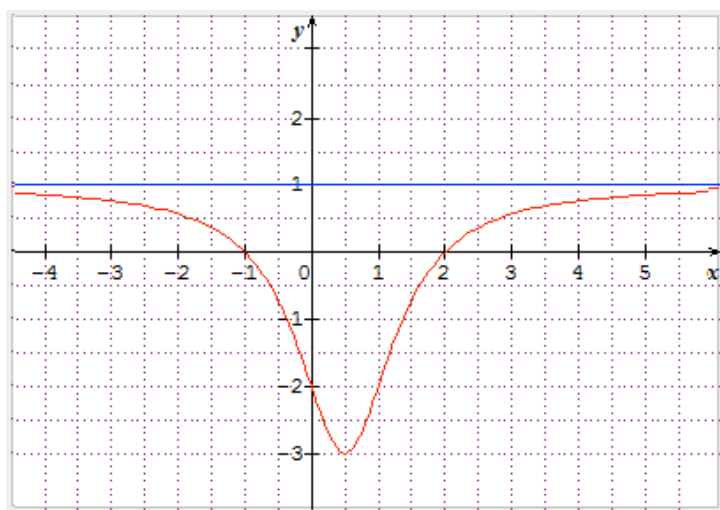


LIMITE - CONTINUITE

Exercice 1

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction f .



- Conjecturer :
 - l'ensemble de définition de f .
 - les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Quelles sont les solutions :
 - des équations $f(x) = 0$ et $f(x) = 1$.
 - des inéquations $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq -2$.
- La fonction f est de la forme $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + cx + d}$.
Déterminer a , b , c , et d .

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites aux bornes de ce domaine :

- $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$;
- $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$;
- $f(x) = \frac{x(x-1)}{|x-1|}$;
- $f(x) = \frac{x-4}{x^2-3x-4}$;
- $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$;
- $f(x) = x - \sqrt{x^2+3}$;
- $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$;
- $g(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}$

Exercice 3

- Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.
- En déduire les limites en zéro de chacune des fonctions u , v , w définies par :

$$u(x) = \frac{\sqrt{1+3x}-1}{x} \quad ; \quad v(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^2} \quad ; \quad w(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{\sin 2x}$$

Exercice 4

- Exprimer en fonction de $\cos \frac{x}{2}$ et de $\sin \frac{x}{2}$ les expressions : $1 + \cos x + \sin x$ et $1 - \cos x + \sin x$.
- Calculer : $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x + \sin x}{\cos \frac{x}{2}}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \sin x}{2 \sin \frac{x}{2}}$.

Exercice 5

- Démontrer, en utilisant les relations trigonométriques élémentaires, que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- En déduire les limites en zéro de chacune des fonctions u , v , w définies par :

$$u(x) = \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} \quad ; \quad v(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \quad ; \quad w(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^3} ;$$

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $D = [0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

- Démontrer que, pour tout x de D : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$
- Démontrer que, pour tout x de D : $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 7

Soit la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{2x+3} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2+x+a}{\sqrt{x+2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Où a est un réel.

Déterminer le réel a pour que f admette une limite en 0.

Exercice 8

Etudier la limite et la continuité en 1 des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2; & \text{pour } x \in]-\infty; 1], \\ x + 1; & \text{pour } x \in]1; +\infty[. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}; & \text{pour } x \in \mathbb{R} - \{1\}, \\ g(1) = 2 \end{cases}$$

Exercice 9

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$ et la fonction g définie par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^3 - 27}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ g(x) = 27 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Calculer la limite de f au point $x_0 = 3$. En déduire que la fonction g est le prolongement par continuité de f .

Exercice 10

Pour tout réel x , il existe un entier relatif p , et un seul, tel que $p \leq x < p + 1$. Cet entier p est appelé partie entière de x et est noté $E(x)$.

1. Donner : $E(-\pi)$; $E(3,14)$.

2. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - E(x)$.

a) Vérifier que $f(x) = x$ pour tout x de $[0; 1[$.

b) Exprimer $f(x)$ sans la notation E pour x appartenant à l'intervalle $[1; 2[$.

c) Représenter f sur $[0; 4[$.

d) f est-elle continue sur l'intervalle $[0; 2[$. Quelle est l'image par f de cet intervalle.

Exercice 11

Soient f et g les fonctions définies par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{|x^2 + x|} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} g(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ g(x) = \frac{-1}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

1°) Déterminer les domaines de définition D_f et D_g .

2°) Etudier l'existence d'une limite en 0 pour f , pour g .

3°) Montrer que la fonction $f.g$ est continue en 0.

Exercice 12

f est une fonction de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$, continue et strictement décroissante sur $[0; 1]$.

On se propose de démontrer que l'équation $f(x) = x$, notée (E), admet une unique solution dans $[0; 1]$.

1. Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

a) Démontrer que l'équation (E) équivaut à l'équation $g(x) = 0$.

b) Démontrer que g est continue sur $[0; 1]$.

c) Démontrer que $0 \leq f(0) \leq 1$ et que $0 \leq f(1) \leq 1$. En déduire que $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, notée x_0 , appartenant à $[0; 1]$.

Conclure.

Exercice 2

1. Calculer les limites suivantes

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 4x}{\sin 2x - 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \cos x}{4 - 3 \cos x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$

Exercice 4

1. Montrer que a. $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$

b. $\cos^2 4x - \sin^2 3x = 0$

2. Calculer

a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\tan 6x}{\sin 3x - 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$

Exercice 2:

Soit
$$\begin{cases} f(x) = x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a. Donner l'expression de f sur $]-\infty; -1]$ et sur $]; +\infty[$

b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

c. Prouver que $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$ on a : $x - x^2 < f(x) \leq x$

d. Prouver que f est continue en 0.

e. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donner l'expression de f sur $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ et sur $\left]\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]$.

En déduire que f n'est pas continue en $\frac{1}{n}$