

GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES

Exercice 1 :

Après avoir précisé leurs ensembles de définition, étudier la parité des fonctions f et g définies par :

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^4 + x^2 - 5}{4 - x^2} \qquad \text{b) } g(x) = \frac{x}{\sqrt{|x|} + 1}$$

Exercice 2

Soit f une fonction numérique.

1. Etudier la parité des fonctions g et h définies :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

En déduire que f est décomposable en une somme de fonction paire et d'une fonction impaire.

2. On donne $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$

Décomposer f en une somme de fonction paire et impaire.

Exercice 3 :

Soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}$.

- 1) Déterminer une équation de (C_f) dans le repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(-2; -1)$
- 2) Que peut-on en déduire pour (C_f) .

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la fonction polynôme g telle que $f(x) = g(x^2)$.
2. a) Démontrer que pour tout x réel : $g(x) = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4}$.
b) En déduire le sens de variation de g sur $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right]$.
3. On pose $I_1 = \left[0; \sqrt{\frac{5}{2}}\right]$ et $I_2 = \left[\sqrt{\frac{5}{2}}; +\infty\right]$.
a) Etudier, à l'aide des questions 1. et 2.b, les variations de f sur I_1 puis sur I_2 .
b) Etudier la parité de f . Que peut-on en déduire ?
c) En utilisant la parité, donner le sens de variation de f sur tout $\mathbb{R}$.
4. a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x réel : $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - a)(x^2 - b)$.
b) Ecrire $f(x)$ sous la forme d'un produit de fonctions du premier degré.
c) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
d) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$;
5. Construire (C_f) à partir des résultats obtenus précédemment.
6. Déterminer graphiquement l'image directe de l'intervalle $[-1; 1]$, puis l'image réciproque de l'intervalle $[0; +\infty[$ par f .

Exercice 5

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction donnée f .

1. Explique la construction, à partir de (C_f) , des courbes d'équations

a) $y = -f(x)$; b) $y = f(-x)$; c) $y = -f(-x)$; d) $y = f(|x|)$; e) $y = |f(x)|$.

2. Application :

a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = \frac{1}{x}$;

3. Quelles sont les courbes qui sont confondues lorsque f est paire ? Lorsque f est impaire ?

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité graphique 2 cm.

1. Soit u et v les fonctions définies respectivement par : $u(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$ et $v(x) = \frac{x}{x - \frac{1}{x}}$.

a) Déterminer les ensembles de définition de u , v et $u \circ v$.

b) Donner l'expression de $u \circ v$.

2. Construire la représentation graphique (C_f) de la fonction f définie par : $f(x) = x^2$.

3. On considère la fonction $g :]-1; +\infty[\rightarrow]-4; +\infty[$

$$x \mapsto x^2 + 2x - 3$$

a) Démontrer que g est une bijection. Déterminer la bijection réciproque g^{-1} .

b) Montrer que $g(x) = (x+1)^2 - 4$.

c) Dédire de (C_f) la représentation graphique (C_g) de la fonction g .

Exercice 7

I. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} \right)$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f

2. Calculer $(f(x))^2$. En déduire que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

3. Etudier f et tracer sa courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé.

4. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[2; +\infty[$.

Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera $D_{g^{-1}}$, puis représenter $(C_{g^{-1}})$ sur le même repère en justifiant la construction.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - x + 1$ et (C) sa représentation graphique.

1. Déterminer, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$.

2. Faire l'étude et la représentation graphique (C) de la fonction f .

3. Pour tout m réel, on considère la droite (D_m) d'équation $y = -2x + m$.

a) Tracer (D_{-3}) , (D_0) , (D_2) dans le même repère que (C) . Discuter graphiquement le nombre de points d'intersection de (C) et (D_m) suivant les valeurs de m .

b) Discuter algébriquement le nombre de points d'intersection de (C) et (D_m) . Donner les coordonnées du point d'intersection dans le cas où il est unique.

- c) Lorsque (D_m) coupe (C) en deux points A_m et B_m , on appelle I_m le milieu de $[A_m B_m]$. Quel est l'ensemble des points I_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

Exercice 5

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$; et $g(x) = \frac{1}{x}$.

1. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \neq 3$.
2. Montrer que f est une application bijective de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
3. Déterminer l'expression explicite de la fonction réciproque f^{-1} de f en précisant $D_{f^{-1}}$.
4. Montrer qu'il existe deux réels a et b tel que $f(x) = a + \frac{b}{x-2}$. Exprimer $f(x)$ en fonction de $g(x)$ et en déduire la transformation qui permet de construire (C_f) à partir de (C_g) .

Exercice 3 :

Soit l'application $f : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto \sqrt{x-2}$.

- 1) Démontrer que f est une bijection. Déterminer f^{-1} .
- 2) Construire la courbe de f^{-1} dans un repère orthonormal. En déduire celle de f .

Exercice 8

Soit, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, le cercle (C) d'équation : $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.
 m étant un réel, on appelle (D_m) la droite d'équation $4x - 3y + m = 0$. Une figure est conseillée.

1. Discuter suivant m le nombre de points d'intersection de (C) et (D_m) . Interpréter graphiquement les résultats.
2. Trouver les coordonnées des points d'intersection T_1 et T_2 dans les deux cas où (D_m) est tangente à (C) . Quelle position remarquable ont ces deux points sur (C) .

Dans le cas où (D_m) coupe (C) en deux points qu'on appelle A_m et B_m , trouver l'ensemble de tous les points I_m milieu de $[A_m B_m]$. Quelle position remarquable occupe-t-il relativement au segment $[T_1 T_2]$.