



EXERCICES DE RENFORCEMENT (1^{ère} C)

2023–2024

EXERCICE 1

Une urne contient 6 boules portant le numéro -1 , quatre boules portant le numéro -3 , cinq boules portant le numéro 1 , cinq portant le numéro 3 et cinq boules portant le numéro 2 indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On désigne par a le numéro porté par la première boule et par b , celui porté par la deuxième boule. On considère deux points fixes et distincts A et B d'un plan $(\mathcal{P})$ et l'équation (E) : $a\cos x + b\sin x = 0$.

1. Détermine le nombre de tirages que l'on peut effectuer pour que $-\frac{\pi}{4}$ soit solution de (E).
2. Détermine le nombre de tirages que l'on peut effectuer pour que les points pondérés (A, a) et (B, b) admettent un barycentre.
3. Détermine le nombre de tirages que l'on peut effectuer pour que le vecteur $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$ soit constant pour tout point M du plan.
4. Détermine le nombre de tirages que l'on peut effectuer pour que les points pondérés (A, a) et (B, b) admettent un barycentre et ce barycentre appartient au segment $[AB]$.

EXERCICE 2

ABCD est un carré de côté a ($a > 0$). On désigne par I le milieu de $[BC]$ et on pose $\alpha = \text{mes}\widehat{AID}$.

1. Détermination de la valeur exacte de α .
 - a. Montre que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID} = \frac{3a^2}{4}$.
 - b. Montre d'une autre façon que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID} = \frac{5a^2}{4} \cos \alpha$.
 - c. Déduis-en la valeur exacte de $\cos \alpha$, puis déduis-en une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
2. On veut déterminer les valeurs de $x \in [-\pi ; \pi]$ tels que $2\cos x + \sin x = 2$ (*).
 - a. Montre que α vérifie la relation (*).
 - b. On suppose que $\alpha = \frac{3\pi}{10}$.
 - b.1) Démontre que : $5\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$.
 - b.2) Déduis-en les valeurs exactes de x .

EXERCICE 3

ABC est un triangle tel que $AB = 5\text{cm}$; $AC = 3\text{cm}$ et $BC = 4\text{cm}$. On désigne par G le barycentre des points pondérés $(A, -2)$; $(B, 1)$ et $(C, 3)$. I, J et K sont des points du plan tels que $\vec{AI} + \vec{AB} = \vec{0}$, $\vec{AJ} = 3\vec{AC}$ et $4\vec{BK} = 3\vec{BC}$.

1. Place les points I, J et K sur la figure.
2. Exprime I comme barycentre des points A et B ; J comme barycentre des points A et C puis K comme barycentre des points B et C.
3. Démontre que les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes au point G.
4. Soit l'application $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ où $\mathcal{P}$ désigne le plan.
$$M \mapsto MB^2 + 3MC^2$$

Soit (Γ) la ligne de niveau de 48 de f .

- a. Vérifie que $B \in (\Gamma)$.
 - b. Démontre que pour tout point M de $\mathcal{P}$, $f(M) = 4MK^2 + \frac{3}{4}BC^2$.
 - c. Détermine et construis (Γ) .
5. Détermine et construis l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M de $\mathcal{P}$ tels que $\| -2\vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{MC} \| = 2\sqrt{10}$

EXERCICE 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne le point I $(-1 ; 1)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. A tout point $M(x ; 0)$, on associe le point $N(1 ; y)$ tels que les points I, M et N soient alignés.

Démontre que $y = \frac{x-1}{x+1}$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et par $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

- a. Détermine D_f et vérifie que $f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$.

- b. On pose $g = f|_{]-1 ; +\infty[}$ et on désigne par $(\mathcal{C}')$ sa courbe.

b.1) Montre que g est une bijection de $]-1 ; +\infty[$ vers $]-1 ; +\infty[$ et définis sa bijection réciproque.

b.2) Montre que g est majorée.

b.3) Par quelle transformation obtient-on la courbe $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ de g^{-1} . par $(\mathcal{C}')$?

- c. Dédus-en que $(\mathcal{C})$ est l'image de $(\mathcal{H})$ par une transformée du plan à préciser.
 - d. Montre que le point $A(-1 ; 1)$ est centre de symétrie de à la courbe $(\mathcal{C})$.
 - e. Etudie les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{H})$.
3. Soit la fonction h définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.
 - a. Détermine D_h
 - b. Sans calculer $f \circ h$, détermine $D_{f \circ h}$.

Le désespoir renonce mais l'espoir n'abandonne jamais.