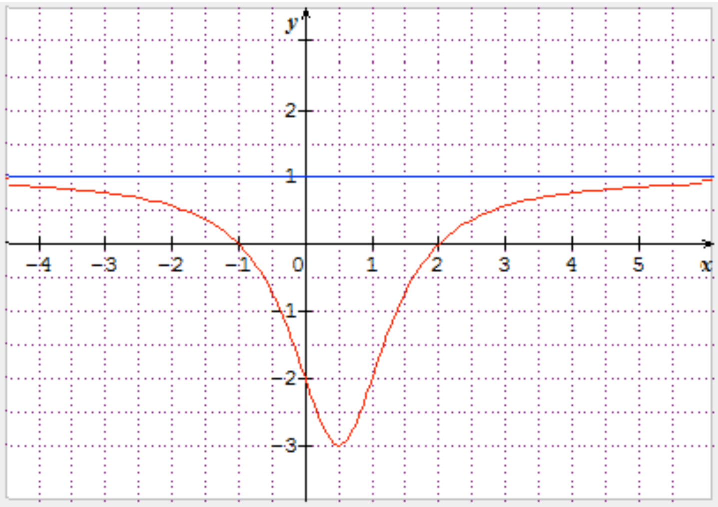
LIMITE - CONTINUITE

Exercice 1

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction *f*.



1. Conjecturer :
   a) l'ensemble de définition de *f*.
   b) les limites de f en - ∞ et en +∞.
2. Quelles sont les solutions :
   a) des équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 1$.
   b) des inéquations $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq -2$.
3. La fonction *f* est de la forme $f(x) = \dfrac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$.
   Déterminer *a*, *b*, *c*, et *d*.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants déterminer le domaine de définition de *f* et calculer les limites aux bornes de ce domaine :

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$; b) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-1}$; c) $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{|x-1|}$; d) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2 - 3x - 4}$;

e) $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$; f) $f(x) = x - \sqrt{x^2+3}$; g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$; h) $g(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}$

Exercice 3

1. Démontrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

2. En déduire les limites en zéro de chacune des fonctions *u*, *v*, *w* définies par :

$$u(x) = \frac{\sqrt{1+3x}-1}{x} \quad ; \quad v(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^2} \quad ; \quad w(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x}$$

Exercice 4

1. Exprimer en fonction de $\cos\dfrac{x}{2}$ et de $\sin\dfrac{x}{2}$ les expressions : $1 + \cos x + \sin x$ et $1 - \cos x + \sin x$.

2. Calculer : $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos x + \sin x}{\cos\dfrac{x}{2}}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x + \sin x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$.

Exercice 5

1) Démontrer, en utilisant les relations trigonométriques élémentaires, que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

2) En déduire les limites en zéro de chacune des fonctions *u*, *v*, *w* définies par :

$$u(x) = \frac{1-\cos 2x}{4x^2} \quad ; \quad v(x) = \frac{x\sin x}{1-\cos x} \quad ; \quad w(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \;;$$

Exercice 6

Soit la fonction *f* définie sur $D = [0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

1. Démontrer que, pour tout *x* de *D* : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

2. Démontrer que, pour tout *x* de *D* : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. En déduire la limite de *f* en +∞.

Exercice 7

Soit la fonction numérique *f* définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2+x+a}{\sqrt{x+2}} & \text{si } x \text{ f } 0 \end{cases}$$

Ou a est un réel.

Déterminer le réel a pour que f admette une limite en 0.

Exercice 8

Etudier la limite et la continuité en 1 des fonctions *f* et *g* définies par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2; & pour\ x \in \left]-\infty\ ; 1\right], \\ x+1; & pour\ x \in \left]1\ ; +\infty\right[. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}\ ; & pour\ x \in \mathrm{R} - \{1\}, \\ g(1) = 2 \end{cases}$$

Exercice 9

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x-3}$ et la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^3-27}{x-3} & si\ x \neq 3 \\ g(x) = 27 & si\ x = 3 \end{cases}$

Calculer la limite de f au point $x_0 = 3$. En déduire que la fonction g est le prolongement par continuité de *f*.

Exercice 10

Pour tout réel *x*, il existe un entier relatif *p*, et un seul, tel que $p \leq x < p+1$. Cet entier *p* est appelé partie entière de *x* et est noté *E*(*x*).

1. Donner : $E(-\pi)$; $E(3,14)$.
2. On note *f* la fonction définie sur R par : $f(x) = x - E(x)$.
   a) Vérifier que $f(x) = x$ pour tout *x* de $[0; 1[$.
   b) Exprimer $f(x)$ sans la notation *E* pour *x* appartenant à l'intervalle $[1;2[$.
   c) Représenter *f* sur $[0;4[$.
   d) *f* est-elle continue sur l'intervalle $[0;2[$. Quelle est l'image par *f* de cet intervalle.

Exercice 11

Soient *f* et g les fonctions définies par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{\left|x^2+x\right|} & si\ x < 0 \\ f(x) = x+1 & si\ x \geq 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x} & si\ x < 0 \\ g(x) = \dfrac{-1}{1+x^2} & si\ x \geq 0 \end{cases}.$$

1°) Déterminer les domaines de définition D_f et D_g.

2°) Etudier l'existence d'une limite en 0 pour *f*, pour *g*.

3°) Montrer que la fonction $f.g$ est continue en 0.

Exercice 12

f est une fonction de [0 ; 1] dans [0 ; 1], continue et strictement décroissante sur [0 ; 1].

On se propose de démontrer que l'équation $f(x) = x$, notée (E), admet une unique solution dans [0 ; 1].

1. Soit g la fonction définie sur [0 ; 1] par $g(x) = f(x) - x$.
   a) Démontrer que l'équation (E) équivaut à l'équation $g(x) = 0$.
   b) Démontrer que g est continue sur [0 ; 1].
   c) Démontrer que $0 \leq f(0) \leq 1$ et que $0 \leq f(1) \leq 1$. En déduire que $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, notée x_0, appartenant à [0 ; 1]. Conclure.

Exercice 2

1. Calculer les limites suivantes

a. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan 4x}{\sin 2x - 1}$ **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + \cos x}{4 - 3\cos x}$ **c.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$

Exercice 4

1. Montrer que **a.** $2\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - 3\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + 1 = 0$

b. $\cos^2 4x - \sin^2 3x = 0$

2. Calculer **a.** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\tan 6x}{\sin 3x - 1}$

b. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$

Exercice 2:

Soit $\begin{cases} f(x) = x^2 E\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$

a. Donner l'expression de f sur $]-\infty; -1]$et sur $]1; +\infty[$

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \quad et \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c. Prouver que $\forall x \in]-1,0[\cup]0,1[\quad on\ a: \quad x - x^2 < f(x) \leq x$

d. Prouver que f est continue en 0.

e. Pour $n \in IN^*$ donner l'expression de f sur $\left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right] \quad et \quad sur \quad \left]\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n-1}\right]$.

En déduire que f n'est pas continue en $\dfrac{1}{n}$