtant l'inégalité « $3<-2$ » est fausse.

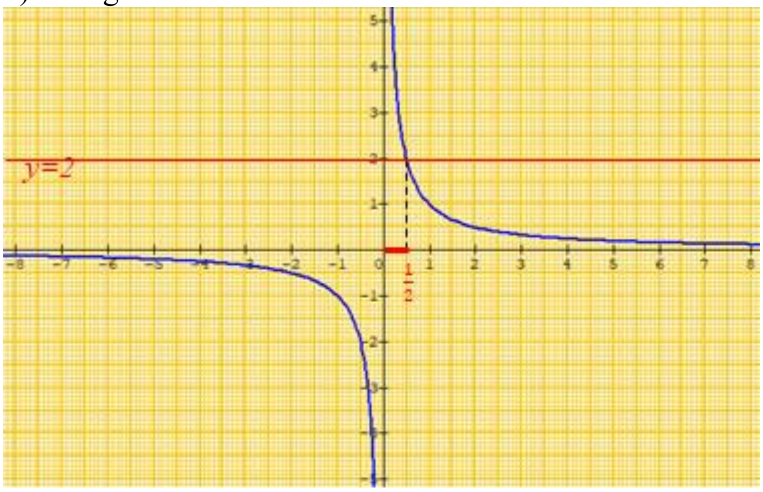
Fonctions, équations et inéquations

<u>Exercice</u> 37

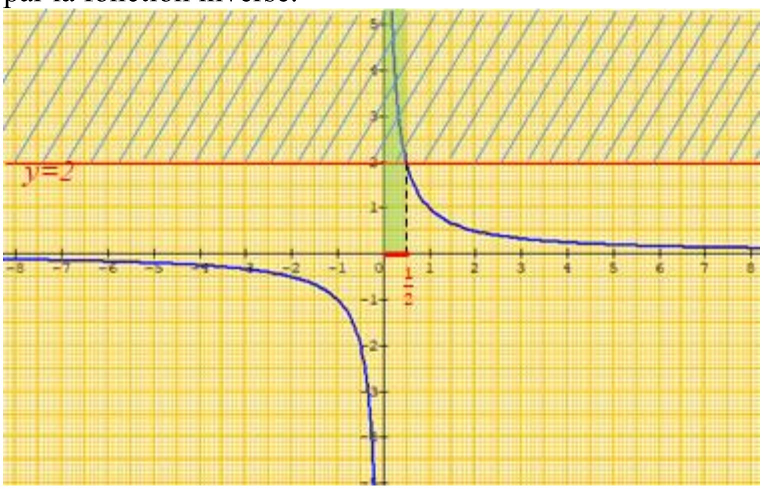


L’équation $x^2 = 9$ a pour e semble de solutions {-3 ; 3}.
L’inéquation $x^2 \leq 5$ a pour ensemble de solutions [-3 ;3].

Exercice 38
1) Il s’agit de la courbe de la fonction inverse.

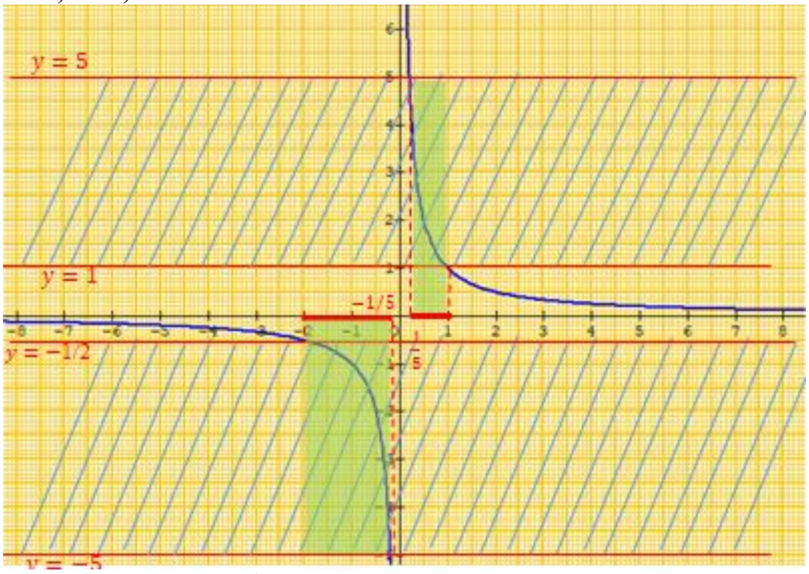


2) Il suffit de lire l’antécédent du nombre 2 par la fonction inverse : S=$\{\frac{1}{2}\}$.
3) Résoudre l’équation « $\frac{1}{x} \geq 2$ », revient à déterminer l’image réciproque de l’intervalle [-2 ;+∞[par la fonction inverse.



4) Il suffit de déterminer les images réciproques des [1 ;5], [-5 ;-$\frac{1}{2}$] et [-2 ;5] par la fonction inverse.

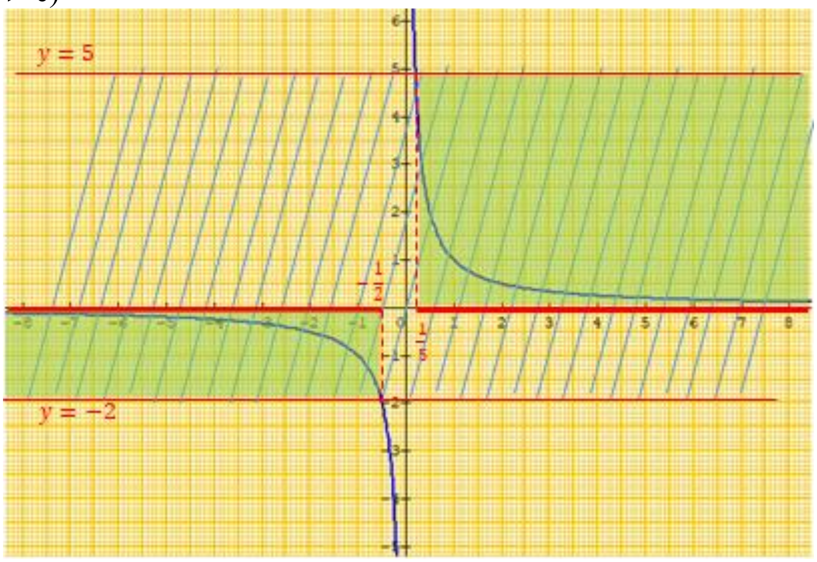
► a) et b)



Pour a), on a : S=[-$\frac{1}{5}$;1].

Pour b), on a : S=[-2 ;-$\frac{1}{5}$].

►c)



S=]-∞ ;-$\frac{1}{2}$]∪[-$\frac{1}{5}$;+∞[.

Etudier le sens de variation d'une fonction

Exercice 39

1) Il suffit de développer, réduire et ordonner le polynôme $2(x+3)^2$-25 pour obtenir f(x).

2) • Si u et v appartiennent à]-∞ ;-3] tels que u<v, alors :

u+3 < v + 3 avec u+3 et v + 3 appartenant à]-∞ ;0] ;

$(u+3)^2 > (v+3)^2$car la fonction carrée est décroissante sur]-∞ ;0] ;

$2(u+3)^2 > 2(v+3)^2$ car on a multiplié membre à membre par un nombre strictement positif;

$2(u+3)^2 - 25 > 2(v+3)^2 - 25$ car on a ajouté membre à membre -25.

c'est-à-dire f(u)>f(v).

Donc f est strictement décroissante sur]-∞ ;-3].

- Si u et v appartiennent à [-3 ;+∞[tels que u<v, alors :

u+3 < $\mathrm{v} + 3$ avec u+3 et $\mathrm{v} + 3$ appartenant à [0 ;+∞[;
$(\mathrm{u} + 5)^2 < (\mathrm{v} + 5)^2$car la fonction carrée est croissante sur [0 ;+∞[;
$2(\mathrm{u} + 3)^2 < 2(\mathrm{v} + 3)^2$ car on a multiplié membre à membre par un nombre strictement positif;
$2(\mathrm{u} + 3)^2 - 25 < 2(\mathrm{v} + 3)^2 - 25$ car on a ajouté membre à membre -25.
c'est-à-dire f(u)<f(v).
Donc f est strictement croissante sur [0 ;+∞[.

<u>Exercice</u> 40

1) g(x) existe équivaut à x∈IR et x-1≠0.
Or x-1=0 équivaut à x=1 ;
Donc g(x) existe équivaut à x∈IR et x≠1.
D'où D_g=IR-{1}, c'est-à-dire D_g=]-∞ ;1[∪]1 ;+∞[.
2) Il suffit soit d'effectuer la division euclidienne relative au quotient $\frac{2x-1}{x-1}$; soit de calculer la somme 2+$\frac{1}{x-1}$ pour obtenir $\frac{2x-1}{x-1}$.
3) • Si u et v appartiennent à]1 ;+∞[tels que u<v, alors :
u-1 < $\mathrm{v} - 1$ avec u-1 et $\mathrm{v} - 1$ appartenant à]1 ;+∞[;
$\frac{1}{\mathrm{u}-1} > \frac{1}{\mathrm{u}-1}$ car la fonction inverse est décroissante sur]-∞ ;0[;
2+$\frac{1}{\mathrm{u}-1}$ > 2+$\frac{1}{\mathrm{u}-1}$;
c'est-à-dire g(u)>g(v).
Donc g est strictement décroissante sur]1 ;+∞[.

- Si u et v appartiennent à]-∞ ;1[tels que u<v, alors :

u-1 < $\mathrm{v} - 1$ avec u-1 et $\mathrm{v} - 1$ appartenant à]-∞ ;0[;
$\frac{1}{\mathrm{u}-1} > \frac{1}{\mathrm{u}-1}$ car la fonction inverse est décroissante sur]-∞ ;0[;
2+$\frac{1}{\mathrm{u}-1}$ > 2+$\frac{1}{\mathrm{u}-1}$;
c'est-à-dire g(u)>g(v).
Donc g est strictement décroissante sur]-∞ ;0[.

3- Situations d'évaluation

<u>Exercice</u> 41

Compréhension du problème :

Données :
- Une famille veut gérer rationnellement l'eau ;
- La famille consomme quotidiennement le contenu d'une cuve cubique pleine d'arête 0,69 m ;
- La consommation trimestrielle d'eau du voisin est 6 061,1 FCFA ;
- Le tarif toute taxes exclues appliqué par de la compagnie de distribution d'eau est le suivant :
    - $1^{\text{ère}}$ tranche : jusqu'à 9 m^3, le client paie un forfait de 2 115 FCFA ;
    - $2^{\text{ème}}$ tranche : les cubages consommés après 9 m^3 jusqu'au $18^{\text{ème}}$ m^3, sont facturés à 235 FCFA le m^3 ;
    - $3^{\text{ème}}$ tranche : les cubages consommés au-delà de 18 m^3, sont facturés à 367,3 FCFA le m^3.
- Le fils a besoin qu'on l'aide à contrôler le coût de leur facture et à estimer la consommation de leur voisin.

1) *Le travail à faire :* Estime par le calcul, le montant hors taxes d'une facture trimestrielle d'eau que paie cette famille.
Démarche : Nous allons calculer le volume de la cuve, la consommation trimestrielle, puis en suivant les tranches, le coût (hors taxes) de la facture trimestrielle. On utilisera 30 jours pour un mois.
Résolution :
La capacité de la cuve : $(0{,}69)^3 = 0{,}328\ 509$ m^3.
La consommation trimestrielle (90 jours) : $90\times0{,}328\ 509 = 29{,}56581$ m^3, soit environ 30 m^3.
Calcul du coût (hors taxes) de la facture trimestrielle :
- 1ère tranche : 9 m^3 soit 2 115 FCFA ;
- 2ème tranche : 9 m^3 soit $9\times235 = 2\ 115$ FCFA ;
- 3ème tranche : 12 m^3 soit $12\times367{,}3 = 4\ 407{,}6$ FCFA.

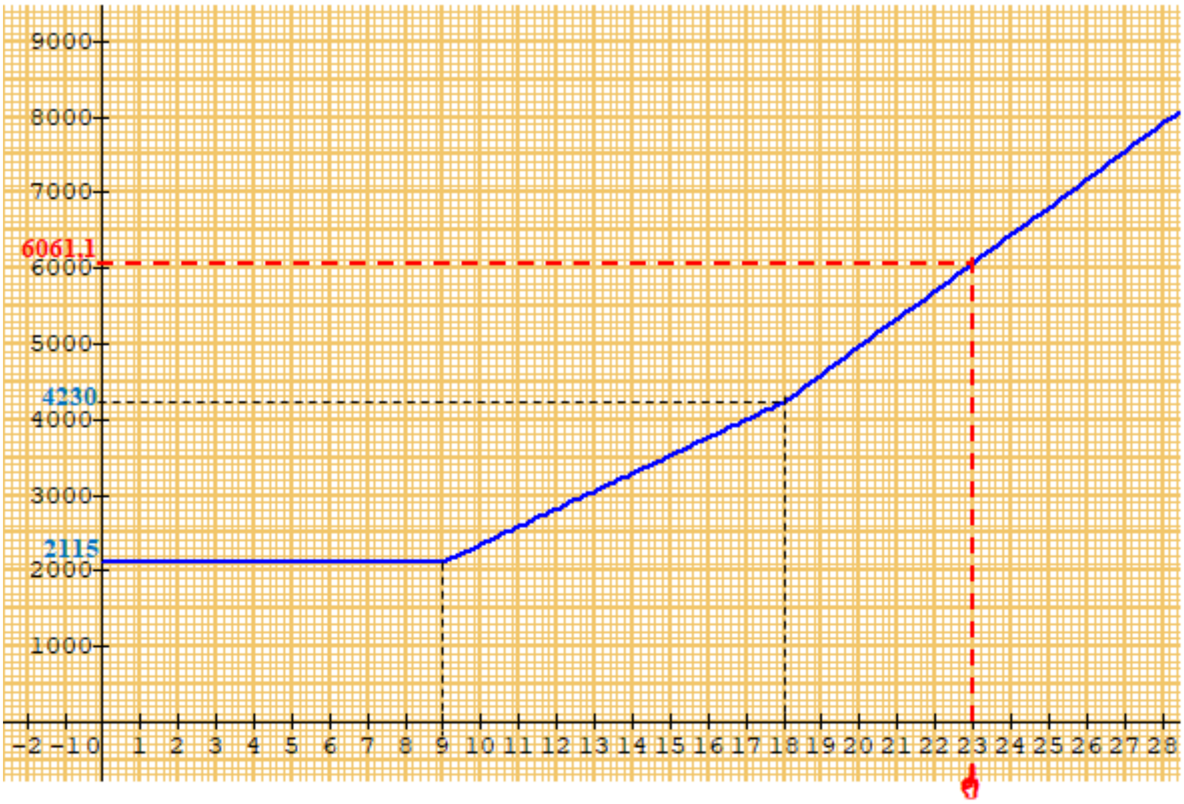
Total toutes tranches : 30 m^3 soit $2\ 115 + 2\ 115 + 4\ 407{,}6 = 8\ 637{,}6$ FCFA.
Solution : Le montant hors taxes d'une facture trimestrielle d'eau que paie cette famille s'estime à 8 637,6 FCFA.

2) *Le travail à faire :* Estime graphiquement le nombre de m^3 d'eau consommée par le voisin de la famille.
Démarche : Nous allons utiliser une fonction affine par intervalles que nous représenterons graphiquement.
Résolution :
On désigne par *f*, la fonction qui à la consommation trimestrielle x m^3 d'eau, associe le montant hors taxes $f(x)$ en francs CFA de la facture.
La modélisation de la tarification suivant les tranches donne :

$$\begin{cases} f(x) = 2115 & si\ \ 0\leq x\leq 9 \\ f(x) = 235(x-9) + 2\ 115 & si\ \ 9 < x \leq 18 \\ f(x) = 367{,}3(x-18) + 4\ 230 & si\ \ x > 18 \end{cases},$$

c'est-à-dire $\begin{cases} f(x) = 2115 & si\ \ 0\leq x\leq 9 \\ f(x) = 235x & si\ \ 9 < x \leq 18 \\ f(x) = 367{,}3x - 2\ 381{,}4 & si\ \ x > 18 \end{cases}$.

f est une fonction affine par intervalles.
En prendre en abscisse 0,5 cm pour 1 m^3 et en ordonnées 1 cm pour 1000 FCFA, on obtient la représentation graphique suivante :



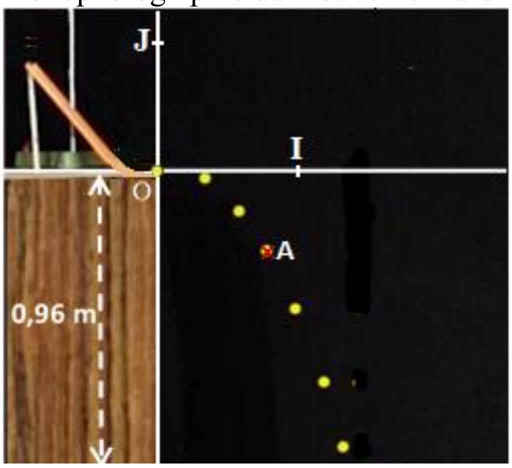
Solution : La consommation d'eau du voisin de la famille s'estime à 23 m^3 le trimestre.

<u>Exercice</u> 42

Compréhension du problème :

Données :

- Lors d'une expérience de physique, une classe de seconde a réalisé la chronophotographie du mouvement d'une bille lâchée dans une gouttière :



- La trajectoire de la bille est plane, parabolique de sommet O ;
- Le point O est situé à 0,96 m du sol ;
- A(0,9 ;-0,54) dans le repère orthonormé (O ; I ; J).

1) *Le travail à faire :* Déterminer la distance entre le point de chute de la bille et le pied du support de la gouttière.

Démarche : Nous allons utiliser une fonction dont la représentation graphique est une parabole.

Résolution :

Soit *n* l'abscisse du point de chute M de la bille ; on a : M(*n* ;-0,54).
La distance entre le point de chute M de la bille et le pied du support de la gouttière est égale à *n* ; *n* étant un nombre réel strictement positif.
La trajectoire de la bille étant parabolique, elle est la courbe de la fonction *f* définie sur [0 ;*n*] par $f(x) = ax^2$ où *a* est un coefficient réel à déterminer:
Comme la courbe passe par le point A(0,9 ; -0,54), on a :
$f(0,9) = -0,54$, c'est-à-dire $\times(0,9)^2 = -0,54$,

c'est-à-dire encore $a = -\frac{2}{3}$;

d'où $f(x) = -\frac{2}{3}x^2$.

Les coordonnées du point de chute M(*n* ;-0,54) de la bille vérifie :
$f(n) = -0,96$, c'est-à-dire $-\frac{2}{3} \times n^2 = -0,54$,

c'est-à-dire encore $n^2 = 1,44$;

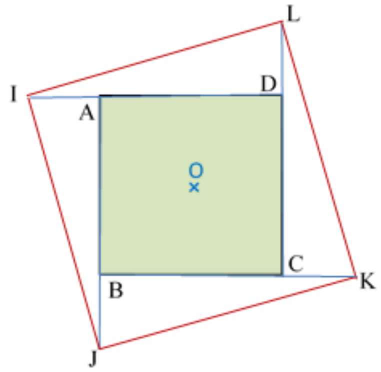
d'où *n*=1,2 car *n* est positif.

Solution : La bille est tombée à 1,2 m du pied du support de la gouttière.

Leçon 14 : ROTATION **Seconde C**

EXERCICE PROFONDEMENT MODIFIE

Exercice 35

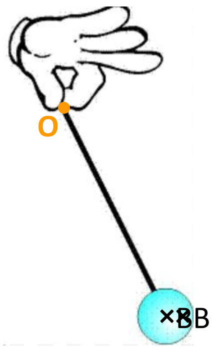


Un jardinier voudrait agrandir sa parcelle, le carré ABCD direct de centre O en reculant les bornes de la même longueur. Il aura ainsi une nouvelle parcelle, le quadrilatère IJKL comme présenté sur l'esquisse ci-contre. Mais il s'inquiète car il aimerait que la nouvelle parcelle soit également carrée.

Son fils vous informe et vous demande de l'aider à dissiper les craintes de son père en utilisant la transformation du plan qui applique A sur B et I sur J.

Démontre que la nouvelle parcelle du jardinier est un carré.

FIGURE DE L'ACTIVITE 1



I- Situation d'apprentissage

Proposition de présentation de la situation d'apprentissage :

Question d'appropriation de la situation :

	Questionnement/consigne	**Réponses**
CONTEXTE	Quel geste le petit frère observé a-t-il fait avec son doit ?	Il fait tourner légèrement l'hélice d'un ventilateur au repos.
CIRCONSTANCE	Décrit ce que l'élève observateur et curieux désire-t-il faire.	Curieux, l'élève observateur veut représenter l'hélice dans la position initiale de repos, puis après avoir

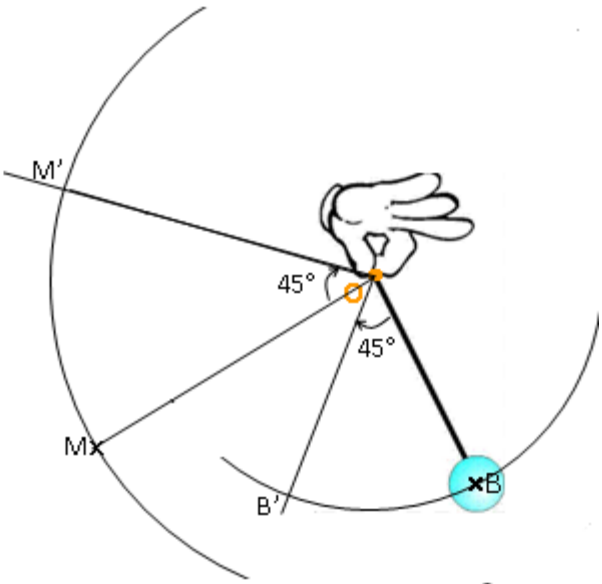
		tourné d'un angle de 30° dans le sens de l'aiguille d'une montre.
TACHE(S)	Ayant reçu des propositions sur un forum d'internet, l'élève et toute sa classe se sont engagés à réaliser au préalable des tâches ; précise ces tâches.	S'approprier la définition, les propriétés et applications des rotations.

Proposition de la synthèse :
Pour représenter efficacement l'hélice dans la position initiale de repos, puis après avoir tourné d'un angle de 30° dans le sens de l'aiguille d'une montre, il est nécessaire de s'approprier la définition, les propriétés et applications des rotations.
Cette étude se fera dans la présente leçon titrée : « **ROTATION** ».

II- Activités

1- Connaître la définition d'une rotation ; construire l'image d'un point par une rotation en utilisant la définition

Activité 1 1) a) Mouvement de rotation autour du point O.
b) Le sens de rotation de l'aiguille d'une montre, autrement dit, le sens indirect.
c)



d) OB'=OB ; Mes$(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}})= -\frac{\pi}{4}$.

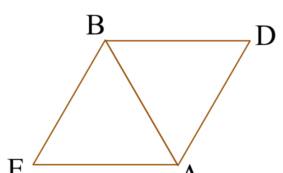
2) a) Voir figure ci-dessus.
b) OM'=OM ; Mes$(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}})= -\frac{\pi}{4}$.

2) O demeure en O.

J'évalue mes acquis : c).

2- Connaître la propriété relative aux points invariants par une rotation Trouver l'image d'un point par une rotation.

Activité2



1)

r	
B	E
D	B
A	A

2) Il n'existe pas de point M différent de A tel que r(M)=M.

3) Supposons qu'il existe un point M différent de O tel que R(M)=M.

R(M)=M $\Leftrightarrow OM = OM$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}}) = \alpha$; ce qui implique que $\alpha = 0\, rad$.

Cela est impossible (contradictoire) car α est non nul par hypothèse.

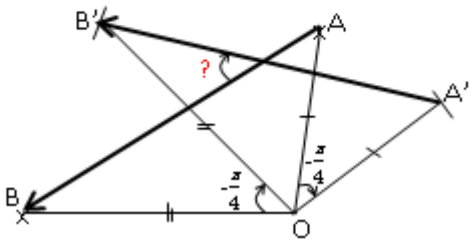
Donc O est le seul point invariant par R.

J'évalue mes acquis : I=O car le seul point invariant par une rotation d'angle non nul est son centre.

3- Connaître la propriété fondamentale de la rotation

Activité3

1)



2) Après les différentes vérifications aux consigne 2a) et 2b), on conjecture que :

« Si r est une rotation d'angle α telle que r(A)=A' et r(B)=B', alors A'B' = AB et $Mes(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}}) = \alpha$. »

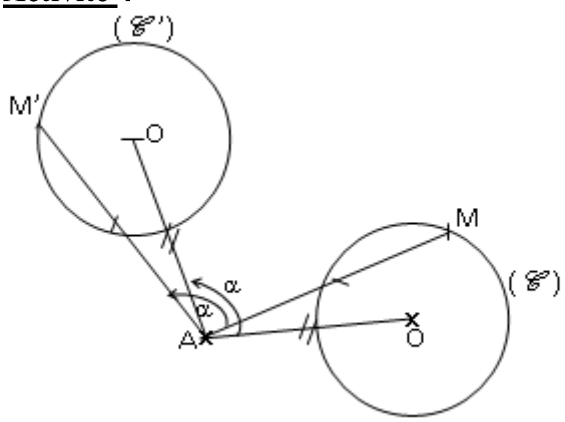
On admettra ce résultat fondamental.

J'évalue mes acquis : $Mes(\widehat{\overrightarrow{E'F'}, \overrightarrow{EF}}) = \frac{\pi}{5}$ *et E'F' = EF.*

4- Connaître les propriétés relatives aux images de figures simples par une rotation

a) Image d'un cercle

Activité 4



1-a) On a :

r	
A M	A’ M’

.

Donc d’après la propriété fondamentale des rotations, on a : A’M’=AM.

b) M∈ $\mathscr{C}$(A ;R) donc AM=R. Or, A’M’=AM; donc A’M’=R. D’où M’∈ $\mathscr{C}$’(A’ ;R).

2- Réciproquement, si M’∈ $\mathscr{C}$’(A’ ;R) alors A’M’=R.

Il existe un point M du plan tel que OM=OM’ et Mes$(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}})$= α.

Il existe un point M du plan tel que r(M)=M’.

On a :

r	
A M	A’ M’

et donc A’M’=AM (propriété fondamentale).

Ainsi, on obtient AM=R.

D’où M∈ $\mathscr{C}$(A ;R).

On conclus que si M’∈ $\mathscr{C}$’(A’ ;R) alors, Il existe un point M du plan appartenant à $\mathscr{C}$(A;R) tel que r(M)=M’.

3) Par la rotation de centre O et d’angle orienté α, l’image du cercle ($\mathscr{C}$) de centre A et de rayon R est le cercle de centre A’ et de rayon R.

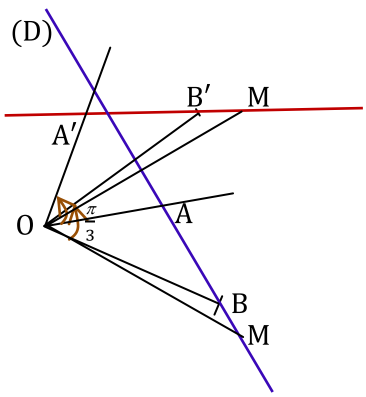
J’évalue mes acquis : On a : *r*(I)=J.

Par la rotation *r*, l’image du cercle C(I;3) est le cercle C’(J;3).

b) <u>Image d’une droite</u>

<u>Activité 5</u>

1)



2- a) On vérifie à l’aide d’une règle que les A, B et M d’une part et les points A’, B’ et M’ d’autre part, sont alignés et dans le même ordre ; ce qui donne $(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}})$= $(\widehat{\overrightarrow{A'M'},\overrightarrow{B'M'}})$ *(lorsque M≠A et M≠B).*

b) Démontrons que : « $(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}})$= $(\widehat{\overrightarrow{A'M'},\overrightarrow{B'M'}})$ *lorsque M≠A et M≠B.* »

Supposons que M≠A et M≠B.

Les point A, B et M sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires. On a :

$\overset{r}{\curvearrowright}$	
A	A’
B	B’
M	M’

. Donc par définition, on a : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B'M'}}) = \alpha$.

- Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires et de même sens (c’est-à-dire $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}})=0$), alors les vecteurs $\overrightarrow{A'M'}$ et $\overrightarrow{B'M'}$ sont également sont colinéaires et de même sens ; donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{B'M'}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}})=0$.
- Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires et de sens contraire (c’est-à-dire $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}})=\pi$), alors les vecteurs $\overrightarrow{A'M'}$ et $\overrightarrow{B'M'}$ sont également sont colinéaires et de sens contraire ; donc $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{B'M'}}) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}})=\pi$.

Ainsi, lorsque $M \neq A$ et $M \neq B$, on a : $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{B'M'}})$.

c) Selon la résolution de la consigne précédente, $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{B'M'}})$ est égale à 0 ou π.
D’où **M’ appartient à la droite (A’B’).**

d) Lorsque M=A, on a M’=A’, donc M’ $\in$(A’B’).
Lorsque M=B, on a M’=B’, donc M’ $\in$(A’B’).

3) a) Soit **N’ un point de la droite (A’B’).**

Il existe un point N du plan tel que ON=ON’ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{ON'}}) = \alpha$.
Il existe donc un point N du plan tel que r(N)=N’.

Il reste à montrer que N appartient à la droite (AB) :

On a :

$\overset{r}{\curvearrowright}$	
A	A’
B	B’
N	N’

et N’ $\in$(A’B’).

Considérons la rotation r' de centre O et d’angle orienté $-\alpha$.

On a :

$\overset{r'}{\curvearrowright}$	
A’	A
B’	B
N’	N

et N’ $\in$(A’B’).

D’après les résultats des consignes c) et d) précédentes, on conclut que **N$\in$(AB)**.

b) Par la rotation r, l’image de la droite (AB) est la droite (A’B’).

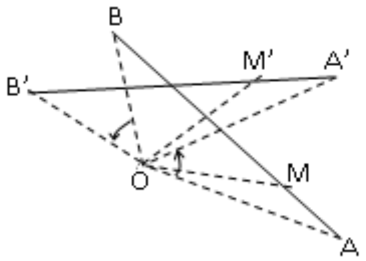
J’évalue mes acquis :

Objets	A	B	O	(AB)	(AO)
Image par r	D	F	O	(DF)	(DO)

b) <u>Image d’un segment</u>

<u>Activité</u> 6

1) et 2)



3) On a :

$\xrightarrow{r}$	
A	A'
B	B'
M	M'

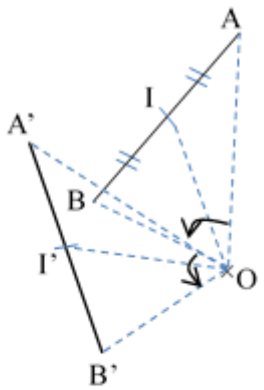
Selon la propriété fondamentale, on déduit du tableau que A'M'=AM, M'B'=MB et A'B'=AB.
Or comme M$\in$[AB], on a AB=AM+MB;
donc A'B'=A'M'+M'B';
d'où M'$\in$[A'B'].
4) Soit N' un point du segment [A'B'].
a) N' étant un point du plan, il existe un point N du plan tel que ON=ON' et Mes$(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{ON'}})= \alpha$.
Il existe donc un point N du plan tel que r(N)=N'.
b) Considérons la rotation r' de centre O et d'angle orienté -α.
On a :

$\xrightarrow{r'}$	
A'	A
B'	B
N'	N

et N'$\in$[A'B'].
D'après le résultat de la consigne 3), on conclut que N$\in$[AB].
b) Par la rotation r, l'image du segment [AB] est le segment [A'B'].

5- Connaître les propriétés de conservation

<u>a) Conservation du milieu</u>
<u>Activité</u> 7
1) a)



b) On vérifie avec le compas que I' est le milieu du segment [A'B'].

2) I est le milieu du segment [AB], donc on a AI=BI et I∈[AB].

On a :

r	
A B I	A' B' I'

et I∈[AB],

donc I'∈[A'B'] car par une rotation, l'image d'un segment est un segment.

Du tableau, on tire également que A'I'=AI et I'B'=IB d'après la propriété fondamentale des rotations.

Or AI=BI,

donc A'I'=I'B'.

Comme I'∈[A'B'] et A'I'=I'B', on conclut que I' est le milieu du segment [A'B'].

J'évalue mes acquis :

On a :

I est le milieu de [AB] et

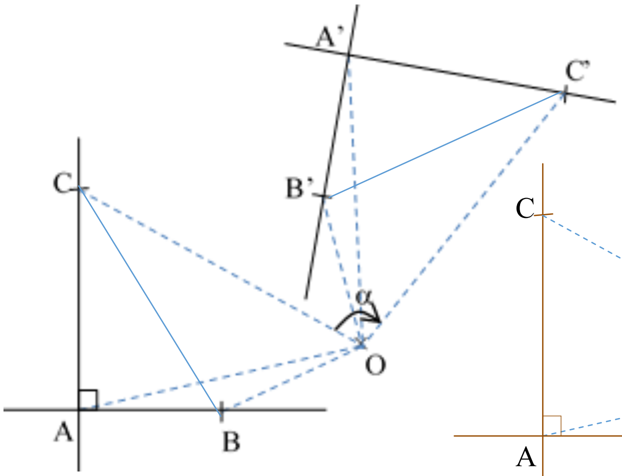
r	
A B [AB]	B C [BC]

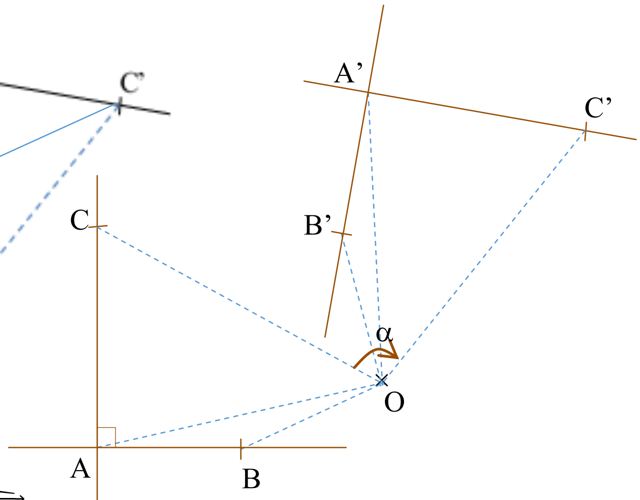
et J est le milieu de [BC] ;

donc r(I)=J, car toute rotation conserve le milieu.

b) <u>Conservation de l'orthogonalité</u>

<u>Activité</u> 8





1) (AB)⊥(AC) donc l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ est droit.
On a :

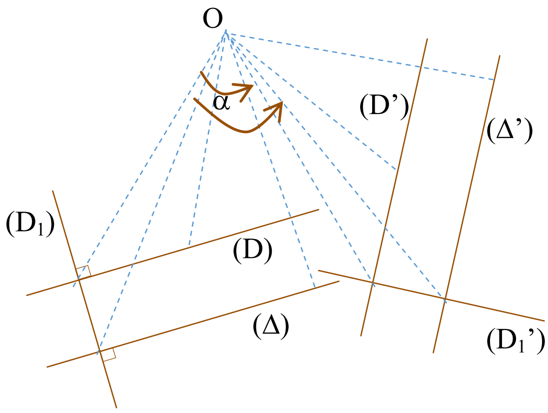
r	
A B C	A' B' C'

, donc AB=A'B', AC=A'C' et BC=B'C' ;
Donc les triangles ABC et A'B'C' sont superposables.

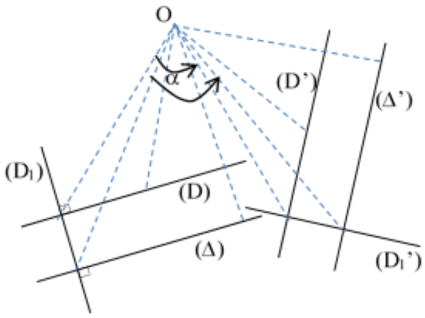
Comme l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ est droit, son angle homologue $(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}})$ est également droit.

2) L'angle $(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}})$ est droit, donc (A'B')⊥(A'C').
3) Par la rotation *r*, deux droites perpendiculaires, ont pour images deux droites perpendiculaires.

J'évalue mes acquis :
Le triangle ABC est rectangle donc il a deux côtés de supports perpendiculaires.
On sait que toute rotation transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires, donc le triangle A'B'C', image du triangle ABC par la rotation r est rectangle.



<u>c) Conservation du parallélisme</u>
<u>Activité</u> 9



1) On a :

$\xrightarrow{r}$	
(D)	(D')
(Δ)	(Δ')
(D_1)	(D_1')

et $(D_1)\perp(D)$ et $(D_1)\perp(\Delta)$;
donc $(D_1')\perp(D')$ et $(D_1')\perp(\Delta')$, car toute rotation conserve l'orthogonalité.
2) Avec $(D_1')\perp(D')$ et $(D_1')\perp(\Delta')$, on conclut que $(D')\perp(\Delta')$ car deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles,
3) Par la rotation *r*, deux droites parallèles, ont pour images deux droites parallèles.

V- Exercices

1- Exercices de fixation

Connaître la définition d'une rotation
Connaître la propriété relative aux points invariants par une rotation

Exercice1

1- Soit r la rotation de centre K et d'angle orienté $-\frac{\pi}{5}$.

A est l'image de B par r signifie que

$a)\ Mes(\widehat{\overrightarrow{KA};\overrightarrow{KB}}) = -\frac{\pi}{5}$ et $KA=KB$.

2- Figure 3.

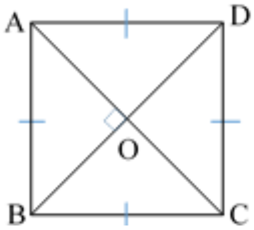
3- Soit r la rotation de centre I et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

M' étant l'image de M par r on a :

b) $\overrightarrow{\mathrm{IM'}}=\overrightarrow{\mathrm{IM}}$

c) IMM' est un triangle équilatéral direct.

Exercice 2



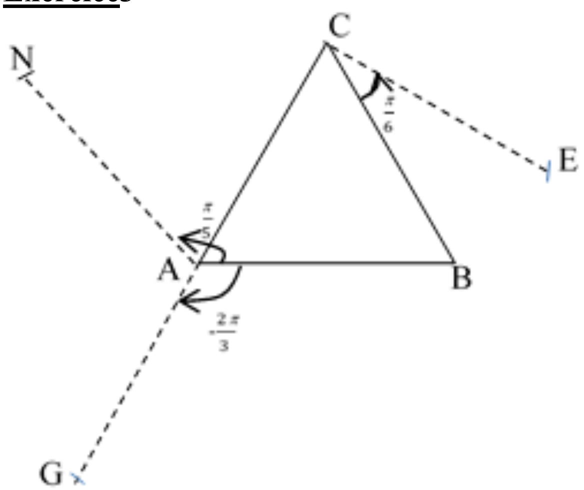
r est le quart de tour tel que :

$\overset{r}{\curvearrowright}$	
A B	D A

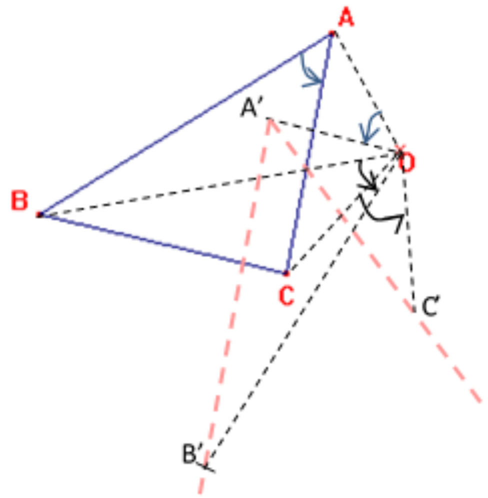
La réponse correcte est 2) : « Le centre de r est le point O »

Construire l'image d'un point par une rotation en utilisant la définition

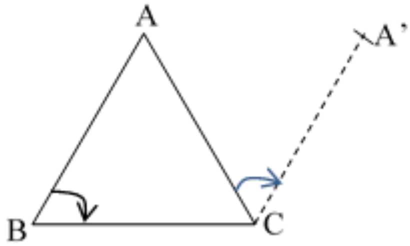
Exercice3



Exercice4



Exercice 5



Connaître la propriété fondamentale de la rotation

Exercice 6

1- r : rotation de centre I et d'angle orienté $\frac{\pi}{4}$.

E' et F' sont les images respectives de E et F par r. On a : $Mes(\widehat{\overrightarrow{EF};\overrightarrow{E'F'}}) = \frac{\pi}{4}$.

2- O, A et B sont trois points distincts non alignés du plan, A' et B' sont les images respectives des points A et B par la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$. On a : $Mes(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{3}$.

Connaître les propriétés relatives aux images de figures simples par une rotation

Exercice 7

Objet	G	M	K	(MG)	[KG]	[MK)	$(\widehat{\overrightarrow{GM};\overrightarrow{GK}})$	$\mathscr{C}$(K ;3)
Image par r	E	N	K	(NE)	[KE]	[NK)	$(\widehat{\overrightarrow{EN};\overrightarrow{EK}})$	$\mathscr{C}$(K ;3)

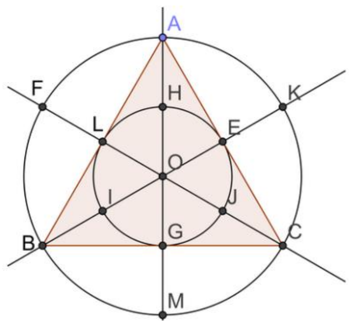
Exercice 8

Objet	(BD)	[AC]	[DC)	$(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{BC}})$	$\mathscr{C}$(C ;4)
Image par r	(CE)	[AD]	[ED)	$(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{CD}})$	$\mathscr{C}$(D ;4)

Trouver l'image d'un point par une rotation

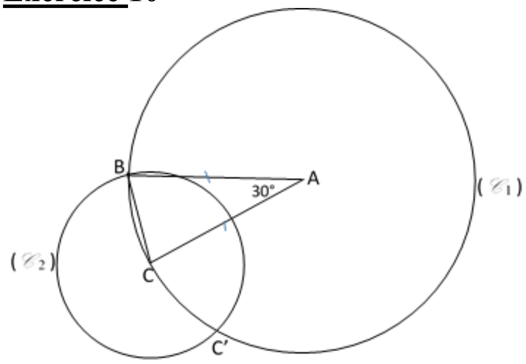
Exercice 9

Angle α	Point	Image du point par r
60°	A	F
-60°	M	B
- 120°	E	G



120°	C	A
180°	F	C

Exercice 10



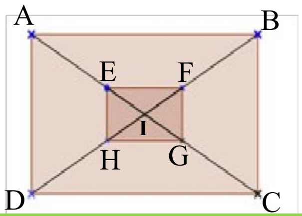
• r(B)=C car $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{6}$ et $AB=AC$.

• On a :

r	
B C	C C'

donc AC=AC' *(définition de la rotation r)* et BC=CC' *(propriété fondamentale)*.
Donc C'∈ $\mathscr{C}_1$(A ; AC) et C'∈ $\mathscr{C}_2$(C ; BC).
D'où C'∈ $\mathscr{C}_1$(A ; AC) ∩ $\mathscr{C}_2$(C ; BC).
Ainsi, pour construire C', il suffit de construire ces deux cercles.

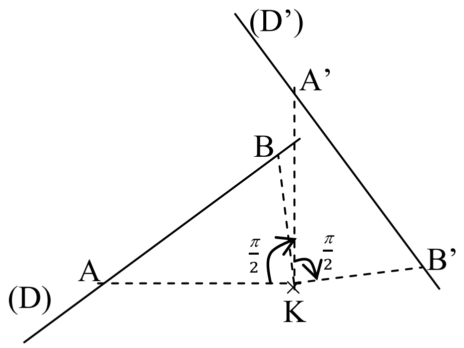
Exercice 11



Affirmation	R(A)=B	R(H)=G	R(C)=B	R(B)=A	R(D)=C
Appréciation	Faux	Vrai	Faux	Vrai	Vrai

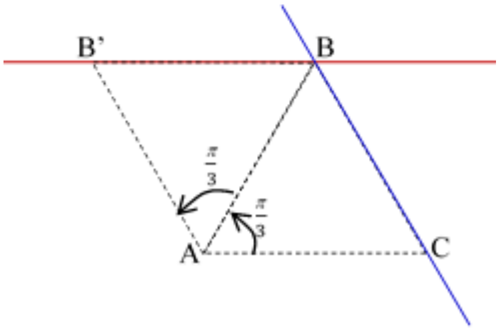
Construire l'image d'une figure simple par une rotation

Exercice12



Exercice13

r	
B C (BC)	B' B (BB')



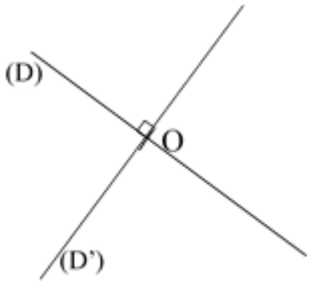
<u>Exercice</u> 14

r((D)) = (D').

Contrainte : Utilisé une règle non graduée et une équerre,

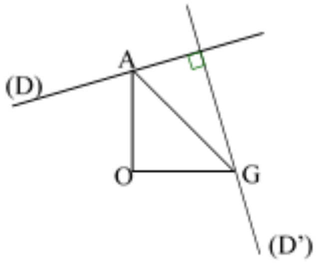
1er cas : r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Il suffit de construire la droite (D') passe par O et perpendiculaire à la droite (D).

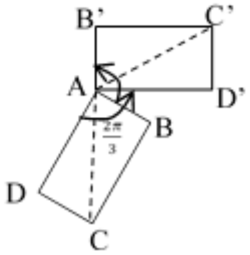


2ème cas : r est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On donne r(A)=G.

Il suffit de construire la droite (D') passe par G et perpendiculaire à la droite (D).

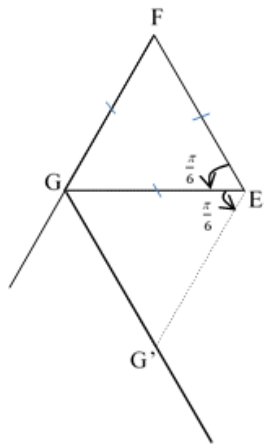


<u>Exercice</u> 15



<u>Exercice</u> 16

r	
F	G
G	G'
[FG)	[GG')

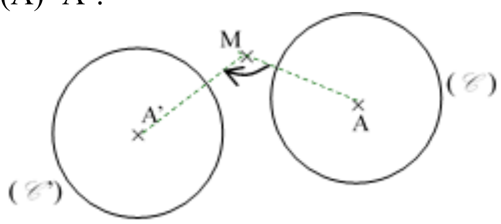


<u>Exercice</u> 17

$r((\mathscr{C})) = (\mathscr{C}')$.

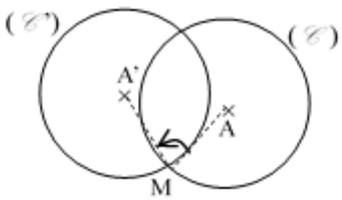
1er cas : r est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

r(A)=A'.



2ème cas : r est la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

r(A)=A'.



Connaître les propriétés relatives à la conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu et des angles orientés par une rotation

<u>Exercice</u> 18

Soit r une rotation.

1) Si par la rotation r, les droites parallèles (AB) et (CD) ont pour images respectives les droites (A'B') et (C'D'), alors **<u>les droites (A'B') et (C'D') sont parallèles</u>**

Car <u>*par une rotation, deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.*</u>

2) Si on a

r	
(AB)	(A'B')
(CD)	(C'D')

et (AB)⊥(CD) ;

alors **(A'B')⊥(C'D'),**

Car <u>*par une rotation, deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.*</u>

3) Si par la rotation r, les points alignés A, B et C ont pour images les points A', B' et C', alors **<u>les points A', B' et C' sont alignés,</u>**
Car *<u>par une rotation, trois points alignés ont pour images trois points alignés.</u>*
4) Si on a

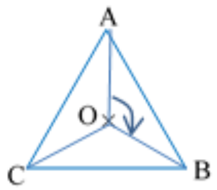
$\xrightarrow{r}$	
A	A'
B	B'
I	K

et I est le milieu du segment [AB],
alors **K est le milieu du segment [A'B']**
Car *<u>par une rotation, le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.</u>*
4) Si par la rotation r, on a r(A)=A', r(B)=B', r(C)=C' et r(D)=D', alors les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{C'D'}})$ **sont égaux**
Car *<u>toute rotation conserve les angles orientés (</u>un angle orienté a pour image un angle orienté qui lui est égale<u>).</u>*

Connaître les propriétés relatives à la caractérisation d'une rotation
Déterminer le centre et l'angle d'une rotation

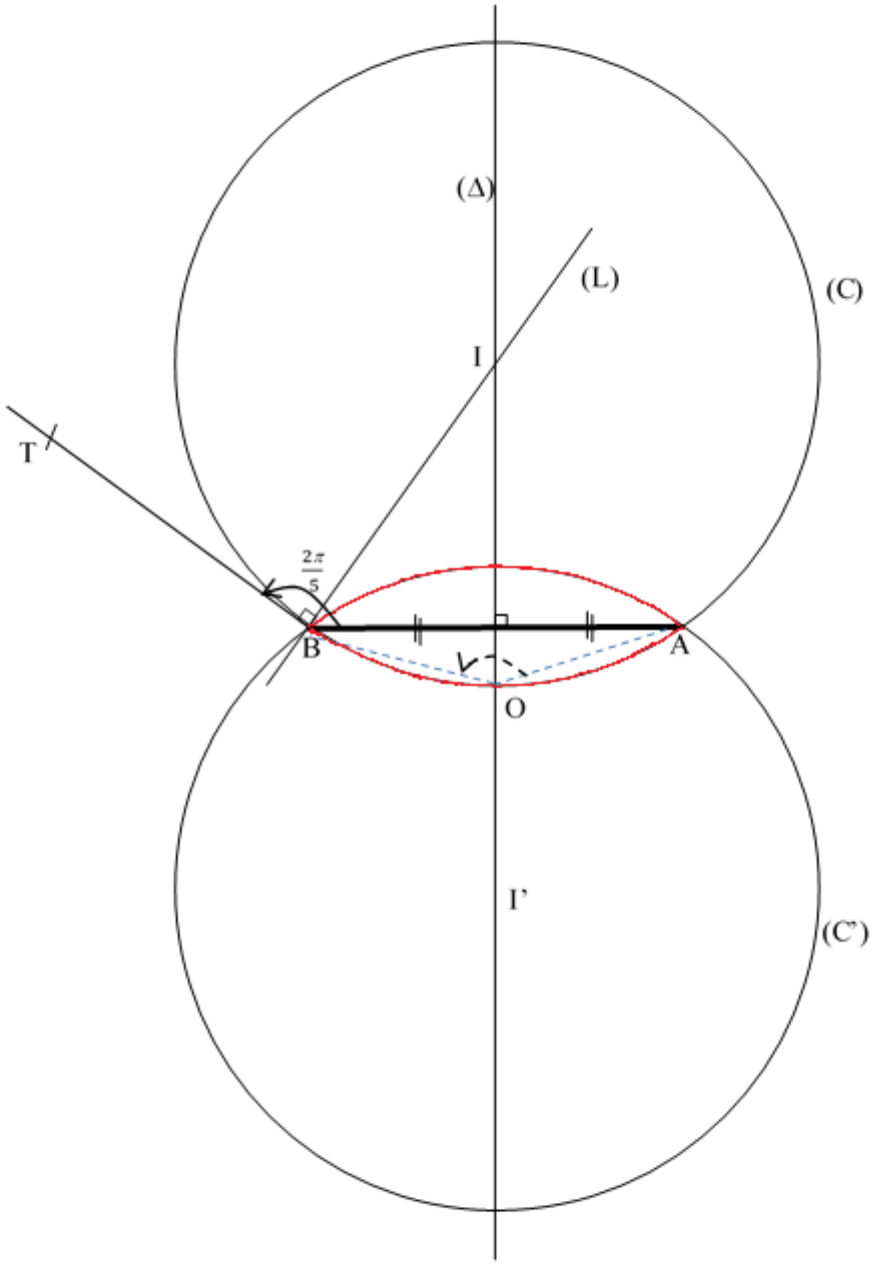
<u>Exercice</u> 19
1) Soit O un point, et A et A' deux points distincts de O.
Si **<u>OA=OA'</u>** alors il existe une unique rotation de centre O et qui transforme A en A'.
2) Soit A et B deux points distincts, et A' et B' deux autres points.
Si **<u>AB=A'B' avec $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{A'B'}$</u>** alors il existe une unique rotation qui transforme A en A' et B en B'.

<u>Exercice</u> 20
1) O est le centre du cercle circonscrit du triangle équilatéral ABC donc OA=OB ;
Ainsi, il existe une unique rotation de centre O et qui transforme A en B.
2)



De r(A)=B, on tire de la définition que $\alpha = Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$, c'est-à-dire $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ (car le triangle ABC est directe).

<u>Exercice</u> 21
Détermination du centre O de la rotation r :
De r(A)=B, on a OB=OA et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \frac{2\pi}{5}$; donc O est à l'intersection de la médiatrice de [AB] avec l'arc capable d'angle $\frac{2\pi}{5}$ d'extrémité [AB] :



<u>Programme de construction :</u>

Tracer le segment [AB] de longueur 5 cm ;

Construire un point T tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BT}})=\frac{2\pi}{5}$;

Construire la droite (L) passant par B et perpendiculaire à la droite (BT) ;

Construire la droite (Δ) médiatrice du segment [AB] ;

Marquer I à l'intersection des droites (L) et (Δ) ;

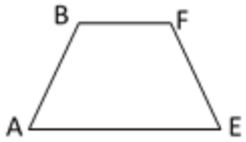
Construire le cercle (C) de centre I et passant par A et B ;

Construire le cercle (C') de centre I' et passant par A et B, où I' est le symétrique de I par rapport à (AB) ;

Marquer O est à l'intersection de la médiatrice de [AB] avec l'arc capable (en bleu) d'angle $\frac{2\pi}{5}$ d'extrémité [AB], de sorte que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ soit de même sens que $\frac{2\pi}{5}$.

NB : on aurait pu faire la construction à partir du point A au lieu du point B.

<u>Exercice</u> 22



r	
A	E
B	F
O	O

• Ici les droites (AE) et (BF) sont parallèles, les médiatrices des segments [AE] et [BF] ne sont pas sécantes. Dans ce cas, le centre O de la rotation r est le point d'intersection des droites (AB) et (EF).

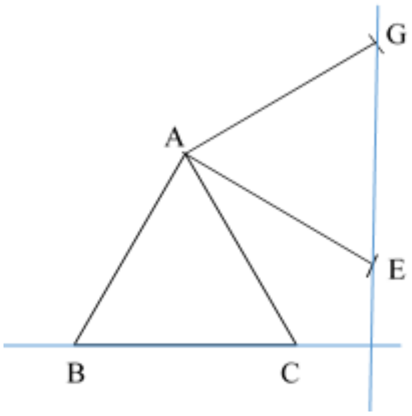
• La propriété fondamentale donne la mesure de l'angle α de la rotation r :

$\alpha=\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{FE}})=\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{EF}})=\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}})$.

Ici, il apparait nécessaire de ramener les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ à la même origine.

En utilisant une rotation, démontrer que deux droites sont parallèles, que des droites sont perpendiculaires, une égalité angulaire, qu'un point est le milieu d'un segment

<u>Exercice</u> 23



1) E = r(B) donc $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}})=\frac{\pi}{2}$ (d'après la définition).

Donc (AE)⊥(AB)

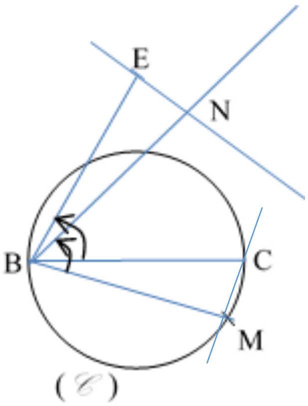
2) On a :

r	
B	E
C	G

donc d'après la propriété fondamentale, on a : $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{EG}})=\frac{\pi}{2}$;

D'où (BC)⊥(EG).

<u>Exercice</u> 24

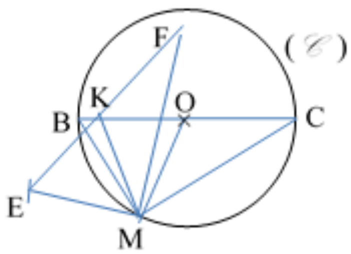


M est distinct de B et C, et M appartient au cercle de diamètre [BC], donc le triangle BMC est rectangle en M.
Ainsi, t (CM)⊥(BM).
On a :

r	
C	E
M	N
B	B
(CM)	(EN)
(BM)	(BN)

et (CM)⊥(BM) ;
donc (EN)⊥(BN), car par une rotation, deux droites perpendiculaires, ont pour images deux droites perpendiculaires.

<u>Exercice</u> 25

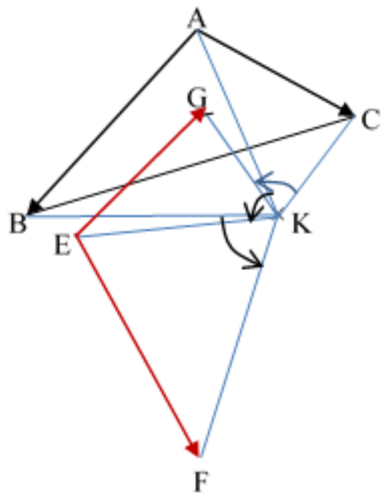


(𝒞) un cercle de centre O et de diamètre [BC], donc O est le milieu du segment [BC].
On a :

r	
B	E
C	F
O	K
[BC]	[EF]

et O est le milieu du segment [BC] ;
donc K est le milieu du segment [EF], car par une rotation, le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment

<u>Exercice</u> 26



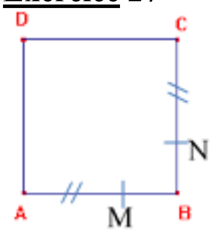
On a :

r	
A B C $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$	E F G $(\widehat{\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG}})$

donc Mes$(\widehat{\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG}})$ = Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$;
car <u>toute rotation conserve les angles orientés (</u>un angle orienté a pour image un angle orienté qui lui est égale<u>).</u>

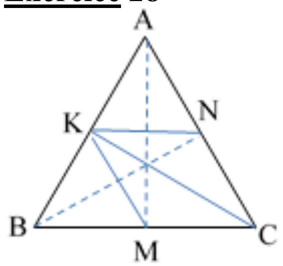
2- **<u>Exercices de renforcement / approfondissement</u>**

<u>Exercice</u> 27



Désignons par (L) la médiatrice du segment [MN] et par O un point de (L).
On a : OM=ON ;
Ainsi, pour tout point O de (L), il existe une unique rotation de centre O et qui transforme M en N, c'est-à-dire la rotation de centre O et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}})$.
Exemples :
- Pour O=B : il s'agit de la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
- Pour O=I, où I est le milieu du segment [MN] : il s'agit de la rotation de centre I et d'angle π.

<u>Exercice</u> 28



1) ABC étant un triangle équilatéral et M et N milieux respectifs des segments [AC] et [BC], on justifie facilement que AN=MB.

Les point A et E sont distincts, les points M et B sont tels que $\overrightarrow{AN} \neq \overrightarrow{MB'}$.
Comme AN=MB alors il existe une unique rotation qui transforme A en M et N en B.
2) • Détermination du centre de r :
Démarche : Il suffit de déterminer le point d'intersection des médiatrices des segments [AM] et [BN]. L'observation minutieuse de la figure suggère de montrer que K est ce point cherché.

K, M et N étant les milieux respectifs des côtés [AB], [AC] et [BC] du triangle équilatéral ABC, on a d'une part :
KN=KB et KM=BN (d'après la propriété e la droite des milieux d'un triangle),
et d'autre part : KA=KB=AM=BN.
De ces deux conclusions, on tire que : KA=KM et KB=KN.
Ainsi, K est le point d'intersection des médiatrices des segments [AM] et [BN].
Donc K est le centre de la rotation r.
• Détermination de l'angle α de la rotation r :
On a :

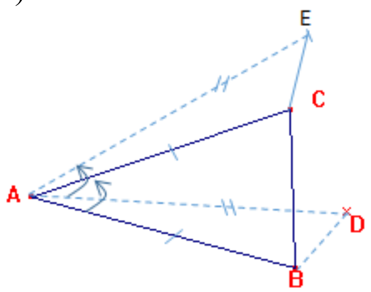
r	
A	M
N	B
K	K

Il y a plusieurs voies possibles à suivre pour déterminer α.

- Avec la définition, on peut choisir : Mes($\widehat{\overrightarrow{KA};\overrightarrow{KM}}$) ou Mes($\widehat{\overrightarrow{KN};\overrightarrow{KB}}$).
- Avec la propriété fondamentale, on peut choisir : Mes($\widehat{\overrightarrow{AN};\overrightarrow{MB}}$) ou Mes($\widehat{\overrightarrow{NA};\overrightarrow{BM}}$).

Utilisons par exemple : α=Mes($\widehat{\overrightarrow{KA};\overrightarrow{KM}}$) .
La propriété des angles correspondants formés par deux droites parallèles et une sécante permet d'écrire : α=Mes($\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}$), c'est-à-dire α=$-\frac{\pi}{3}$ (car le triangle ABC et equilatéral).

Exercice 29
1)



2)

r	
B	C
D	E

donc CE=BD (d'après la propriété fondamentale des rotations).

Exercice 30
Données :
- (Δ), (D) et (L) sont trois droites disjointes ;

- A∈(Δ) ;
Tâche : construire un triangle ABC équilatéral direct tel que B∈(D) et C∈(L).
Esquisse du résultat attendu :

Recherche d'une démarche :
Le triangle ABC étant équilatéral et le point A fixé, cela suggère deux rotations de centre A :
- la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$;
- la rotation r' de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

On a :

$\overset{r}{\curvearrowright}$	
(D)	(D')
B	C

Comme B∈(D), on a C∈(D').
Or C∈(L) ; donc {C}=(D')∩(L).
On a :

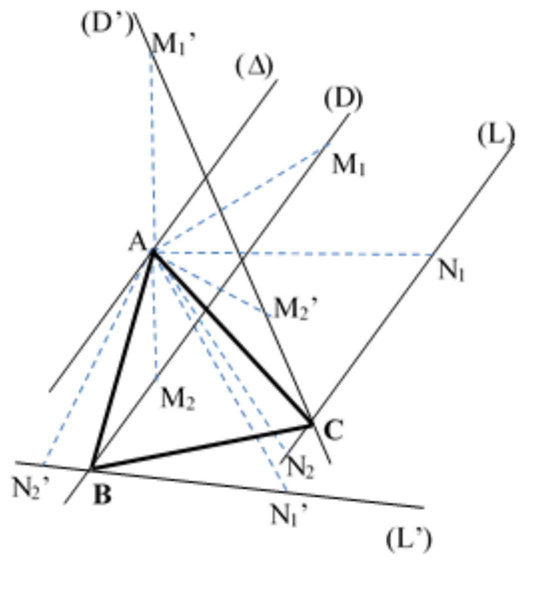
$\overset{r'}{\curvearrowright}$	
(L)	(L')
C	B

A

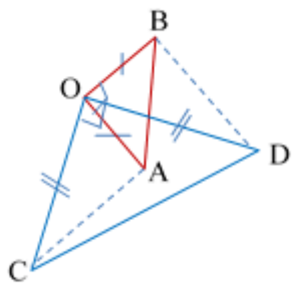
Comme C∈(L), on a B∈(L').
Or B∈(D) ; donc {C}=(L')∩(D).
Démarche à suivre pour la construction : On utilise les rotations r et r' de centre A et d'angles respectifs $\frac{\pi}{3}$ *et* $-\frac{\pi}{3}$.

Programme de construction :
- construire la droite (D'), image de la droite (D) par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$;
- marquer le point C à l'intersection des droites (D') et (L).
- construire la droite (L'), image de la droite (L) par la rotation r' de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$;
- marquer le point B à l'intersection des droites (L') et (D).
- tracer le triangle ABC.

Figure :



Exercice 31



1) Considérons la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On a :

$\overset{r}{\curvearrowright}$	
C	D
A	B
[AC]	[BD]

donc AC=BD car toute rotation conserve la distance.

2) Du tableau

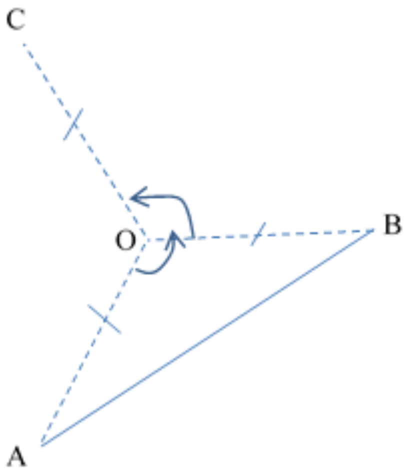
$\overset{r}{\curvearrowright}$	
C	D
A	B

, on déduit que Mes$(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}})=\frac{\pi}{2}$ d'après la propriété fondamentale des rotations.

D'où (AC)⊥(BD) .

<u>Exercice</u> 32

1) a)



b) On a :

$\overset{r}{\curvearrowright}$	
A	B
B	C

donc d'après la propriété fondamentale AB=BC.

2) a) On a :

r	
O A B	O B C

Donc $\begin{cases} OA = OB \; et \; OB = OC \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\text{OA}};\overrightarrow{\text{OB}}}\right) = \frac{2\pi}{3} \; et \;\; \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\text{OB}};\overrightarrow{\text{OC}}}) = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$;

donc $\begin{cases} OA = OC \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\text{OA}};\overrightarrow{\text{OB}}}\right) - \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\text{OB}};\overrightarrow{\text{OC}}}) = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$;

donc $\begin{cases} OA = OC \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\text{OA}};\overrightarrow{\text{OC}}}\right) = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$;

donc $\begin{cases} OA = OC \\ \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{\text{OC}};\overrightarrow{\text{OA}}}\right) = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$.

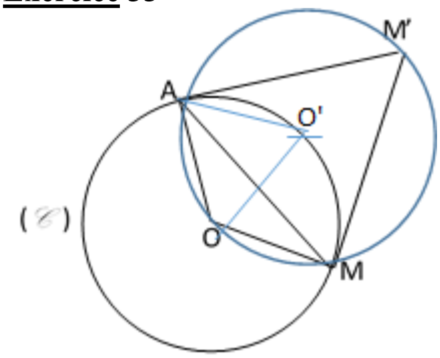
D'où r©=A.

a) Du tableau

r	
A C	B A

, on tire que AC=AB (propriété fondamentale).
Or on a dans le résultat de la consigne 1b) : AB=BC ;
donc AB=BC=AC ;
d'où le triangle AC est équilatéral.

<u>Exercice</u> 33



1) Le triangle AMM' est équilatéral direct, donc AM'=AM et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{AM}};\overrightarrow{AM'}}\right)=\frac{\pi}{3}$, d'où r(M)=M' où *r* est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2) On M'=*r*(M).
Ainsi, lorsque M décrit le cercle ($\mathscr{C}$), M' décrit *r*(($\mathscr{C}$)).
Déterminons *r*(($\mathscr{C}$)).
Soit O'=*r*(O). On a : AO'=AO et Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{AO}};\overrightarrow{\text{AO}'}}\right)=\frac{\pi}{3}$.
O' est le point du plan tel que le triangle AOO' soit équilatéral direct.
Donc OA=OO', donc O'$\in$($\mathscr{C}$).

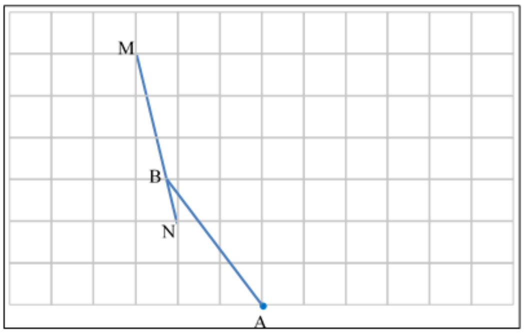
Donc $r((\mathscr{C}))$ est le cercle de centre O’ et passant par M’.
$r((\mathscr{C}))$ est le cercle circonscrit au triangle AMM’.

3- Situations complexe

<u>Exercice</u> 34 ***L’essuie-glace***

Données :

L’essuie-glace ci-dessous tourne autour du point A de $\frac{1}{6}$ de tour dans le sens de l’aiguille d’une montre.

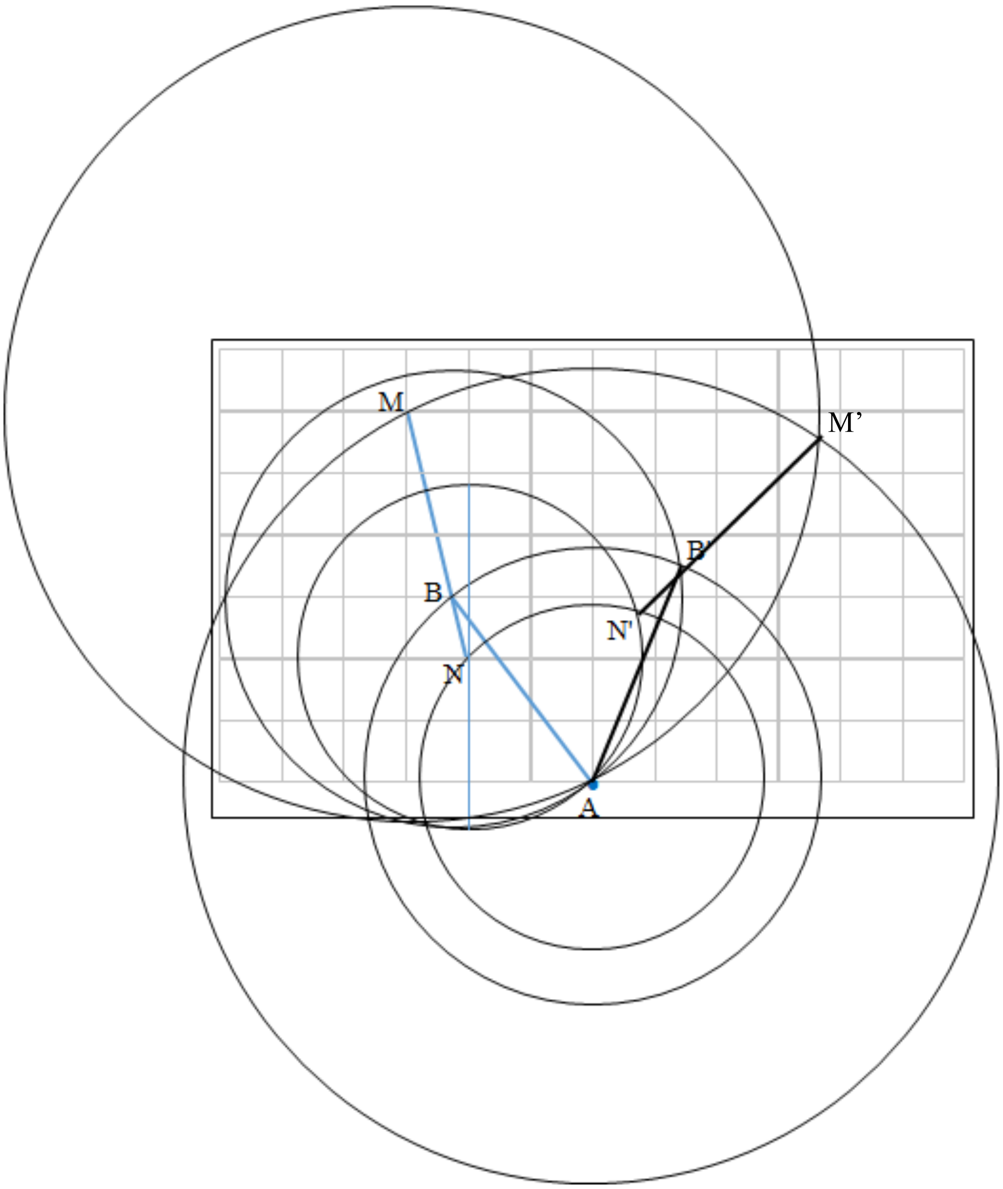


Tâche : Construire la nouvelle position de de l’essuie-glace.
Contraintes : utiliser uniquement une règle non graduée et un compas.
Démarche : Utiliser une rotation ; construire les images des points B, M et N par cette rotation.
Solution :
$\frac{1}{6}$ de tour dans le sens de l’aiguille d’une montre correspond à une rotation d’angle $-\frac{\pi}{3}$.
Considérons la rotation r de centre A et d’angle $-\frac{\pi}{3}$ et posons :

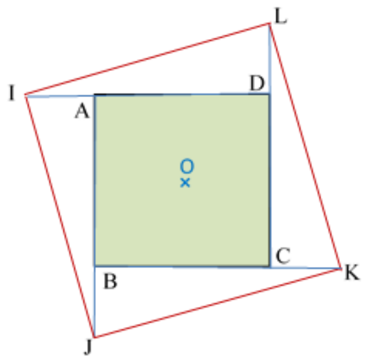
$\overset{r}{\curvearrowright}$	
B	B’
M	M’
N	N’

.

Pour la construction du 1er point, nous utiliserons la définition de la rotation et le fait qu’un triangle isocèle qui a un angle de 60° est équilatéral.
Pour la construction des deux autres points, nous pouvons :
- soit appliquer la propriété fondamentale ;
- soit appliquer la même stratégie que celle 1er point.



<u>Exercice</u> 35
Données :



• AI=BJ=CK=DL.
• Parcelle initiale du jardinier : le carré ABCD direct de centre O.
• Nouvelle parcelle du jardinier : le quadrilatère IJKL.

Tâche : Démontre que le quadrilatère IJKL est un carré.
Contraintes : Utiliser la transformation du plan qui applique A sur B et I sur J.
Démarche : Utiliser une rotation ; celle qui applique A sur B et I sur J.
Solution :
Considérons la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On a bien : r(A)=B et r(I)=J.

r est donc la transformation du plan qui applique A sur B et I sur J.

Avec cette rotation r, on établit le tableau suivant :

r	
A	B
B	C
C	D
D	A
I	J
J	K
K	L
L	I

.

D’après la propriété fondamentale, on tire que :
d’une part que Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{JK}}\right)=\frac{\pi}{2}$, Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{JK};\overrightarrow{KL}}\right)=\frac{\pi}{2}$, Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{KL};\overrightarrow{LI}}\right)=\frac{\pi}{2}$;
et d’autre part que IJ=JK.
Donc (IJ)$\perp$(JK), (JK)$\perp$(KL), (KL)$\perp$(LI) et IJ=JK.
Ainsi le quadrilatère IJKL est un rectangle qui a deux côtés consécutifs de même longueur ;
C’est donc un carré.
Finalement, la nouvelle parcelle du jardinier est bien un carré.

Leçon 15 : EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Pour dégager le contexte, on peut poser les questions suivantes :
  1) De quel évènement s'agit –il ?
  2) A quel moment se déroule cet évènement ?
  3) Quels les acteurs de cet évènement ?

  Réponses attendues

  1) Il s'agit d'une élève de 2^{nde} C d'un lycée qui veut se spécialiser dans la couture.
  2) Cet évènement se déroule pendant les grandes vacances
  3) Les acteurs sont : elle et ses camarades de classe.
- Pour dégager la circonstance, on peut poser la question suivante :
  Quelle difficulté cette élève rencontre-t-elle ?
  Réponse attendue
  Elle ne se souvient plus de son bénéfice et ses camarades souhaitent déterminer le bénéfice maximum qu'elle peut réaliser.
- Pour dégager la tâche, on peut poser la question suivante :
  Que décident de faire cette fille avec ses camarades ?
  Réponse attendue
  Ceux-ci décident de rechercher les outils mathématiques qui vont leur de répondre à leurs préoccupations.
- Pour faire la synthèse et annoncer les notions mathématiques convoquées par la situation d'apprentissage.
  En vue de répondre aux préoccupations, nous allons étudier la leçon « **EQUATIONS ET INEQUATIONS DANS** $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ » selon le plan ci-dessous :
  - *Connaître le théorème fondamental, à l'interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré dans* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
  - *Connaître la propriété sur l'unicité éventuelle de la solution d'un système d'équations linéaires dans* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
  - *Résoudre un problème de vie courante conduisant à un système d'équations ou d'inéquations linéaires*
  - *Interpréter géométriquement les solutions des systèmes d'inéquations dans IRXIR*

CORRECTIONS DES ACTIVITES

Activité 1

1-

$P=0$	$P<0$	$P>0$
(-3 ; -7) ; (1 ; 1) ; (2 ; 3)	(0 ; 1) ; (-3 ; 2) ; (-2 ; 2)	(1 ; 0) ; (3 ; 2) ; (3 ; -2)

2- Construire la droite (D) puis placer les couples de coordonnées indiqués.
3- Hachurer le demi- plan ouvert de bord la droite d'équation $2x-y-1=0$ qui contient le point I.

Corrigé de l'exercice de fixation

a) L'ensemble des solutions graphiques de l'inéquation (I_1) est le demi-plan ouvert de frontière la droite d'équation $2x-y=0$ contenant le point J.

b) - L'ensemble des solutions graphiques de l'inéquation (I_2) est le demi-plan ouvert de frontière la droite d'équation $x-2=0$ ne contenant le point 0.

- L'ensemble des solutions graphiques de l'inéquation (I_3) est le demi-plan ouvert de frontière la droite d'équation $x-y-1=0$ contenant le point 0.
- L'ensemble des solutions graphiques de l'inéquation (I_4) est le demi-plan ouvert de frontière la droite d'équation $3x-y+1=0$ contenant le point 0.

Activité 2

1- a) Construire les droites dont les équations constituent chaque systèmes dans trois repères différents

b) Dans le cas a) les droites sont sécantes

c) les systèmes a), b) et c) ont pour déterminants respectifs : -2 ; 0 et 0.

d) Dans le cas a) le système a un déterminant non nul.

2-

1) a) On a : $a\times(-b)+a\times b=0$, d'où le résultat

b) On a : $a'\times(-b')+a'\times b'=0$, d'où le résultat

2) a) $(D)//(D') \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \det(\vec{u};\vec{v})=0$$

b) (D) et (D') sont sécantes $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

$$\Leftrightarrow \det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$$

3) a) (S) admet une solution unique $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

$$\Leftrightarrow \det(\vec{u};\vec{v})\neq 0$$

4) b) (S) admet aucune solution ou une infinité $\Leftrightarrow$ (D) // (D') ou (D) = (D').

$$\Leftrightarrow \det(\vec{u};\vec{v})=0$$

Corrigé des exercices de fixation

Exercice 1

Le cas a) admet une solution unique dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Exercice 2

a) Les droites d'équations $2x-y+1=0$ et $x+2y-4=0$ sont sécantes en un point, donc le système admet une solution unique.

b) Les droites d'équations $3x-5y+7=0$ et $-6x+10y+4=0$ sont strictement parallèles, donc le système n'admet aucune une solution.

c) Les droites d'équations $-\frac{1}{2}x+y+4=0$ et $x-2y-8=0$ sont confondues, donc le système admet une infinité de solutions.

Activité 3

En désignant par x le nombre de filles et par y le nombre de garçons, on obtient le système suivant : $\begin{cases} x+y=32 \\ \dfrac{10x+9y}{32}=9,75 \end{cases}$, on le résout et on trouve : $x = 24$ et $y = 8$.

Il y a dans cette classe 24 filles et 8 garçons.

Corrigé des exercices de fixation

Soient a te b les deux nombres tel que $a > b$. On obtient le système suivant : $\begin{cases} a+b=20 \\ \dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

On le résout et on conclut que les deux nombres sont : $60-20\sqrt{6}$ et $20\sqrt{6}-40$ ou $60+20\sqrt{6}$ et $-20\sqrt{6}-40$

Activité 4

1- a) Construire les droites (L_1) et (L_2)

b) • Hachurer en bleu le demi-plan fermé de frontière la droite d'équation $2x+y-4=0$ contenant le point O.

• Hachurer en rouge le demi-plan fermé de frontière la droite d'équation $2x-y=0$ contenant le point J.

c) L'ensemble des solutions graphiques est la partie du plan avec les deux couleurs bleu et rouge.

Corrigé des exercices de fixation

a) On hachure en couleurs deux couleurs différentes les demi-plans satisfaisant les inéquations et on conclut.

b) On hachure en couleurs deux couleurs différentes les demi-plans satisfaisant les inéquations et on conclut.

CORRECTIONS DES EXERCICES

Exercice 1 P 260

a)- 3) ; b)- 1) ; c)- 2)

Exercice 2 P 260

(I_1) d) ; (I_2) c) ; (I_3) a) ; (I_4) b)

Exercice 3 P 260

a) L'ensemble des solutions graphiques de l'inéquation (I_1) est le demi-plan ouvert de frontière la droite d'équation $2x-y=0$ ne contenant pas le point I.

b) - L'ensemble des solutions graphiques de l'inéquation (I_2) est le demi-plan ouvert de frontière la droite d'équation $x-2=0$ ne contenant le point 0.

- L'ensemble des solutions graphiques de l'inéquation (I_3) est le demi-plan ouvert de frontière la droite d'équation $x-y-1=0$ contenant le point 0.

- L'ensemble des solutions graphiques de l'inéquation (I_4) est le demi-plan ouvert de frontière la droite d'équation $x-y-2=0$ contenant le point 0.

Exercice 4 P 261

- Le couple (0 ; 0) est une solution de l'inéquation (I).
- a) $2x+y-2<0$; b) $x+2<0$; c) $x+y-2<0$; d) $y+2>0$

Exercice 5 P 261

Ceux qui ont une solution unique sont a) et c).

Exercice 6 P 261

1.a) ; 2.c)

Exercice 7 P 261

Les systèmes a), b), c), d) et e) ont pour déterminant respectifs 11 ; $\sqrt{6}$; - 14 ; -1 ; m^2-16

Exercice 8 P 261

Le système a pour déterminant : $-2-\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

Exercice 9 P 261

a) Le système a pour déterminant 54 qui est non nul, donc il admet une solution unique.
b) Le système a pour déterminant -16 qui est non nul, donc il admet une solution unique.
c) Le système a pour déterminant $-m^2-1$ qui est non nul, donc il admet une solution unique.

Exercice 10 P 261

On calcule le déterminant du système constitué par les équations des deux droites. On trouve $\frac{17}{2}$, donc les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes.

Exercice 11 P 261

a) En désignant par *a* et *b* les deux nombres, on obtient le système suivant : $\begin{cases} 2a+\frac{b}{2}=6 \\ \frac{a}{2}+2b=9 \end{cases}$

b) En désignant par *a* et *b* les deux nombres strictement positifs tels que $a<b$, on obtient le système suivant : $\begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{3}{11} \\ b-a=152 \end{cases}$

c) En désignant par *a* et *b* les deux nombres tels que $a<b$, on obtient le système suivant :
$\begin{cases} a+b=20 \\ \frac{a^2}{b^2}=\frac{4}{9} \end{cases}$

d) En désignant par a le chiffre des dizaines et par b le chiffre des unités, on obtient le système suivant : $\begin{cases} a+b=14 \\ 10a+b=10b+a+18 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a+b=14 \\ a-b=2 \end{cases}$

e) Soient L et l les dimensions de ce rectangle, on a : $\begin{cases} L+l=650 \\ L-\frac{1}{4}L=l-\frac{1}{5}l \end{cases}$ ou $\begin{cases} L+l=14 \\ 15L-16l=0 \end{cases}$

Exercice 12 P 262

a) En désignant par a, b et c ces nombres, on obtient le système suivant : $\begin{cases} a<b+c \\ b<a+c \\ c<a+b \end{cases}$

b) En désignant par a, b et c ces deux nombres, on obtient le système suivant : $\begin{cases} a+b-2<9 \\ a-b+4<2 \end{cases}$

Exercice 13 P 262

a) Les droites d'équations $x+y+2=0$ et $2x+y+7=0$ sont sécantes, donc le système admet une solution unique
b) Les droites d'équations $6x-6y=5$ et $-3x+9y=1$ sont sécantes, donc le système admet une solution unique
c) Les droites d'équations $4x-6y+18=0$ et $x-\frac{3}{2}y-\frac{9}{2}=0$ sont strictement parallèles, donc le système n'admet aucune solution.
d) Les droites d'équations $3x-6y+3=0$ et $x-2y-1=0$ sont strictement parallèles, donc le système n'admet aucune solution.

Exercice 14 P 262

a) L'inéquation $x-2<0$ a pour ensemble de solutions graphiques le demi-plan ouvert de frontière la droite d'équation $x-2=0$.
b) Le système d'inéquations $\begin{cases} x+y-3<0 \\ x+y+2>0 \end{cases}$ a pour ensemble de solutions graphiques la bande déterminée par les deux droites parallèles d'équations $x+y-3=0$ et $x+y+2=0$.
c) Le système d'inéquations $\begin{cases} x+y-2<0 \\ x-3y+3>0 \end{cases}$ a pour ensemble de solutions graphiques la partie commune aux deux demi-plans satisfaisant les deux inéquations du système.

Exercice 15 P 262

a) Hachurer en deux couleurs différentes les demi-plans qui correspondent à l'ensemble des solutions graphiques des inéquations du système et conclure.
b) Hachurer en trois couleurs différentes les demi-plans qui correspondent à l'ensemble des solutions graphiques des inéquations du système et conclure.
c) Le système a pour ensemble de solutions graphiques l'intérieur du carré déterminé par les droites dont les équations constituent le système.

Exercice 16 P 262

a) $S=\left\{\left(1;\frac{1}{7}\right)\right\}$; b) $S=\left\{\left(-\frac{22}{3};\frac{17}{2}\right)\right\}$; c) $S=\left\{\left(\frac{65}{2};-\frac{43}{6}\right)\right\}$

Exercice 17 P262

a) $S=\{(3;-2)\}$; b) $S=\{(2;2)\}$; c) $S=\left\{\left(\frac{1}{8};-\frac{11}{36}\right)\right\}$

Exercice 18 P 262

a) $S=\left\{\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\right\}$; b) $S=\{(4;6)\}$; c) $S=\left\{\left(1;\frac{1}{7}\right)\right\}$

Exercice 19 P 262

a) Tracer les droites d'équations $2x-3y-2=0$ et $2x-3y+2=0$, puis faire apparaître sur le graphique les coordonnées du point commun.
b) Tracer les droites d'équations $y-2=0$; $3x+y=0$ et $x-y+1=0$ pour hachurer la partie commune des trois demi-plans qui satisfont les inéquations du système.

Exercice 20 P262

a) $S=\left\{\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)\right\}$; b) $S=\{(-2;3)\}$ (**A rectifier pour écrire** : $\begin{cases}2x-3y=-13\\5x-6y=-28\\x+2y=4\end{cases}$)

Exercice 21 P 262

1- $S=\{(2,8;2,2)\}$

2- **Rectifier pour écrire** : $\begin{cases}x>0; y>0\\x^2+y^2=12,68\\xy=6,16\end{cases}$

a) $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$; $(x+y)^2=25$

b) Les valeurs de $x+y$ sont : - 5 et 5

c) $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$; $(x-y)^2=0,36$

d) $S=\{(2,8;2,2)\}$

Exercice 22 P 263

1- $(x+y)^2-4xy=x^2+2xy+y^2-4xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

2- $(x-y)^2=1089$. Les valeurs de $x-y$ sont : - 33 et 33

On résout les systèmes d'équations suivants : $\begin{cases}x+y=135\\x-y=-33\end{cases}$ et $\begin{cases}x+y=135\\x-y=33\end{cases}$

Les deux nombres sont 51 et 84

Exercice 23 P 263

a) (S) a pour déterminant *–m-3*. $E = \mathbb{R} / \{-3\}$
b) Pour m = 3, le système admet une solution unique
c) • Pour *m = -3*, (S) n'admet aucune solution

   • Pour $m \in E$, (S) admet une solution unique $\left(\frac{4m^2 + 9m - 15}{m+3} ; \frac{-2m^2 - 2m + 16}{m+3} \right)$.

Exercice 24 P 263

1- (S) admet une solution unique si $a^2 - 16 \neq 0$, donc : $m \in \mathbb{R} / \{-4; 4\}$
2- (S) admet une infinité de solutions si *a = - 4*
3- (S) n'admet aucune solution si *a = 4*
4-

Exercice 25 P 263

a) $S = \{(2;3)\}$
b) $S = \{(1;-2);(-1;-2);(1;2);(-1;2)\}$

Exercice 26 P 263

$$S = \left\{ \left(-\frac{7}{13} ; -\frac{44}{13} ; 10 \right) \right\}$$

Exercice 27 P 263

$$S = \{(1;-2;-1)\}$$

Exercice 28 P 263

$$S = \left\{ \left(-\frac{16}{3} ; -8 ; -\frac{40}{3} \right) \right\}$$

Exercice 29 P 263

a) $S = \left\{ \left(11 - 2a ; \frac{-3a - 11}{2} \right) \right\}$
b) $a \in \left[\frac{11}{3} ; \frac{11}{2} \right]$

Exercice 30 P 263

a) L'ensemble des solutions graphiques est l'intérieur du triangle rectangle en O (origine du repère) délimité par les axes et la droite d'équation $x + y - 4 = 0$
b) L'ensemble des solutions graphiques est la partie commune déterminée par les demi-plans suivants :
   - (P_1) est le demi-plan fermé de frontière la droite d'équation $x + 2y - 3 = 0$ contenant le point O (origine du repère).

- (P_2) est le demi-plan fermé de frontière la droite d'équation $3x+y-4=0$ contenant le point O.
- (P_3) est le demi-plan fermé de frontière la droite d'équation $2x-3y=0$ contenant le point O.

Exercice 31 P 263

$a=2;b=-3;c=1$

Exercice 32 P 263

a) $S=\left\{\left(-3;\dfrac{127}{34}\right)\right\}$

b) $S=\left\{\left(-1;1-\sqrt{3}\right);\left(-1;1+\sqrt{3}\right);\left(3;1-\sqrt{3}\right);\left(3;1+\sqrt{3}\right)\right\}$

Exercice 33 P 263

On résout le système d'équations linéaires $\begin{cases}2x-y-11=0\\3x-2y-17=0\\5x+3y-22=0\end{cases}$ et on obtient le couple (5 ; -1) comme solution.

Exercice 34 P 264

1- **A rectifier pour écrire :** $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2\\4x+6y=26\end{cases}$; on obtient $S=\{(2;3)\}$

2- $S=\{(-1;-2);(-1;2);(1;-2);(1;2)\}$

Exercice 35 P 264

Soient n et r les nombres respectifs de cartons noirs et de cartons rouges, on a : $\begin{cases}r-2=\dfrac{3}{5}(n+r-2)\\r=\dfrac{1}{2}(n+r+6)\end{cases}$

ou $\begin{cases}2r-3n=4\\r-n=6\end{cases}$. Après résolution, on obtient 8 cartons noirs et 14 cartons rouges dans ce sac.

Exercice 36 P 264

Bernard et Jean Claude ont pour vitesses respectives 24 km/h et 72 km/h.

Exercice 37 P 264

Les prix respectifs du bracelet et de la bague sont 25000F et 30000F

Exercice 38 P 264

1- On a : $\begin{cases} x+y=p \\ 2x+7y=210 \end{cases}$. On obtient : $x=\dfrac{7p-210}{5}$ et $y=\dfrac{210-2p}{5}$

2- On a : $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$, donc $p\in\left]30;105\right[$

3- Représenter graphiquement *x* et *y* dans un repère orthogonal

4- Ce rectangle est un carré si *x* = *y*, donc $p=\dfrac{140}{3}$

5- Les valeurs de *p* sont les multiples de 5 compris entre 31 et 101. Calculer les dimensions de ce rectangle pour chaque valeur de *p*.

Exercice 39 P 264

Soit *x* le nombre d'ours fabriqués et *y* le nombre de lapins. On a le système :

$$\begin{cases} 0,4x+0,2y\leq 1,6 \\ 0,1x+0,3y\leq 0,9 \\ x\geq 0; y\geq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x\geq 0; y\geq 0 \\ 2x+y\leq 8 \\ x+3y\leq 9 \end{cases}$$

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions graphiques. Pour tous ces couples de nombres entiers naturels solutions du système, seul le couple (3 ; 2) qui fournit le bénéfice maximum. Elle doit fabriquer 3 ours et 2 lapins, ce qui donne : $18500F=3500F\times 3+4000F\times 2$.

Exercice 40 P 264

1- $S=\left\{\left(\dfrac{4a+7}{14};\dfrac{2a-21}{14}\right)\right\}$

2- $a\in\left]-\dfrac{7}{4};\dfrac{21}{2}\right[$. Représenter *x* et *y* en fonction de *a* dans un repère orthogonal pour vérifier le résultat trouvé ci-dessus.

Exercice 41 P 264

1- **Rectifier pour écrire** : « $\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 4x-y=-1 \end{cases}$ »; $S=\{(1;5)\}$

2- Représenter les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $2x-y+3=0$ et $4x-y+1=0$ pour retrouver la solution de la question 1).

3- **Rectifier pour écrire «** $2x+3\geq 4x+1$ » ; $S=\left]-\infty;1\right]$

- Les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes au point d'abscisse 1
- La droite (D_1) est au-dessus de la droite (D_2) sur l'intervalle $\left]-\infty;1\right[$

4- $S=\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$. Les droites ($D_1$) et ($D_2$) ont des points dont leurs ordonnées sont de même signe sur les intervalles $\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right[$ et $\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$.

Exercice 42 P 265

Soit *x* le nombre de journaux vendus

1- Avec le contrat 1 le club gagne *10x* francs et avec le contrat 2 il gagne *10000+ 5x* francs.
Représenter graphiquement les contrats 1 et 2 définis par : $C_1(x) = 10x$ et $C_2(x) = 10000 + 5x$ dans un repère orthogonal.
- Pour une production de moins de 2000 journaux, le contrat 2 est avantageux.
- Pour une production de moins de 2000 journaux, le contrat 1 est avantageux
- Pour une production exacte de 2000 journaux les deux contrats sont avantageux.

2-
- Le contrat 1 est avantageux si $C_1(x) < C_2(x)$, donc : $x < 2000$
- Le contrat 2 est avantageux si $C_2(x) < C_1(x)$, donc $x > 2000$
- les deux contrats sont avantageux si $C_1(x) = C_2(x)$, donc $x = 2000$